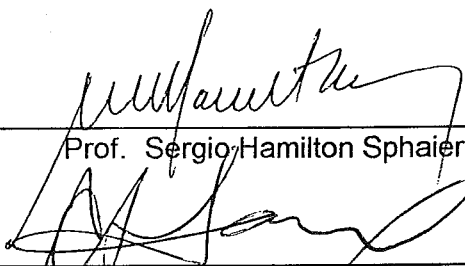


APLICAÇÃO DE UM ESQUEMA CONVECTIVO DE BAIXA DIFUSÃO NUMÉRICA EM
ESCOAMENTOS COM ALTA RECIRCULAÇÃO

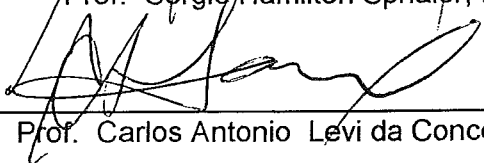
José Eduardo Rengel Hernández

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
OCEÂNICA.

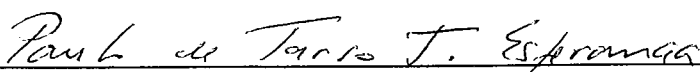
Aprovada por:



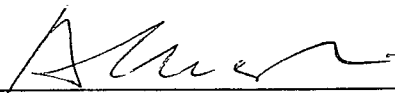
Prof. Sergio Hamilton Sphaier, Dr.-Ing.



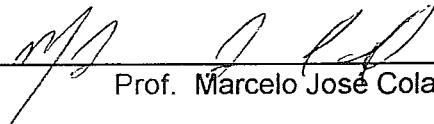
Prof. Carlos Antonio Levi da Conceição, PhD



Prof. Paulo de Tarso Themistocles Esperança, D.Sc.



Prof. Norberto Mangiavacchi, PhD



Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2005

RENGEL HERNÁNDEZ, JOSÉ EDUARDO

Aplicação de um Esquema Convectivo de Baixa
Difusão Numérica em Escoamentos com Alta
Recirculação [Rio de Janeiro] 2005

VIII, 128 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Oceânica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE

1. Esquemas Convectivos
2. Difusão e Dispersão Numérica
3. Escoamentos com Alta Recirculação
4. Volumes Finitos
5. Método da Projeção

COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Mariana e Baltazar.

A minha esposa Maria.

As minhas filhas Mariannys e Maria José.

Aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer a todas aquelas pessoas que de alguma maneira contribuíram ao desenvolvimento deste trabalho. Especialmente ao Prof. Sergio H. Sphaier, cuja supervisão foi fundamental durante meus estudos de pós-graduação na Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil).

Aos professores da COPPE/UFRJ Paulo de Tarso, Carlos Levi e Renato Cotta pelas sábias sugestões sobre como melhorar o documento final da minha pesquisa, tanto no mestrado quanto no doutorado.

Aos companheiros Juan, Josué e David, pela ajuda em todos os momentos.

Ao Johnny quem veio junto comigo ao Brasil para iniciarmos nossos estudos de pós-graduação e quem sempre me tem brindado sua amizade desinteressada.

Aos meus amigos Anabelis, Felix, Chuchú, Nando, Orlando, Napoleón e Ana Virginia. Eles deram-me força quando estava fraquejando. Muito Obrigado.

Agradeço também à Universidad de Oriente (Venezuela) e às entidades brasileiras de fomento à pesquisa CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro em diferentes etapas da minha pesquisa.

Um agradecimento sincero a Glace por sua alegria contagiosa e pelo jeitinho que sempre deu às dificuldades com a papelada.

Ao José Carrero pela ajuda nas correrias de última hora.

Um agradecimento muito especial a Maria, Mariannys e Maria José, pelo apoio durante todos estes anos e por aceitarem minha ausência durante a fase final desta tarefa.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

APLICAÇÃO DE UM ESQUEMA CONVECTIVO DE BAIXA DIFUSÃO
NUMÉRICA EM ESCOAMENTOS COM ALTA RECIRCULAÇÃO

José Eduardo Rengel Hernández

Dezembro/2005

Orientador: Sergio Hamilton Sphaier

Programa: Engenharia Oceânica

Neste trabalho apresenta-se uma nova função de interpolação a ser usada na discretização dos termos convectivos das Equações de Navier-Stokes. Tal função aplica-se no contexto dos volumes finitos para simular o escoamento de um fluido viscoso incompressível, em coordenadas curvilíneas generalizadas e malhas co-localizadas. A solução é avançada no tempo através de um esquema tipo projeção, aplicado implicitamente. O domínio computacional é decomposto em subdomínios para implementar o código em paralelo através de diretivas MPI (*Message Passing Interface*). De acordo com os resultados obtidos, o esquema de interpolação proposto apresenta baixa difusão numérica e boa estabilidade, mostrando-se promissor no cálculo de escoamentos incompressíveis com forte recirculação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for degree of Doctor of Science (D. Sc.)

APPLICATION OF A CONVECTIVE SCHEME WITH LOW NUMERICAL
DIFFUSION ON HIGHLY RECIRCULATING FLOWS

José Eduardo Rengel Hernández

December/2005

Advisor: Sergio Hamilton Sphaier

Department: Oceanic Engineering

In this work a new interpolation function to be applied to the convective terms of the discretized Navier-Stokes equations is presented. This function was used with a finite volume scheme in curvilinear coordinates to simulate the flow of incompressible viscous fluid. The solutions are advanced in the time using an implicit procedure based on the projection method. The domain for the flow calculation is divided in several sub-domains using a domain decomposition method and then, the same numerical scheme is used to compute the velocity and pressure in each sub-domain such the calculations can be carried out in parallel. The MPI (Message Passing Interface) directives are used to implement the algorithm in parallel. The procedure is applied to different problems and the results are in good agreement with published benchmark solutions and with experimental measurements, shown that the new function have low numerical diffusion and good stability.

CONTEÚDO

	Pág.
DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS.....	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
CONTEÚDO.....	vii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Simulação Numérica	1
1.2. Definição do Problema.....	2
1.3. Revisão	3
1.4. Enfoque do problema.....	9
1.5. Conteúdo do Trabalho	10
2. FORMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS... 11	
2.1. Introdução	11
2.2. Equações de Movimento de Fluidos Incompressíveis	12
2.3. Métodos em Variáveis Derivadas	15
2.3.1 Formulação: Vorticidade com Função de Corrente.....	15
2.3.2 Formulação: Vorticidade com Potencial vetorial	17
2.3.3 Formulação: Vorticidade com Velocidade.....	18
2.4. Método em Variáveis Primitivas	19
2.4.1 Formulações Acopladas.....	19
2.4.2 Formulações Desacopladas.....	22
2.5. Formulação Usada.....	26
3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	29
3.1. Introdução	29
3.2. Método da Projeção	29
3.3. Discretização das Equações.....	31
3.3.1. Equação de Burgers	32
3.3.2. Equação de Poisson	34
3.3.3. Equação da Projeção	35
3.3.4. Tratamento das Equações no Contorno	38
3.4. Paralelização do Código	39
4. APROXIMAÇÃO DOS TERMOS CONVECTIVOS	43
4.1. Introdução	43

4.2. Metodologia de Solução	46
4.2.1. Método da Decomposição de Adomian	46
4.2.2. Equação Convecção-Difusão Homogênea	47
4.2.3. Equação Convecção-Difusão não Homogênea	54
4.3. Implementação em Volumes Finitos	64
3.3.1. Interpolação com 2 Pontos Nodais	64
4.3.2. Interpolação com 4 Pontos Nodais	68
4.4. Validação do Esquema HOWUDS	73
4.4.1. Equação Linear da Onda	73
4.4.2. Propagação de uma Onda de Choque.....	76
4.4.3. Conclusões	78
5. VALIDAÇÃO DO ALGORITMO NUMÉRICO	79
5.1. Introdução	79
5.2. Escoamento numa Cavity Bidimensional.....	79
5.2.1. Estudo da Dependência da Solução com a Malha	81
5.2.2. Efeito do Número de Reynolds sobre a Solução	87
5.2.3. Estudo dos Efeitos Transientes do Escoamento	89
5.2.4. Estudo do Esquema de Solução em Paralelo.....	92
5.2.5. Comparação de Diferentes Esquemas Convectivos.....	93
5.3. Escoamento numa Cavity Tridimensional	95
6. ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO CIRCULAR	99
6.1. Introdução	99
6.2. Cilindro Bidimensional.....	100
6.3. Cilindro Tridimensional	116
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	120
7.1. Conclusões	120
7.2. Sugestões	121
REFERÊNCIAS	123

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Simulação Numérica

De forma geral pode-se dizer que no passado existiam duas formas de se tentar desvendar as leis da natureza: através de métodos analíticos e através de métodos experimentais. Enquanto uma dessas formas procura descobrir as leis da natureza através de experimentos, a outra transforma ditas leis em relações matemáticas entre grandezas observadas, usando ferramentas do cálculo diferencial e integral.

Além destes enfoques, a simulação numérica tem-se estabelecido, nos últimos anos, como um terceiro enfoque que se conecta aos outros dois. Isto se deve, sobretudo, ao grande desenvolvimento que têm experimentado os computadores nas últimas décadas, no que diz respeito à velocidade de cálculo e à capacidade para armazenar a informação, o que tem permitido que muitos experimentos ou fenômenos físicos possam ser repetidos em um computador.

A simulação numérica pode-se resumir da seguinte maneira. Das observações da natureza obtêm-se equações matemáticas, válidas em todos os pontos do espaço para todo o tempo. Estas equações discretizam-se, quer dizer, consideram-se só em um número finito de pontos escolhidos a priori. Depois, resolvem-se em um computador através de algum algoritmo de solução. A informação assim obtida interpreta-se usando técnicas de visualização apropriadas.

Isso implica que só podem-se obter soluções aproximadas das equações contínuas que descrevem o fenômeno em estudo. Em princípio pode-se simular com maior precisão na medida em que os pontos discretos sejam espaçados mais densamente.

Uma das vantagens da simulação numérica é que se podem fazer experimentos com poucas mudanças em um algoritmo de computador, em lugar de fazer mudanças onerosas e demoradas em um aparato experimental.

Atualmente, a simulação numérica usa-se em muitas áreas científicas e industriais. Uma área importante de aplicação é a investigação do comportamento do escoamento de fluidos. Nesta área, nos últimos quarenta anos, desenvolveram-se técnicas numéricas que fazem do computador, nos dias de hoje, um instrumento indispensável no cálculo de escoamentos de fluidos.

As equações que governam o movimento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes (ENS), que junto à equação da continuidade e à equação da energia permitem estudar diversos fenômenos que se apresentam no escoamento de fluidos. Estas equações são aproximadas numericamente e resolvidas via computador devido à impossibilidade de se obter soluções analíticas na quase totalidade das aplicações práticas. A simulação de escoamentos fluidos, com auxílio de computadores, é chamada de Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*).

Têm-se escrito muitos livros sobre este tema em particular. Dentre deles podem-se citar as obras de PEYRET e TAYLOR (1983), HIRSCH (1988a, 1988b), FLETCHER (1991a, 1991b), ANDERSEN et al. (1984), MALISKA (1995) e outros.

1.2. Definição do Problema

O escoamento de fluidos tem um papel importante em muitas aplicações de engenharia. Um exemplo disto é a resistência com a qual um fluido opõe-se ao movimento de um corpo imerso nele. O conhecimento da estrutura do escoamento ao redor do corpo permite calcular com precisão o coeficiente de arrasto, ajudando a tomar decisões sobre seu perfil aerodinâmico ou sobre a capacidade do motor necessário para move-lo.

Dada a importância de se ter uma ferramenta de cálculo numérico que permita simular o escoamento de fluidos incompressíveis em torno de corpos imersos, neste trabalho propõe-se desenvolver um código computacional que seja capaz de prever com precisão as principais características deste tipo de escoamento, especialmente os efeitos de recirculação e separação e o seu caráter tridimensional.

O estudo estará limitado à simulação numérica direta de escoamentos incompressíveis. Em futuros trabalhos, pretende-se implementar alguns modelos de turbulência.

Na próxima seção será feita uma revisão dos aspectos mais relevantes da simulação numérica das ENS para escoamentos incompressíveis, tentando mostrar as dificuldades encontradas e quais são as estratégias mais usadas para contorná-las.

1.3. Revisão

As numerosas estratégias de solução que têm aparecido na literatura, são o reflexo das dificuldades inerentes à simulação numérica das ENS, especialmente quando se tratam escoamentos incompressíveis.

A descrição do escoamento vem dada pelas equações de Navier-Stokes, as quais levam em conta a viscosidade e a inércia, que são as propriedades fundamentais que determinam o movimento de um fluido. A complexidade de tais equações faz com que soluções analíticas só possam ser obtidas sob fortes simplificações do escoamento em estudo, forçando ao uso de métodos discretos para resolvê-las.

A não linearidade das equações que governam a dinâmica dos fluidos dificulta sua solução numérica, especialmente quando se tratam problemas de engenharia. Isto tem dado lugar ao desenvolvimento de uma grande variedade de métodos para dar solução a problemas de transferência de calor e de massa em situações práticas.

Estes métodos computacionais podem ser divididos em métodos para fluidos compressíveis e aqueles para fluidos incompressíveis. Na simulação de fluidos incompressíveis, aparece a dificuldade de a pressão estar acoplada implicitamente à velocidade, através da equação de continuidade; quer dizer, não existe uma equação que explice a evolução temporal da pressão. Isto dificulta a solução simultânea das versões discretas das ENS e da continuidade tal como proposto por CARETTO et al. (1972), já que é preciso resolver um sistema de equações algébricas mal condicionado que impede o uso de esquemas iterativos eficientes.

Têm-se usado diversas estratégias que tentam contornar o inconveniente criado pela não evolução temporal da equação da continuidade. As mais relevantes, segundo a opinião do autor, descrevem-se no capítulo 2 deste trabalho, junto com a estratégia proposta para a presente investigação.

Existem diferentes técnicas de discretização que se podem empregar para resolver numericamente as ENS para o escoamento incompressível de um fluido. As mais bem sucedidas são o método das diferenças finitas (ROACHE, 1976), dos volumes finitos (PATANKAR, 1980), dos elementos finitos (BAKER, 1983) e os métodos espectrais (CANUTO et al, 1988). Porém, as formulações mais populares na simulação de escoamentos continuam a ser os métodos das diferenças finitas e dos volumes finitos, por serem os mais simples e muito eficientes, além de que quando usados em conjunto com coordenadas curvilíneas, podem ser aplicados a geometrias complexas; adicionalmente, o método dos volumes finitos tem a vantagem do seu forte apelo físico, já que suas equações aproximadas são obtidas através de um balanço de conservação da propriedade no nível de volumes elementares. No esquema de solução proposto no presente trabalho usar-se-á o método dos volumes finitos para discretizar as equações, em variáveis primitivas, obtidas ao aplicar o método de desacoplamento pressão-velocidade às ENS.

Uma escolha natural ao se tratar geometrias complexas, com o método dos volumes finitos, são as coordenadas curvilíneas generalizadas, já que permitem obter malhas ajustadas aos contornos da região, com pontos concentrados onde o campo da variável varia mais bruscamente. Nesse sentido, é importante se ter um algoritmo eficiente de geração de malha que produza as características desejáveis mencionadas acima. Todas as técnicas de geração numérica de malhas envolvem o mapeamento do espaço físico (coordenadas curvilíneas) em um espaço computacional (coordenadas cartesianas). Tal mapeamento pode vir dado por uma função explícita, mapeamento algébrico (EISEMAN, 1985), ou por uma equação diferencial (THOMPSON, 1985).

Um outro aspecto importante no desenvolvimento de um algoritmo numérico para resolver as ENS para escoamentos incompressíveis no contexto dos volumes finitos, é a escolha da maneira como as variáveis vão ser armazenadas. Nesse sentido têm-se usado malhas desencontradas (HARLOW e WELCH, 1965), onde a pressão e a velocidade são armazenadas em posições diferentes da malha, para tentar contornar as instabilidades introduzidas pelo acoplamento implícito entre a

pressão e as velocidade. Mas se introduz maior complexidade ao algoritmo e se incrementam os requisitos de memória.

A outra opção é armazenar a pressão e velocidade no centro geométrico do volume de controle, malhas co-localizadas. Desta maneira se reduzem os requisitos de memória e se introduz simplicidade geométrica ao algoritmo, especialmente em domínios de cálculos complexos. Porém, deve-se ter cuidado já que pode conduzir a oscilações espúrias do campo de pressão dada a natureza das ENS (PATANKAR, 1980). Isto ocorre porque as equações resultantes acoplam a pressão e a velocidade só em nós alternados, ao se usarem funções de interpolação lineares para as derivadas da pressão na equação de momentum e as derivadas da velocidade na equação da continuidade de um volume de controle.

Nos últimos anos a preferência tem sido usar malhas co-localizadas, tentando evitar a oscilação do campo de pressão. O artigo de RHIE e CHOW (1983) tem sido um dos trabalhos mais referenciado com relação a este tema em particular.

Ao integrar as equações diferenciais parciais nos volumes de controle para obter equações de diferenças, aparecem termos, provenientes dos fluxos difusivos e convectivos, avaliados nas faces do volume de controle. Estes devem ser expressos em termos das variáveis correspondentes nos pontos da malha através de funções de interpolação apropriadas. Para a discretização dos termos difusivos, o esquema de diferença central de segunda ordem tem chegado a ser muito comum e em escoamentos onde a convecção domina a difusão, os termos de difusão são algumas vezes desprezados, por exemplo, quando esquemas de diferenças tipo “UPWIND” são usados para os termos de convecção.

A interpolação dos termos convectivos é a parte mais problemática, e uma grande variedade de esquemas tem aparecido na literatura. O esquema de diferença CENTRAL (variação linear das variáveis transportadas) é de precisão de segunda ordem, não tem formalmente difusão numérica, porém pode introduzir instabilidade numérica especialmente para números de Reynolds relativamente altos.

O esquema de diferenças UPWIND (GODUNOV, 1959), que assume que o valor da variável transportada na face do volume de controle é o mesmo que aquele no ponto nodal vizinho dependendo da direção do escoamento, permite obter soluções livres das oscilações numéricas características do esquema CENTRAL. Embora este

esquema seja incondicionalmente estável, tem a desvantagem que é de precisão de primeira ordem. A perda de precisão, com relação ao esquema CENTRAL, manifesta-se como soluções com excessiva difusão numérica.

O esquema exponencial proposto por RATHBY e TORRANCE (1974) usa a solução exata do problema unidimensional convecção-difusão como função de interpolação. A desvantagem deste esquema é o excessivo tempo de computação que requer já que é necessário calcular exponenciais em todas as interfaces dos volumes de controle. PATANKAR (1980), descreve uma variante deste método que tenta contornar esta dificuldade usando expressões alternativas para simplificar os cálculos dos exponenciais; este método se conhece na literatura como *POWER-LAW*.

RATHBY (1976) propôs o esquema WUDS (*Weighted Upstream Differencing Scheme*) baseado na solução exata apresentada por RATHBY e TORRANCE (1974). Neste esquema dita solução exata é associada a dois coeficientes que servem como peso entre a convecção e a difusão. Este esquema evita oscilações numéricas mas introduz difusão numérica à medida que as velocidades aumentam.

Esquemas como o WUDS, que pesam os efeitos da convecção e da difusão, são conhecidos como formulações híbridas. Elas podem-se ver como uma combinação dos esquemas CENTRAL e UPWIND, que aproveitam as vantagens de cada um deles de acordo com o valor do número de Peclet ou de Reynolds na célula. Para um modelo unidimensional simples, é possível escolher a combinação que resulta em soluções nodais exatas. Analogamente pode-se construir um esquema deste tipo para os termos convectivos, adicionando difusão artificial a um esquema de diferenças CENTRAL (DeVAHL e MALLINSON, 1976).

Para eliminar os efeitos numéricos indesejáveis, associados com esquemas de interpolação de baixa ordem, têm-se proposto uma grande quantidade de formulações de alta ordem, tais como o esquema SUD (*Skew Upwind Differencing*) proposto por RATHBY (1976) e o esquema QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) proposto por LEONARD (1979). Estes esquemas envolvem um balanço entre precisão e estabilidade e são fáceis de implementar.

Em SUD, a direção do escoamento é levada em conta ao determinar os valores nas faces usando funções de interpolação alinhadas com o vetor velocidade,

minimizando a difusão numérica cruzada. Porém, este esquema não é completamente estável (LESCHZINER, 1980) e é custoso computacionalmente.

A idéia de combinar as vantagens de um esquema UPWIND (estabilidade, sensibilidade à direção do fluxo) e de um esquema com baixa difusão numérica, resultou no desenvolvimento do método QUICK, o qual tem precisão de terceira ordem. Este esquema usa uma técnica de interpolação quadrática de três pontos (dos valores nodais adjacentes à face e o próximo valor a montante). O esquema não introduz difusão numérica, é simples de implementar, e eficiente desde o ponto de vista computacional. Porém, como retém termos dispersivos de alta ordem, pode resultar em oscilações, que podem causar problemas de instabilidade.

Algumas variações do esquema QUICK que mantêm suas características desejáveis e eliminam as oscilações têm sido desenvolvidas. Dentre destes estão o SMART (*Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport*) proposto por GASKELL e LAU (1988) e o SHARP (Simple High-Accuracy Resolution Program) de LEONARD (1988). Todas estas variações intentam contornar o problema das oscilações espúrias empregando limitantes fisicamente realistas para assegurar soluções monótonas, quer dizer, o valor transportado na face deve cair entre valores nodais adjacentes.

Dentre muitos outros esquemas de alta ordem propostos na literatura encontra-se o esquema de quarta ordem proposto por TAFTI (1995) para interpolar os valores das velocidades nas faces do volume de controle para resolver a equação de Poisson resultante de usar o método de passos fracionados. Teoricamente não possui difusão numérica, mas pode induzir oscilações numéricas.

Um estudo mais aprofundado sobre outros esquemas de alta ordem como o UNO (*Uniformly Non-Oscillatory*) (HARTEN e OSHER, 1987), ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) (HARTEN et al., 1987), WENO (Weighted ENO) (JIANG e SHU, 1996), PPM (Piecewise Parabolic Method) (COLLELA e WOODWARD, 1984), versões do FCT (Flux-Corrected Transport) (ZALESAK, 1979), ULTIMATE (LEONARD, 1991), etc., pode ser encontrado no trabalho de FARTHING e MILLER (2001). Nesse estudo comparam-se diferentes métodos de alta ordem na simulação do transporte convectivo-dispersivo.

Um dos aportes do presente trabalho é o desenvolvimento de uma nova função de interpolação que leva em conta a direção do escoamento, apresenta boa estabilidade e não introduz difusão numérica nos resultados. Os detalhes da obtenção desta função são apresentados no capítulo 4 deste trabalho.

Para resolver o sistema de equações algébricas resultantes do processo de discretização das ENS, é imperativo o uso de um esquema iterativo dado o caráter não linear das equações resultantes. Na literatura existem diversas opções cuja escolha é determinada basicamente por duas considerações: (i) velocidade de convergência do método e (ii) a capacidade de vetorização do algoritmo. Os esquemas Gauss-Seidel, SIP (*Strongly Implicit Procedure*), e Multigrid têm sido usados extensivamente na literatura. O esquema Gauss-Seidel é de fácil implementação, mas precisa do ajuste de fatores de relaxamento para melhorar sua convergência; enquanto os esquemas multigrid têm boa convergência, porém sua implementação é mais elaborada. Neste trabalho usa-se o esquema Gauss-Seidel na sua versão linha a linha, com fatores de relaxamento calculados segundo a velocidade de convergência da solução.

A simulação de escoamentos tridimensionais implica no uso intensivo das capacidades de cálculo e armazenamento do computador. Com a finalidade de contornar as dificuldades associadas a isto, é comum apelar a técnicas de computação em paralelo. Neste contexto, uma opção é escrever o código para se executar com eficiência em computadores de processamento vetorial.

Uma outra opção consiste em desenvolver um código seqüencial para ser executado em diferentes processadores, os quais executam o mesmo código concomitantemente e em adição comunicam-se entre si para passar a informação necessária. As máquinas que trabalham desta maneira, carregam o programa a ser executado em paralelo como um processo em cada processador. A alocação dos dados ocorre localmente em cada processador e a troca de informação se faz através de rotinas explícitas.

Existem diferentes sistemas de troca e sincronização de processos, que provêm o conjunto de rotinas explícitas referido acima. Entre os mais importantes estão o MPI (*Message Passing Interface*) e o PVM (*Parallel Virtual Machine*). Neste trabalho usam-se as diretivas MPI para permitir que o código desenvolvido possa ser

executado em paralelo. Informação sobre este tema em particular encontra-se em SNIR et al. (1998) e em GROPP (1999).

1.4. Enfoque do problema

Neste trabalho, usa-se o método da projeção para contornar as dificuldades acarretadas pelo acoplamento implícito entre o campo de pressão e o campo de velocidade nas ENS para fluidos incompressíveis. As equações resultantes são expressas em variáveis primitivas (pressão e velocidades cartesianas) em um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

Usa-se então o método dos Volumes Finitos para discretizar as equações numa malha estruturada com arranjo co-localizado (todas as variáveis são definidas no centro dos volumes finitos) .

Na discretização espacial dos termos difusivos e convectivos, se usa o esquema HOWUDS (High Order Weighted Upstream Differencing Scheme), desenvolvido neste trabalho, que provê funções de interpolação que apresentam baixa difusão numérica e boa estabilidade. Nos termos cruzados que aparecem nas equações devido ao uso de coordenadas curvilíneas generalizadas, usam-se esquemas de diferença centrada de segunda ordem para a discretização espacial. Já para a discretização temporal destes termos usa-se o esquema implícito de segunda ordem Crank-Nicolson.

O método iterativo de Gauss-Seidel com relaxação, na sua versão linha a linha, é usado para resolver os sistemas de equações algébricas resultantes.

Com a finalidade de reduzir o tempo de processamento, o algoritmo computacional desenvolvido é implementado em paralelo usando diretivas MPI.

O algoritmo computacional proposto, é aplicado a problemas, que apresentam fortes efeitos de recirculação e separação, em duas e três dimensões. Os resultados obtidos são alentadores.

1.5. Conteúdo do Trabalho

O trabalho está dividido em sete capítulos. No capítulo 2 apresentam-se as metodologias usadas no tratamento das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Além disto, descreve-se um esquema de solução temporal implícito baseado no método da projeção.

No capítulo 3, as ENS são desacopladas usando o método da projeção. O conjunto de equações resultantes é transformado em um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas às quais são logo discretizadas através do método dos Volumes Finitos. Finalmente, descreve-se a estratégia de paralelização usada.

O processo de obtenção da nova função de interpolação HOWUDS é descrito no capítulo 4. Aqui se resolvem dois problemas unidimensionais clássicos com a finalidade de validar a nova função de interpolação.

O problema da cavidade com tampa deslizante, tanto em duas quanto em três dimensões, é resolvido no capítulo 5. A finalidade é validar o algoritmo computacional proposto.

No capítulo 6, o problema do escoamento em torno de um cilindro circular é estudado em detalhe, para números de Reynolds relativamente baixos.

Finalmente, no capítulo 7, apresentam-se as conclusões mais relevantes do presente estudo.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

2.1 Introdução

A dinâmica dos fluidos é governada por um conjunto de equações diferenciais parciais, acopladas e não lineares. Isto torna quase impossível a solução analítica do conjunto completo de equações; as poucas soluções fechadas conhecidas são baseadas em grandes simplificações e aplicadas em geometrias simples. Mesmo numericamente, é difícil se obter soluções de situações reais. Esta dificuldade é ainda maior na engenharia, onde é comum encontrar escoamentos que acontecem em geometrias complexas e que apresentam fortes variações espaciais das quantidades do fluxo.

Nas últimas quatro décadas têm-se desenvolvido métodos poderosos que visam obter a solução de problemas de transferência de calor e de massa em situações práticas. Estes métodos computacionais podem ser agrupados em duas grandes categorias: os usados para computar escoamentos de fluidos compressíveis e aqueles para fluidos incompressíveis.

Na área de fluidos compressíveis, existem esquemas que produzem soluções econômicas para diferentes regimes de escoamento (laminar ou turbulento), em diversas geometrias de interesse prático (STEGGER, 1978). Estes têm-se desenvolvido, facilitados pelo fato da equação da continuidade permitir o acoplamento explícito da densidade com a pressão através de uma equação de estado, definindo assim a evolução temporal da pressão. Basicamente, os algoritmos para fluidos compressíveis calculam a velocidade e a densidade como variáveis dependentes enquanto a pressão é obtida via a equação de estado (McCORMACK, 1982).

Já para escoamentos de fluidos incompressíveis não existe uma equação explícita para a evolução temporal da pressão; neste caso, a pressão é acoplada implicitamente à velocidade através da equação da continuidade. Isto implica que, ao aplicar um esquema de solução que compute simultaneamente as equações de *momentum* e da continuidade (CARETTO et al.,1972), como é comumente feito na área de fluidos compressíveis, é preciso resolver um sistema de equações algébricas mal condicionado, o que reduz grandemente a possibilidade de se usar esquemas iterativos eficientes, forçando o uso de métodos de solução diretos que aumentam enormemente o custo computacional.

Para tentar contornar as dificuldades associadas à computação de escoamentos de fluidos incompressíveis, têm-se desenvolvido numerosos esquemas que usam diversas estratégias para avançar a solução no tempo, satisfazendo a condição de incompressibilidade a cada instante. Nas próximas seções será feito um resumo das técnicas mais usadas na solução do acoplamento pressão-velocidade em escoamentos incompressíveis. Revisões bastante completas sobre este tema em particular podem ser encontradas em WILLIAMS e BAKER (1996) e nos livros de PEYRET e TAYLOR (1983) e FLETCHER (1991b).

2.2 Equações de Movimento de Fluidos Incompressíveis

Todos os fluidos são, em maior ou menor grau, compressíveis; mas para certas condições e estado termodinâmico pode-se assumir que o escoamento desse fluido é incompressível. Esta idealização do comportamento físico de líquidos e gases, supõe que as variações da pressão e/ou temperatura produzem perturbações suficientemente pequenas na massa específica podendo ser desprezadas.

As três leis que governam o movimento de um fluido são a conservação da massa, de *momentum* e de energia. Já que para escoamentos incompressíveis assume-se a densidade constante, a equação de energia só é relevante quando o escoamento não é isotérmico. Quer dizer, que na análise de escoamentos isotérmicos basta resolver a equação da continuidade e as três equações da quantidade de movimento.

A seguir apresentam-se as equações da dinâmica de um fluido incompressível, chamadas daqui para frente de ENS (equações de Navier-Stokes) como é prática comum na literatura sobre CFD. A derivação destas equações pode ser encontrada

em textos de mecânica dos fluidos como, por exemplo, SHAMES (1995), WHITE (1990) e PANTON (1996).

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re} \nabla \vec{V} \right) \quad (2.2)$$

As equações (2.1) e (2.2), escritas em notação vetorial, na sua forma conservativa e formuladas em um sistema de descrição euleriano, representam, respectivamente, a conservação da massa (equação da continuidade) e a conservação da quantidade de movimento, em variáveis primitivas (pressão e velocidade), para fluidos newtonianos e incompressíveis. Nelas, $\vec{V}$ representa o vetor velocidade definido pelas componentes (u, v, w) ; P a pressão dinâmica; e Re o número de Reynolds.

Cabe ressaltar que as equações acima estão escritas em sua forma conservativa e adimensional. Para isto usou-se uma velocidade característica U_∞ e um comprimento característico L , tal que se satisfaçam as seguintes relações:

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}^*}{U_\infty}; \quad \vec{x} = \frac{\vec{x}^*}{L}; \quad P = \frac{P^*}{\rho U_\infty^2}; \quad t = \frac{t^*}{L/U_\infty}; \quad Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (2.3)$$

onde ρ e ν representam, respectivamente, a massa específica e a viscosidade cinemática do fluido; t representa o tempo; e o asterisco, (*), indica que a variável é dimensional.

Como se pode observar das ENS, a evolução temporal do campo de velocidades, $\vec{V}$, vem definida pela equação (2.2), devendo satisfazer a condição de incompressibilidade, (2.1), ao longo do tempo. Isto requer que a pressão se auto-ajuste em cada instante de tal forma que a divergência da velocidade seja nula.

Este acoplamento implícito dificulta que a equação da continuidade seja satisfeita quando se usam aproximações numéricas para resolver as ENS; o que pode dar lugar a resultados instáveis e/ou soluções não físicas dos campos de pressão e

velocidade. Ao computar simultaneamente as ENS, recai-se no sistema de equações algébricas:

$$[A]V + [B^T]P = F$$

$$[B]V = G$$

Onde A, B, F e G são matrizes cuja estrutura depende dos esquemas de discretização temporal e espacial aplicados nas ENS.

O sistema de equações apresentado acima pode representar da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

A presença de zeros na diagonal principal da matriz característica, faz com que este sistema esteja mal condicionado, o que gera problemas ao aplicar esquemas de solução iterativos. Neste caso, é recomendável usar métodos diretos de solução, como, por exemplo, eliminação de Gauss, o que encarece o custo computacional da solução; isto tem limitado a escoamentos bidimensionais a aplicação destes esquemas.

As dificuldades expressas acima, têm gerado uma grande quantidade de esquemas de solução que se podem classificar segundo a forma como tratam as variáveis dependentes. Por um lado têm-se os métodos que usam variáveis derivadas, como a vorticidade, para eliminar a pressão das equações de quantidade de movimento, satisfazendo em forma exata a condição de incompressibilidade; por outro, estão os métodos que trabalham com variáveis primitivas (pressão e velocidade), porém manipulam as ENS a fim de contornar as dificuldades produzidas pelo acoplamento implícito entre pressão e velocidade; nestes esquemas a condição de incompressibilidade nem sempre é satisfeita exatamente.

2.3 Métodos em Variáveis Derivadas

Uma estratégia que tem sido usada extensivamente na solução de escoamentos de fluidos incompressíveis, e que efetivamente consegue resolver o inconveniente criado pela não evolução temporal da equação da continuidade, é a formulação que redefine o problema em função de uma variável derivada, a vorticidade, FROMM (1964). Neste enfoque, uma equação de transporte para a vorticidade é construída aplicando o operador rotacional às equações de *momentum*, eliminando assim o termo da pressão; a satisfação da equação da continuidade é garantida definindo a velocidade como o rotacional de um potencial vetorial. Neste sentido têm-se desenvolvido várias formulações, das quais, as mais relevantes discutem-se a seguir.

2.3.1 Formulação: Vorticidade com Função de Corrente

Esta formulação tem sido usada amplamente na solução de escoamentos incompressíveis em duas dimensões, dado o fato que o vetor vorticidade, definido por

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (2.5)$$

tem só uma componente, ω , tal que

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad (2.6)$$

onde $\vec{k}$ é o vetor unitário normal ao plano do escoamento. Assim, em duas dimensões a vorticidade, ω , se expressa como:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

Aplicando o rotacional nas equações de *momentum*, (2.2), obtém-se a seguinte equação escalar que descreve o transporte da vorticidade, ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\text{Re}} \nabla \omega \right) \quad (2.8)$$

onde aplicou-se a identidade $\nabla \times \nabla P = 0$. Desta forma consegue-se eliminar o termo do gradiente de pressão das ENS.

Para satisfazer a condição de incompressibilidade, (2.1), se introduz um vetor potencial cuja única componente, em duas dimensões, é a função de corrente, ψ . Esta se relaciona com a velocidade através de

$$\vec{V} = \nabla \times \psi \vec{k} \quad (2.9)$$

ficando as componentes da velocidade definidas como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.10)$$

Ao se substituir a equação (2.9) na equação da continuidade (2.1), verifica-se que esta última é satisfeita automaticamente.

Aplicando o rotacional na equação (2.9) obtém-se uma equação que relaciona a função de corrente ψ com a vorticidade ω

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad (2.11)$$

aqui aplicou-se a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \psi \vec{k}) = \nabla (\nabla \cdot \psi \vec{k}) - \nabla^2 \psi \vec{k}$, e o fato que $\nabla \cdot \psi \vec{k} = 0$.

Qualquer esquema de solução numérica que use esta formulação deve resolver as equações (2.8) e (2.11) em conjunto com a equação (2.9). Das condições iniciais e de contorno impostas à velocidade, determinam-se as respectivas condições para a vorticidade, ω , e a função de corrente, ψ .

Em algumas situações, pode ser necessário determinar o campo de pressão, P , uma vez conhecido o campo de velocidades, $\vec{V}$; neste caso poder-se-ia usar a equação de Poisson

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot \left[-\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) \right] \quad (2.12)$$

a qual é obtida aplicando a divergência nas equações de *momentum*, (2.2). É prática comum usar esta equação associada a uma condição de contorno tipo Neuman, deduzida da projeção da equação de momentum sobre a normal no contorno.

Esta formulação tem sido usada por SPHAIER (1991), CHANG e SA (1992), YEUNG et al. (1993), e SADRI e FLORYAN (2002), entre outros. A principal desvantagem dela é que está limitada à solução de escoamentos bidimensionais. Para três dimensões, têm sido propostas algumas variantes. As mais relevantes são a formulação com um potencial vetorial e a formulação com a velocidade associada à vorticidade.

2.3.2 Formulação: Vorticidade com potencial vetorial

O esquema descrito acima pode ser estendido a três dimensões introduzindo um potencial vetorial, $\vec{\Psi}$, no lugar do potencial escalar, ψ , tal que:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{\Psi} \quad (2.13)$$

Ao aplicar o rotacional na equação de *momentum*, usando a definição dada por (2.13), obtém-se a seguinte equação vetorial para a vorticidade, $\vec{\omega}$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\omega}\vec{V}) - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\text{Re}} \nabla \vec{\omega} \right) \quad (2.14)$$

cuja estrutura é similar à da equação escalar (2.8), exceto pela aparição do termo $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V}$.

Tomando o rotacional de (2.13) e exigindo que o potencial seja solenoidal, $\nabla \cdot \vec{\Psi} = 0$, tem-se

$$\nabla^2 \vec{\Psi} + \vec{\omega} = 0 \quad (2.15)$$

No processo de solução de escoamentos tridimensionais, usando esta formulação, têm que ser computadas as equações (2.14) e (2.15), associadas a (2.13). Para determinar a pressão é prática comum empregar a equação (2.12).

Este esquema, efetivamente, pode ser aplicado a escoamentos tridimensionais (MALLINSON e VAHL DAVIS, 1977), mas apresenta a desvantagem de aumentar o número de variáveis dependentes. Neste caso têm-se que computar as três componentes da vorticidade, $\vec{\omega}$, e as três componentes do vetor potencial, $\vec{\Psi}$; enquanto que originalmente as incógnitas eram quatro, as três componentes da velocidade e a pressão. Além disto, a implementação das condições de contorno nas variáveis derivadas não é uma tarefa trivial. Em um intento para facilitar a aplicação de condições de contorno, de entrada e saída do escoamento, tem-se modificado a equação (2.13), adicionando o gradiente de um potencial escalar, Φ

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{\Psi} + \nabla \Phi \quad (2.16)$$

Visto que se deve satisfazer a condição de incompressibilidade, a equação acima implica que:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.17)$$

Desta maneira incrementa-se o número de equações (e variáveis) que têm que ser computadas. Este esquema tem sido usado por YANG e CAMARERO (1991).

2.3.3 Formulação: Vorticidade com Velocidade

Com intuito de reduzir os problemas, das formulações anteriores, com a implementação das condições de contorno, se introduz um método que elimina a necessidade de se usar funções potenciais. Nesta formulação, inicialmente proposta para escoamentos bidimensionais (FASEL, 1976) e logo aplicada também em três dimensões (RICHARDSON e CORNISH, 1977), a vorticidade é associada diretamente com a velocidade.

Basicamente, o método usa a equação de transporte da vorticidade da formulação anterior (2.14), porém, acompanhada de uma equação vetorial obtida ao aplicar o rotacional ao vetor vorticidade, $\vec{\omega}$, tal que

$$\nabla \times \vec{\omega} = -\nabla^2 \vec{V} \quad (2.18)$$

onde aplicou-se a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$, e o fato que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ pela condição de incompressibilidade.

Evidentemente, simplifica-se a implementação das condições de contorno, já que se evita trabalhar com funções potenciais, mas o número de equações a ser computadas continua sendo maior que quando se emprega a formulação em variáveis primitivas (pressão e velocidade). Por estas razões, os métodos em variáveis primitivas, tratados nas próximas seções, são preferidos aos que usam variáveis derivadas.

2.4 Métodos em Variáveis Primitivas

Em se tratando de escoamentos tridimensionais, é mais adequado se usar a pressão e a velocidade como variáveis dependentes, vistos os inconvenientes associados à implementação de métodos baseados na vorticidade. Porém, o fato de manter a pressão no problema, acarreta dificuldades numéricas devido a que não existe um termo na equação da continuidade, (2.1), que acople explicitamente a pressão com a velocidade.

No intuito de contornar esta dificuldade, têm aparecido na literatura diversas formulações que se caracterizam pelo tratamento que dão ao termo da pressão. Dependendo de tal tratamento, os esquemas podem ser acoplados, quando se computam pressão e velocidade simultaneamente, ou desacoplados, quando estas variáveis são calculadas sequencialmente. Os esquemas mais importantes de cada categoria, segundo o critério do autor, são apresentados a seguir.

2.4.1 Formulações Acopladas

O fato da evolução temporal da pressão não aparecer de forma explícita na equação da continuidade para escoamentos incompressíveis, faz com que o caráter matemático destes escoamentos seja diferente dos escoamentos compressíveis, dificultando a implementação de esquemas numéricos eficientes na sua solução. Uma

forma de contornar tal limitação é modificar as ENS, tal como é feito nos esquemas descritos a seguir.

2.4.1.1 Método da Compressibilidade Artificial

O método da compressibilidade artificial modifica o caráter matemático das ENS, permitindo que possam ser usados algoritmos eficientes, desenvolvidos para escoamentos compressíveis, na solução numérica de escoamentos incompressíveis. Este esquema foi proposto originalmente por CHORIN (1967) para computar iterativamente soluções de estado estacionário para escoamentos incompressíveis. Nesta formulação, a equação da continuidade (2.1) é modificada adicionando-lhe um termo, representando a derivada temporal da pressão, multiplicado pelo chamado fator de compressibilidade artificial, $1/c^2$.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.19)$$

note-se que a condição de incompressibilidade, (2.1), é recuperada quando $c^2 \rightarrow \infty$.

Basicamente o processo de solução consiste em computar a equação (2.19) em conjunto com a equação de momentum para escoamento incompressível, (2.2), progredindo através de um transitório não físico, até que a solução convirja para uma condição estacionária onde a derivada temporal, em (2.19), é igual a zero satisfazendo assim, a condição de incompressibilidade.

Embora este método tenha sido usado principalmente para simular escoamentos em estado estacionário, tem havido algumas aplicações para escoamentos transientes, ver, por exemplo, (BEDDHU et al., 1994).

A principal razão pela qual este enfoque não tem sido usado com maior frequência no cálculo de escoamentos de fluidos incompressíveis, é que o ajuste do fator de compressibilidade artificial, cujo valor determina a velocidade de convergência da solução numérica, não é de fácil execução (RIZZI e ERICKSSON, 1985).

Recentemente, WANDERLEY (2001) propôs um esquema similar ao da compressibilidade artificial, mas que elimina o fator de ajuste da equação de

compressibilidade. Ele usa uma expansão em série de Taylor para a densidade, ρ , a partir da definição do fator de compressibilidade isotérmica, τ , de tal forma que:

$$\rho = \rho_{\infty} \left(1 + (P - P_{\infty}) \tau \right) = \rho_{\infty} \phi \quad (2.20)$$

onde ρ_{∞} e P_{∞} , são valores de referência para a densidade e a pressão, respectivamente.

A equação (2.20) é aplicada na equação da continuidade para escoamento compressível, obtendo-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} \phi = 0 \quad (2.21)$$

Esta equação usa-se em conjunto com a equação (2.2), modificada usando (2.20), para processar soluções transientes de escoamentos ligeiramente compressíveis. Os resultados têm sido alentadores, embora o efeito do fator τ , na estabilidade e convergência do método, não ficou evidente no trabalho de WANDERLEY (2001). Nesta formulação τ aparece explicitamente na equação de *momentum*.

2.4.1.2 Método da Penalidade

Um método similar ao da compressibilidade artificial, mas que não requer uma estratégia pseudo transiente, é o método da penalidade. Este tem sido amplamente usado no contexto da mecânica dos sólidos; por exemplo, ZIENKIEWICZ (1974), aplicou este método na solução de problemas de elasticidade incompressível. Já na solução das ENS, tem sido aplicado por GUNZBURGER (1989), HUGHES et al. (1979), BAKER (1983) e REDDY et al. (1992), entre outros.

Nesta formulação adiciona-se um termo na equação da incompressibilidade de tal forma que a pressão apareça explicitamente nela. Desta maneira (2.1) modifica-se para:

$$\varepsilon P + \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

Esta equação é então usada para eliminar a pressão da equação (2.2) que neste caso fica expressa como:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) = \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{V})}{\varepsilon} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \quad (2.23)$$

Agora, para obter o campo de velocidades, só basta computar a solução da equação acima para $\varepsilon \rightarrow 0$. Tal desacoplamento dos campos de pressão e velocidade é a principal vantagem deste método.

De acordo com PEYRET e TAYLOR (1983), foi provado que a solução de (2.23) converge à solução de (2.2) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, embora possam se apresentar problemas de convergência para valores muito pequenos de ε .

2.4.2 Formulações Desacopladas

Além dos esquemas que modificam a condição de incompressibilidade (2.1), como os já descritos método da compressibilidade artificial e método da penalidade, existe outra classe de formulação em variáveis primitivas que usa uma equação de Poisson através da qual o campo de velocidade é forçado a satisfazer a equação da continuidade. Estes esquemas são chamados métodos desacoplados já que a pressão e a velocidade são obtidas por separado. A forma como é gerada a equação de Poisson e o papel que esta desempenha dentro do esquema de solução numérica diferencia os métodos classificados nesta categoria.

2.4.2.1 Método MAC (*Marker and Cell*)

O método MAC, conhecido como método pressão-Poisson, é o mais antigo dos métodos que usa uma equação de pressão para satisfazer a condição de incompressibilidade. Ele foi desenvolvido por HARLOW e WELCH (1965) para computar escoamentos com superfície livre, embora sua aplicação não esteja limitada a este tipo de escoamento incompressível. Os *markers* são partículas sem massa

usadas para definir a localização dos pontos sobre a superfície livre; quando se simulam escoamentos sem superfície livre, eles não são mais necessários.

Neste método uma equação de Poisson para pressão é derivada diretamente das equações do contínuo, aplicando a divergência na equação de *momentum* (2.2)

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot (\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V}) - \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{V})}{\partial t} \quad (2.24)$$

onde os dois últimos termos são mantidos na equação discretizada para controlar instabilidades numéricas que podem se desenvolver por não se satisfazer, em forma exata, a condição de incompressibilidade, em cada passo de tempo.

Fundamentalmente, o processo de solução consiste em avaliar a pressão, usando a equação (2.24), a partir do campo de velocidades já conhecido do passo de tempo anterior t_n . Neste ponto usa-se para a pressão, uma condição de contorno tipo Neumann deduzida da projeção da equação de *momentum* sobre a normal no contorno. Uma vez conhecido o campo de pressão, a velocidade é avançada explicitamente no tempo, empregando a equação de *momentum* escrita da seguinte maneira

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^n + \Delta t \left(\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^n - \nabla P^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^n \right) \quad (2.25)$$

onde Δt é o passo de tempo usado na simulação.

As dificuldades em aplicar condições de contorno, não homogêneas, para a pressão levaram ao desenvolvimento do método SMAC (*Simplified Marker and Cell Method*) no laboratório de CFD de *Los Alamos* em 1970. Este esquema, embora tenha sido desenvolvido usando um raciocínio diferente, guarda muita semelhança com o método da projeção que será descrito na próxima seção.

Apesar da versão original do método SMAC usar um esquema de avanço no tempo explícito, existem aplicações implícitas do método, tanto bidimensionais, (CHENG e ARMFIELD, 1995), quanto tridimensionais, (IKOHAGI et al., 1992).

2.4.2.2 Método da Projeção

O método da projeção, proposto por CHORIN (1968), é composto de três operações sequenciais: computação de um campo de velocidades intermediário ou provisório que não satisfaz a condição de incompressibilidade; cálculo do campo de pressão resolvendo uma equação de Poisson; e finalmente, projeção da velocidade intermediária sobre um espaço com divergência zero usando o gradiente da pressão.

No esquema original de Chorin, os termos não lineares e viscosos na equação de *momentum*, (2.2), são avaliados explicitamente, tal que:

$$\vec{V}^{n+1} + \Delta t \nabla P^{n+1} = \vec{V}^n + \Delta t \left(\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^n \right) \quad (2.26)$$

Desconsiderando o termo da pressão da equação (2.26), obtém-se o campo de velocidades intermediário, $\vec{V}^*$, dado por

$$\vec{V}^* = \vec{V}^n + \Delta t \left(\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^n \right) \quad (2.27)$$

Subtraindo (2.27) de (2.26), determina-se a expressão (2.28), que corrige o campo de velocidades intermediário para se obter um campo de velocidades com divergência zero, $\vec{V}^{n+1}$.

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \Delta t \nabla P^{n+1} \quad (2.28)$$

O campo de pressão que aparece na equação acima, é determinado através da seguinte equação de Poisson, obtida tomando a divergência de (2.28) e avaliada com condições de contorno tipo Neumann homogêneas.

$$\nabla^2 P^{n+1} = \nabla \cdot \vec{V}^* \quad (2.29)$$

Este esquema pode ser visto como um método de passos fracionados (Fractional Step) no sentido descrito por YANENKO (1971).

Desta formulação têm-se desenvolvido novas variantes que visam melhorar o desempenho e precisão do método. As principais são: uso de mais de três passos durante o processo de solução (KARNIADAKIS et al., 1991) e, cálculo do gradiente de pressão na equação de momentum em cada passo de tempo, usando os valores do passo anterior (ZANG et. al., 1994). Isto permite obter-se um esquema de alta ordem no tempo, melhorando assim a precisão temporal do método original a qual é estimada ser de primeira ordem.

2.4.2.3 Método SIMPLE

O método SIMPLE, descrito em (PATANKAR, 1980), envolve um passo de correção de velocidade e um passo de correção de pressão; aqui uma estratégia iterativa é usada em cada passo de tempo. Em primeiro lugar, as equações de *momentum* são discretizadas, normalmente numa malha de volumes finitos, tal que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\vec{V}_p - \vec{V}_p^n}{\Delta t} + \nabla_d \cdot (\vec{V}\vec{V}) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla_d^2 \vec{V} = -\nabla_d P \quad (2.30)$$

onde o subíndice, d , indica a versão discreta do operador diferencial e p , o ponto nodal de interesse.

Uma aproximação inicial, P^* , do campo de pressão é usada para avaliar a equação (2.30), obtendo assim um campo de velocidades aproximado que não satisfaz a condição de incompressibilidade

$$\frac{\vec{V}_p^* - \vec{V}_p^n}{\Delta t} + \nabla_d \cdot (\vec{V}\vec{V})^* - \frac{1}{\text{Re}} \nabla_d^2 \vec{V}^* = -\nabla_d P^* \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é subtraída de (2.30), e rearranjando os termos da equação resultante tem-se para o ponto nodal p

$$a_p \vec{V}_p^c = \sum a_{nv} \vec{V}_{nv}^c - \nabla_d P^c \quad (2.32)$$

onde, nv refere-se aos pontos nodais vizinhos a p ; e para cada nó

$$\vec{V}^c = \vec{V} - \vec{V}^* \quad (2.33)$$

$$P^c = P - P^* \quad (2.34)$$

A fim de explicitar o cálculo das correções de velocidade, a equação (2.32) é simplificada desconsiderando o primeiro termo do lado direito.

$$a_p \vec{V}_p^c = -\nabla_d P^c \quad (2.35)$$

Substituindo $\vec{V}_p$, dada por (2.35) e (2.33), na equação da continuidade discreta, obtém-se uma equação de Poisson que permite determinar a correção da pressão, P^c , em cada nó.

$$\nabla_d^2 P^c = a_p \nabla_d \cdot \vec{V}^* \quad (2.36)$$

O processo iterativo descrito acima continua até ser alcançada a convergência, definida pela obtenção de um campo de velocidades com divergência zero; nesse momento avança-se outro passo do tempo.

Para melhorar a velocidade de convergência do esquema SIMPLE, que é relativamente baixa devido principalmente à simplificação feita na equação (2.32) para determinar as correções do campo de velocidades, têm-se formulado algumas variações do método tais como os denominados SIMPLER (PATANKAR, 1980) e SIMPLEC (VAN DOOMAL e RAITHY, 1984).

A principal desvantagem destes esquemas é o processo iterativo requerido durante correção dos campos de velocidades e pressão.

2.5 Formulação Usada

Dada a grande quantidade de formulações existentes para escoamentos incompressíveis, a escolha de uma delas para implementá-la em um esquema numérico, não é uma tarefa fácil. Nos últimos anos, de longe, as formulações mais usadas tem sido aquelas que usam esquemas tipo SIMPLE e projeção. As duas tem

sido usadas para resolver diversas situações de escoamentos incompressíveis com muito bons resultados.

Neste trabalho prefere-se usar uma formulação tipo projeção, devido principalmente ao seu caráter não iterativo e ao fato que permite desacoplar as equações do contínuo, sem necessidade de discretização prévia. O esquema implementado aqui se descreve a seguir.

A equação de *momentum* é discretizada no tempo da seguinte forma:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = \nabla P^{n+1/2} + \theta \left(-\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^{n+1} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(-\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^n \right) \quad (2.37)$$

onde o parâmetro θ determina o tipo de discretização temporal. Os valores usados neste trabalho são $\theta=0$ que define o esquema explícito de Euler e $\theta=1/2$ que produz o esquema implícito de Crank-Nicolson.

A equação (2.37) é avaliada, sem levar-se em conta a pressão, para se obter um campo de velocidades auxiliar, $\vec{V}^*$

$$\frac{\vec{V}^* - \vec{V}^n}{\Delta t} = \theta \left(-\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^* \right) + (1-\theta) \left(-\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}^n \right) \quad (2.38)$$

De (2.37) e (2.38) obtém-se a expressão

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* + \Delta t \left(-\nabla P^{n+1/2} - \theta \left[\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^{n+1} - \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})^* \right] + \frac{\theta}{\text{Re}} \left[\nabla^2 \vec{V}^{n+1} - \nabla^2 \vec{V}^* \right] \right) \quad (2.39)$$

que reescreve-se em termos de uma função potencial, Φ , tal que

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \nabla \Phi \quad (2.40)$$

Aplicando a divergência na equação (2.40), obtém-se uma equação tipo Poisson que permite determinar a função potencial Φ , a partir da velocidade auxiliar. Desta maneira, resolve-se

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \vec{V}^* \quad (2.41)$$

com condições de contorno dadas por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \vec{\eta} \cdot (\vec{V}^* - \vec{V}^{n+1}) \quad (2.42)$$

Finalmente, computa-se um campo de velocidades, com divergência zero, usando a equação (2.40). Nesse ponto, avança-se ao próximo passo de tempo.

Embora este método dispense a necessidade de determinar o campo de pressão no processo de avanço da solução, em algumas circunstâncias é necessário conhecê-lo. Para se obter uma expressão para o campo de pressão manuseia-se a equação

$$\nabla \Phi = \Delta t \left(\nabla P^{n+1/2} + \theta \left[\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V})^{n+1} - \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V})^{n+1} \right] - \frac{\theta}{\text{Re}} \left[\nabla^2 \vec{V}^{n+1} - \nabla^2 \vec{V}^* \right] \right) \quad (2.43)$$

Da equação acima, observa-se que a expressão para determinar o campo de pressão vai depender do esquema temporal que se aplique. Desta maneira, quando o esquema implementado for explícito, $\theta = 0$, a pressão vem dada por

$$P^{n+1/2} = \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (2.44)$$

Por outro lado, para o esquema de Crank-Nicolson, $\theta = 1/2$, tem-se uma expressão mais complicada que envolve termos difusivos e convectivos; esta se pode escrever, depois de certas simplificações, como:

$$P^{n+1/2} = \frac{\Phi}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left[(\vec{V} \cdot \vec{V})^{n+1} - (\vec{V} \cdot \vec{V})^* - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \vec{V}^* \right] \quad (2.45)$$

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se as equações que regem o escoamento de um fluido incompressível na sua forma adimensional e em variáveis primitivas (pressão e velocidade). O problema do acoplamento implícito entre o campo de velocidade e o da pressão, resolve-se através do método da projeção tal como foi descrito no capítulo anterior. As equações resultantes da aplicação deste método são transformadas para um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas mantendo como variáveis dependentes as componentes cartesianas da velocidade e a pressão. Estas equações são discretizadas usando o método dos Volumes Finitos. Finalmente descreve-se a estratégia de paralelização usada para acelerar os cálculos.

3.2 Método da Projeção

A solução numérica das equações (2.1) e (2.2), apresenta uma dificuldade particular pelo fato de não existir uma equação explícita para a evolução temporal da pressão. Para resolver este problema aplica-se o método da projeção (CHORIN, 1968). Este método permite computar sequencialmente os campos de velocidade e pressão. Inicialmente um campo de velocidades intermediário, $\vec{V}^*$, é calculado por meio de uma equação de Burgers obtida ao desconsiderar o campo de pressão na equação de *momentum* (2.2).

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}^* \vec{V}^*) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re} \nabla \vec{V}^* \right) \quad (3.1)$$

Esta equação é resolvida com as mesmas condições de contorno impostas ao campo de velocidades verdadeiro, $\vec{V}$.

Em seguida, determina-se um campo escalar Φ a partir da seguinte equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \vec{V}^* \quad (3.2)$$

Finalmente, computa-se o campo de velocidades com divergência zero, $\vec{V}$, usando a equação da projeção:

$$\vec{V} = \vec{V}^* - \nabla \Phi \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é usada para obter as condições de contorno para o campo escalar Φ . Ao projetar esta equação sobre a normal no contorno obtém-se uma condição tipo Neumann dada por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \vec{\eta} \cdot (\vec{V}^* - \vec{V}) \quad (3.4)$$

que torna-se homogênea no caso de se usar as mesmas condições de contorno para $\vec{V}$ e $\vec{V}^*$.

A equação (3.4) aplica-se nos contornos onde o campo de velocidades é conhecido (condição tipo Dirichlet). Caso a condição de contorno para a velocidade seja do tipo Neumann, recomenda-se usar $\Phi = 0$ (GRESHO, 1990).

Como se percebe do procedimento descrito acima, o campo de velocidades é avançado no tempo sem necessidade de se conhecer o verdadeiro campo de pressão. Caso este seja requerido, pode-se usar a equação de *momentum*, (2.2), para calculá-lo; também é possível achar expressões que relacionam a pressão com Φ . Estas expressões vão depender do esquema temporal usado para discretizar a equação de Burgers, (3.1); por exemplo, quando se usa um esquema explícito a pressão está relacionada com o campo escalar Φ através de:

$$P = \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (3.5)$$

3.3 Discretização das Equações

Para resolver numericamente as equações obtidas ao aplicar o método da projeção, aplica-se o método dos volumes finitos. Neste contexto, o domínio fluído é discretizado por volumes de tamanho finito arranjados em uma malha estruturada (todos os volumes têm o mesmo número de vizinhos).

Para obter a malha, o sistema de coordenadas cartesianas é mapeado em um sistema de coordenadas generalizadas tal como se mostra na figura 3.1 para o caso 2D.

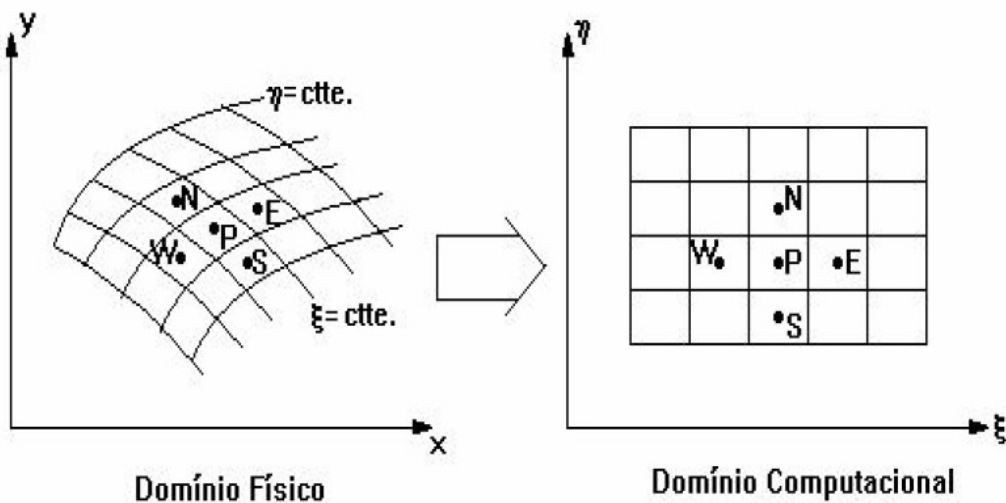


Fig. 3.1. Domínios Físico e Computacional em 2D.

Já que o método dos volumes finitos implica um processo de integração no volume elementar, prefere-se transformar as equações diferenciais ao sistema de coordenadas curvilíneas tal que possam ser integradas no domínio computacional, que é formado por volumes regulares o que simplifica tal procedimento. As componentes do vetor velocidade são mantidas no sistema coordenado cartesiano.

A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas curvilíneas (ξ, η, ζ) é dada por

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Uma vez transformadas no sistema de coordenadas curvilíneas, as equações são discretizadas no volume de controle mostrado na figura 3.2.

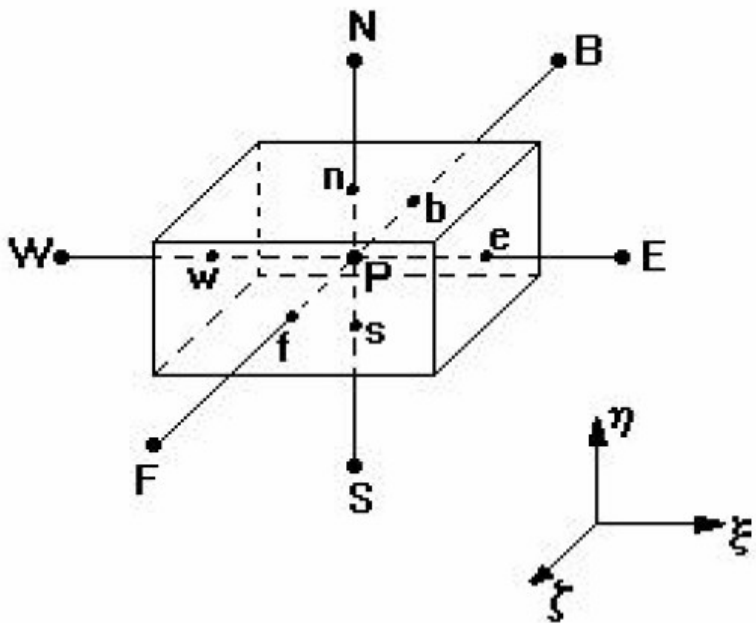


Fig. 3.2. Volume de Controle Elementar.

3.3.1 Equação de Burgers

Para qualquer componente genérico ϕ do vetor velocidade $\vec{V}$, a equação (3.1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \phi - \frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \phi - \frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \phi - \frac{1}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \tag{3.7}$$

Usando as equações (3.6), a equação acima é transformada no sistema de coordenadas curvilíneas, ficando expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(J\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{U}\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{V}\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{W}\phi) = \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{J}{Re} \left(q_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{J}{Re} \left(q_2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{J}{Re} \left(q_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde as velocidades contravariantes $(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W})$ são definidas pelas expressões

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= J \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = J (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) \\
\hat{V} &= J \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = J (u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z) \\
\hat{W} &= J \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = J (u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

o jacobiano J por

$$J = x_\xi (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}
q_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \\
q_2 &= \eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y + \eta_z \xi_z \\
q_3 &= \zeta_x \xi_x + \zeta_y \xi_y + \zeta_z \xi_z \\
q_4 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 \\
q_5 &= \zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y + \zeta_z \eta_z \\
q_6 &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2
\end{aligned}$$

Integrando a equação (3.8) no volume de controle mostrado na figura 3.2, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial(J\phi)}{\partial t} \right|_p + \left[(\hat{U}\phi)_e - (\hat{U}\phi)_w \right] + \left[(\hat{V}\phi)_n - (\hat{V}\phi)_s \right] + \left[(\hat{W}\phi)_f - (\hat{W}\phi)_b \right] = \\
& \left(\left[\frac{J}{Re} \left(q_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_3 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_e - \left[\frac{J}{Re} \left(q_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_3 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_w \right) + \\
& \left(\left[\frac{J}{Re} \left(q_2 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_5 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_n - \left[\frac{J}{Re} \left(q_2 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_5 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_s \right) + \\
& \left(\left[\frac{J}{Re} \left(q_3 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_5 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_6 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_f - \left[\frac{J}{Re} \left(q_3 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + q_5 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + q_6 \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) \right]_b \right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Observe-se que tanto a componente genérica da velocidade, ϕ , quanto suas derivadas aparecem avaliadas nas faces do volume de controle. Para expressá-las em função dos valores nodais, (representados pelas letras E, W, N, S, F, B, P), precisa-se de uma função de interpolação. A função de interpolação usada neste trabalho, para equações convecção-difusão, será apresentada no próximo capítulo quando se discute a aproximação dos termos convectivos.

3.3.2 Equação de Poisson

Tal como foi feito para a equação de Burgers, a equação de Poisson (3.2) também é transformada ao sistema de coordenadas curvilíneas.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial\xi} \left[J \left(q_1 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + q_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + q_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial\eta} \left[J \left(q_2 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + q_4 \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + q_5 \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial\zeta} \left[J \left(q_3 \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + q_5 \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + q_6 \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \right] = \frac{\partial\hat{U}^*}{\partial\xi} + \frac{\partial\hat{V}^*}{\partial\eta} + \frac{\partial\hat{W}^*}{\partial\zeta}
\end{aligned}$$

Aplicando o método dos volumes finitos, a equação fica discretizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\left[J \left(q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_e - \left[J \left(q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_w \right) + \\
& \left(\left[J \left(q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_n - \left[J \left(q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_s \right) + \\
& \left(\left[J \left(q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_f - \left[J \left(q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_b \right) = \\
& \hat{U}_e^* - \hat{U}_w^* + \hat{V}_n^* - \hat{V}_s^* + \hat{W}_f^* - \hat{W}_b^*
\end{aligned} \tag{3.12}$$

As derivadas de Φ aparecem avaliadas nas faces do volume de controle. Neste caso usam-se diferenças centradas para expressar estas derivadas em função dos valores nodais de Φ ; por exemplo, de acordo com a figura 3.2.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right|_b = \frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta \zeta} \tag{3.13}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_N - \Phi_S + \Phi_{NW} - \Phi_{SW}}{4\Delta \eta} \tag{3.14}$$

As velocidades contravariantes que aparecem na equação de Poisson (3.12), são avaliadas usando a equação (3.9) com os valores das velocidades calculadas nas faces do volume de controle.

3.3.3 Equação da Projeção

A equação da projeção (3.3) apresenta-se da forma:

$$\begin{aligned}
u &= u^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_x \right) \\
v &= v^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_y \right) \\
w &= w^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_z \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

quando são transformadas para o sistema de coordenadas curvilíneas.

Estas equações são manipuladas para relacionar as velocidades contravariantes com o campo escalar Φ .

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \hat{U}^* - J \left(q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \\ \hat{V} &= \hat{V}^* - J \left(q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \\ \hat{W} &= \hat{W}^* - J \left(q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Para determinar os valores corretos das componentes da velocidade no centro de cada volume de controle, usam-se as equações (3.15) tal que:

$$\begin{aligned}u_P &= u_P^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_x \right)_P \\ v_P &= v_P^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_y \right)_P \\ w_P &= w_P^* - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \zeta_z \right)_P\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde as derivadas são avaliadas implicitamente usando o seguinte esquema tipo Pade (MAHESH, 1996).

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_W + 4 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_P + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_E = \frac{3}{\Delta \xi} (\Phi_E - \Phi_W)\tag{3.18}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_S + 4 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_P + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_N = \frac{3}{\Delta \eta} (\Phi_N - \Phi_S)\tag{3.19}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right|_B + 4 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right|_P + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right|_F = \frac{3}{\Delta \zeta} (\Phi_F - \Phi_B)\tag{3.20}$$

Observe-se que já que os valores nodais do campo escalar Φ são conhecidos em todo o domínio computacional, é possível avaliar a derivada deste campo em todos

os nós da malha usando diferenças centradas. Porém, é bem conhecido que isto pode produzir campos de pressão não físicos já que o valor da pressão no nó, não é usado para calcular sua derivada. Com o esquema tipo PADE usado neste trabalho, evita-se este problema.

Por meio das equações (3.16) determinam-se as velocidades contravariantes nas faces dos volumes de controle. Neste caso as equações ficam avaliadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{U}_e &= \hat{U}_e^* - J \left(q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_e \\ \hat{U}_w &= \hat{U}_w^* - J \left(q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_w\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\hat{V}_n &= \hat{V}_n^* - J \left(q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_n \\ \hat{V}_s &= \hat{V}_s^* - J \left(q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_s\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\hat{W}_f &= \hat{W}_f^* - J \left(q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_f \\ \hat{W}_b &= \hat{W}_b^* - J \left(q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + q_5 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + q_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_b\end{aligned}\tag{3.23}$$

As derivadas de Φ , que aqui aparecem avaliadas nas faces dos volumes de controle, são calculadas usando diferenças centradas. Enquanto que as velocidades contravariantes intermediárias (U^*, V^*, W^*) nas faces dos volumes de controle já foram calculadas durante a solução da equação de Burgers.

3.3.4 Tratamento das Equações no Contorno

Para facilitar a discretização das equações perto dos contornos, usam-se volumes fictícios, conforme mostra a figura 3.3:

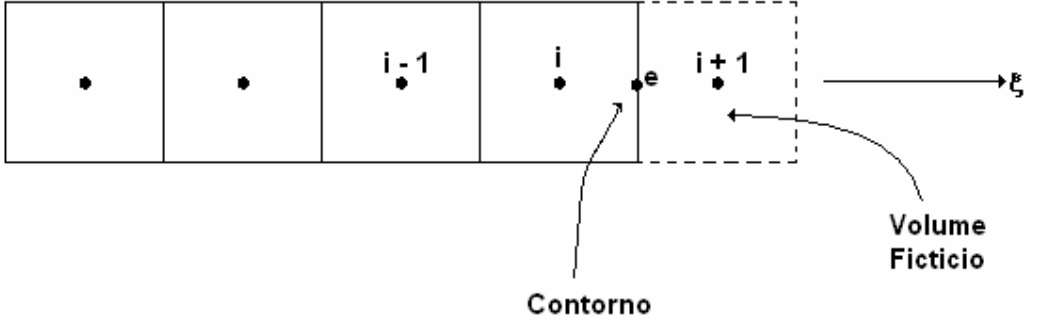


Fig. 3.3. Malha Unidimensional com Volumes Fictícios.

Na figura acima mostra-se uma malha unidimensional de volumes finitos, indicando o contorno leste (e) do volume (i) e o volume fictício criado (i+1).

O valor da variável em (i+1) vai depender do tipo de condição de contorno aplicada em (e). Neste trabalho usam-se condições de contorno tipo Diritchlet e tipo Neumann. Quando a condição de contorno é tipo Diritchlet, emprega-se a seguinte equação para determinar o valor da variável genérica ϕ no nó (i+1):

$$\phi_{i+1} = \frac{1}{3}(\phi_{i-1} - 6\phi_i + 8\phi_e) \quad (3.24)$$

onde ϕ_e é o valor conhecido da variável no contorno leste.

A seguinte equação usa-se para determinar o valor variável genérica ϕ no nó (i+1) quando a condição de contorno é do tipo Neumann, quer dizer, a derivada da variável nesse contorno, $\partial\phi/\partial\xi|_e$, é conhecida.

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\bigg|_e \Delta\xi \quad (3.25)$$

As equações discretizadas acima, são implementadas em um programa de computador escrito em FORTRAN.

O código foi paralelizado, usando diretivas MPI, com a finalidade de reduzir o tempo de cômputo, especialmente nas simulações 3D. Na próxima seção descreve-se a estratégia usada para tal fim.

3.4 Paralelização do Código

Uma estratégia muito usada na paralelização de algoritmos numéricos consiste em dividir o domínio de cálculo em um conjunto de subdomínios e então executar o código em cada subdomínio. Esta estratégia conhece-se como Método da Decomposição de Domínio (SMITH et al., 1995).

Neste sentido existem duas alternativas para se fazer a decomposição do domínio. Na primeira, o domínio é dividido permitindo que parte dele pertença a outros subdomínios (ver figura 3.4); esta variante se conhece como decomposição sobreposta. Na segunda, os subdomínios não se sobrepõem; aqui cada subdomínio compartilha só os seus contornos com outros subdomínios, tal como se mostra na figura 3.5. Esta é a decomposição não sobreposta.

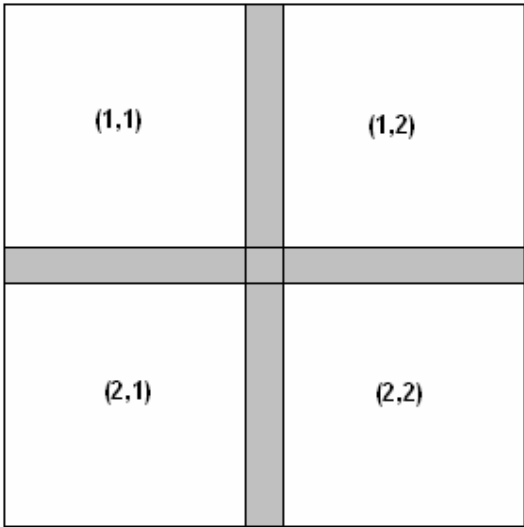


Fig. 3.4. Subdomínios Sobrepostos.

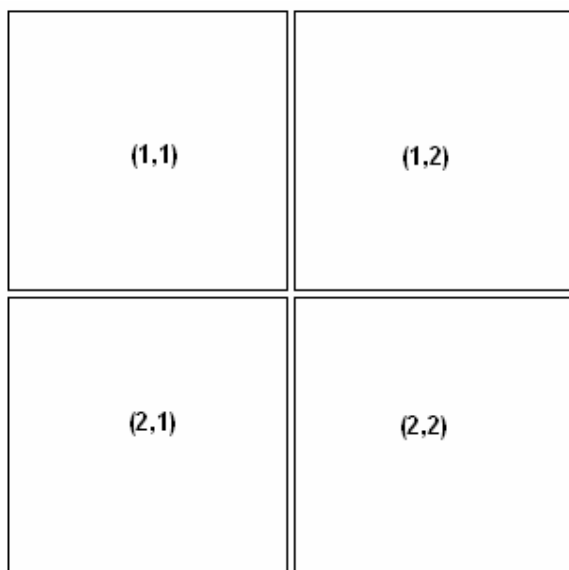


Fig. 3.5. Subdomínios Não Sobrepostos.

Uma vez feita a divisão, cada subdomínio é associado a um processo que calcula as variáveis pertencentes a dito subdomínio. Isto permite a computação em paralelo quando cada processo é executado em processadores individuais. O qual, além de acelerar os cálculos, diminui os requerimentos de memória já que a memória de cada processador só precisa conter os dados requeridos pelo processo que está sendo executado nele.

É importante sublinhar que durante o processo de cômputo em um subdomínio, requer-se informação dos subdomínios vizinhos a ele. Neste sentido faz-se necessário que a operação de troca de data seja executada no menor número de passos possíveis, já que esta é uma atividade que consome uma quantidade de tempo muito grande quando comparada ao tempo necessário para realizar os cálculos aritméticos.

No intuito de paralelizar o algoritmo computacional descrito nas seções anteriores, o domínio computacional divide-se em subdomínios retangulares não sobrepostos, tal como se mostra esquematicamente na figura 3.6. para o caso de 4 subdomínios em duas dimensões.

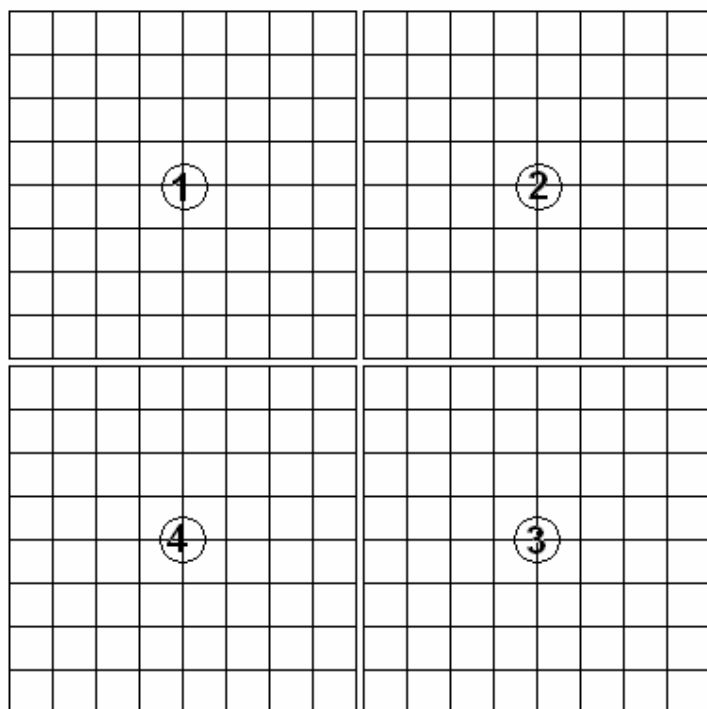


Fig. 3.6. Divisão do domínio computacional.

Ao se fazer isto, o código pode ser usado para calcular os campos de pressão e velocidade em cada subdomínio por separado. Aqui se usam as diretivas MPI para distribuir cada subdomínio entre os diferentes processadores disponíveis.

As rotinas *MPI_SEND* e *MPI_RECV* do MPI são requeridas para levar a cabo a comunicação entre os diferentes processadores. Esta comunicação é necessária para a convergência do processo iterativo de solução, já que, dada a natureza do esquema de interpolação implementado no presente código, cada subdomínio requer informação da pressão e velocidade nas duas células contíguas dos subdomínios vizinhos, tal como se mostra ressaltado na figura 3.7.

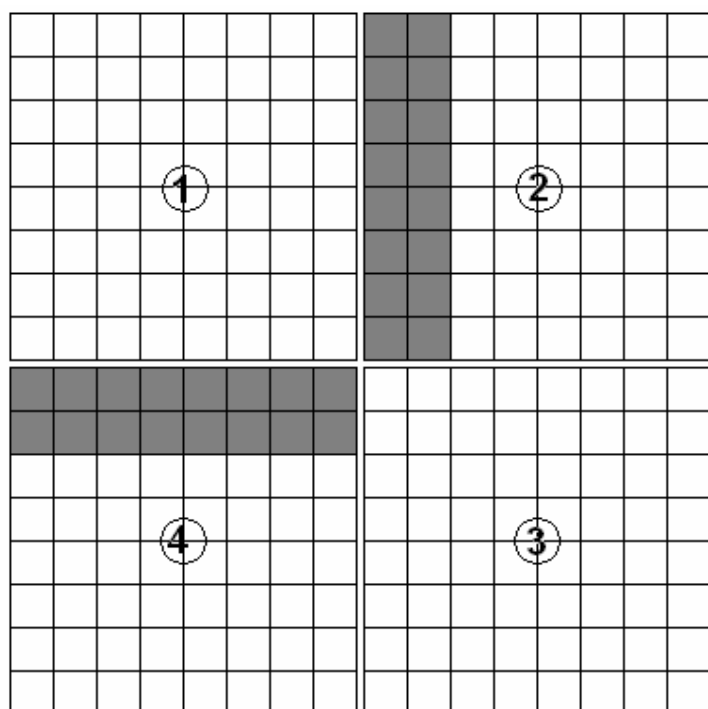


Fig. 3.6. Faixas de informação requerida pelo processo se executando no subdomínio 1.

O algoritmo implementado em paralelo usando as diretivas MPI tem resultado eficiente na redução do tempo de cômputo requerido nos diferentes casos estudados.

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS CONVECTIVOS

4.1 Introdução

No capítulo anterior apresentou-se a implementação do esquema de solução numérica para as ENS em coordenadas curvilíneas. Observa-se que ao aplicar o método dos volumes finitos nas equações diferenciais envolvidas no método da projeção, aparecem termos, de pressão e velocidade, que precisam ser avaliados nas faces dos volumes de controle, impondo, desta forma, a necessidade de se ter expressões que permitam relacionar os valores nas faces com os valores nodais localizados no centro dos volumes finitos (está-se usando um esquema com malha co-localizada).

Neste contexto é importante dispor-se de uma função que permita determinar os valores da variável na face através de uma interpolação que use os valores nodais vizinhos à face em questão. Na literatura sobre volumes finitos, encontram-se muitas funções que fazem este trabalho; desde os esquemas centrados até esquemas mais sofisticados que usam informação da direção do escoamento para fazer a interpolação.

Os esquemas centrados (de segunda ou mais altas ordens) são simples para se implementar e não apresentam difusão numérica. Em se tratando da pressão, estes esquemas normalmente não apresentam maiores problemas, porém, quando são aplicados nos termos de velocidade, tendem a produzir soluções instáveis no tratamento de escoamentos altamente convectivos, embora isto possa ser corrigido usando malhas altamente refinadas o que encarece o custo computacional.

Outros esquemas como o UPWIND, QUICK (LEONARD, 1979), exponencial (SPALDING, 1972), etc., usam funções de interpolação que dependem da direção do escoamento tentando imitar a física dos problemas de convecção-difusão. São recomendados para escoamentos altamente convectivos já que estabilizam o cálculo

computacional embora alguns deles (como o UPWIND) apresentem alta difusão numérica.

Tradicionalmente estes esquemas são aplicados independentemente da relação local das grandezas convectivas e difusivas, que pode variar no domínio. Quer dizer, em alguns locais o escoamento pode ser altamente difusivo (como nas proximidades de paredes ou corpos sólidos) ou pode ser altamente convectivo (afastado de superfícies sólidas). Um esquema de interpolação ideal para problemas de convecção-difusão deverá levar isto em consideração.

A melhor função de interpolação é aquela que provém da solução da equação diferencial em questão. Porém, de posse desta função, far-se-ia desnecessária a solução numérica da equação diferencial já que a solução exata conhecida seria a própria função de interpolação. Como na grande maioria dos casos não é possível ter-se a solução exata da equação diferencial completa é preciso usar alguma informação parcial do problema para se obter as funções de interpolação.

No presente trabalho, resolve-se uma equação unidimensional tipo Burgers, com a finalidade de se obter uma função de interpolação que carregue informação física do problema de convecção-difusão. A equação é resolvida usando o método da decomposição de ADOMIAN (1994), que vai permitir obter expressões polinomiais apropriadas para cômputo numérico. Dito método pode ser aplicado também a uma malha de Elementos Finitos que se superpõe à malha de Volumes Finitos de forma que seus pontos nodais coincidam com os centros dos volumes, tal como se representa esquematicamente na figura 4.1. Neste sentido, obtém-se uma solução válida no elemento finito que quando avaliada no centro de tal elemento proporciona o valor da função na face do volume de controle. Observe-se que o meio do elemento e encontra-se localizado na face comum dos volumes v_1 e v_2 .

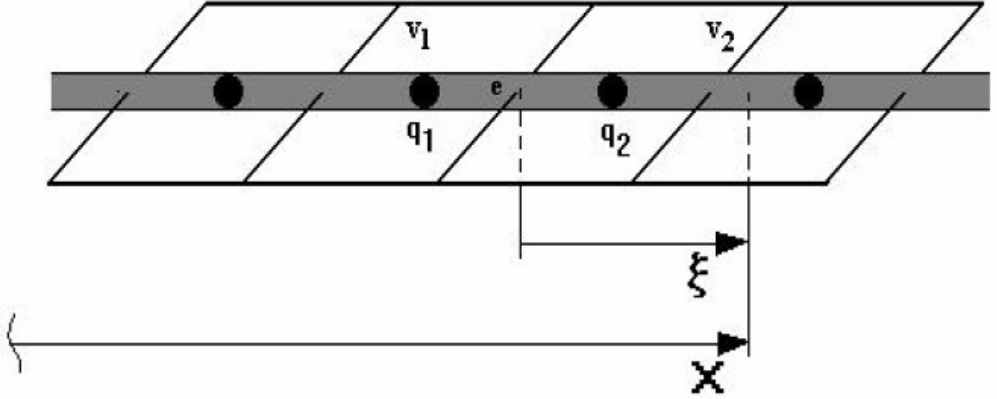


Fig. 4.1. Superposição das malhas de elementos finitos e volumes finitos.

4.2 Metodologia de Solução

No intuito de encontrar uma função de interpolação unidimensional que leve em conta a relação convecção-difusão no cálculo da velocidade, nas faces do volume de controle, resolve-se a equação unidimensional que se obtém ao reescrever a equação de Burgers (3.8) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial U \phi}{\partial \xi} + f(\xi) \quad (4.1)$$

onde só aparecem em evidência as derivadas na direção de ξ e os outros termos são agrupados na função $f(\xi)$. O objetivo é obter uma função de interpolação em ξ ; o procedimento é idêntico para as outras direções. Observe que se está explicitando o efeito total dos termos convectivos na direção de interesse ξ , e o efeito parcial dos termos difusivos na mesma direção; os termos que contém derivadas cruzadas não aparecem explicitamente.

Para se obter a função de interpolação usa-se um raciocínio similar àquele usado na análise por elementos finitos. Aqui se considera o esquema mostrado na figura 4.1, que representa uma malha unidimensional de elementos finitos sobreposta a uma malha de volumes finitos.

Integrando duas vezes a equação (4.1) em um elemento finito, tem-se:

$$\iint \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{Re} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) d\xi d\xi = \iint \frac{\partial U \phi}{\partial \xi} d\xi d\xi + \iint f(\xi) d\xi d\xi + c_1 \xi + c_2 \quad (4.2)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração.

Neste ponto, consideram-se constante, no elemento, a velocidade contravariante U , o número de Reynolds Re e a métrica α , assumindo, respectivamente, os valores U_e , Re e α_e , que são os valores no centro do elemento em questão. Resolvendo as integrais, a equação acima se reduz a:

$$\phi = \lambda_e \int \phi d\xi + \iint F(\xi) d\xi d\xi + A\xi + B \quad (4.3)$$

onde usaram-se as seguintes definições $\lambda_e = U_e Re / \alpha_e$; $F(\xi) = f(\xi) Re / \alpha_e$; $C = c_1 Re / \alpha_e$; e $D = c_2 Re / \alpha_e$.

O método da decomposição será usado para obter soluções aproximadas da equação (4.3), que vão depender da forma assumida para o termo $F(\xi)$. Na próxima seção descreve-se tal método.

4.2.1 Método da Decomposição de Adomian

O método da decomposição (ADOMIAN, 1994), permite obter soluções analíticas, para equações diferenciais lineares e não lineares, decompondo a variável de interesse ϕ em diferentes componentes φ_n que são avaliadas de tal forma que a aproximação de N termos $\phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n$ converge para ϕ na medida em que $N \rightarrow \infty$, quer dizer:

$$\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n \quad (4.4)$$

Substituindo esta expressão na equação (4.3)

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n = \lambda_e \int \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n d\xi + \iint F(\xi) d\xi d\xi + C\xi + D \quad (4.5)$$

Rearranjando os termos, a equação anterior pode ser reescrita, convenientemente, da seguinte forma:

$$\varphi_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_{n+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_e \int \varphi_n d\xi + \iint F(\xi) d\xi d\xi + C \xi + D \quad (4.6)$$

Donde se pode extrair a seguinte informação:

$$\varphi_0 = \iint F(\xi) d\xi d\xi + C \xi + D \quad (4.7)$$

$$\varphi_{n+1} = \lambda \int \varphi_n \quad (4.8)$$

Com estas duas expressões é possível construir diferentes aproximações para ϕ_N tal que $\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N$. De acordo com ADOMIAN (1994), quanto maior for o número de termos mais precisa é a solução da equação (4.3). Mas, como a série converge rapidamente, a soma parcial de n termos $\sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_i$ pode servir como uma solução prática para fins de cômputo numérico. Para obter uma solução completa é necessário conhecer a função $F(\xi)$ tal como se pode deduzir da equação (4.7). Neste trabalho, estudar-se-ão dois procedimentos simplificados; o primeiro propõe não levar em conta o efeito de F , sobre o volume de controle em questão, de tal maneira que $F(\xi) = 0$, isto é, utiliza-se para a geração da função de interpolação uma equação convecção-difusão homogênea; enquanto no segundo usa-se uma equação convecção-difusão não homogênea, onde F é um polinômio linear em ξ proposto para modelar os efeitos dos outros termos que aparecem na equação (4.1), $F(\xi) = A\xi + B$. A seguir, descreve-se o procedimento empregado em cada caso.

4.2.2 Equação Convecção-Difusão Homogênea

Neste caso, resolve-se a equação simplificada:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.9)$$

no elemento finito mostrado na figura 4.2.

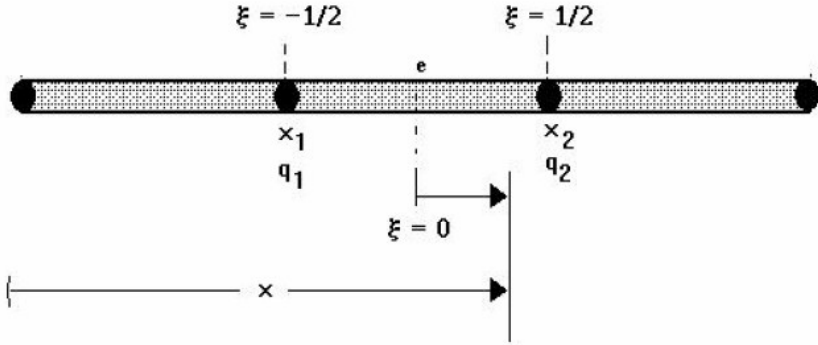


Fig. 4.2. Malha unidimensional com três elementos finitos lineares

Da figura 4.2, determina-se que a coordenada local ξ do elemento é definida por

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{2x - x_1 - x_2}{\Delta x} \quad (4.10)$$

onde $\Delta x = x_2 - x_1$, tal que o comprimento do elemento é coberto quando ξ varia de $-1/2$ a $1/2$. Neste contexto, a equação (4.1) poderia ser vista como uma equação unidimensional transformada para o sistema de coordenadas local do elemento, onde a métrica α representaria a quantidade $\partial \xi / \partial x = 1 / \Delta x$.

Da figura 4.2, extrai-se que a solução da equação (4.9) deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\phi(-1/2) = q_1 \quad \phi(1/2) = q_2 \quad (4.11)$$

Impondo tais condições de contorno, é possível obter uma solução exata para (4.9), a qual pode-se escrever da seguinte maneira:

$$\phi(\xi) = N_1 q_1 + N_2 q_2 \quad (4.12)$$

onde N_1 e N_2 , são funções de forma como no contexto do método dos elementos finitos, e vêm definidas por:

$$N_1 = -\frac{e^{\lambda \xi} - e^{\lambda/2}}{e^{\lambda/2} - e^{-\lambda/2}} \quad (4.13)$$

$$N_2 = \frac{e^{\lambda \xi} - e^{-\lambda/2}}{e^{\lambda/2} - e^{-\lambda/2}} \quad (4.14)$$

Esta solução pode ser usada como a função de interpolação, mas não é apropriada para cômputo numérico dado que as funções exponenciais teriam que ser avaliadas em todos os elementos, em cada intervalo de tempo, devido à presença do parâmetro λ que varia com o tempo e de um elemento para outro. Isto implica um custo computacional elevado.

Uma forma de reduzir o custo computacional, seria aproximar as funções de forma N_1 e N_2 por polinômios obtidos expandindo-as em série de Taylor. Porém, comprova-se que se requerem muitos termos para se ter boas aproximações para uma ampla gama de valores de λ .

Neste ponto parece apropriado resolver a equação (4.9) usando o método da decomposição de Adomian, já descrito acima, visto que as soluções por ele geradas vêm expressas em forma de polinômios e o que é mais importante, dada sua rápida convergência (ADOMIAN, 1994), com poucos termos já se tem boas aproximações da solução.

Aplicando tal método, definido pelas expressões (4.7) e (4.8), com:

$$\varphi_0 = C \xi + D \quad (4.15)$$

obtêm-se, usando MAPLE V, soluções que vão depender do número de termos usados para aproximar ϕ , no método da decomposição. Por exemplo, a aproximação de três termos, $\phi_3 = \sum_{n=0}^{n=2} \varphi_n$, é dada por:

$$\phi_3 = \frac{1}{6} \lambda^2 C \xi^3 + \frac{1}{2} \lambda (C + \lambda D) \xi^2 + (C + \lambda D) \xi + D \quad (4.16)$$

Impondo as condições de contorno, (4.11), na equação acima, e manipulando algebricamente o resultado obtém-se uma solução arranjada como:

$$\phi_3 = N_1^{(3)} q_1 + N_2^{(3)} q_2 \quad (4.17)$$

com funções de forma dadas por:

$$N_1^{(3)} = -4(1-4\eta_1)\xi^3 - 2\lambda\eta_1\xi^2 - 4\eta_1\xi + \frac{1}{2}(1+\lambda\eta_1) \quad (4.18)$$

$$N_2^{(3)} = 4(1-4\eta_1)\xi^3 + 2\lambda\eta_1\xi^2 + 4\eta_1\xi + \frac{1}{2}(1+\lambda\eta_1) \quad (4.19)$$

onde

$$\eta_1 = \frac{|\lambda|^3 + 48}{\lambda^4 + 8\lambda^2 + 192} \quad (4.20)$$

Para melhorar a precisão da função de interpolação (4.17), pode-se aumentar o número de termos na decomposição. É claro que na medida em que se aumenta o número de termos, as funções de interpolação ficam mais complexas. Uma amostra disto é a aproximação com cinco termos, que vem dada por:

$$\begin{aligned} \phi_5 = & \frac{1}{120} \lambda^4 C \xi^5 + \frac{1}{24} \lambda^3 (C + \lambda D) \xi^4 + \frac{1}{6} \lambda^2 (C + \lambda D) \xi^3 \\ & + \frac{1}{2} \lambda (C + \lambda D) \xi^2 + (C + \lambda D) \xi + D \end{aligned} \quad (4.21)$$

e donde obtém-se a seguinte solução, uma vez impostas as condições de contorno

$$\phi_5 = N_1^{(5)} q_1 + N_2^{(5)} q_2 \quad (4.22)$$

com funções de forma dadas por:

$$N_1^{(5)} = -16[1 - 8(\lambda^2 + 24)\eta_2]\xi^5 - 8\lambda^3\eta_2\xi^4 - 32\lambda^2\eta_2\xi^3 - 96\lambda\eta_2\xi^2 - 192\eta_2\xi^2 + \frac{1}{2}[1 - \lambda(\lambda^2 + 48)\eta_2] \quad (4.23)$$

$$N_2^{(5)} = 16[1 - 8(\lambda^2 + 24)\eta_2]\xi^5 + 8\lambda^3\eta_2\xi^4 + 32\lambda^2\eta_2\xi^3 + 96\lambda\eta_2\xi^2 + 192\eta_2\xi^2 + \frac{1}{2}[1 - \lambda(\lambda^2 + 48)\eta_2] \quad (4.24)$$

e η_2 definido por

$$\eta_2 = \frac{|\lambda|^5 + 3840}{\lambda^8 + 48\lambda^6 + 384\lambda^4 + 30720\lambda^2 + 737280} \quad (4.25)$$

Esta função de interpolação mantém ainda certo grau de simplicidade. Poder-se-ia seguir aumentando a ordem da decomposição, mas como já foi salientado, a complexidade das funções de interpolação resultantes limitaria enormemente sua aplicação em esquemas numéricos.

Para verificar a precisão das funções de interpolação dadas pelas equações (4.17) e (4.22), comparam-se as funções de forma a elas associadas com as funções de forma que definem a solução exata.

Nas figuras (4.3) e (4.4), a função de forma N_1 para três e cinco termos, $N_1^{(3)}$ e $N_1^{(5)}$ respectivamente, é comparada com a função de forma exata para diferentes valores do parâmetro λ , que pesa a relação entre a convecção e a difusão (este parâmetro é o denominado número de Peclet). Observa-se que tanto para $\lambda = 5$ quanto para $\lambda = 20$ ambas as aproximações se comportam relativamente bem em relação à solução exata, sendo melhor a concordância da função obtida com uma decomposição de 5 termos, dada por (4.23), tal como era esperado. Observa-se ainda, que quanto menor for o parâmetro λ , melhor a concordância de ambas as funções de forma. Cabe lembrar que pela definição deste parâmetro, é possível reduzir seu valor refinando a malha.

Mesmo com grandes valores de λ , qualquer destas interpolações é preferível à clássica função de interpola linear, como se deduz da figura 4.5, onde apresentam-

se resultados para valores positivos e negativos de λ , mostrando que a função de forma se ajusta automaticamente dependendo da direção do escoamento, o que é uma característica bastante desejável nos esquemas numéricos para escoamentos convectivos.

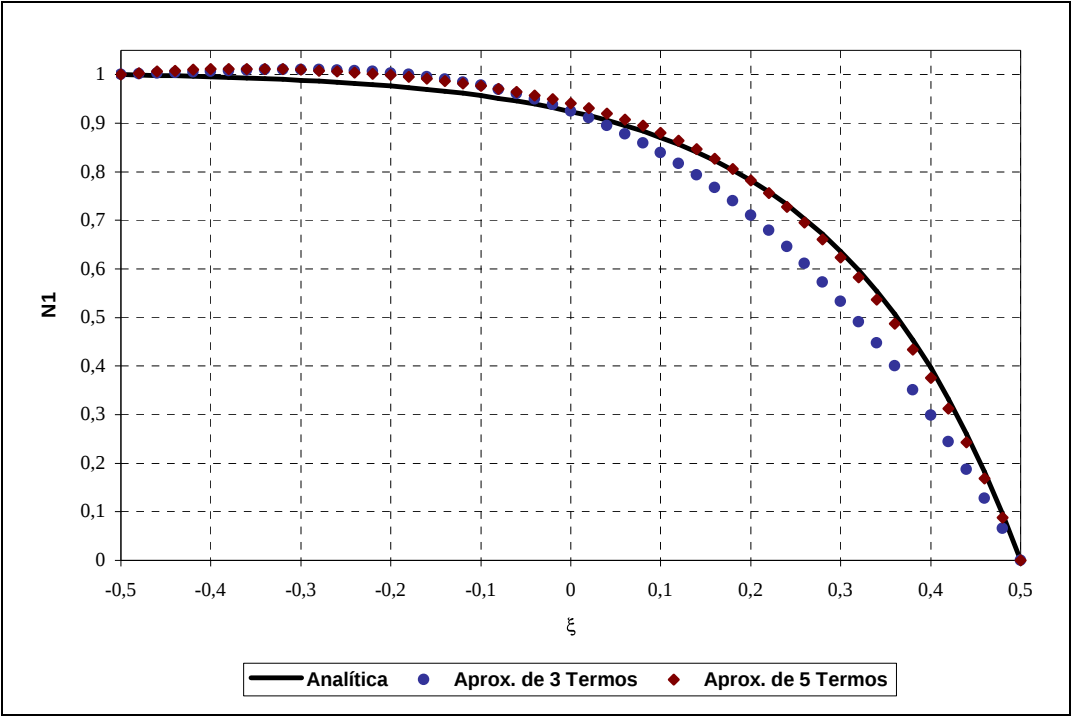
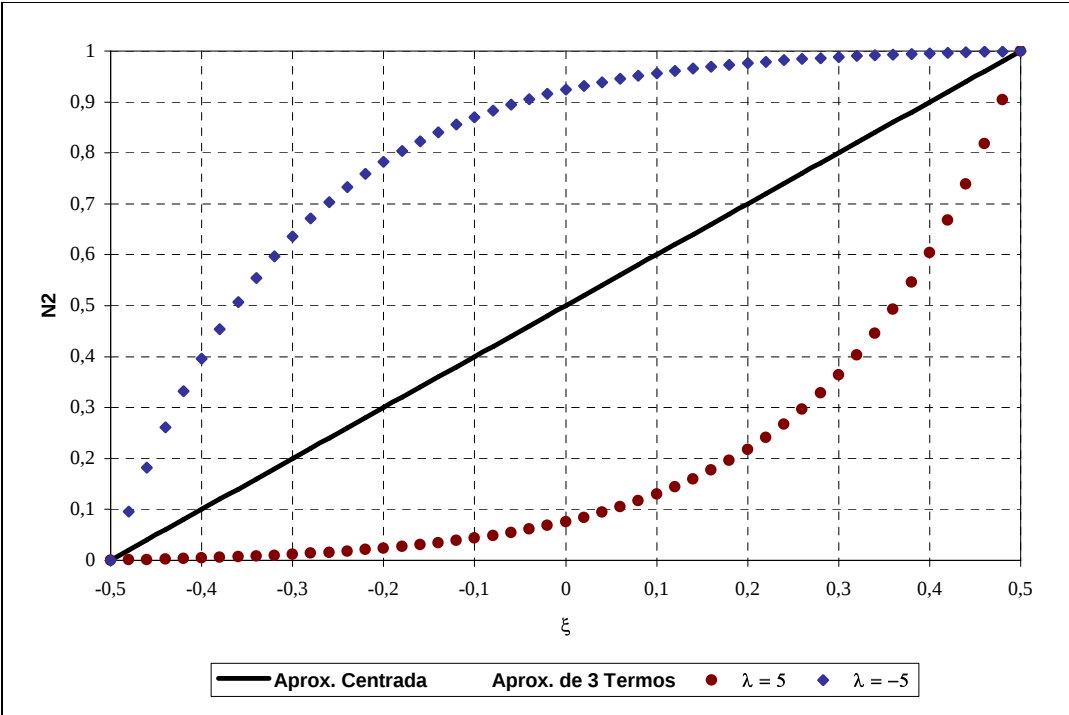
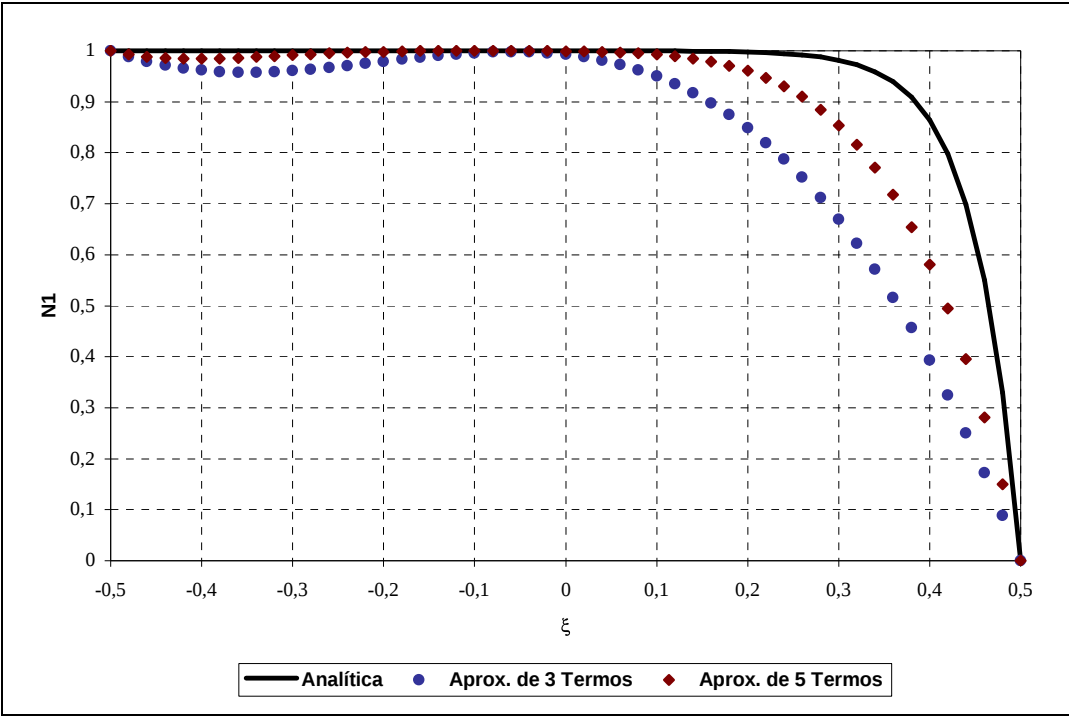


Fig. 4.3. Função de forma N_1 para $\lambda = 5$.



4.2.3 Equação Convecção-Difusão não Homogênea

Neste caso, considera-se o efeito total dos termos convectivos na direção de interesse, ξ , e o efeito parcial dos termos difusivos na mesma direção; os outros efeitos modelam-se por uma função linear da forma $A\xi + B$, com a finalidade de melhorar a precisão da função de interpolação. Desta maneira tem que se resolver a equação:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + A\xi + B \quad (4.26)$$

Neste caso procede-se da mesma forma que no anterior. A diferença está em que, para resolver a equação diferencial, a solução é obrigada a satisfazer além das duas condições de contorno duas novas condições nodais, tal como mostrado no elemento finito da figura 4.6.

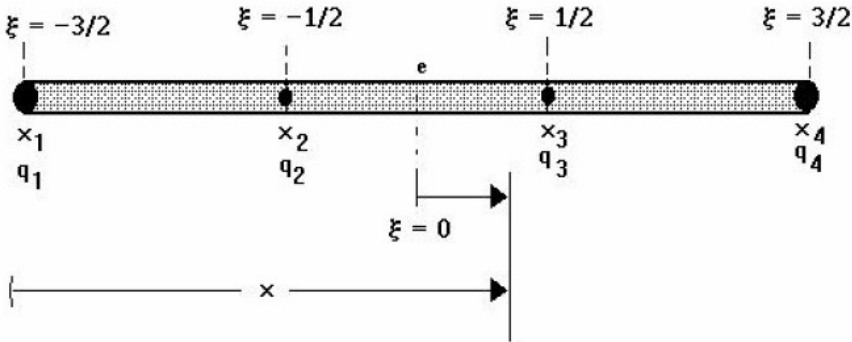


Fig. 4.6. Elemento finito cúbico.

Da figura 4.6, tem-se que a coordenada local, ξ , pode ser definida pela expressão:

$$\xi = \frac{3}{2} \frac{2x - x_1 - x_4}{\Delta x} \quad (4.27)$$

onde, $\Delta x = x_4 - x_1$.

As condições nodais que a solução da equação diferencial (4.26) deve satisfazer são:

$$\begin{aligned}
\phi(-3/2) &= q_1 \\
\phi(-1/2) &= q_2 \\
\phi(1/2) &= q_3 \\
\phi(3/2) &= q_4
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Com estas condições a solução exata da equação (4.26) vem dada por:

$$\phi_3 = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 + N_4 q_4 \tag{4.29}$$

onde as funções de forma exatas são:

$$N_1 = \frac{8e^{\lambda/2(2\xi-3)} - e^{-\lambda}(6+8\xi-8\xi^2) - e^{-2\lambda}(3-8\xi+4\xi^2) - 4\xi^2 + 1}{8(e^{-3\lambda} - 3e^{-2\lambda} + 3e^{-\lambda} - 1)} \tag{4.30}$$

$$N_2 = \frac{-24e^{\lambda/2(2\xi-3)} + e^{-\lambda}(27+2\xi^2) + e^{-3\lambda}(3-8\xi+4\xi^2) + 8\xi^2 + 8\xi - 6}{8(e^{-3\lambda} - 3e^{-2\lambda} + 3e^{-\lambda} - 1)} \tag{4.31}$$

$$N_3 = \frac{24e^{\lambda/2(2\xi-3)} - e^{-2\lambda}(27-2\xi^2) + e^{-3\lambda}(6+8\xi-8\xi^2) - 4\xi^2 - 8\xi - 3}{8(e^{-3\lambda} - 3e^{-2\lambda} + 3e^{-\lambda} - 1)} \tag{4.32}$$

$$N_4 = \frac{-8e^{\lambda/2(2\xi-3)} + e^{-\lambda}(3+8\xi+4\xi^2) + e^{-2\lambda}(6-8\xi-8\xi^2) - e^{-3\lambda}(1+4\xi^2)}{8(e^{-3\lambda} - 3e^{-2\lambda} + 3e^{-\lambda} - 1)} \tag{4.33}$$

Pelos mesmos motivos mencionados no caso homogêneo, prefere-se aproximar a solução de (4.26) através do método da decomposição. Neste sentido, integra-se tal equação no elemento finito unidimensional mostrado na figura 4.6. A equação a ser resolvida fica simplificada para a seguinte forma:

$$\phi = \lambda_e \int \phi d\xi + A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D \tag{4.34}$$

Aplicando o método de Adomian, dado pelas equações (4.7) e (4.8), com:

$$\varphi_0 = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D \quad (4.35)$$

obtem-se, usando o MAPLE V, a seguinte aproximação de três termos $\phi_3 = \sum_{n=0}^{n=2} \phi_n$.

$$\begin{aligned} \phi \approx \phi_3 = & \frac{1}{20} \lambda^2 A \xi^5 + \frac{1}{4} \lambda \left(A + \frac{1}{3} \lambda B \right) \xi^4 + \left(A + \frac{1}{3} \lambda B + \frac{1}{6} \lambda^2 C \right) \xi^3 + \\ & \left(B + \frac{1}{2} \lambda C + \frac{1}{2} \lambda^2 D \right) \xi^2 + (C + \lambda D) \xi + D \end{aligned} \quad (4.36)$$

Impondo as condições nodais (4.28), e rearranjando os termos, a solução aproximada pode ser representada da seguinte forma:

$$\phi_3 = N_1^{(3)} q_1 + N_2^{(3)} q_2 + N_3^{(3)} q_3 + N_4^{(3)} q_4 \quad (4.37)$$

onde as funções de forma estão dadas pelas equações:

$$\begin{aligned} N_1^{(3)} = & -\frac{2}{27} \eta_3 \xi^5 - \frac{1}{9} \eta_3 \xi^4 - \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{27} \eta_4 \right) \xi^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{18} \eta_3 \right) \xi^2 + \\ & \frac{1}{24} (1 - \eta_4) \xi - \frac{1}{16} (1 + \eta_3) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} N_2^{(3)} = & \frac{2}{9} \eta_4 \xi^5 + \frac{1}{3} \eta_3 \xi^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{9} \eta_4 \right) \xi^3 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \eta_3 \right) \xi^2 - \\ & \frac{1}{8} (9 - \eta_4) \xi + \frac{3}{16} (3 - \eta_3) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} N_3^{(3)} = & -\frac{2}{9} \eta_4 \xi^5 - \frac{1}{3} \eta_3 \xi^4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{9} \eta_4 \right) \xi^3 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6} \eta_3 \right) \xi^2 + \\ & \frac{1}{8} (9 - \eta_4) \xi + \frac{3}{16} (3 - \eta_3) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} N_4^{(3)} = & \frac{2}{27} \eta_3 \xi^5 + \frac{1}{9} \eta_3 \xi^4 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{27} \eta_4 \right) \xi^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18} \eta_3 \right) \xi^2 - \\ & \frac{1}{24} (1 - \eta_4) \xi - \frac{1}{16} (1 - \eta_3) \end{aligned} \quad (4.41)$$

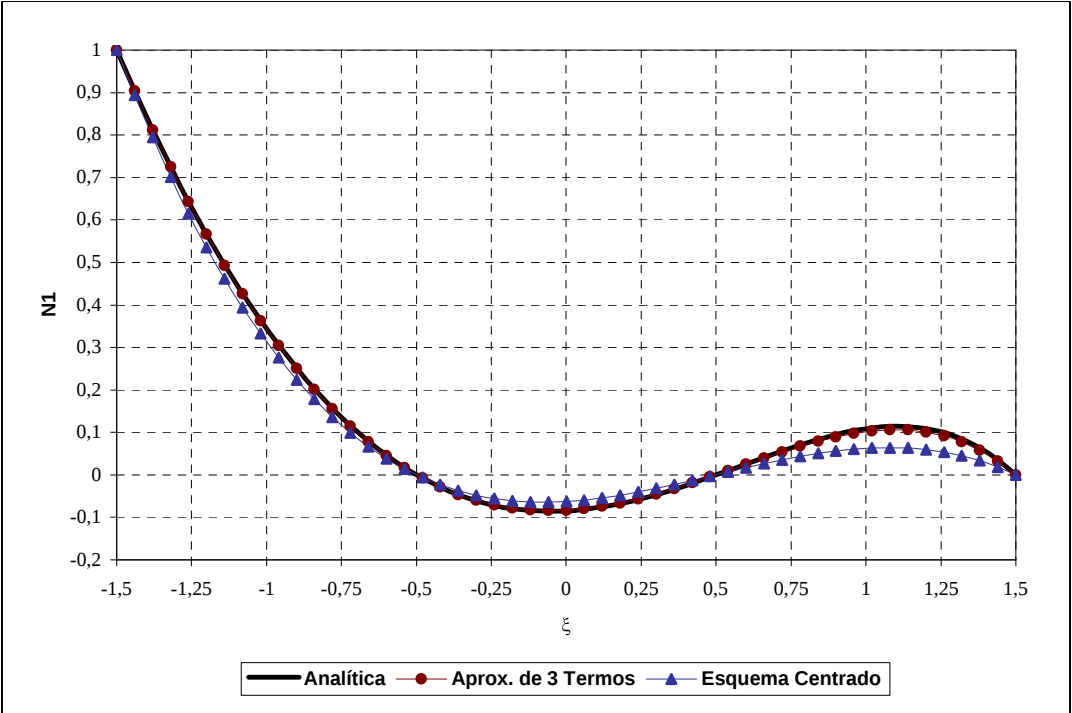
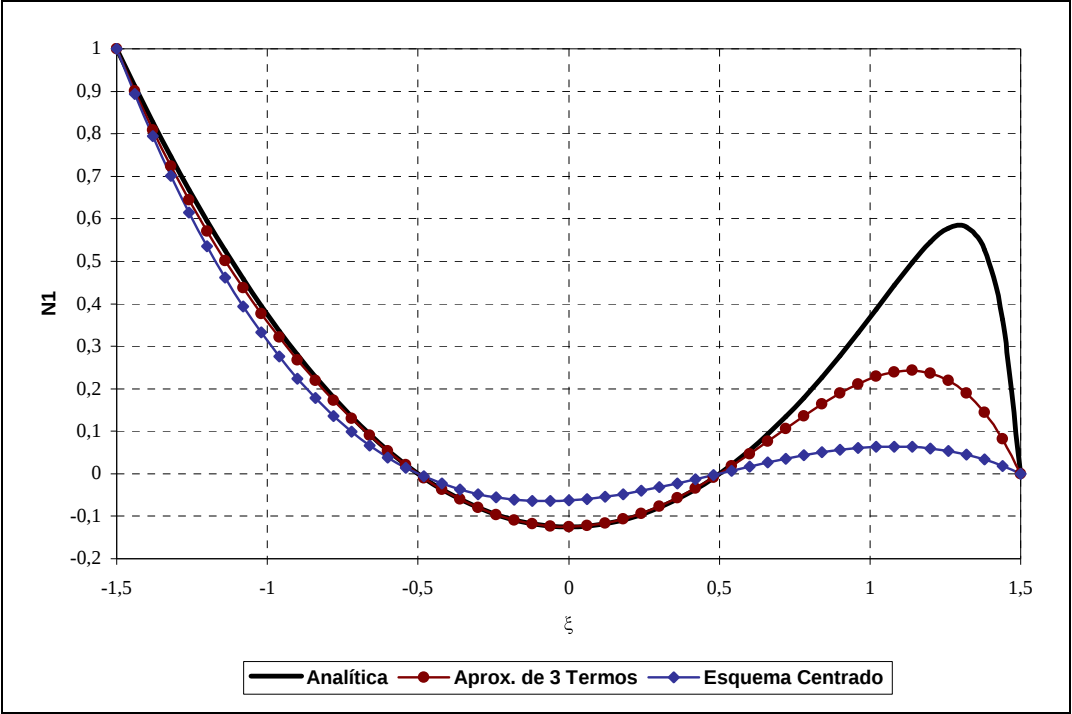
com, η_3 e η_4 definidos, respectivamente, pelas expressões:

$$\eta_3 = \frac{3\lambda \left(9|\lambda|^7 + 72|\lambda|^5 + 16|\lambda|^4 + 1280|\lambda|^2 + 30720 \right)}{\left(\lambda^8 + 240\lambda^6 + 640\lambda^4 + 3720\lambda^2 + 245760 \right)} \quad (4.42)$$

$$\eta_4 = \frac{3\lambda^2 \left(9\lambda^6 - 12|\lambda|^5 + 80\lambda^4 - 576|\lambda|^3 + 1920\lambda^2 - 4608|\lambda| + 9216 \right)}{\left(\lambda^8 + 240\lambda^6 + 640\lambda^4 + 3720\lambda^2 + 245760 \right)} \quad (4.43)$$

Constatou-se que aproximações com maior quantidade de termos produzem funções de forma de mais alta ordem, pouco apropriadas para cálculo numérico, especialmente em aplicações de elementos finitos multidimensionais.

Para avaliar a precisão da aproximação de três termos apresentada acima, as funções de forma a ela associada, $N_1^{(3)}$, $N_2^{(3)}$, $N_3^{(3)}$ e $N_4^{(3)}$, comparam-se com as funções de forma exatas para este caso e as funções de forma usadas no esquema centrado clássico (estas últimas coincidem com aquelas para ϕ_3 quando $\lambda = 0$). Nas figuras (4.7) a (4.14), mostra-se que as funções de forma obtidas para ϕ_3 , têm boa concordância com as soluções exatas, para valores relativamente pequenos de λ . Para valores maiores, a concordância não é tão boa, mostrando a necessidade de se aumentar a ordem da aproximação para se ter uma função de interpolação precisa para uma ampla gama de números de Peclet. De todas formas, a função de interpolação aqui proposta, ϕ_3 , ajusta-se automaticamente ao sentido do fluxo comportando-se sempre melhor que a correspondente a um elemento cúbico sem correção por convecção, $\lambda = 0$, tal como pode-se observar nas figuras (4.15) a (4.18). Além disto, esta função de interpolação, tem um comportamento excelente quando se usa no âmbito dos volumes finitos, tal como será mostrado na próxima seção.



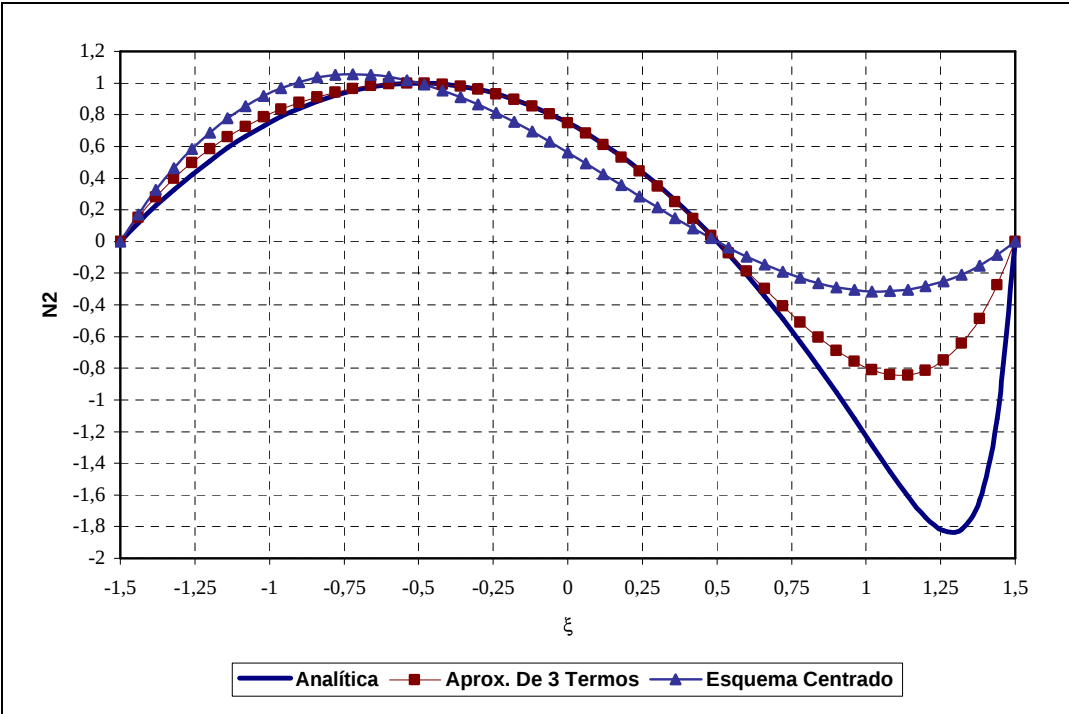


Fig. 4.9. Função de forma $N_2^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 10$.

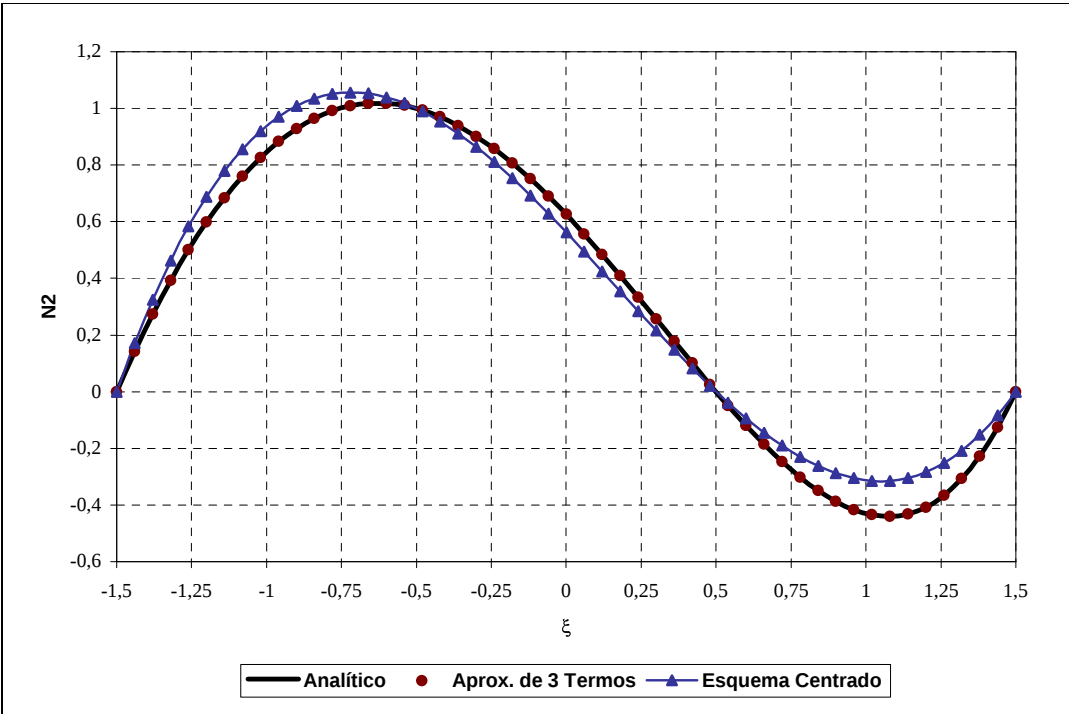


Fig. 4.10. Função de forma $N_2^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 1$.

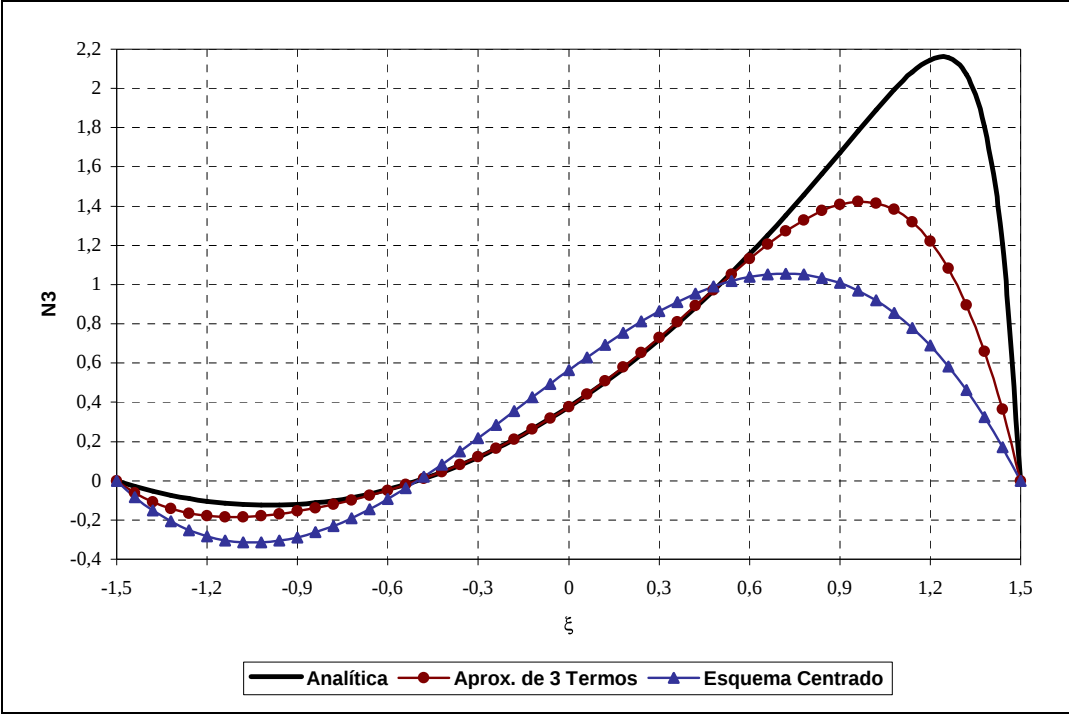


Fig. 4.11. Função de forma $N_3^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 10$.

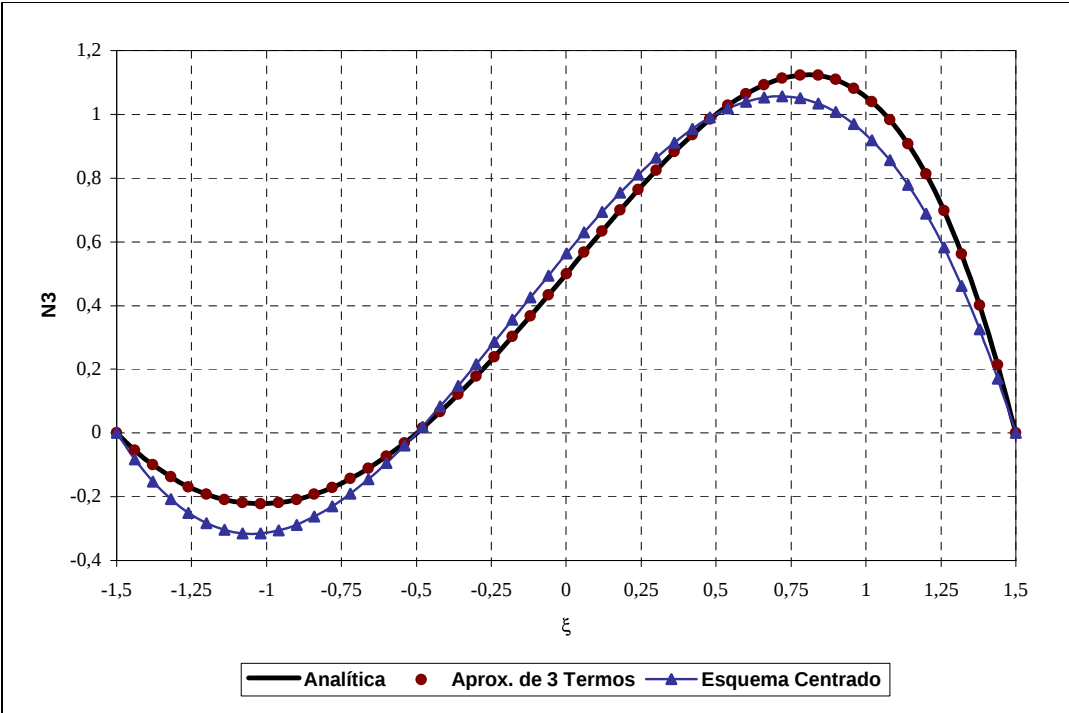


Fig. 4.12. Função de forma $N_3^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 1$.

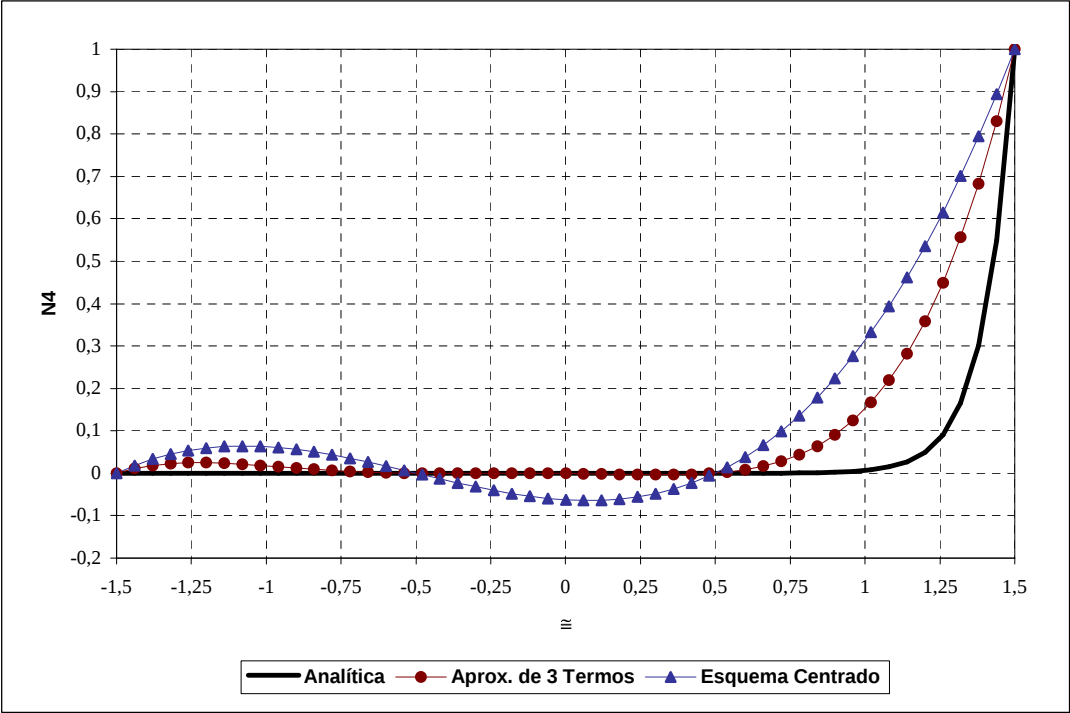


Fig. 4.13. Função de forma $N_4^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 10$.

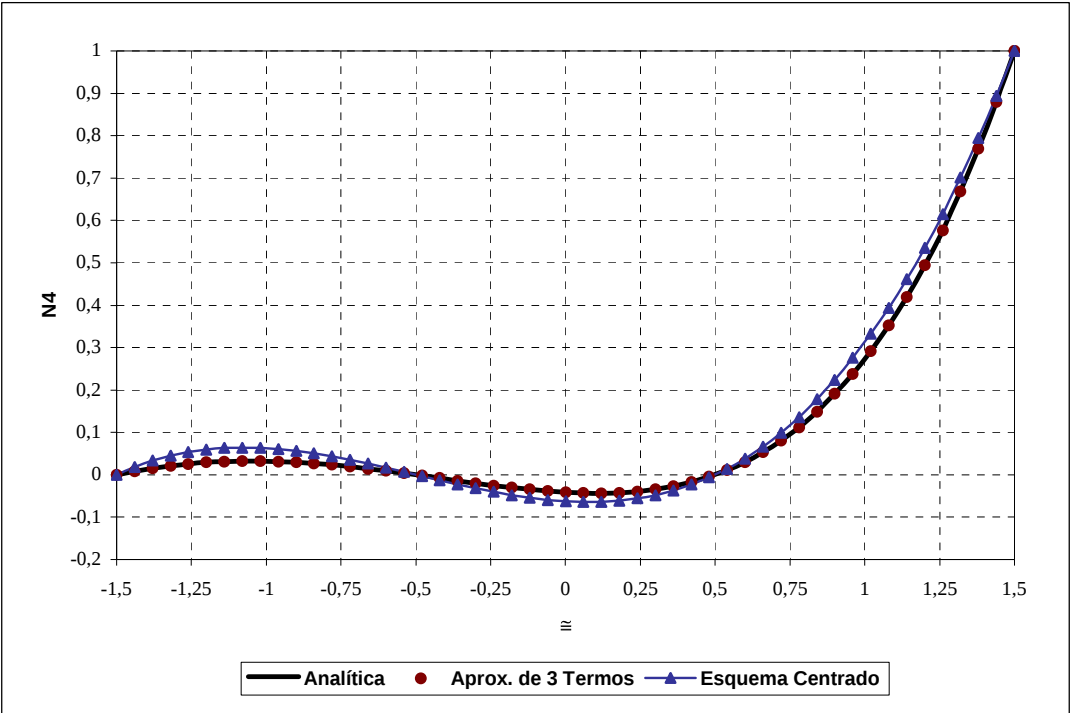
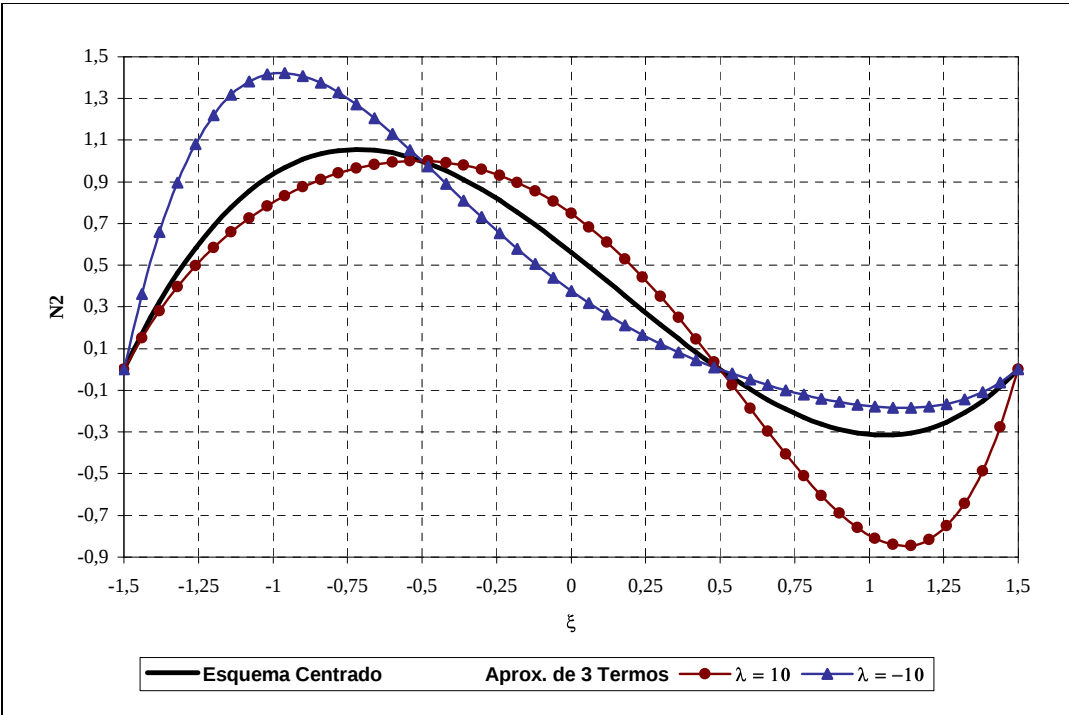
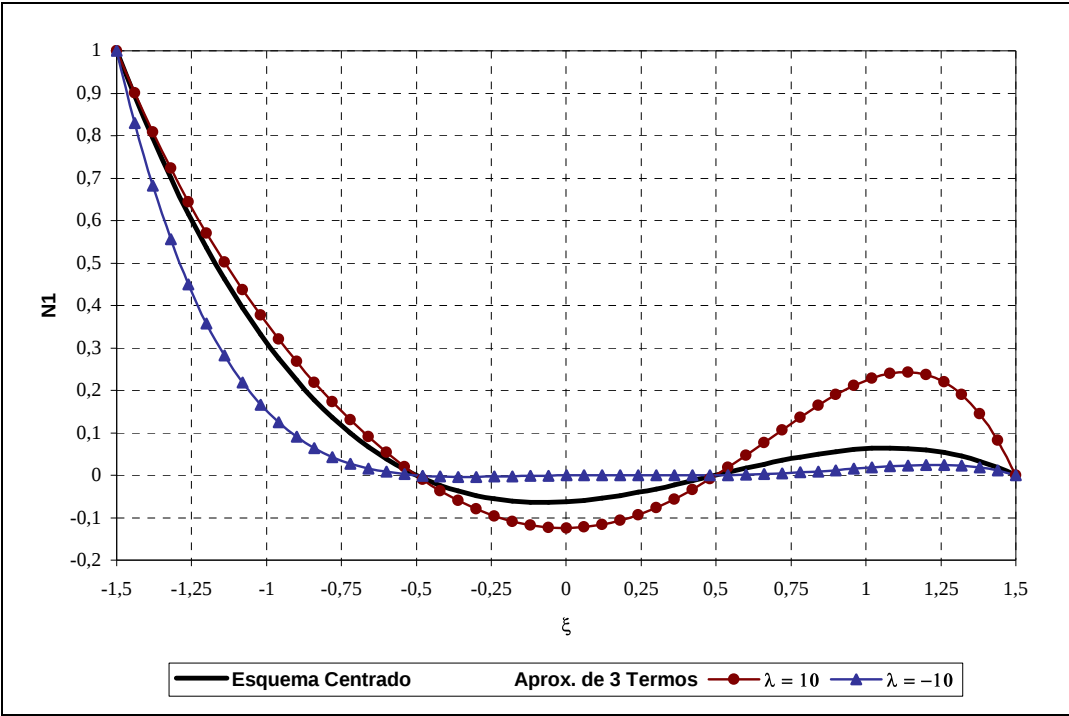


Fig. 4.14. Função de forma $N_4^{(3)}$ da aproximação de 3 termos comparada com a função de forma correspondente do esquema centrado, para $\lambda = 1$.



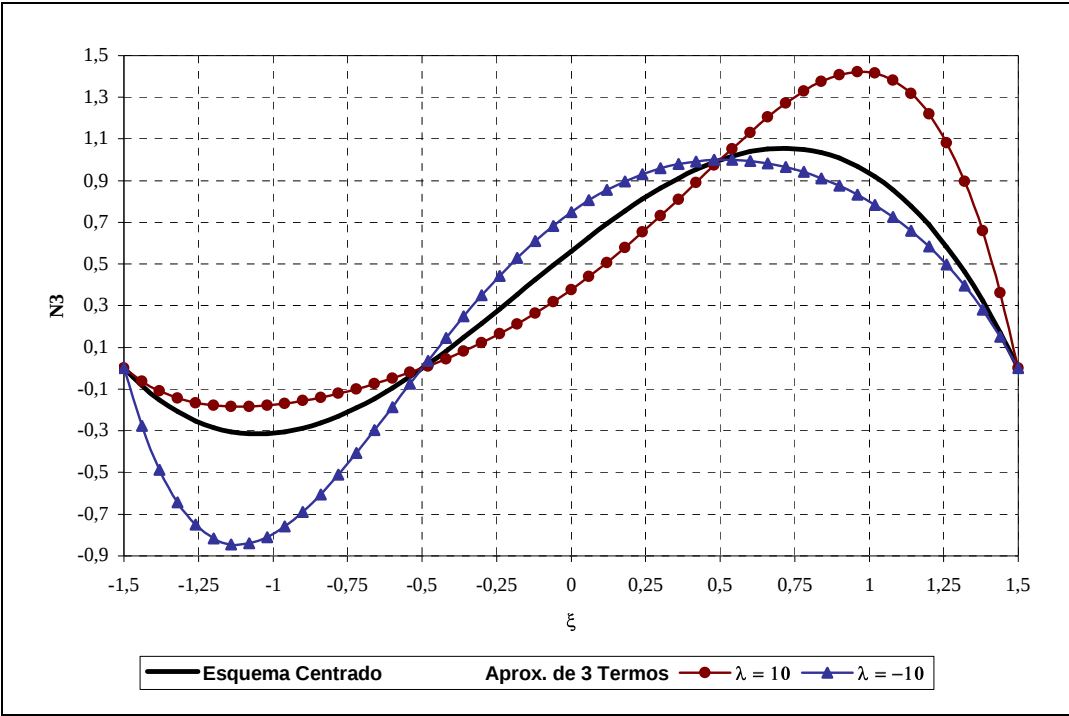


Fig. 4.17. Variação de função de forma $N_3^{(3)}$ com a direção do fluxo.

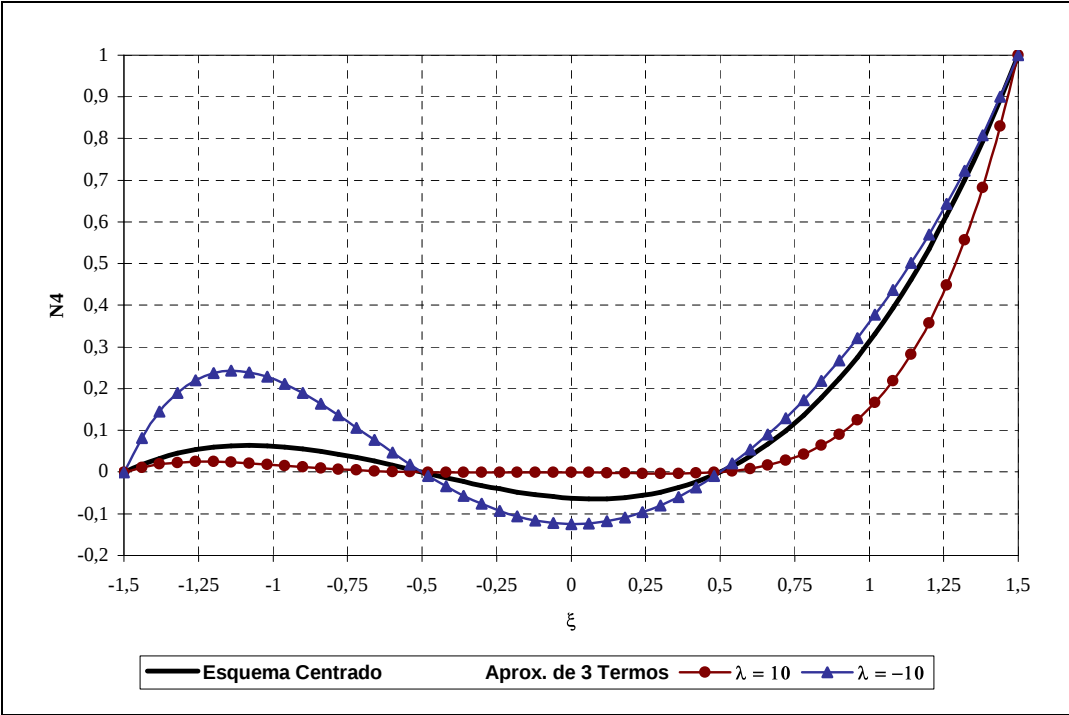


Fig. 4.18. Variação de função de forma $N_4^{(3)}$ com a direção do fluxo.

4.3 Implementação em Volumes Finitos

Neste trabalho as equações de Navier Stokes, desacopladas pelo método da projeção, foram discretizadas usando o método dos volumes finitos em uma malha co-localizada. Uma vez aplicada a discretização, nas equações resultantes aparecem as velocidades e suas derivadas avaliadas nas faces dos volumes de controle. Para determinar estes valores usar-se-ão as funções de interpolação obtidas acima. Neste sentido, o valor da função, ou sua derivada, na face do volume coincide com o respectivo valor no centro, $\xi = 0$, do elemento finito mostrado na figura 4.1. A seguir, descrevem-se os resultados obtidos para ambos os casos estudados na seção anterior, que correspondem a interpolações com 2 pontos e com 4 pontos nodais, respectivamente.

4.3.1 Interpolação com 2 Pontos Nodais (Esquema WUDS)

As funções ϕ_3 e ϕ_5 dadas por (4.17) e (4.22), respectivamente, foram propostas para aproximar a solução do problema convecção-difusão homogêneo. Quando estas funções são avaliadas em $\xi = 0$, obtém-se a seguinte expressão para o valor da variável ϕ na face leste do volume de controle v_1 (ver figura 4.1).

$$\phi_e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_e)q_1 + \frac{1}{2}(1 - \gamma_e)q_2 \quad (4.44)$$

onde, para a aproximação de três termos (equação 4.17), γ_e é dado por:

$$\gamma_e^{(3)} = \frac{\lambda(|\lambda|^3 + 48)}{(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 192)} \quad (4.45)$$

enquanto que para a aproximação de 5 termos, (equação 4.22), define-se como

$$\gamma_e^{(5)} = \frac{\lambda(\lambda^2 + 48)(|\lambda|^5 + 3840)}{(\lambda^8 + 48\lambda^6 + 384\lambda^4 + 30720\lambda^2 + 737280)} \quad (4.46)$$

Na figura 4.19, compara-se a função γ_e , para ambos os casos, com a correspondente à solução exata. Verifica-se que ambas as expressões produzem resultados que concordam muito bem com os valores exatos. Desta maneira, no código computacional implementado neste trabalho, o valor de γ_e será avaliado através da equação (4.45) dada sua simplicidade.

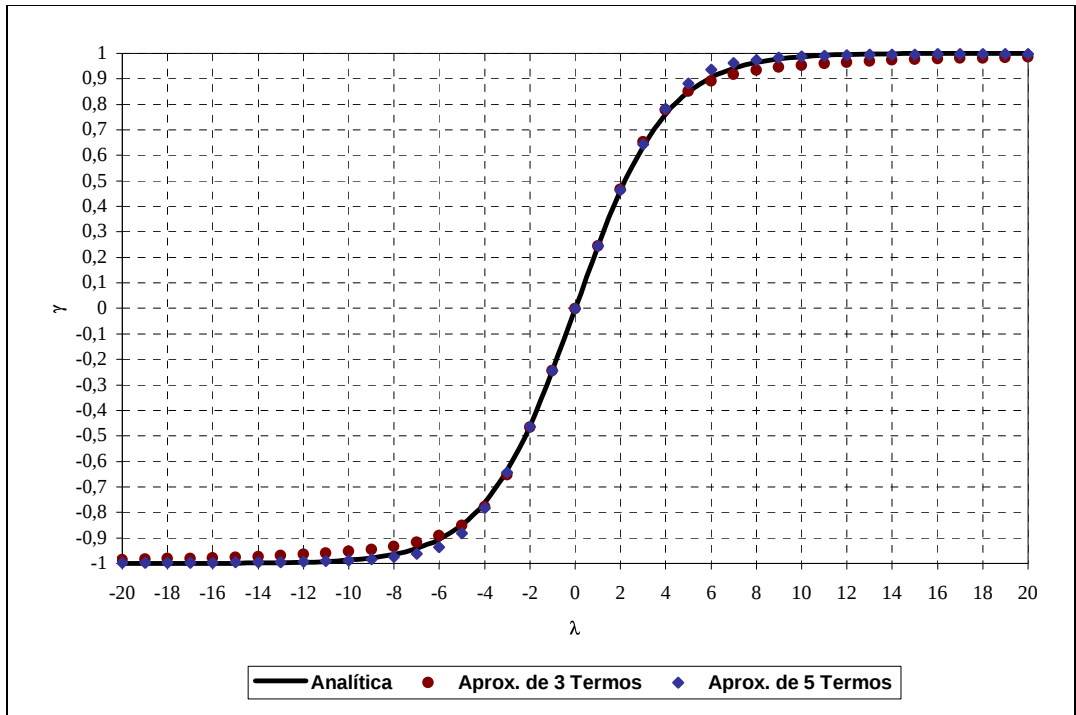


Fig. 4.19. Comparação do valor de γ_e dado pelas diferentes formulações.

Derivando, com relação a ξ , às funções de interpolação dadas pelas equações (4.17) e (4.22), e avaliando o resultado em $\xi = 0$, obtém-se a seguinte expressão para a derivada da variável na face leste do volume de controle.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \beta_e (q_2 - q_1) \tag{4.47}$$

onde para a aproximação de três termos

$$\beta_e^{(3)} = \frac{4(|\lambda|^3 + 48)}{\lambda^4 + 8\lambda^2 + 192} \tag{4.48}$$

enquanto que para cinco termos

$$\beta_e^{(5)} = \frac{192(|\lambda|^5 + 3840)}{\lambda^8 + 48\lambda^6 + 384\lambda^4 + 30720\lambda^2 + 737280} \quad (4.49)$$

Na figura 4.20, comparam-se os valores de β_e dados por ambas as expressões com os correspondentes à solução exata. Observa-se que os valores de β_e dados pela equação (4.49) ajustam-se bem aos valores exatos em toda a gama de valores de λ , enquanto que a equação (4.48) produz resultados bem menos precisos.

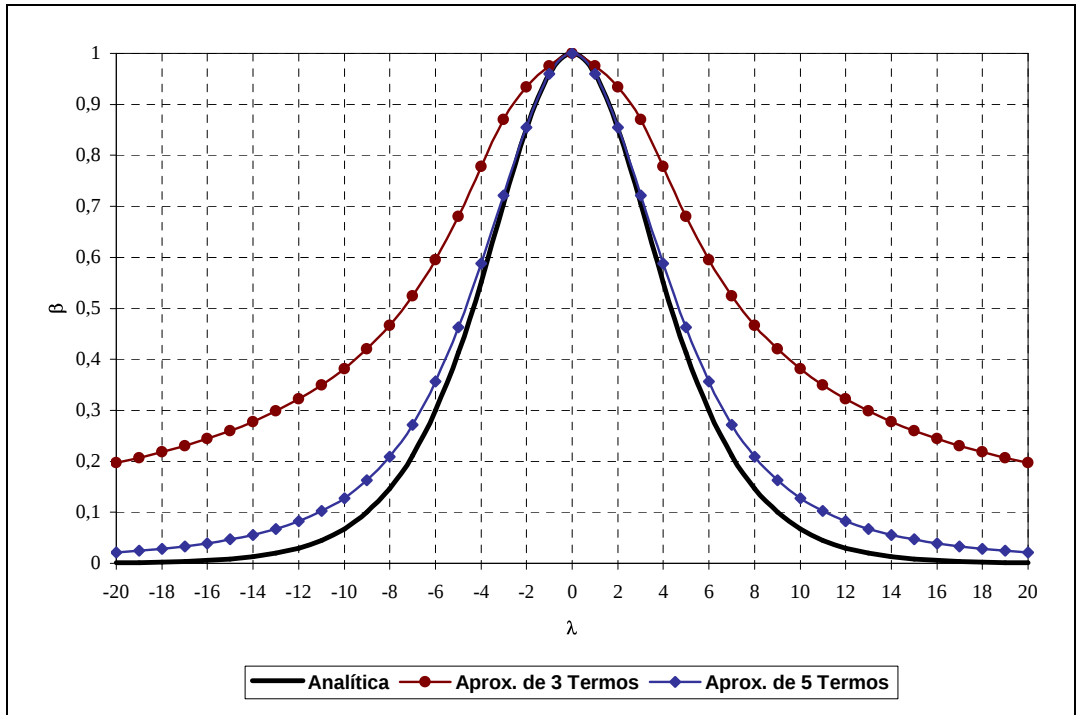


Fig. 4.20. Comparação do valor de β_e dado pelas diferentes formulações.

No intuito de obter maior eficiência computacional, procurou-se uma equação mais simples que (4.49) para avaliar β nas faces dos volumes de controle. Observando a lei de formação destas funções na medida em que se aumenta o número de termos da decomposição de Adomian, percebe-se que para valores relativamente baixos do parâmetro λ , o inverso de β vem dado por um polinômio. Baseado nisto, fez-se um ajuste de curva e por tentativa e erro modificaram-se os coeficientes do polinômio resultante, obtendo-se uma expressão reduzida e mais precisa, a qual se usou no código computacional implementado neste trabalho.

$$\beta_e = \frac{3840}{3\lambda^4 + 160\lambda^2 + 3840} \quad (4.50)$$

A figura 4.21, mostra que esta equação produz valores de β_e que se ajustam muito bem aos fornecidos pela solução exata.

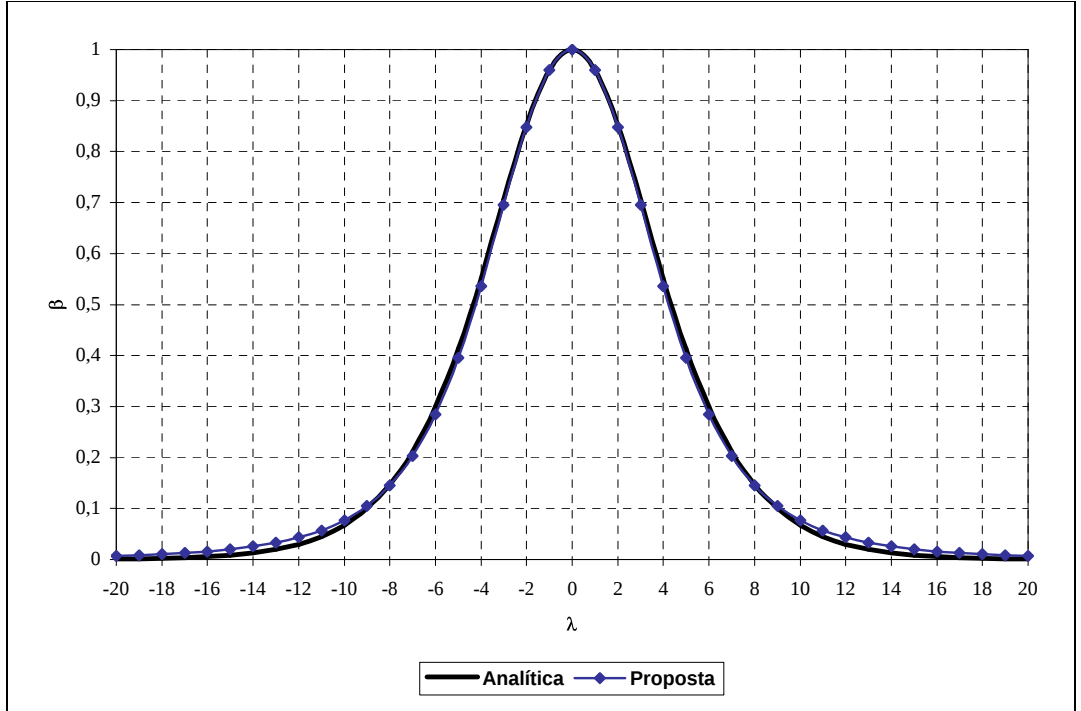


Fig. 4.21. Comparação da função β_e proposta (equação 4.50) com a função exata.

A formulação descrita acima, representada pelas equações (4.44) e (4.47), é conhecida como esquema WUDS (*Weighted Upstream Differencing Scheme*) no contexto dos volumes finitos (RAITHBY e TORRANCE, 1974).

Analisando a equação (4.44), em conjunto com a figura 4.19, verifica-se que este esquema é idêntico a um esquema centrado para $\lambda = 0$ e comporta-se como um esquema UPWIND para grandes valores de $|\lambda|$. Neste último caso o erro de truncamento desta interpolação gera difusão numérica, como será mostrado a seguir.

Para determinar o erro de truncamento da interpolação WUDS, a equação (4.44) reescreve-se da seguinte forma de acordo com a figura 4.22.

$$\phi_e = \frac{1}{2}(1+\gamma_e)\phi_i + \frac{1}{2}(1-\gamma_e)\phi_{i+1} \quad (4.51)$$

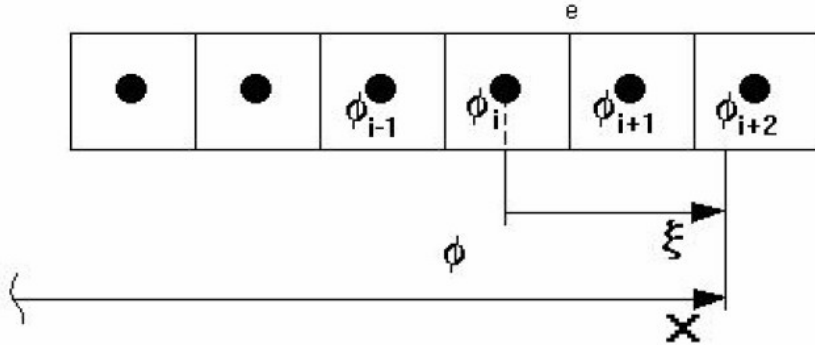


Fig. 4.22. Malha unidimensional de volumes finitos.

Substituindo em (4.51) os valores nodais ϕ_i e ϕ_{i+1} expandidos em série de Taylor, assumindo malha uniforme, em torno do valor na face, ϕ_e , obtém-se:

$$\phi_e = \phi_e - \frac{\gamma_e}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \Delta x + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_e \Delta x^2 - O(\Delta x^3) \quad (4.52)$$

de onde verifica-se que a interpolação recupera o valor na face com um erro de truncamento de primeira ordem dado pela equação (4.53), o que caracteriza a difusão numérica inerente ao esquema.

$$\frac{\gamma_e}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \Delta x \quad (4.53)$$

4.3.2 Interpolação com 4 Pontos Nodais (Esquema HOWUDS)

Para aproximar a solução do problema convecção-difusão não homogêneo, foi proposta a função ϕ_3 dada pela equação (4.37). Avaliando esta função em $\xi = 0$, obtém-se a seguinte expressão para o valor da variável ϕ na face leste do volume de controle v_1 (ver figura 4.23)

$$\phi_e = -\frac{1}{16}(1+\gamma_e)q_1 + \frac{3}{16}(3+\gamma_e)q_2 + \frac{3}{16}(3-\gamma_e)q_3 - \frac{1}{16}(1-\gamma_e)q_4 \quad (4.54)$$

onde γ_e , representada na figura 4.24, vem definida pela expressão:

$$\gamma_e = \frac{3\lambda(9|\lambda|^7 + 72|\lambda|^5 + 16|\lambda|^4 + 1280|\lambda|^2 + 30720)}{27\lambda^8 + 240\lambda^6 + 640\lambda^4 + 30720\lambda^2 + 245760} \quad (4.55)$$

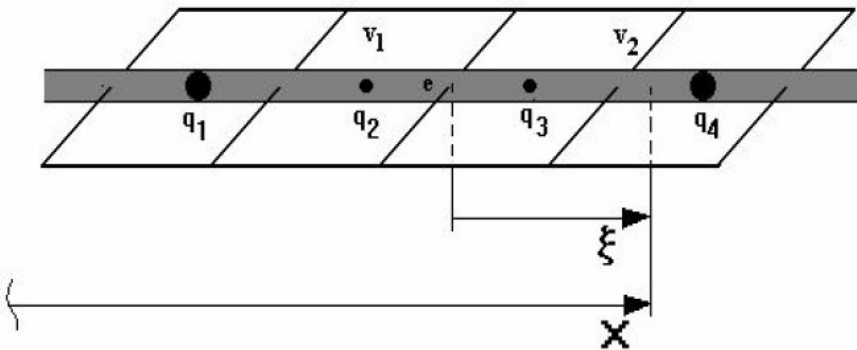


Fig. 4.23. Superposição das malhas de elementos finitos e volumes finitos.

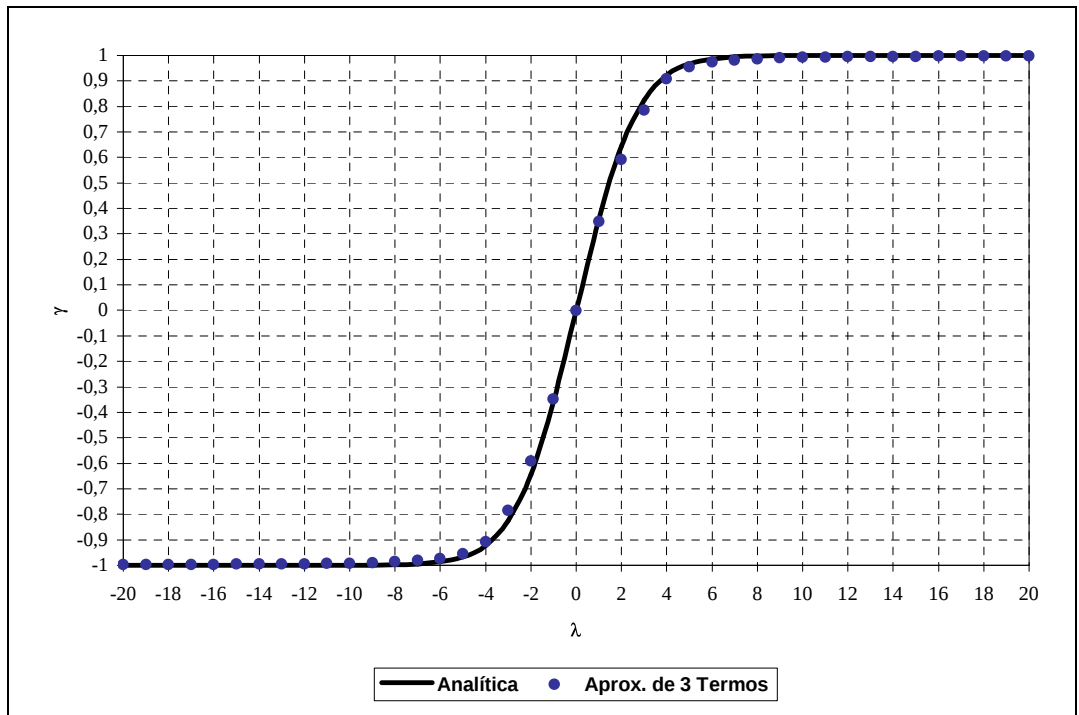


Fig. 4.24. Coeficiente γ_e comparado ao valor exato.

Da figura 4.24, verifica-se que os valores gerados pela função γ_e , dada por (4.55), comparam-se muito bem com aqueles produzidos pela solução exata correspondente. Apesar disto, no presente trabalho implementa-se uma função mais simples no intuito de reduzir o número de operações aritméticas durante a execução do código computacional. Esta função obteve-se observando o comportamento do coeficiente γ (vide figura 4.24) o qual é muito parecido com aquele do coeficiente γ da interpolação de dois pontos (vide figura 4.19). Desta maneira, por tentativa e erro, manipularam-se os coeficientes da equação (4.45), até obter uma função que apresenta um excelente comportamento quando comparada com a função exata (ver figura 4.25), e que se pode escrever como:

$$\gamma_e = \frac{3\lambda(|\lambda|^3 + 8)}{3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 96} \tag{4.56}$$

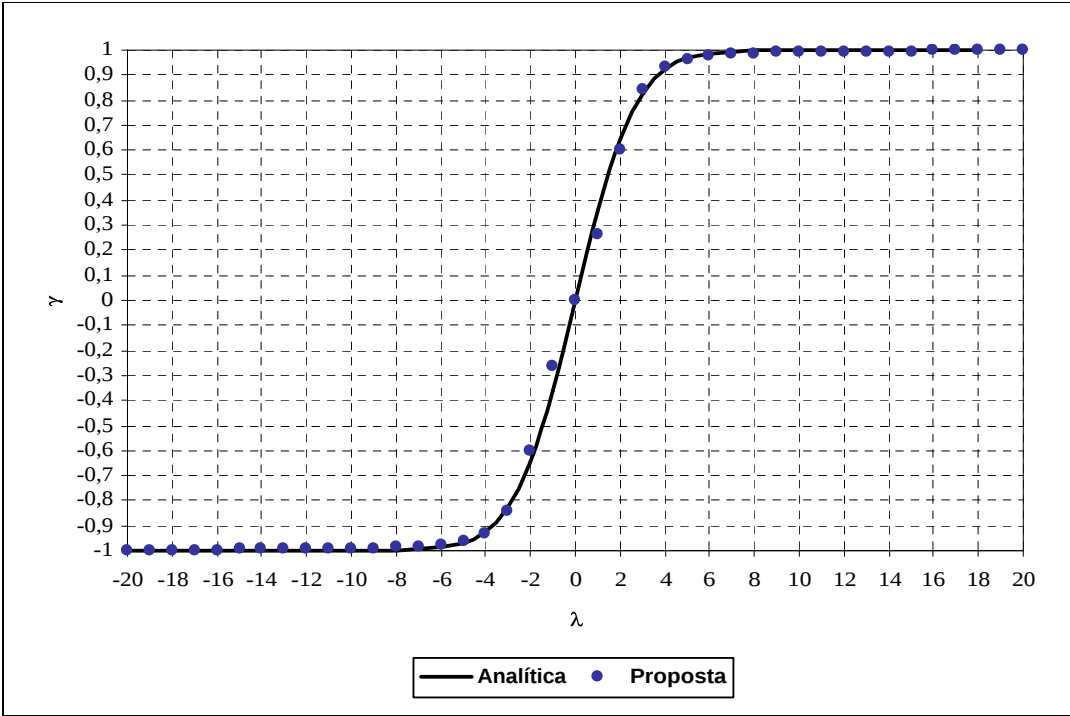


Fig. 4.25. Coeficiente γ_e proposto (equação 4.56).

Agora, deriva-se, com relação a ξ , a função ϕ_3 dada por (4.37). Avaliando o resultado em $\xi = 0$, obtém-se o seguinte resultado para a derivada da variável ϕ na face leste do volume de controle v_1 mostrado na figura 4.23.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \beta_{1e} (q_1 - q_4) + \beta_{2e} (q_3 - q_2) \quad (4.57)$$

onde β_{1e} e β_{2e} estão dados pelas expressões:

$$\beta_{1e} = \frac{\beta_e}{24} \quad (4.58)$$

$$\beta_{2e} = \frac{1}{8} (8 + \beta_e) \quad (4.59)$$

com β_e definido por:

$$\beta_e = \frac{36|\lambda|^7 + 1728|\lambda|^5 - 5120\lambda^4 + 13824|\lambda|^3 - 3072\lambda^2 + 245760}{27\lambda^8 + 240\lambda^6 + 640\lambda^4 + 30720\lambda^2 + 245760} \quad (4.60)$$

Os valores gerados por (4.60) são comparados com os fornecidos pela solução exata na figura 4.26, verificando-se que tal função não produz valores muito bons. Felizmente, aplicando o mesmo procedimento descrito quando apresentou-se a equação (4.50) e depois de observar um comportamento similar do coeficiente β_e nas interpolações de 2 pontos e de 4 pontos (vide figuras 4.21 e 4.26), pôde-se encontrar uma função, para β_e , mais simples e bem precisa (vide figura 4.27). Dita função escreve-se a seguir:

$$\beta_e = \frac{5000}{37\lambda^4 + 529\lambda^2 + 5000} \quad (4.61)$$

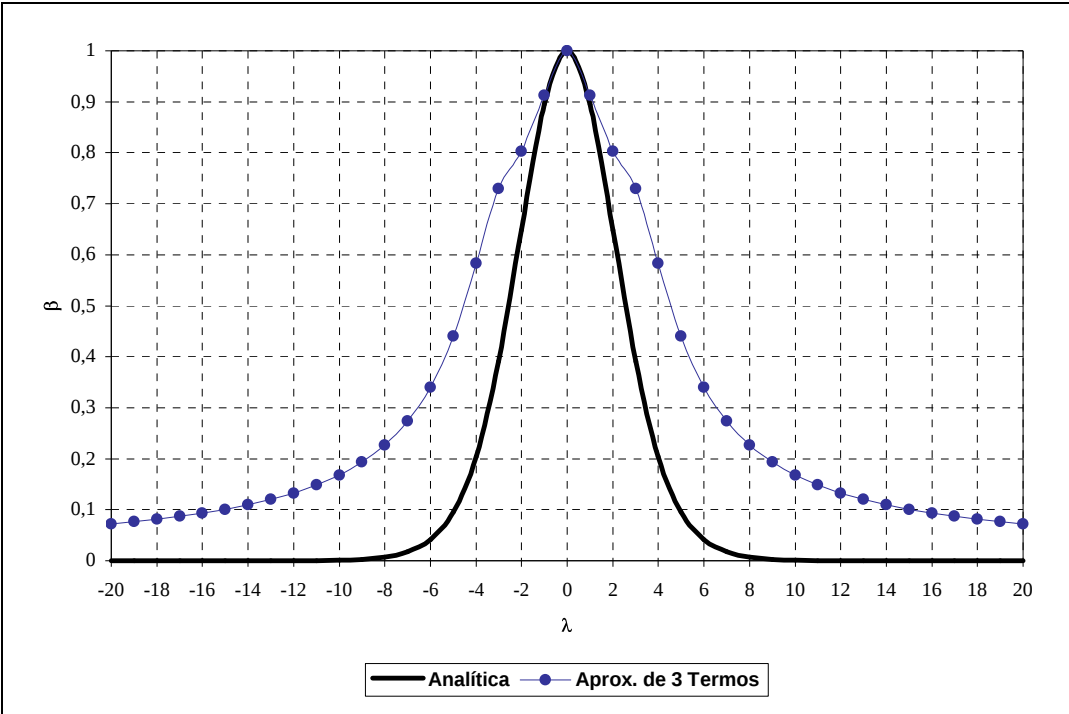


Fig. 4.26. Coeficiente β_e comparado ao valor exato.

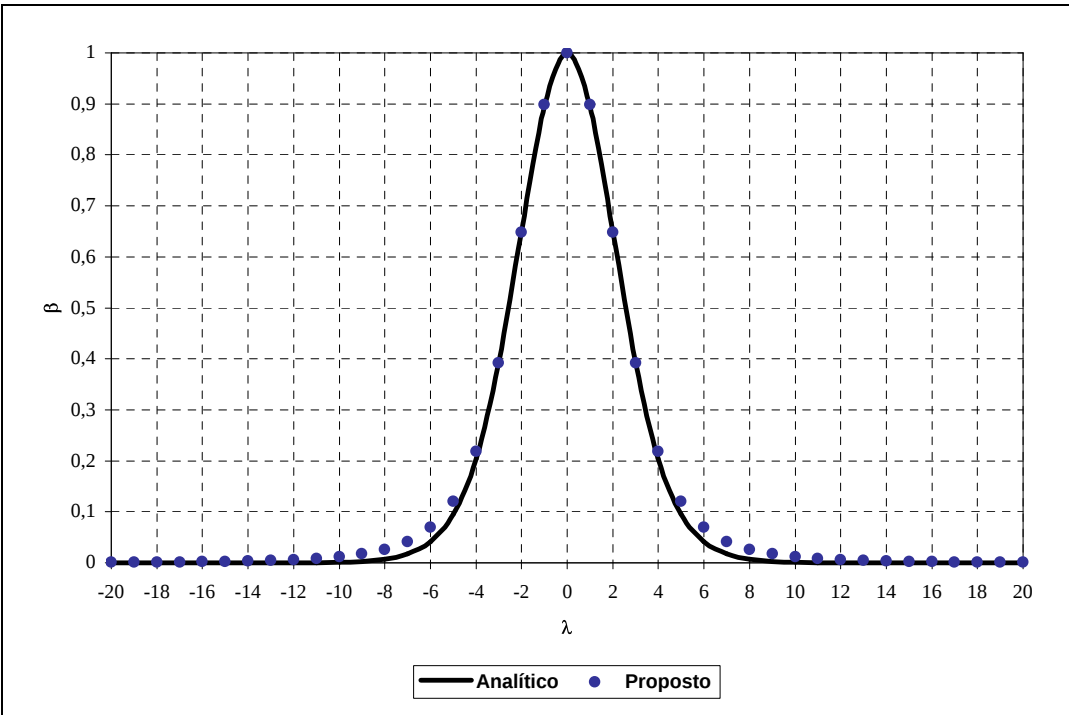


Fig. 4.27. Coeficiente β_e proposto (equação 4.61).

De acordo com a equação (4.54) e a figura 4.25, esta nova formulação comporta-se como um esquema centrado de quarta ordem quando $\lambda = 0$, ou seja em pontos do domínio com zero convecção. Para pontos do domínio com alta convecção, quer dizer para grandes valores de $|\lambda|$, a função recai em um esquema QUICK. Este novo esquema vai ser denominado daqui para frente como esquema HOWUDS (*High Order Weighted Upstream Differencing Scheme*).

Da discussão acima, espera-se que o esquema aqui proposto apresente baixo erro de truncamento. Tal erro é determinado, expressando a função de interpolação como:

$$\phi_e = -\frac{1}{16}(1+\gamma_e)\phi_{i-1} + \frac{3}{16}(3+\gamma_e)\phi_i + \frac{3}{16}(3-\gamma_e)\phi_{i+1} - \frac{1}{16}(1-\gamma_e)\phi_{i+2} \quad (4.62)$$

e logo substituindo ϕ_{i-1} , ϕ_i , ϕ_{i+1} e ϕ_{i+2} expandidos em série de Taylor ao redor de ϕ_e . O resultado, apresentado a seguir, mostra que neste esquema o erro de truncamento é de terceira ordem, caracterizando um esquema com baixa difusão e dispersão numérica.

$$\phi_e = \phi_e + \frac{\gamma_e}{16} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_e \Delta x^3 - \frac{1}{128} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_e \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (4.63)$$

4.4 Validação do Esquema HOWUDS

No intuito de demonstrar a validade do esquema HOWUDS descrito anteriormente, este se implementa em um código computacional para resolver os problemas de propagação de uma onda com velocidade finita e a propagação de uma onda de choque. Estes problemas foram escolhidos devido a que são modelados por equações de convecção-difusão e, sob determinadas condições, têm solução analítica conhecida.

4.4.1 Equação Linear da onda

A equação (4.64), conhecida como a equação linear da onda, representa o transporte de uma quantidade escalar ϕ em um escoamento com

velocidade uniforme U_{∞} . Esta equação modela uma onda se propagando com velocidade finita sem perder sua forma no tempo dado que não há difusão.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.64)$$

O problema vai ser resolvido com a seguinte condição inicial

$$\phi(x, 0) = \sin(m\pi x) \quad (4.65)$$

onde m é o número de ondas no intervalo $[-1, 1]$.

Com a condição de contorno

$$\phi(-1, t) = \sin[m\pi(-1 - U_{\infty}t)] \quad (4.66)$$

encontra-se a solução analítica dada a seguir.

$$\phi(x, t) = \sin[m\pi(x - U_{\infty}t)] \quad (4.67)$$

Obtiveram-se resultados para $m = 2,5$ e $U_{\infty} = 1$, encontrando-se que a solução numérica acompanha muito bem à solução analítica quando se usa o esquema convectivo aqui proposto (HOWUDS); enquanto que a solução dada pelo esquema WUDS apresenta muita difusão numérica deformando a onda com o tempo. Isto se pode verificar na figura 4.28, onde apresenta-se a solução para $t = 3s$, e na figura 4.29 que mostra a distribuição espacial do erro de ambas as soluções.

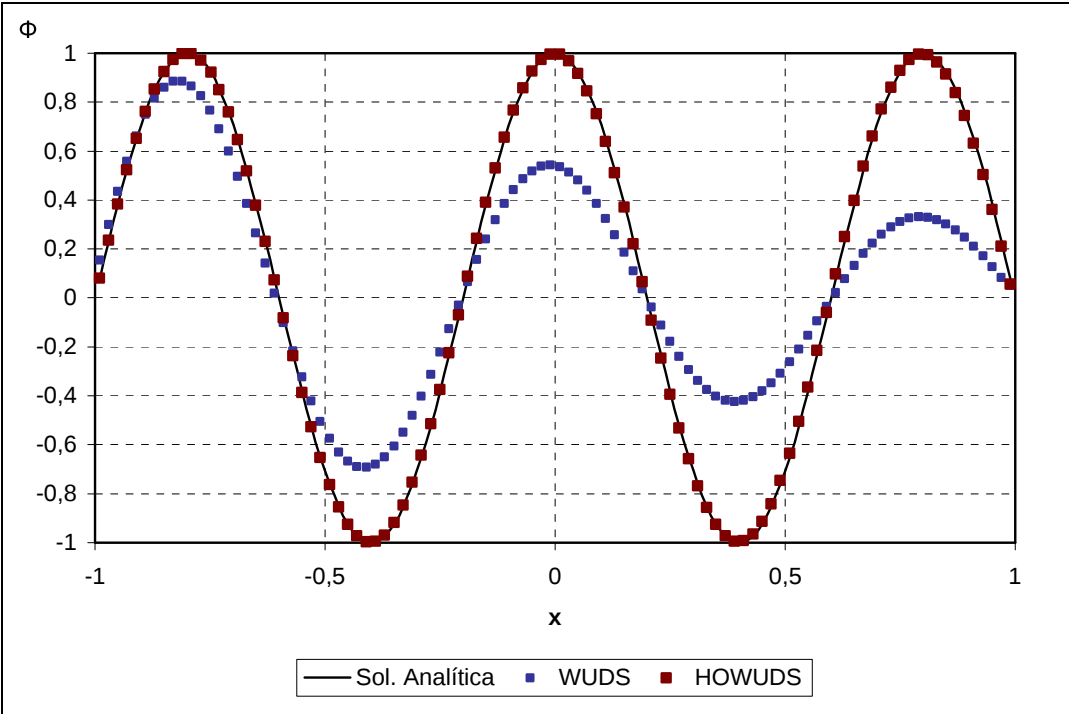


Fig. 4.28. Solução da Equação da Onda $[m = 2,5]$.

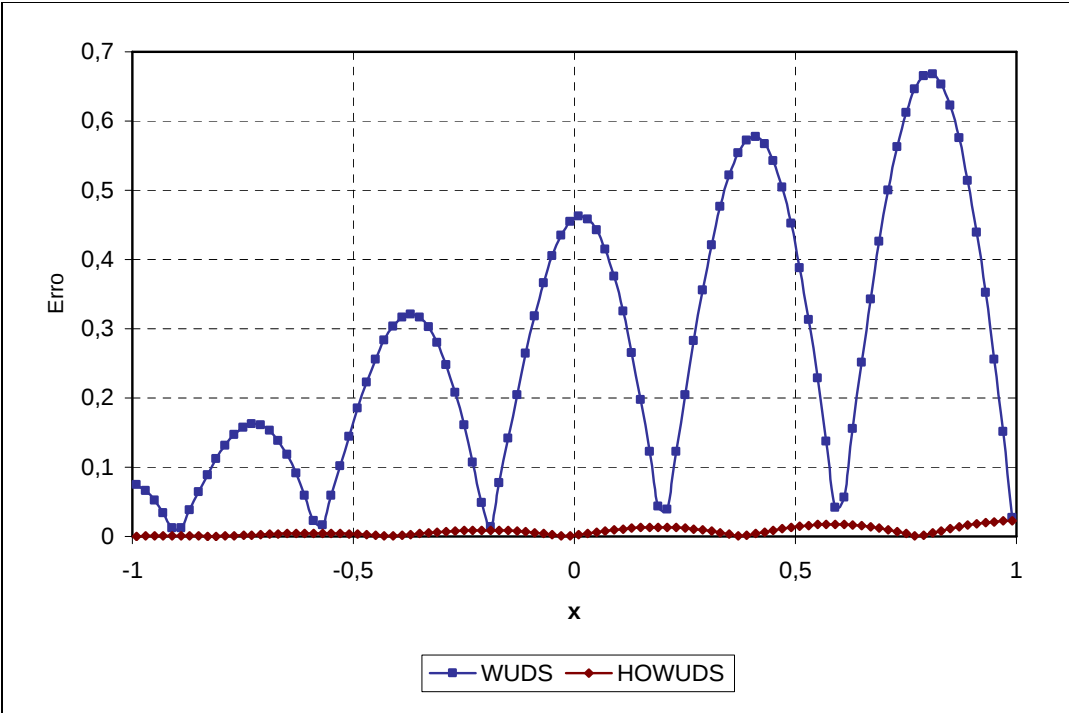


Fig. 4.29. Distribuição Espacial do Erro $[m = 2,5]$.

4.4.2 Propagação de uma Onda de Choque

A propagação de uma onda de choque unidimensional vem dada pela equação de Burgers, representada na sua forma adimensional da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.68)$$

A onda se propaga à direita e é suavizada, com o tempo, por um processo viscoso dissipativo. Para simular isto se aplica o método dos volumes finitos em conjunto com o esquema HOWUDS.

Nas simulações usaram-se como condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(-1, t) &= 1 \\ u(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

e como condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (4.70)$$

Com as condições dadas acima, o problema tem solução analítica a qual se usa para verificar a capacidade do esquema proposto para acompanhar com precisão a variação no tempo da onda de choque.

O problema foi resolvido para diferentes números de Reynolds, com uma discretização espacial $\Delta x = 0,01$ e uma discretização temporal $\Delta t = 0,01$, ambas adimensionais pela mesma condição do problema.

A figura 4.30 mostra a solução numérica obtida usando o esquema HOWUDS, para um número de Reynolds igual a 50. Nesta figura também se representa a solução analítica para o mesmo número de Reynolds. Pode-se verificar que o

esquema proposto consegue acompanhar, com excelente precisão, a variação no tempo da velocidade de avanço, $u(x,t)$, da onda de choque.

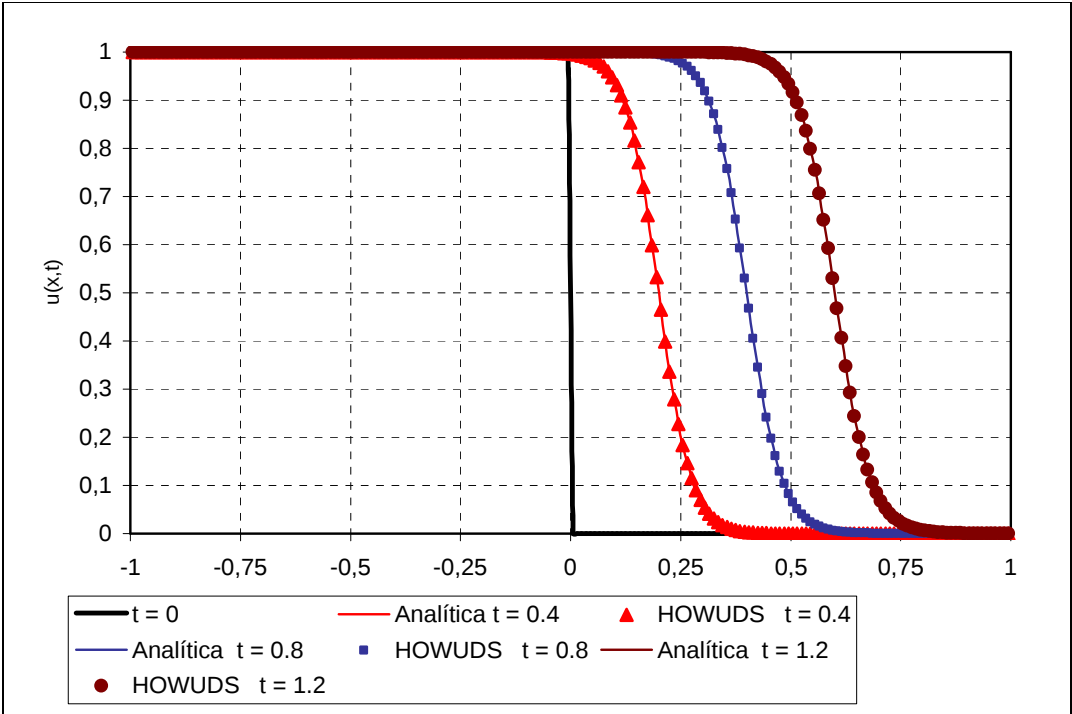


Fig. 4.30. Solução, no tempo, da equação viscosa de Burgers para $Re = 50$.

As mesmas conclusões obtêm-se da figura 4.31, onde se mostra a solução obtida com o esquema HOWUDS, comparada com a solução analítica, para um número de Reynolds quatro vezes maior, quer dizer $Re = 200$, mantendo-se iguais os outros parâmetros.

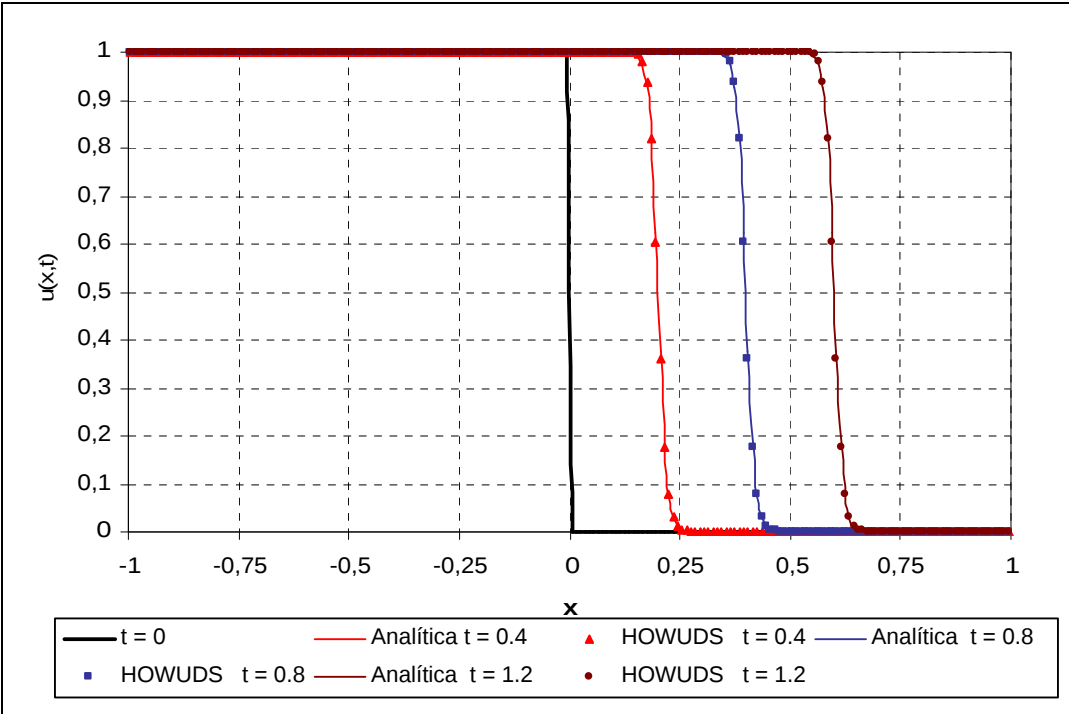


Fig. 4.31. Solução, no tempo, da equação viscosa de Burgers para $Re = 200$

4.4.3. Conclusões

Os resultados dos testes anteriores sugerem que o novo esquema de interpolação proposto para os termos convectivos tem baixa difusão numérica e boa estabilidade. Dadas estas observações, o esquema HOWUDS implementou-se no algoritmo computacional desenvolvido no presente trabalho. Este algoritmo usou-se para obter soluções numéricas das equações de Navier-Stokes (ENS) em escoamentos altamente convectivos e com forte recirculação e seus resultados se apresentam nos próximos capítulo.

VALIDAÇÃO DO ALGORITMO NUMÉRICO

5.1 Introdução

O esquema de interpolação de alta ordem (HOWUDS) apresentado no capítulo anterior é implementado num código computacional que discretiza as equações de Navier-Stokes em coordenadas curvilíneas generalizadas usando o método dos volumes finitos e avançando a solução no tempo através de um esquema tipo projeção implementado tanto explícita quanto implicitamente. Usam-se rotinas MPI para fazer cálculos em paralelo usando o método da decomposição de domínio.

Para validar o esquema numérico resultante escolheu-se simular o escoamento numa cavidade quadrada. A razão disto é que este problema inclui características que são comuns em escoamentos complexos encontrados na prática da engenharia o qual o converte em candidato idôneo para este tipo de tarefa. Neste contexto resolve-se o problema em duas e três dimensões para diversos números de Reynolds.

Os resultados obtidos nas simulações comparam-se com soluções numéricas freqüentemente referenciadas na literatura sobre CFD. Destas comparações conclui-se que o esquema HOWUDS possui baixa difusão e dispersão numérica, apresentando boa estabilidade quando se tratam escoamentos que apresentam fortes recirculações.

5.2. Escoamento numa Cavidade Bidimensional com Tampa Deslizante

Este problema envolve o escoamento de um fluido dentro de um recipiente quadrilátero com paredes paralelas. O movimento do fluido dentro da cavidade é provocado pelo deslocamento horizontal, com velocidade uniforme, da parede superior. O movimento da tampa produz tensões e eventualmente cria vórtices estacionários cuja quantidade e localização vão depender do número de Reynolds.

O problema do escoamento numa cavidade é usado extensivamente para testar soluções numéricas das equações de Navier Stokes a despeito de apresentar severas dificuldades pelas singularidades que aparecem nos cantos superiores e do

seu caráter fisicamente pouco realístico devido à descontinuidade do campo da velocidade.

A figura 5.1 é uma representação esquemática de uma cavidade onde se mostram as dimensões e condições de contornos usadas no presente estudo.

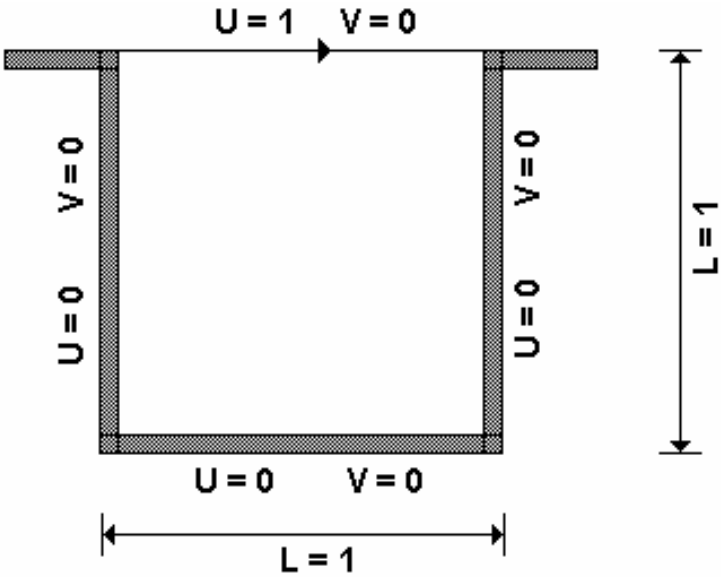


Fig. 5.1. Geometria e condições de contorno usadas nos testes com a Cavidade

Na simulação da cavidade, fez-se uso de malhas uniformes, ortogonais, com linhas paralelas às paredes da cavidade.

Foram efetuados testes para números de Reynolds abrangendo desde 100 até 10000, destacando-se no trabalho os resultados para 1000 e 5000. Nesta faixa de números de Reynolds o escoamento alcança um estado estacionário.

Nestes testes o número de Reynolds é definido como $Re = UL / \nu$, onde U é a velocidade do fluido no topo, L é o comprimento dos lados e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Os testes só terminam quando as condições do escoamento chegam a ser estacionárias. Assume-se um fluido inicialmente em repouso o qual sai dessa condição pelo movimento da parede superior a partir de $t=0$.

Realizaram-se diferentes simulações com a finalidade de estudar os efeitos que o refinamento da malha e o número de Reynolds têm sobre a solução. Estudou-se também a capacidade do esquema para capturar os efeitos transientes do

escoamento, e finalmente, verificou-se que a estratégia de paralelização implementada mantém a precisão do esquema.

5.2.1 Estudo da Dependência da Solução com a Malha

Para estudar o efeito da malha sobre a solução, se realizaram provas em malhas uniformes com diferentes graus de refinamento. Neste sentido testaram-se malhas de 16x16, 32x32, 64x64 e 128x128 volumes.

Escolheram-se como parâmetros de estudo, os perfis da componente u da velocidade ao longo de $x = 0,5$ e da componente v da velocidade ao longo de $y = 0,5$.

Na figura 5.2 apresenta-se a variação do perfil da componente u da velocidade a medida que se refina a malha para um número de Reynolds igual a 1000. Observa-se como muda a solução na medida que se aumenta o refino da malha, tendo-se soluções praticamente idênticas para malhas de 64x64 e de 128x128, indicando que para o grau de refinamento da malha 64x64, o esquema numérico provê uma solução convergida de u para este nível de número de Reynolds. Isto se pode verificar na figura 5.3 onde se mostra a diferença (erro absoluto) da solução do perfil de velocidade u fornecida pelas malhas de 16x16, 32x32 e 64x64 com relação à solução provida pela malha 128x128; aqui comprova-se que a solução com a malha de 64x64 já é satisfatória.

As mesmas conclusões podem-se extrair da figura 5.4, onde se apresenta a variação da componente v da velocidade ao longo de $y = 0,5$, para as mesmas malhas e mesmo número de Reynolds. A figura 5.5, que apresenta a diferença entre a solução fornecida pela malha 128x128 com a fornecida pelas outras malhas, ratifica que a solução com a malha 64x64 já é satisfatória.

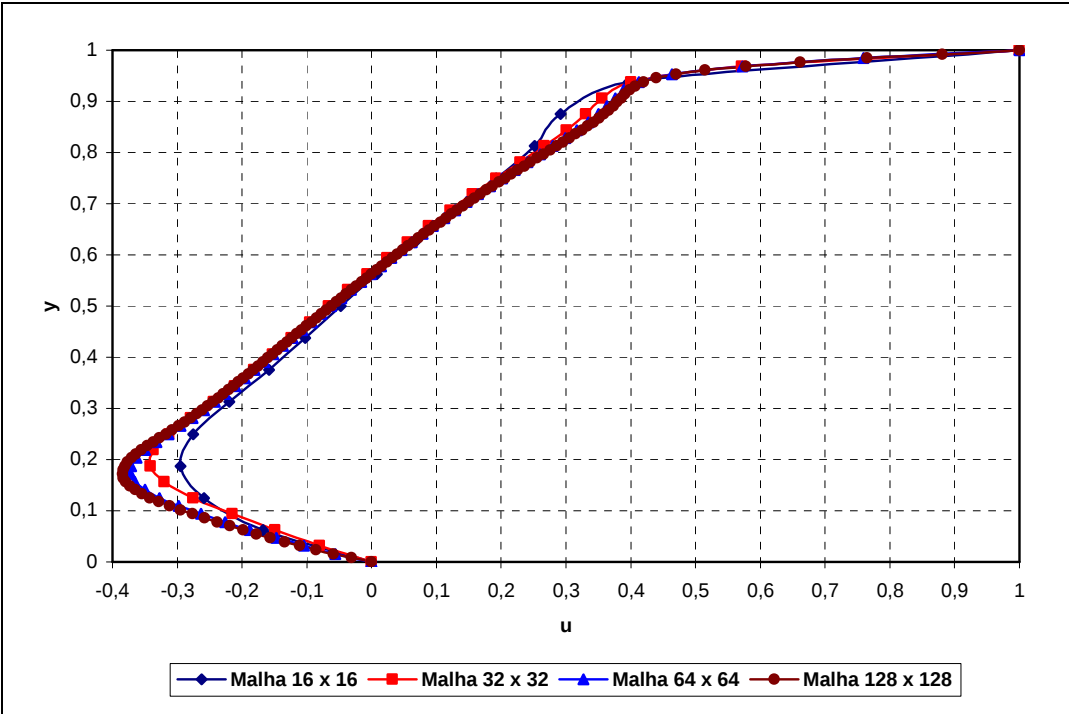


Fig. 5.2. Convergência de solução da componente u da velocidade para $x = 0,5$ e $Re=1000$, para diferentes graus de refinamento da malha.

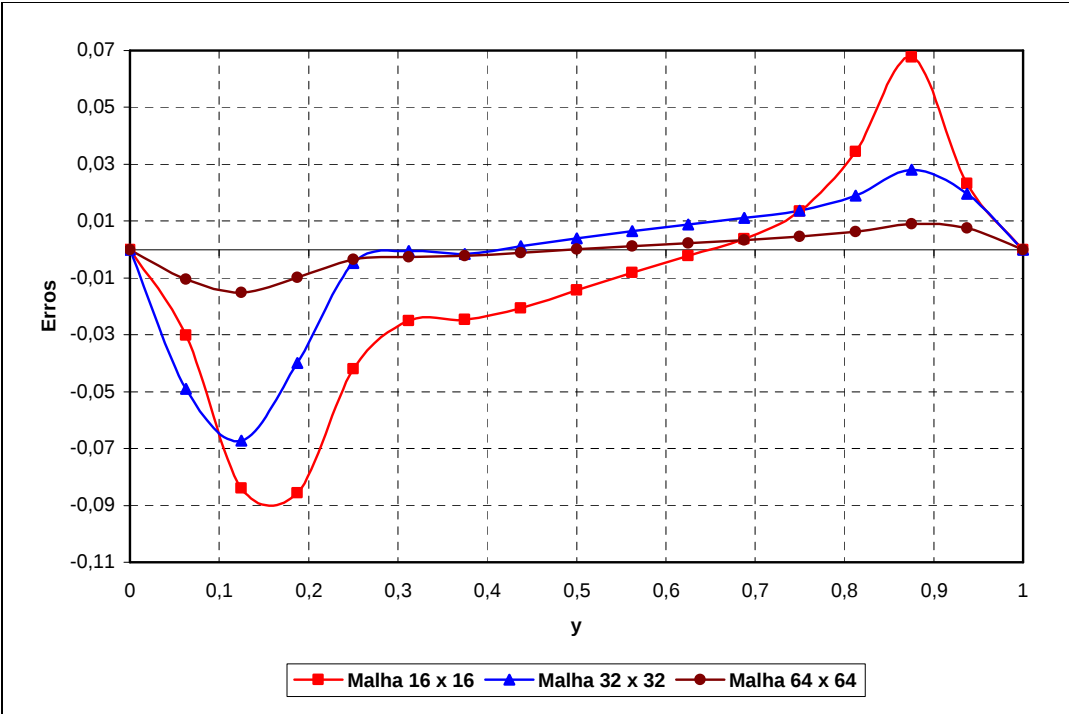


Fig. 5.3. Diferença na Solução do Perfil da Velocidade u na medida que se Refina a Malha.

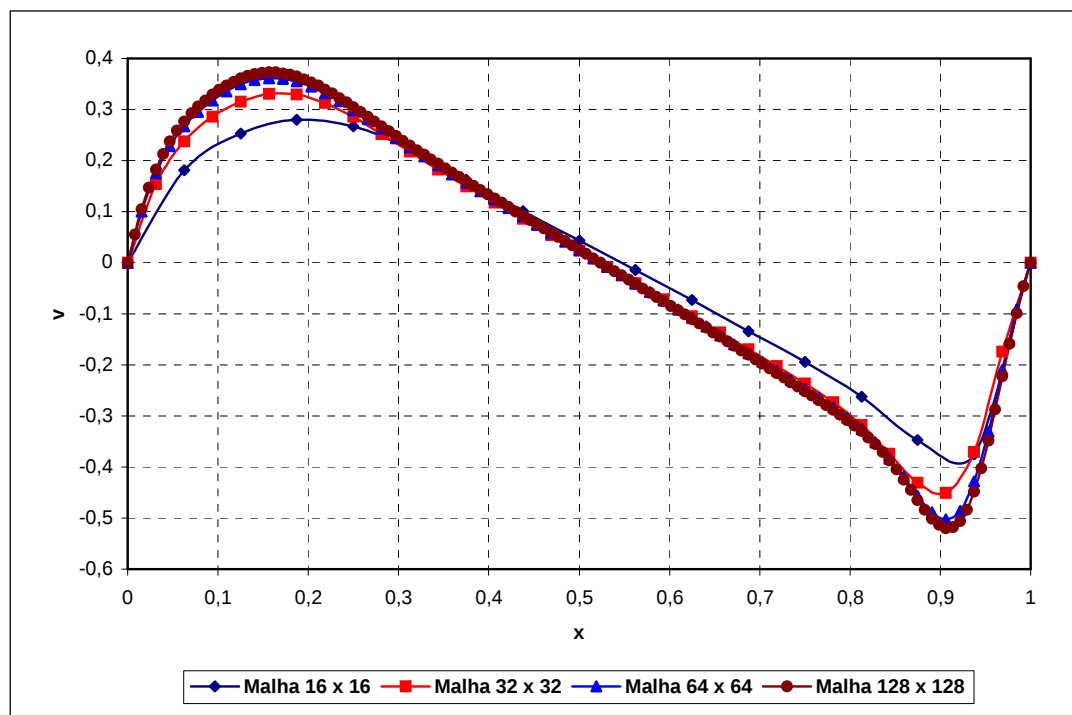


Fig. 5.4. Convergência de solução da componente v da velocidade para $y = 0,5$ e $Re=1000$, para diferentes graus de refinamento da malha.

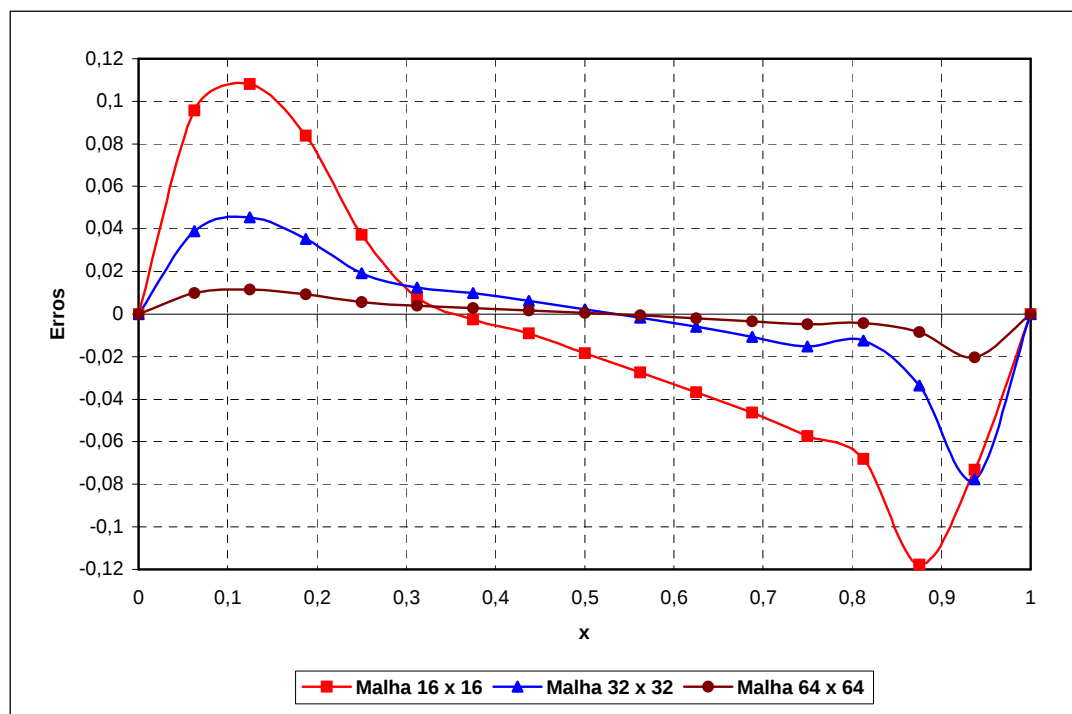


Fig. 5.5. Diferença na Solução do Perfil da Velocidade v na medida que se Refina a Malha.

Fez-se o mesmo estudo para um número de Reynolds igual a 5000. Aqui as soluções para a componente u da velocidade ao longo de $x = 0,5$ com malhas 64×64 e 128×128 são muito parecidas exceto na região perto da parede inferior onde se apresentam fortes gradientes da velocidade, tal como pode-se observar na figura 5.6. Esta discrepância pode ser corrigida aumentando o refinamento da malha perto dos contornos.

Na figura 5.7, apresenta-se a variação da componente v da velocidade ao longo de $y = 0,5$ para diferentes malhas e um número de Reynolds igual a 5000. Esta velocidade apresenta fortes gradientes perto das paredes pelo que a solução é mais exigente no que diz respeito ao refinamento da malha, tal como se pode deduzir da figura. Poder-se-ia refinar a malha ainda mais, mas para fins deste trabalho considera-se satisfatória a solução para uma malha 128×128 .

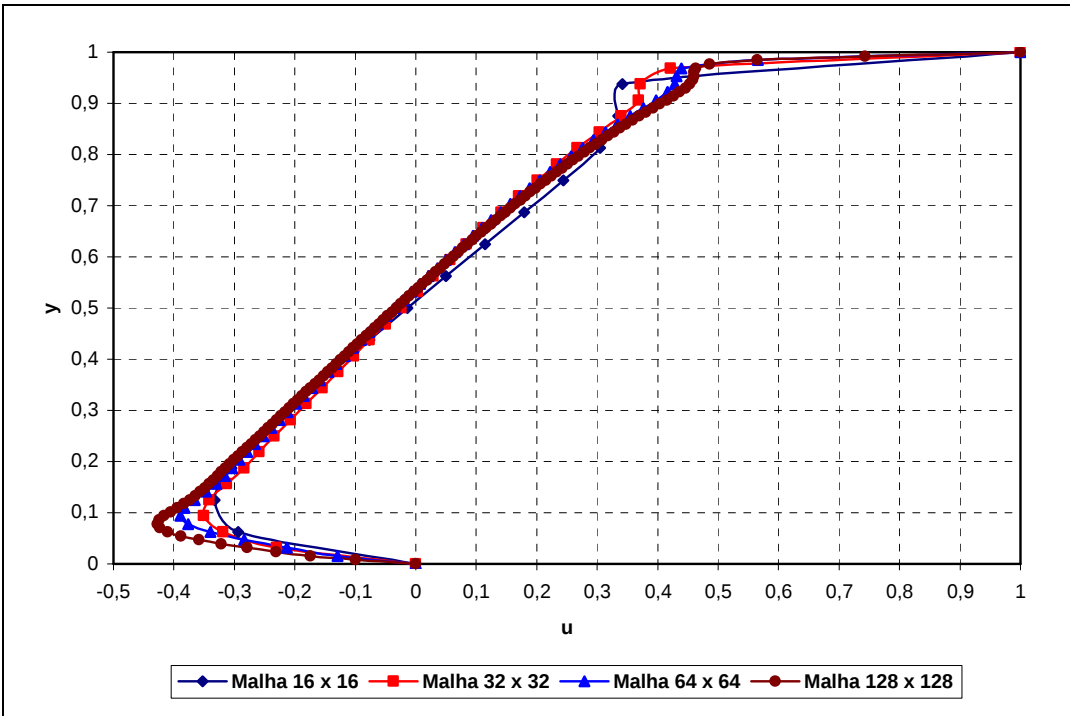


Fig. 5.6. Convergência de solução da componente u da velocidade para $x = 0,5$ e $Re = 5000$, para diferentes graus de refinamento da malha.

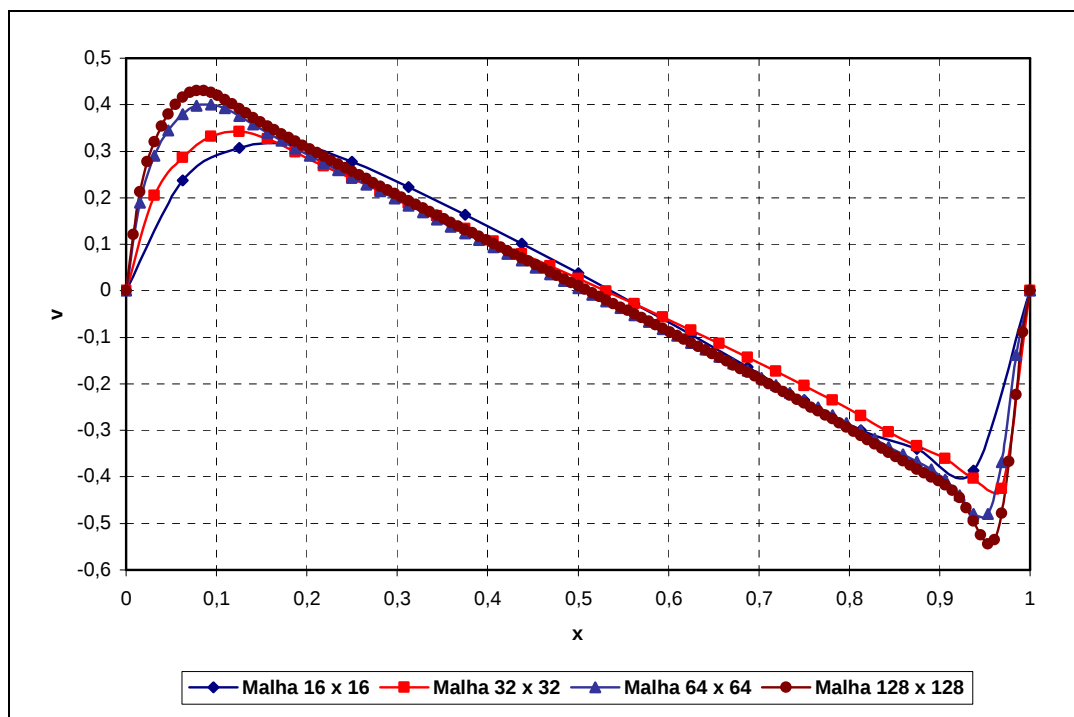


Fig. 5.7. Convergência de solução da componente v da velocidade para $y = 0,5$ e $Re=5000$, para diferentes graus de refinamento da malha.

Para verificar que se têm soluções apropriadas tal como se assegurou acima, recorre-se a resultados aparecidos na literatura com a finalidade de compará-los com os obtidos aqui. Neste sentido, dispõe-se das soluções tipo *benchmark* apresentadas no trabalho de BOTELLA e PEYRET (1998), que obtiveram seus resultados para um número de Reynolds igual a 1000, usando métodos espectrais com a velocidade aproximada por um polinômio de grau $N = 160$.

Os resultados para $Re = 1000$, obtidos no presente trabalho para malhas 64×64 comparam-se muito bem com os apresentados no trabalho de BOTELLA e PEYRET tal como se pode apreciar nas figuras 5.8 e 5.9, apresentando algumas discrepâncias perto dos contornos. Para melhorar estes resultados, usou-se uma malha de 64×64 volumes, porém, mais refinada nos contornos; os perfis de velocidade fornecidos por esta malha também se apresentam nas figuras 5.8 e 5.9. É evidente a melhora na solução perto do contorno. Neste ponto é importante lembrar que o código foi desenvolvido usando as equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas curvilíneas generalizadas, pelo que o refino da malha pode-se fazer sem ter que mudar o programa computacional. É só gerar a malha e executar o programa nessa malha.

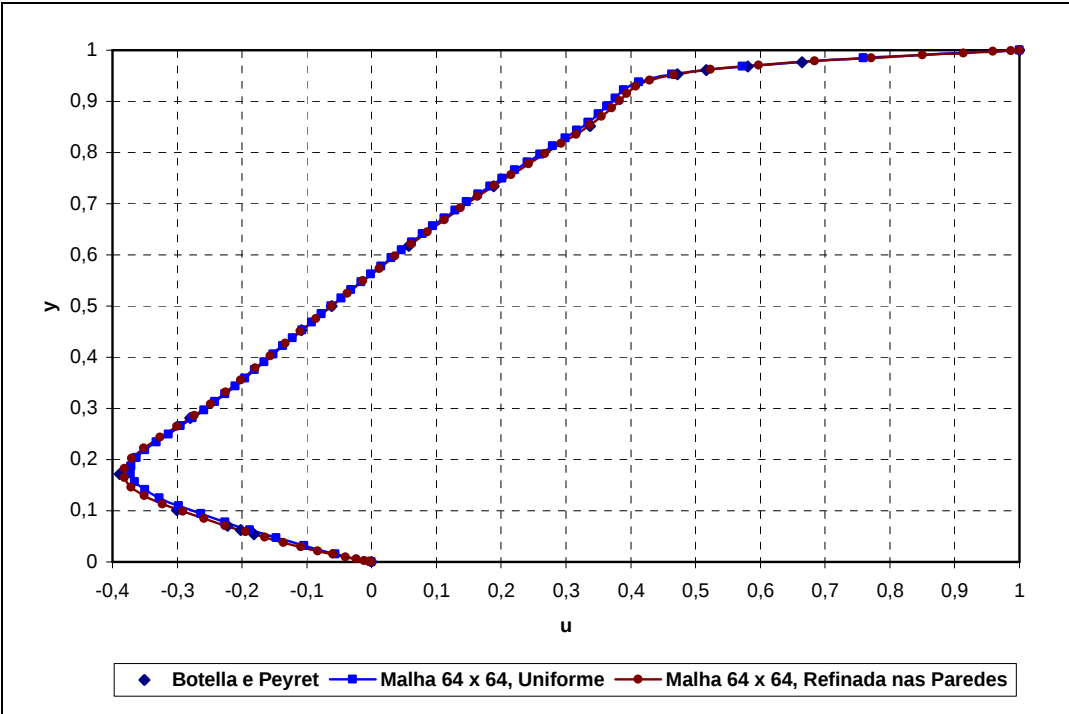


Fig. 5.8. Perfil da velocidade u no centro de cavidade para $Re = 1000$.

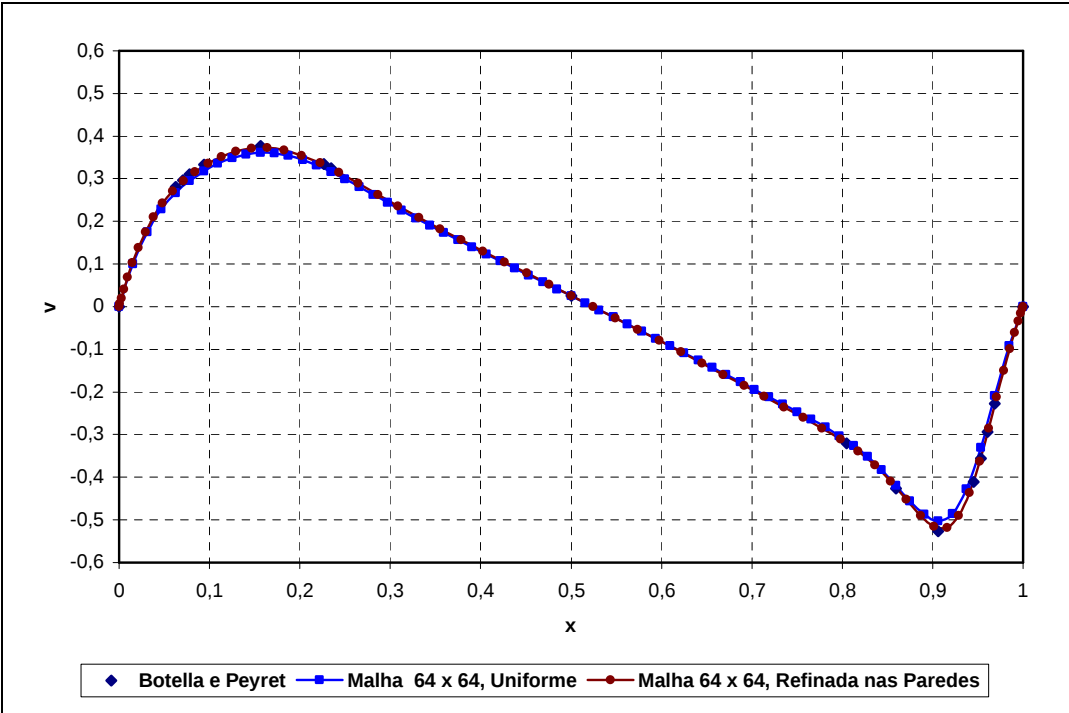


Fig. 5.9. Perfil da velocidade v no centro de cavidade para $Re = 1000$.

5.2.2. Efeito do Número de Reynolds sobre a Solução

Como descrito acima, fizeram-se testes para números de Reynolds iguais a 1000 e 5000. Os contornos das linhas de corrente para cada um deles, obtidos através do esquema numérico proposto no presente trabalho, são mostrados na figura 5.10 e 5.11.

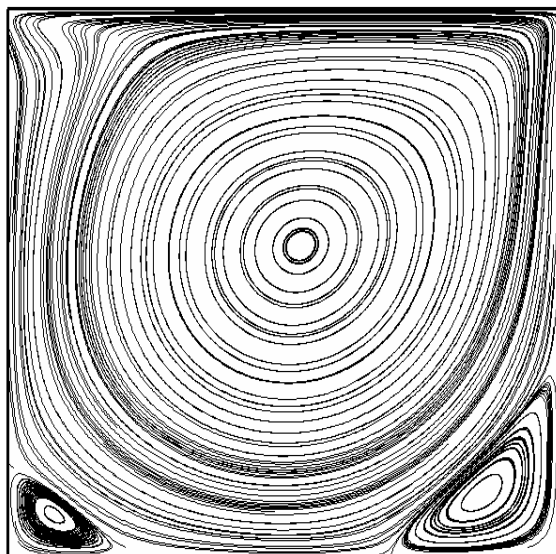


Fig. 5.10. Linhas de Correntes para $Re = 1000$ (64x64)

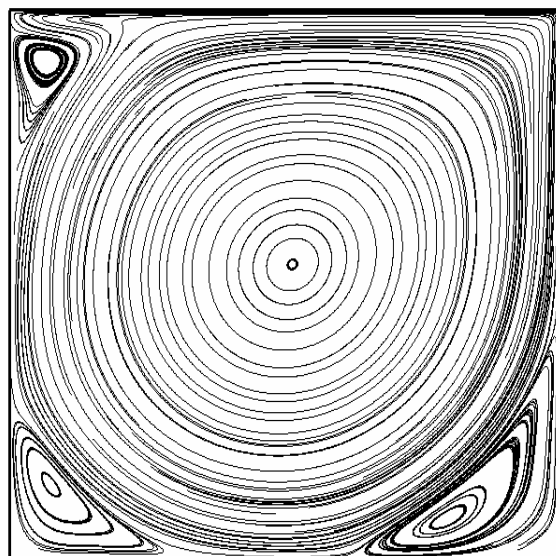


Fig. 5.11. Linhas de Correntes para $Re = 5000$ (Malha 128x128)

Estas figuras servem para verificar que a quantidade de vórtices que se forma na cavidade depende do número de Reynolds. Como se esperava, para $Re = 1000$ aparecem três vórtices estacionários, um que abarca quase toda a cavidade e cujo centro está localizado próximo ao centro geométrico desta e outros dois, de menor intensidade, localizados nos cantos inferiores. Para um Reynolds de 5000, o número de vórtices que se forma aumenta para quatro aparecendo um outro no canto superior esquerdo, tal como se aprecia na figura 5.11.

Para verificar que o código numérico está capturando em forma correta a estrutura do escoamento, verifica-se a posição do centro dos vórtices dentro da cavidade. Nesse sentido, usam-se como referência os resultados publicados por GHIA et al. (1982), que usaram o método dos elementos finitos nas suas simulações. Eles empregaram uma malha 129×129 para simular escoamentos com número de Reynolds igual a 1000, e uma malha 257×257 , para um Reynolds igual a 5000.

A comparação dos resultados mostra-se na tabela 5.1, onde se apresentam as coordenadas dos centros dos vórtices usando a nomenclatura que se explica na figura 5.12. Nesta tabela observa-se que a concordância é excelente, mostrando que o código é capaz de capturar os detalhes deste escoamento que apresenta alta recirculação.

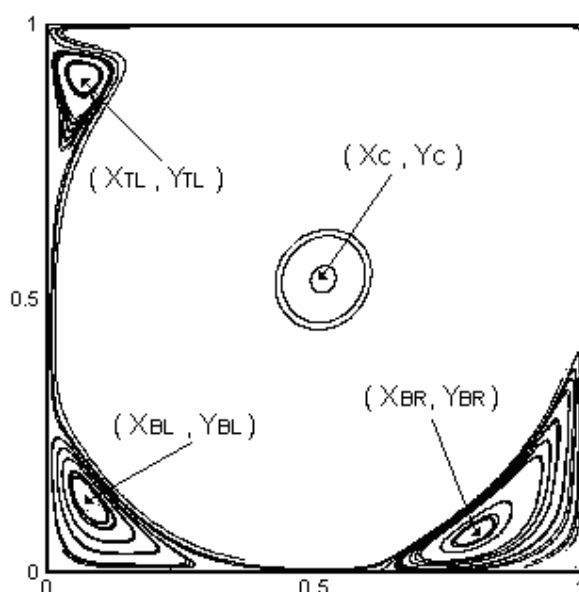


Fig. 5.12. Nomenclatura Usada para Descrever a Posição dos Vórtices.

Tabela 5.1. Resultados da Posição dos Vórtices.

Re	Posição do Vortice	Ghia et al.	Presente
1000	$(x_C ; y_C)$	(0.5313,0.5625)	(0.531,0.568)
	$(x_{BR} ; y_{BR})$	(0.8594,0.1094)	(0.860,0.114)
	$(x_{BL} ; y_{BL})$	(0.0859,0.0781)	(0.083,0.076)
5000	$(x_C ; y_C)$	(0.5117,0.5352)	(0.514,0.536)
	$(x_{BR} ; y_{BR})$	(0.8086,0.0742)	(0.797,0.074)
	$(x_{BL} ; y_{BL})$	(0.0703,0.1367)	(0.073,0.135)
	$(x_{TL} ; y_{TL})$	(0.0625,0.9102)	(0.065,0.908)

5.2.3. Estudo dos Efeitos Transiente do Escoamento

Com a finalidade de verificar se o esquema de solução proposto é capaz de acompanhar a evolução temporal do escoamento, simulou-se este para um número de Reynolds igual a 1000. A estratégia consistiu em simular o movimento da tampa da cavidade com uma velocidade unitária a partir de um instante no qual o fluido está em completo repouso e desde esse momento começou-se a tomar nota das alterações do escoamento.

Os resultados desta simulação se apresentam na figura 5.13, onde para fins de comparação também se apresentam os resultados obtidos por GRIEBEL et al. (1998). Aqui a evolução no tempo do escoamento na cavidade é descrita pelas mudanças que sofrem as linhas de correntes em diferentes intervalos de tempo. Qualitativamente estes resultados estão em boa concordância com os apresentados por GRIEBEL et al., tal como pode-se verificar da figura, mostrando que o esquema de avanço temporal implementado consegue acompanhar a evolução deste escoamento.

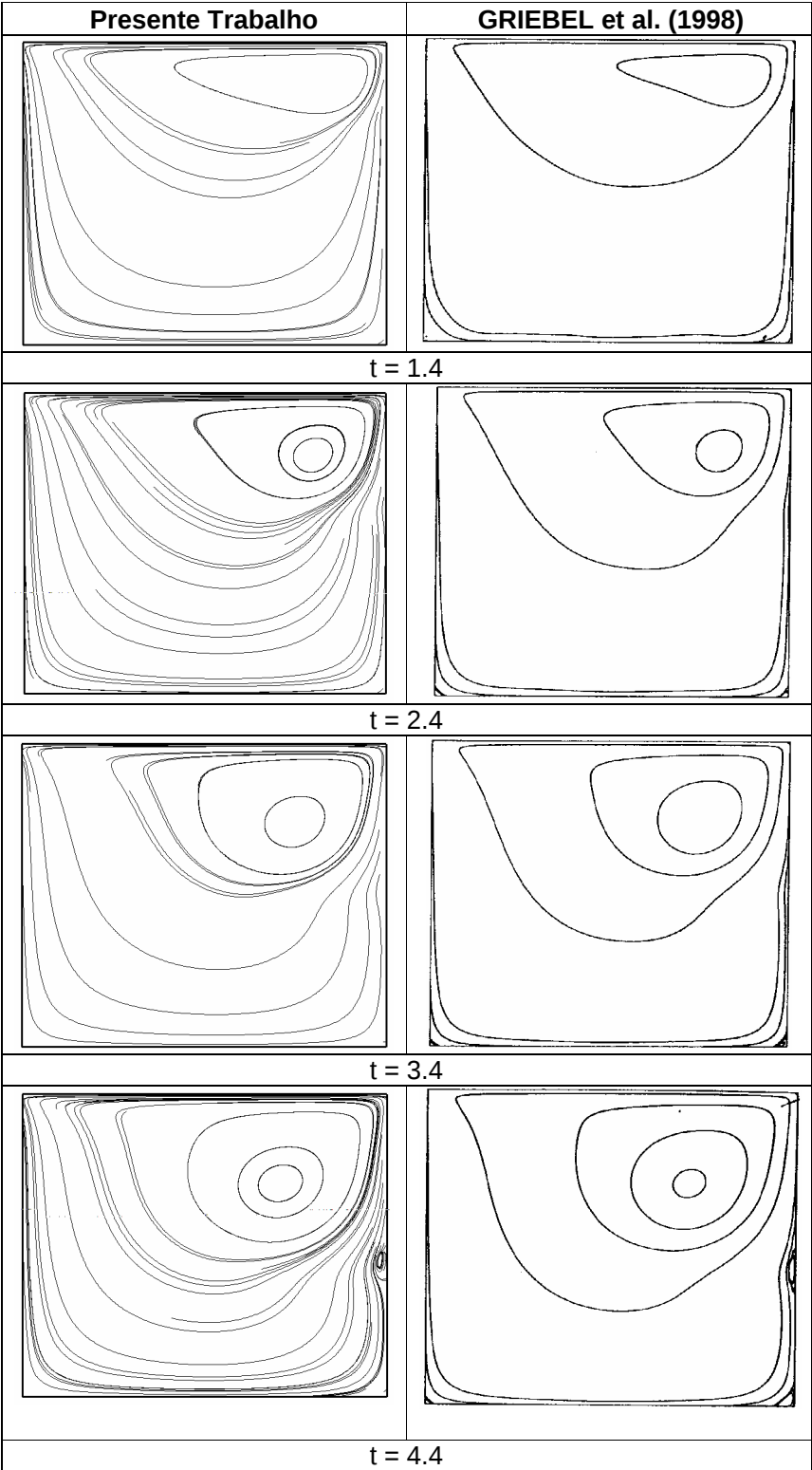


Fig. 5.13. Evolução Temporal das linhas de corrente para $Re = 1000$

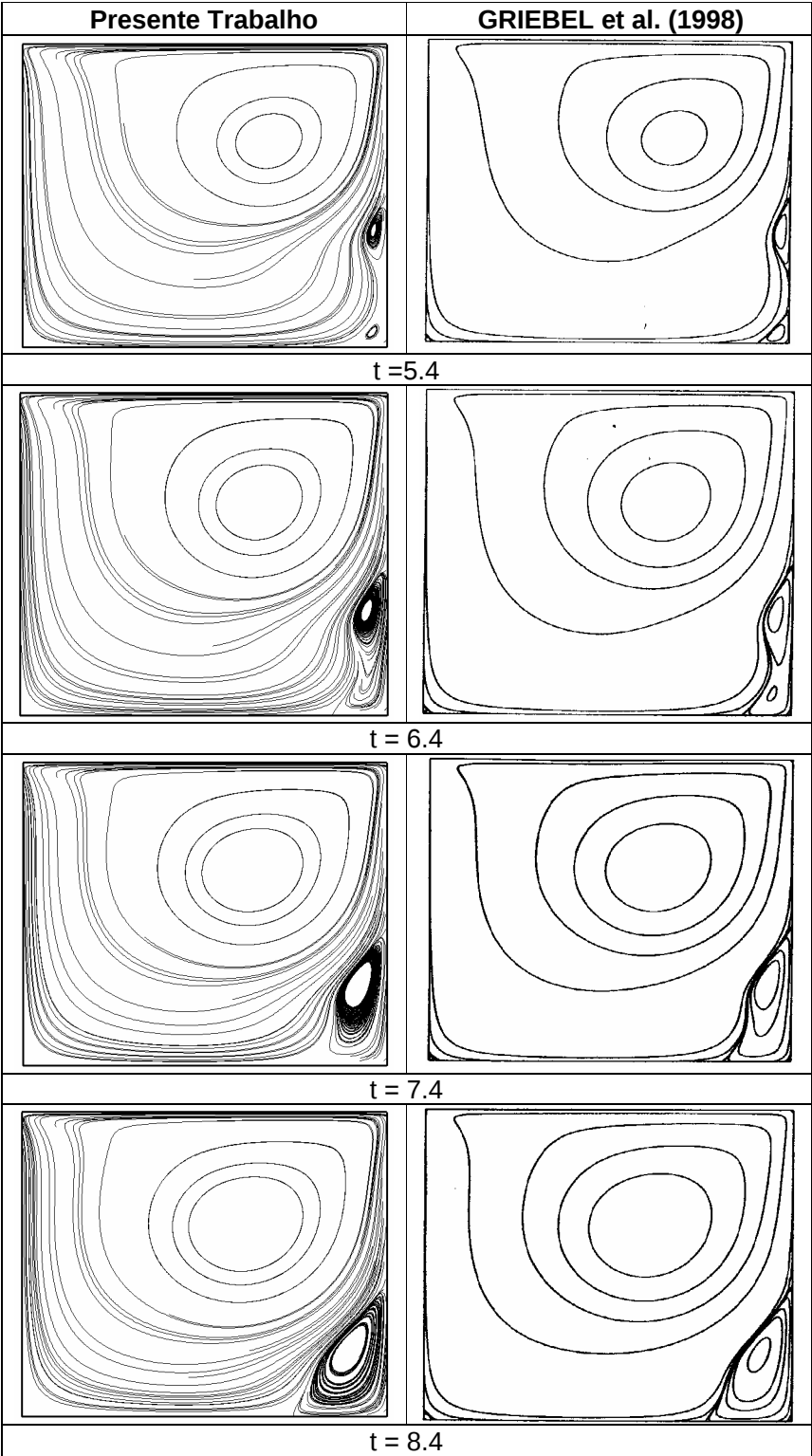


Fig. 5.13. (Continuação)

5.2.4. Estudo do Esquema de Solução em Paralelo

No intuito de verificar se o esquema de cômputo em paralelo, implementado no código, executa-se satisfatoriamente, simulou-se o escoamento na cavidade para um número de Reynolds igual a 1000, porém neste caso o domínio de cômputo dividiu-se em quatro subdomínios, tal como mostrado na figura 5.14, permitindo que o código se execute em cada um deles.

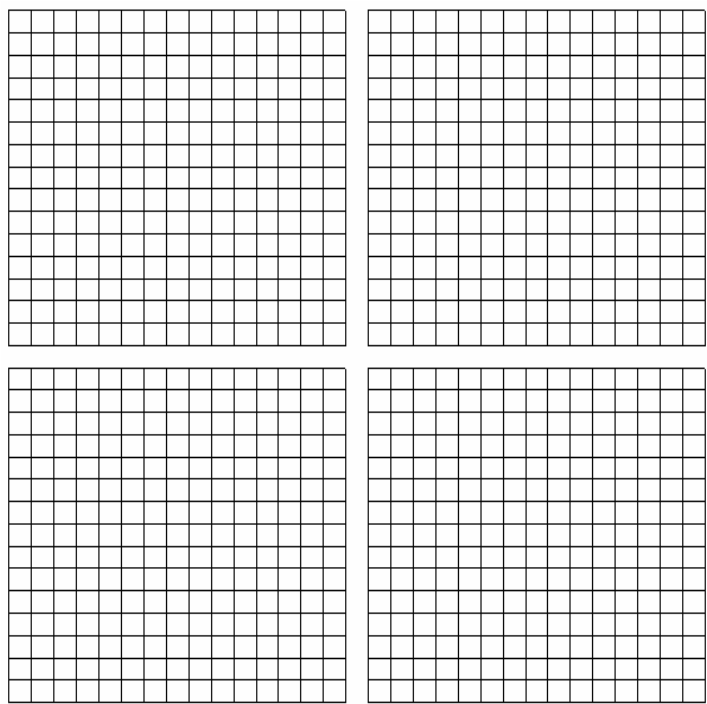


Fig 5.14. Decomposição do Domínio de Cálculo.

Os resultados usados para verificar a solução em paralelo são aqueles apresentados por GHIA et al. (1982), em relação a posição dos centros dos vórtices na cavidade. Os resultados desta simulação descrevem-se na figura 5.15 através das linhas de corrente do escoamento que mostram claramente a posição dos vórtices dentro da cavidade. Quando comparados com os resultados apresentados na tabela 5.1, encontra-se que estes são idênticos aos obtidos com a simulação de um domínio só. De isto se conclui que o processo de divisão do domínio e os subseqüentes processos de troca de data entre os processadores, não afetam em absoluto a precisão do código computacional desenvolvido.

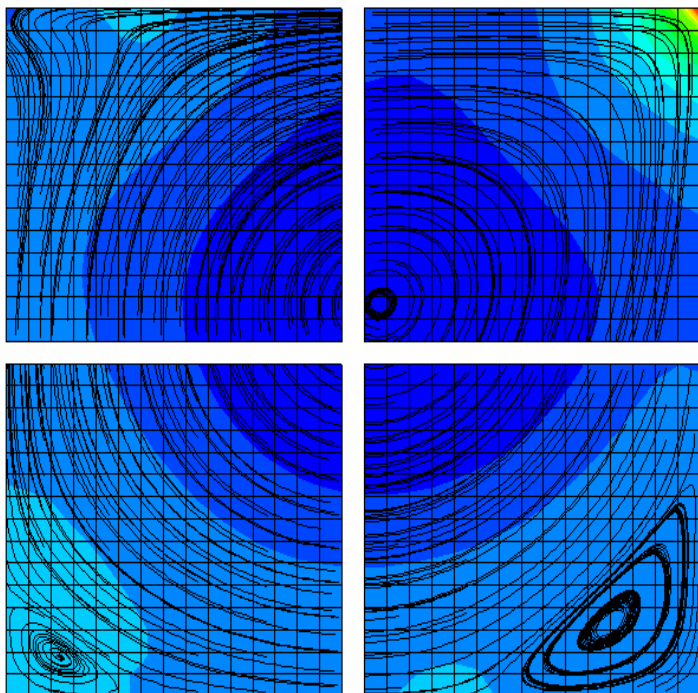


Fig. 5.15. Linhas de Correntes e Contornos de Pressão para $Re = 1000$

5.2.5. Comparação de diferentes Esquemas Convectivos

No intuito de provar que o esquema de interpolação HOWUDS proposto neste trabalho apresenta baixa difusão numérica mesmo com malhas relativamente grosseiras, se implementaram os esquemas UPWIND e WUDS, e se obtiveram os perfis de velocidade na seção central da cavidade, usando uma malha uniforme 64×64 para um número de Reynolds igual a 1000. Os resultados se apresentam nas figuras 5.16 e 5.17, comparados com os resultados *benchmark* fornecidos por BOTELLA e PEYRET (1998).

Nestas figuras observa-se que o esquema UPWIND apresenta alta difusão numérica tal como relatado na literatura. O esquema WUDS fornece melhores resultados que o UPWIND, porém introduz excessiva difusão numérica em regiões com altos gradientes de velocidade. O esquema HOWUD, por sua vez, provê excelentes soluções tal como mostram as figura 5.16 e 5.17 e como já foi salientado e seções anteriores.

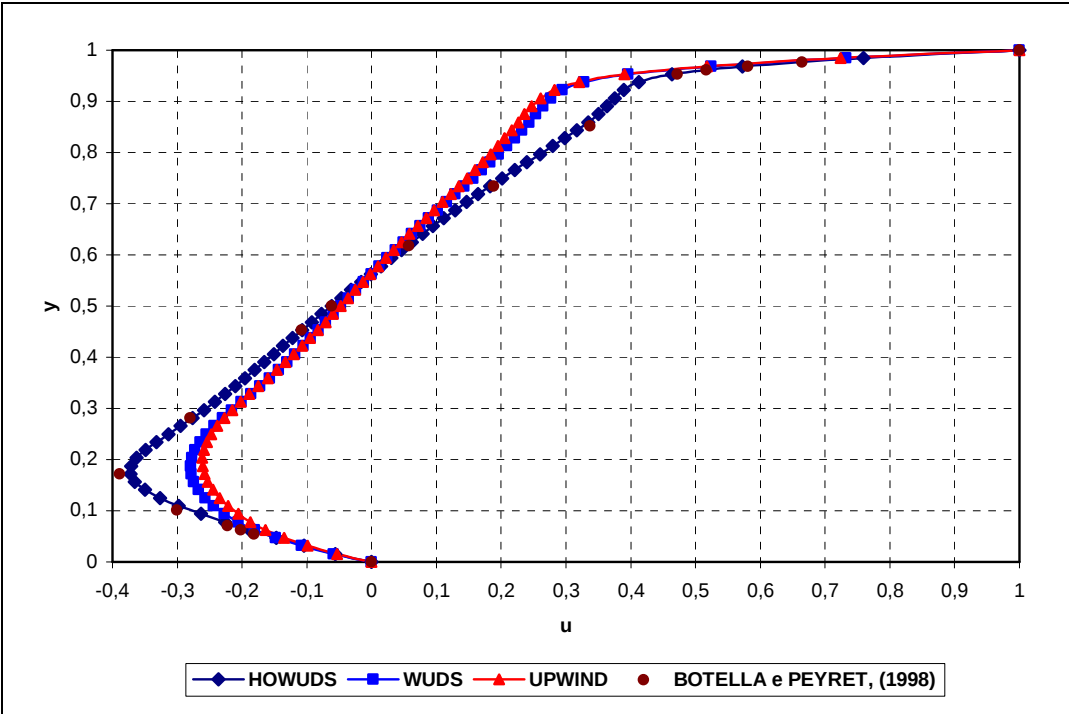


Fig. 5.16. Perfil da velocidade u no centro de cavidade para $Re = 1000$.

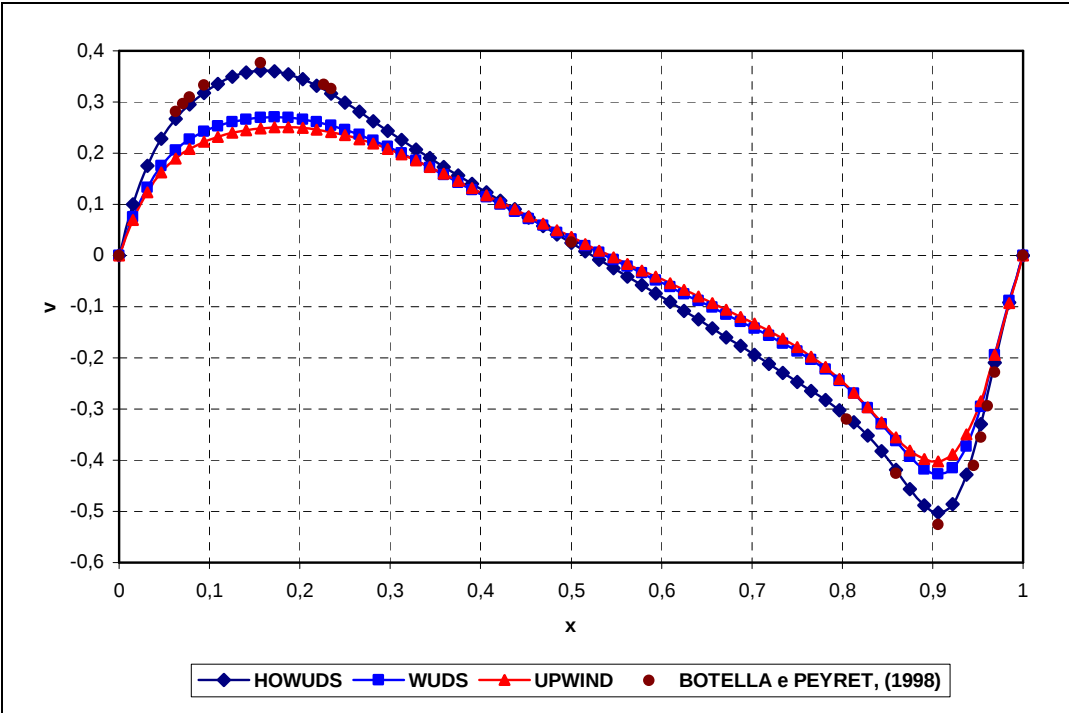


Fig. 5.17. Perfil da velocidade v no centro de cavidade para $Re = 1000$.

5.3. Escoamento numa Cavity Tridimensional

O escoamento numa cavidade tridimensional também foi estudado neste trabalho. Para isto usou-se uma malha tridimensional uniforme tal como a mostrada na figura 5.18.

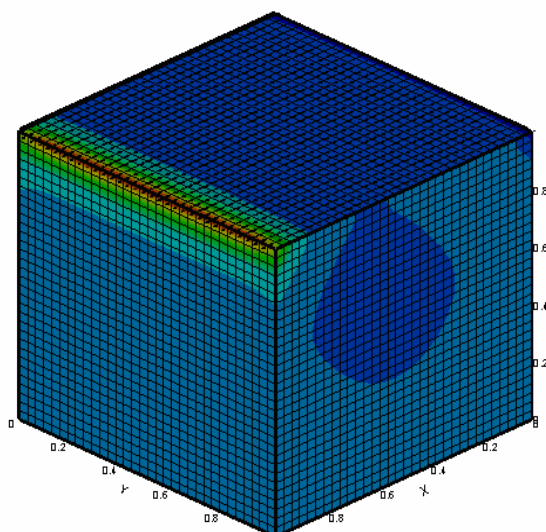


Fig. 5.18. Malha Uniforme Aplicada numa Cavity 3D. Aqui também se mostra a Intensidade da Pressão no domínio

Tal como acontece na cavidade bidimensional, o escoamento sai do repouso devido ao movimento, com velocidade uniforme, da parede superior. Aqui o número de Reynolds é definido da mesma maneira que foi feito para a cavidade bidimensional. Especificam-se condições de contorno tipo Dirichlet para a velocidade em todas as paredes da cavidade; neste contexto todas as velocidades são nulas exceto a componente u na parede superior a qual tem um valor adimensional unitário nesta investigação. Para a pressão impõem-se condições homogêneas tipo Neumann em todas as paredes.

Neste caso, fizeram-se simulações para um número de Reynolds igual a 1000, resultando em um escoamento complexo com alta recirculação onde aparecem três vórtices tridimensionais. Um vórtice principal localizado na região central da cavidade e dois vórtices secundários no fundo desta. Na figura 5.19 apresentam-se os contornos de pressão, deixando em evidencia a estrutura do escoamento na seção central do vórtice primário.

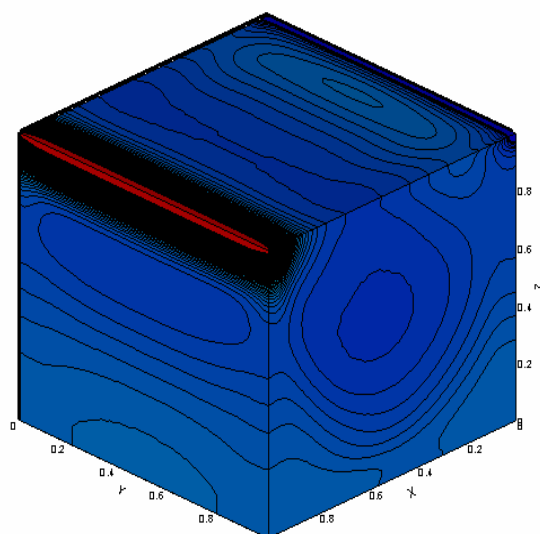


Fig. 5.19. Estrutura do Escoamento, mostrando o Vórtice Primário através dos contornos da pressão.

Fizeram-se simulações com quatro diferentes níveis de refinamento da malha, com a finalidade de estudar a convergência da solução. Usaram-se malhas de $16 \times 16 \times 16$, $32 \times 32 \times 32$, $48 \times 48 \times 48$ e $64 \times 64 \times 64$. Escolheu-se como parâmetro de comparação o perfil da componente u da velocidade ao longo do eixo Z , na linha central ($X = 0,5$ e $Y = 0,5$) da cavidade.

Os resultados destas simulações mostram-se na figura 5.20, onde se mostra o perfil da velocidade u para os diferentes tamanhos de malha (uniformes), e na figura 5.21 que apresenta a diferença na solução do perfil da velocidade u das malhas $16 \times 16 \times 16$, $32 \times 32 \times 32$ e $48 \times 48 \times 48$ com relação à solução fornecida pela malha $64 \times 64 \times 64$. De estas gráficas verifica-se que para uma malha de $64 \times 64 \times 64$ tem-se uma solução praticamente convergida. Esta solução compara-se com a apresentada no trabalho de MONTERO e LLORENTE (2000), encontrando-se excelente concordância entre elas, tal como se pode apreciar na figura 5.22. É importante destacar que MONTERO e LLORENTE usaram malhas concentradas perto das paredes da cavidade.

Finalmente, na figura 5.23, comparam-se as soluções obtidas para o perfil da velocidade u nas simulações 2D e 3D. Como era esperado, a tridimensionalidade do escoamento tem um efeito considerável sobre este parâmetro.

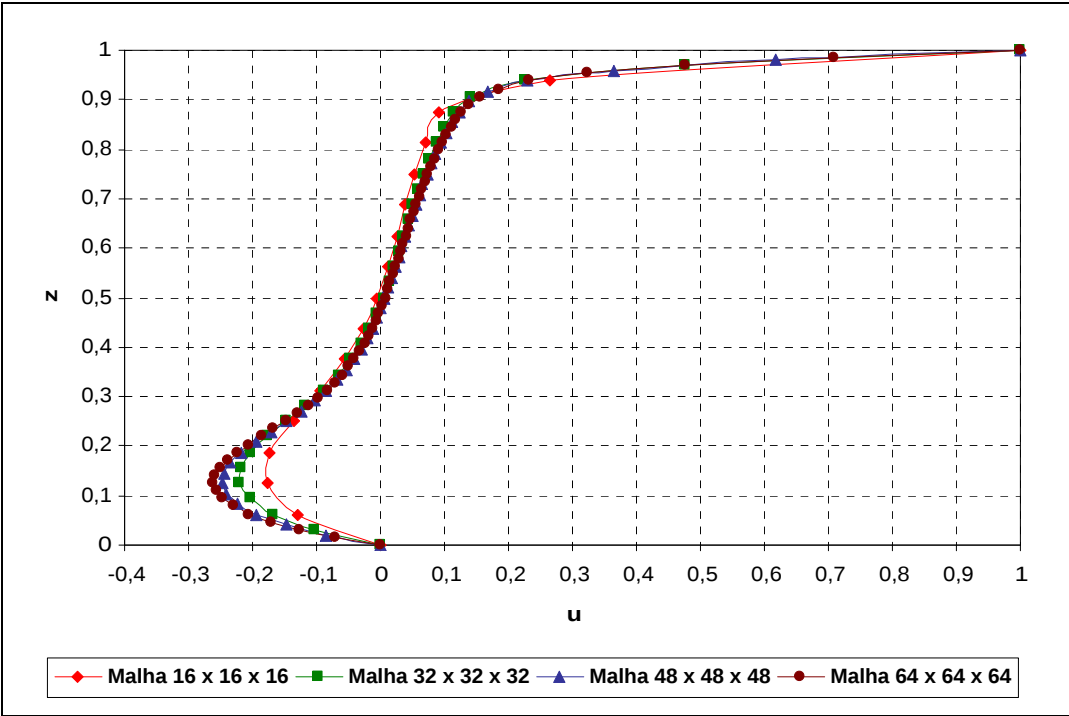


Fig. 5.20. Convergência com a Malha do Perfil da Velocidade u .

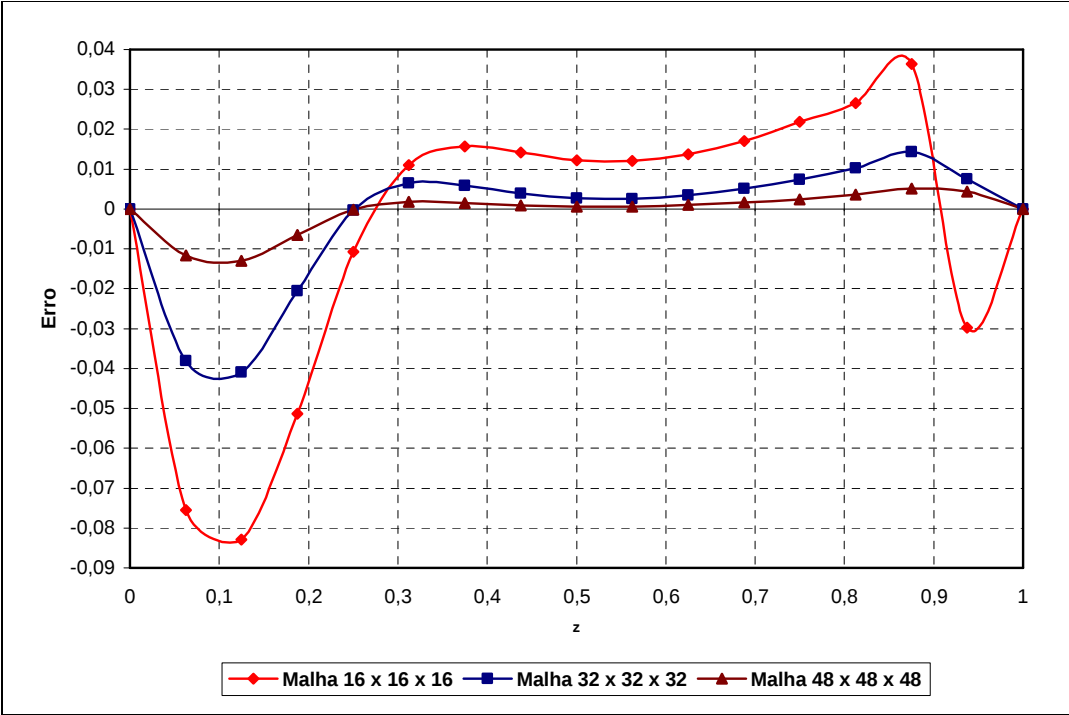


Fig. 5.21. Diferença na Solução do Perfil da Velocidade u na medida que se Refina a Malha.

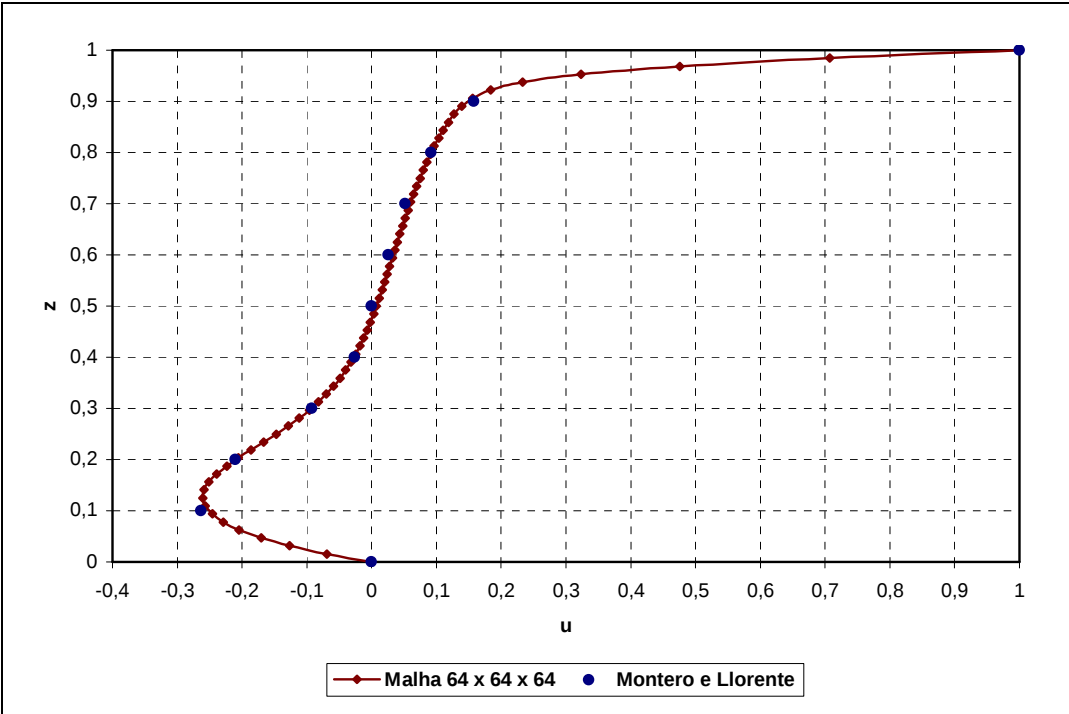


Fig. 5.22. Perfil da velocidade u ao longo do eixo z na linha central da cavidade.

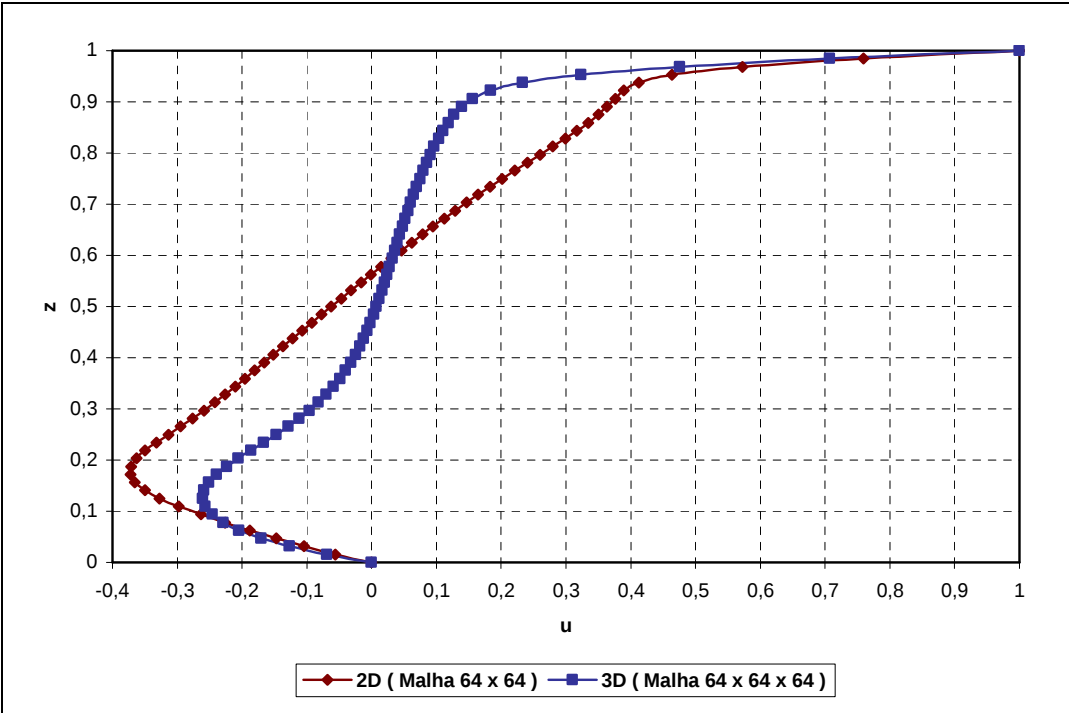


Fig. 5.23. Comparação das Soluções das simulações 2D e 3D para perfil da velocidade u ao longo do eixo Z na linha central da cavidade.

ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO CIRCULAR

6.1. Introdução

O escoamento em torno de corpos imersos é um outro problema que tem sido estudado extensivamente tanto experimentalmente quanto numericamente. O interesse nesse problema deve-se a que em muitas aplicações tecnológicas está envolvido um escoamento desse tipo, como por exemplo, na passagem de um fluido em torno da tubulação de um trocador de calor ou no movimento do ar em torno de um prédio em construção. Além disto, este escoamento apresenta características como separação e recirculação que são difíceis de prever numericamente, o que representa um excelente problema para testar novos algoritmos computacionais.

O alto grau de complexidade que apresenta este escoamento deve-se em grande parte à interação simultânea entre as várias zonas de forte cisalhamento que aparecem no domínio fluido. Duas camadas cisalhantes se desprendem de ambos os lados do corpo e se prolongam na direção do escoamento dando lugar à região da esteira a jusante do cilindro. De acordo com o modelo de GERRARD (1966), como a zona mais interna das camadas cisalhantes na esteira se move mais lentamente do que a sua parte externa, em contato com a corrente livre, estas camadas tendem a se enrolarem em torno de si mesmas, formando vórtices cuja dinâmica dá origem a diferentes configurações da estrutura do escoamento, que dependem do número de Reynolds (BLEVINS, 1977).

No presente capítulo se aplicará o esquema numérico proposto na simulação do escoamento em torno de cilindros circulares. Simular-se-ão escoamentos bidimensionais e tridimensionais, no intuito de verificar se o presente esquema de solução é capaz de reproduzir resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura.

6.2. Simulação Bidimensional

Para simular o escoamento de um fluido incompressível incidindo sobre um cilindro circular bidimensional, usou-se a malha que se mostra na figura 6.1. Esta foi gerada usando o método de multi-superfície (FLETCHER, 1991a). Esta é uma malha 96x96 com pontos concentrados perto do cilindro. Os contornos externos estão a 20D do cilindro (sendo D o diâmetro do cilindro). Observe-se que na malha estão delimitadas duas regiões, indicando os dois subdomínios usados para fazer os cálculos em paralelo.

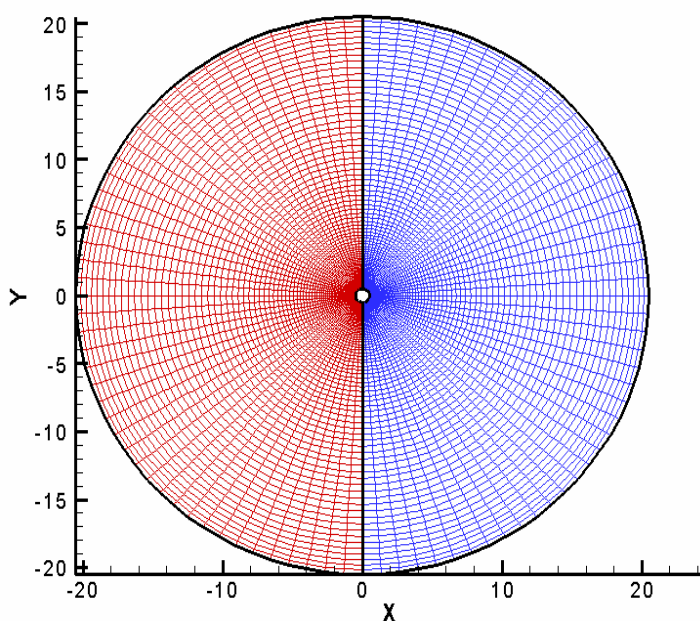


Fig. 6.1. Malha Computacional 96x96, no domínio físico (dois Subdomínios).

O escoamento se aproxima do corpo com velocidade uniforme, condição que se impõe na metade esquerda do contorno externo. No restante do contorno externo impõem-se condições tipo Neumann para as componentes da velocidade e uma condição tipo Dirichlet para a pressão. Nos contornos restantes, incluindo o corpo, usam-se condições homogêneas tipo Neumann para a pressão.

O número de Reynolds é definido tomando-se como base o diâmetro (D) do cilindro e a velocidade média na entrada (U_{∞}), quer dizer $Re = U_{\infty} D / \nu$.

Neste trabalho realizaram-se testes para diferentes números de Reynolds, os quais variam desde 40, onde o escoamento apresenta vórtices que estão colados ao corpo, até 1000, onde o processo de liberação dos vórtices já está desenvolvido e os efeitos tridimensionais são consideráveis. Nesta faixa de número de Reynolds, a camada limite é laminar, porém a esteira passa de laminar até completamente turbulenta. O objetivo dos testes é determinar os parâmetros que definem o estado estacionário destes escoamentos, como são os coeficientes de força e o número de Strouhal. Neste contexto, os coeficientes de força correspondentes às forças de sustentação (C_L) e de arrasto (C_D), definem-se como:

$$C_L = \frac{F_L}{0.5\rho DU_\infty^2} \quad C_D = \frac{F_D}{0.5\rho DU_\infty^2}$$

onde ρ é a massa específica do fluido, D o diâmetro do cilindro, U_∞ a velocidade uniforme não perturbada do escoamento e F_L e F_D são, respectivamente, a magnitude da força de sustentação e da força de arrasto. De acordo com BRAZA et al. (1986) podem-se usar as seguintes expressões para determinar estes coeficientes.

$$C_L = \frac{2\pi}{Re} \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta - \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega \cos \theta d\theta \quad C_D = \frac{2\pi}{Re} \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta + \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega \sin \theta d\theta$$

com P representando a pressão e ω a vorticidade, ambas na superfície do cilindro.

Em todos os casos simulados usou-se um passo de tempo adimensional, dado por $\Delta t = \frac{U_\infty \Delta t}{D}$, igual a 0,0025.

O primeiro caso a ser simulado foi o escoamento para um número de Reynolds igual a 40. Os experimentos tem mostrado que este escoamento sofre descolamento na superfície do cilindro e perde sua simetria em relação ao eixo transversal, porém, mantendo-se simétrico em relação ao eixo longitudinal. Dois vórtices estacionários permanecem, então, em movimento rotativo atrás do corpo do cilindro. As camadas cisalhantes livres que se desenvolvem de ambos os lados do corpo sólido se reencontram a jusante dos vórtices, no chamado ponto de estagnação.

Os resultados da simulação concordam bastante bem com a descrição dada acima, tal como se pode apreciar na figura 6.2. Nesta figura, mostram-se as linhas de

corrente, que permitem visualizar claramente o par de vórtices estacionários que se forma neste regime de escoamento. Também nesta figura mostram-se, como pano de fundo, os contornos do campo da pressão perto do cilindro.

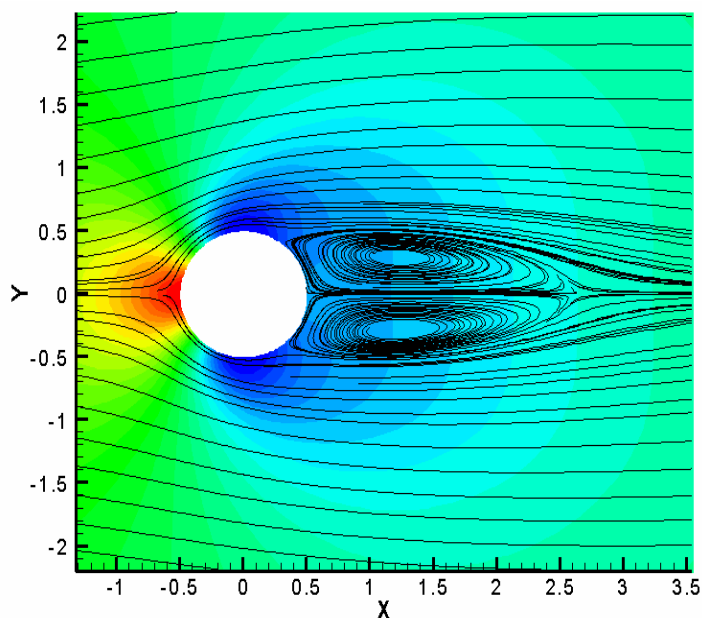


Fig. 6.2. Contornos das linhas de Corrente para $Re = 40$.

Dada a simetria do escoamento com relação ao eixo longitudinal, não há força resultante sobre o cilindro na direção perpendicular ao fluxo, porém, pela assimetria no eixo transversal aparece uma força resultante não nula na direção do escoamento; é a conhecida força de arrasto.

Neste trabalho, esta força é calculada pela equação apresentada acima e logo adimensionalizada para obter o coeficiente de arrasto cuja evolução no tempo mostra-se na figura 6.3. Nessa figura se observa que o coeficiente de sustentação é igual a zero, tal como esperado. No entanto o coeficiente de arrasto tem um valor de 1,54 o qual se assemelha muito com o resultado experimental obtido por TRITTON (1959) que foi 1,57.

É importante salientar que se considerou o fluido completamente parado como condição inicial na simulação do escoamento para um número de Reynolds igual a 40.

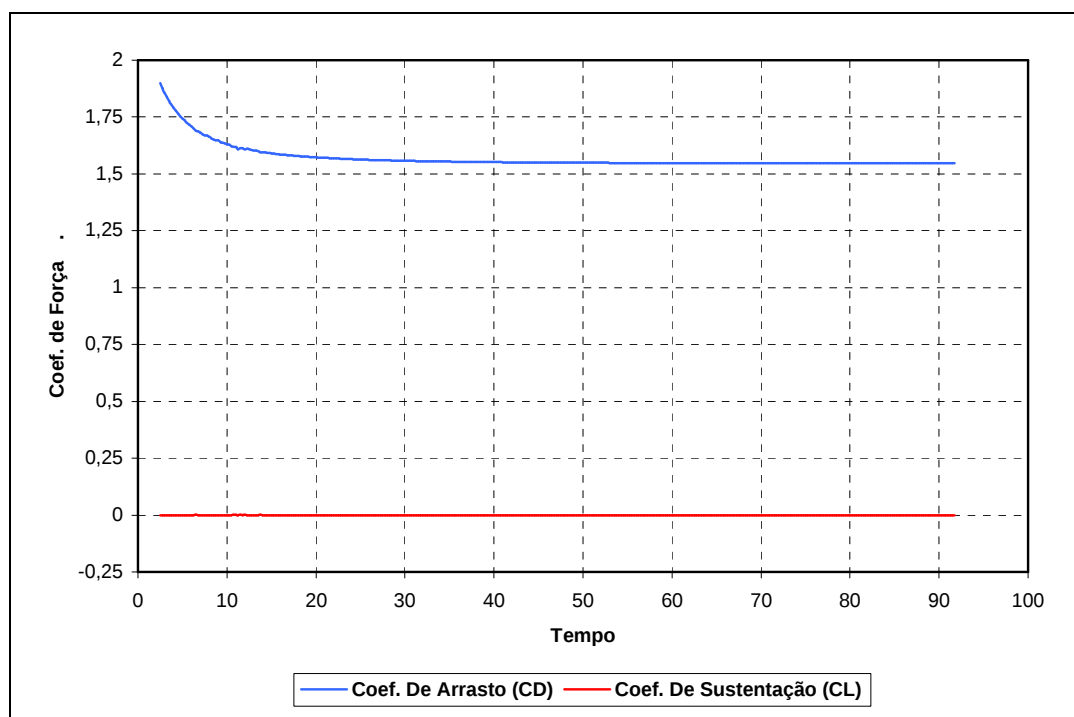


Fig. 6.3. Evolução Temporal dos Coeficientes de Força para $Re = 40$.

Diferentemente do que acontece para números de Reynolds baixos onde os vórtices são estacionários, na medida em que se aumenta o número de Reynolds, os vórtices são liberados, em forma alternada, da superfície do cilindro, formando uma esteira periódica que têm uma frequência de oscilação característica.

Neste regime de emissão alternada de vórtices, a frequência de desprendimento dos vórtices f relaciona-se com a velocidade média do escoamento não perturbado U_{∞} e o diâmetro D do cilindro através do número de Strouhal, definido pela relação:

$$S = \frac{f \cdot D}{U_{\infty}}$$

O número de Strouhal depende de vários parâmetros, porém, no caso do cilindro circular, a sua relação com o número de Reynolds é a mais bem documentada na literatura, e tal como se pode observar na figura 6.4, este parâmetro adimensional apresenta-se bastante estável, dentro de uma larga faixa de número de Reynolds, podendo ser considerado praticamente igual a 0.20 na maioria das aplicações práticas.

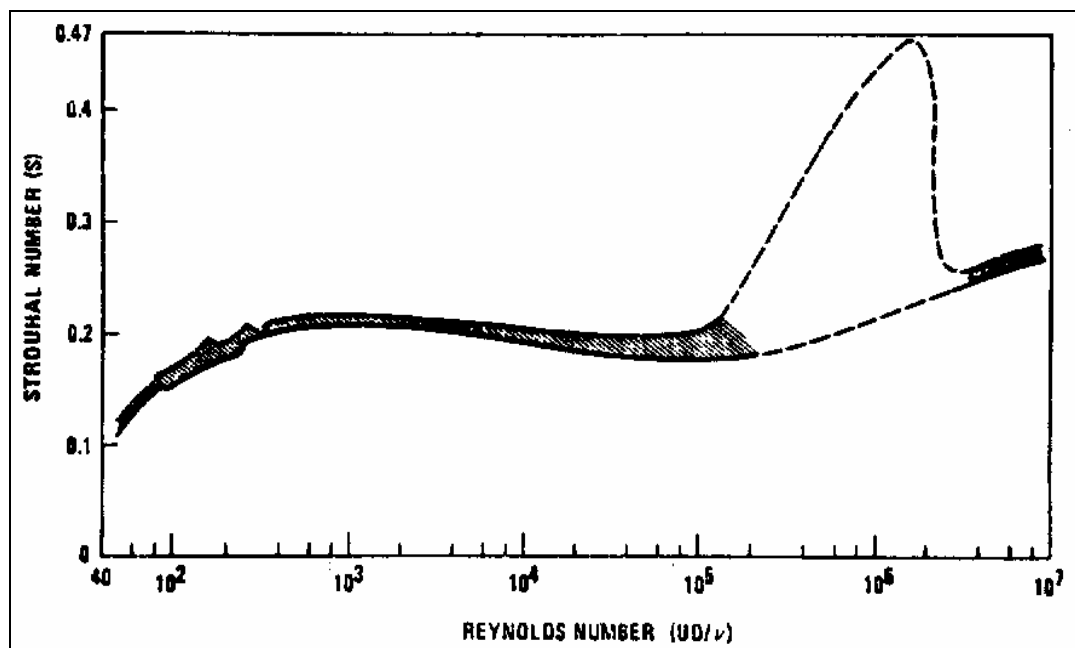


Fig. 6.4. Relação do Número de Strouhal com o Número de Reynolds para Cilindros Circulares; (BLEVINS, 1977).

Nesta condição, o escoamento em torno do cilindro é assimétrico tanto na direção transversal quanto na longitudinal, gerando sobre o corpo forças resultantes não nulas na direção do escoamento (arrasto) e transversal a ele (sustentação), respectivamente.

A estrutura do escoamento em torno do cilindro muda cada vez que um vórtice é liberado, alterando-se a distribuição local da pressão e da velocidade. Desta maneira as forças referidas acima, variam em forma alternada. A força transversal tem uma componente média igual a zero e uma componente oscilando à frequência de liberação de vórtices, enquanto que a força de arrasto tem uma componente média diferente de zero e uma componente oscilando ao dobro da frequência de liberação de vórtices.

Para verificar tais afirmações, simulou-se o escoamento em torno do cilindro para diferentes números de Reynolds na faixa entre 100 e 1000, usando como condição inicial, a solução de estado estacionário para $Re = 40$.

Partindo da condição anterior, a liberação de vórtices ocorre espontaneamente e tanto a força de arrasto quanto de sustentação começam a aumentar até se estabilizarem depois de determinado período de tempo. Como resultado destas

simulações obteve-se a historia temporal, mostrada nas figuras 6.5 até 6.14, dos coeficientes de arrasto e de sustentação para os diferentes números de Reynolds estudados.

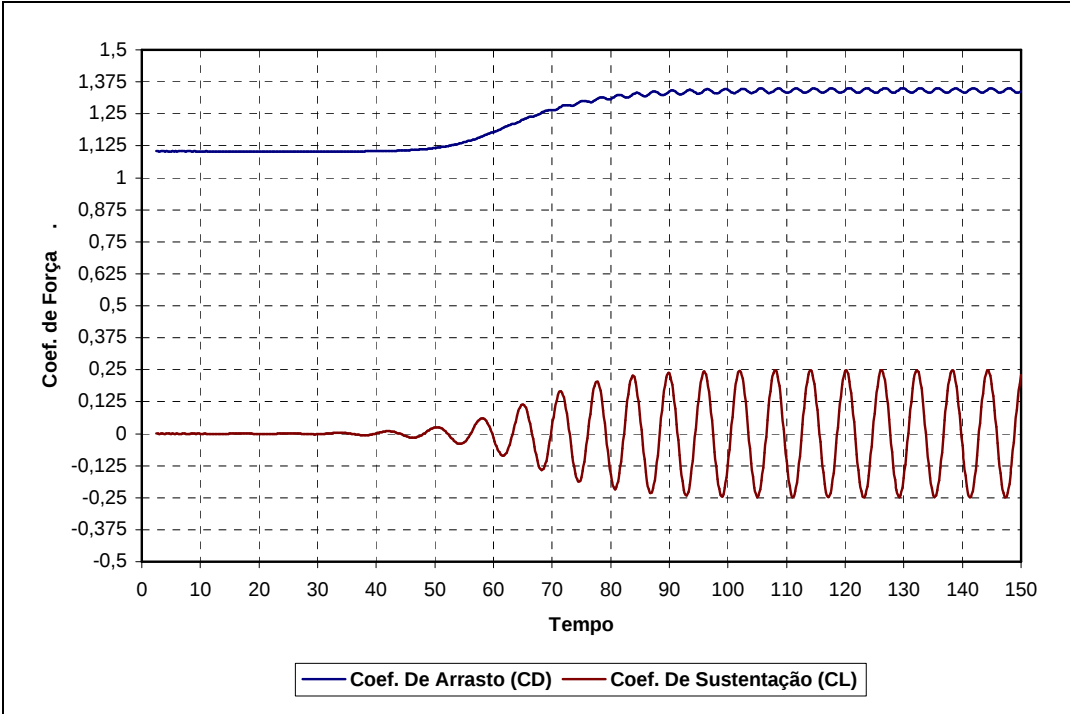


Fig. 6.5. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 100$.

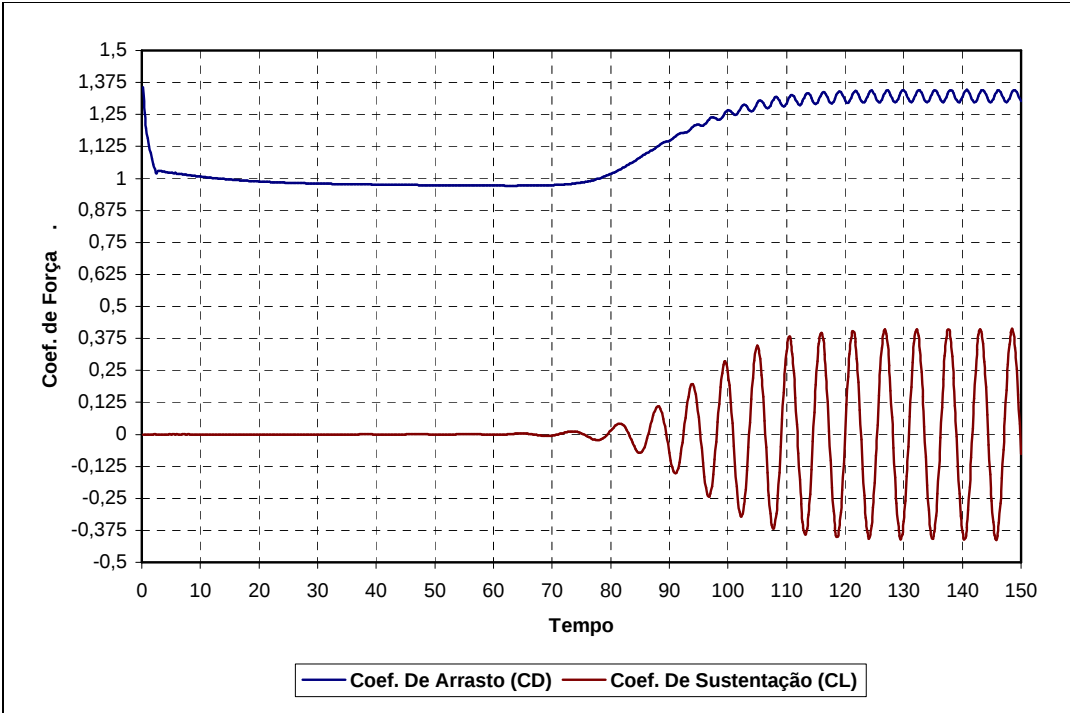


Fig. 6.6. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 150$.

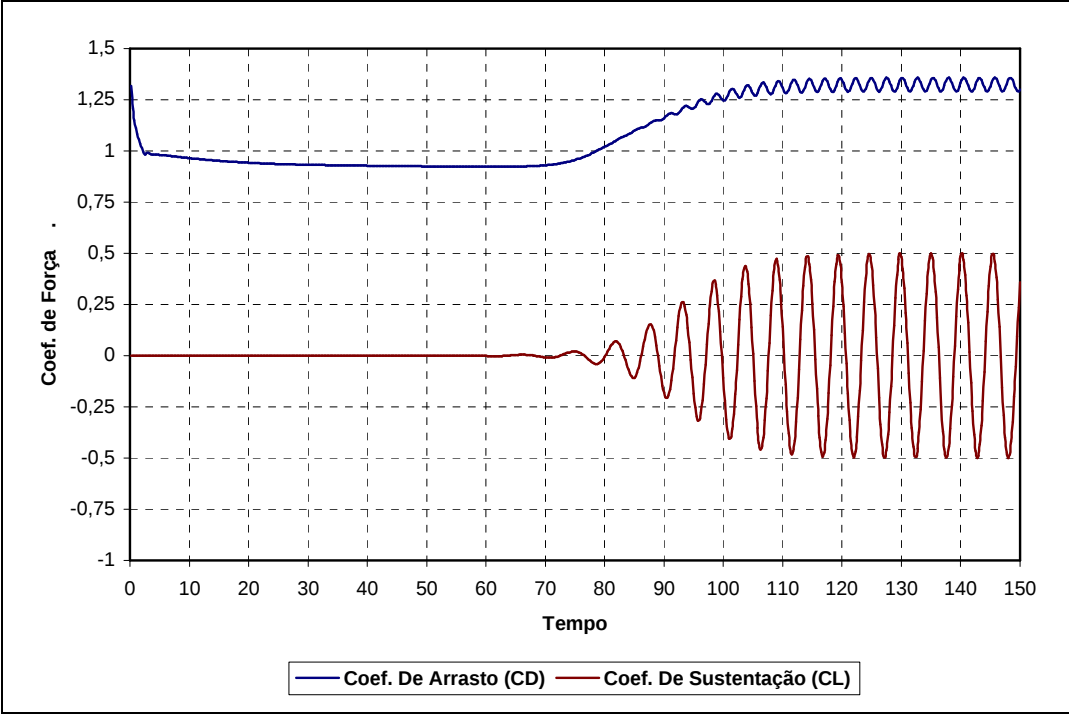


Fig. 6.7. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 180$.

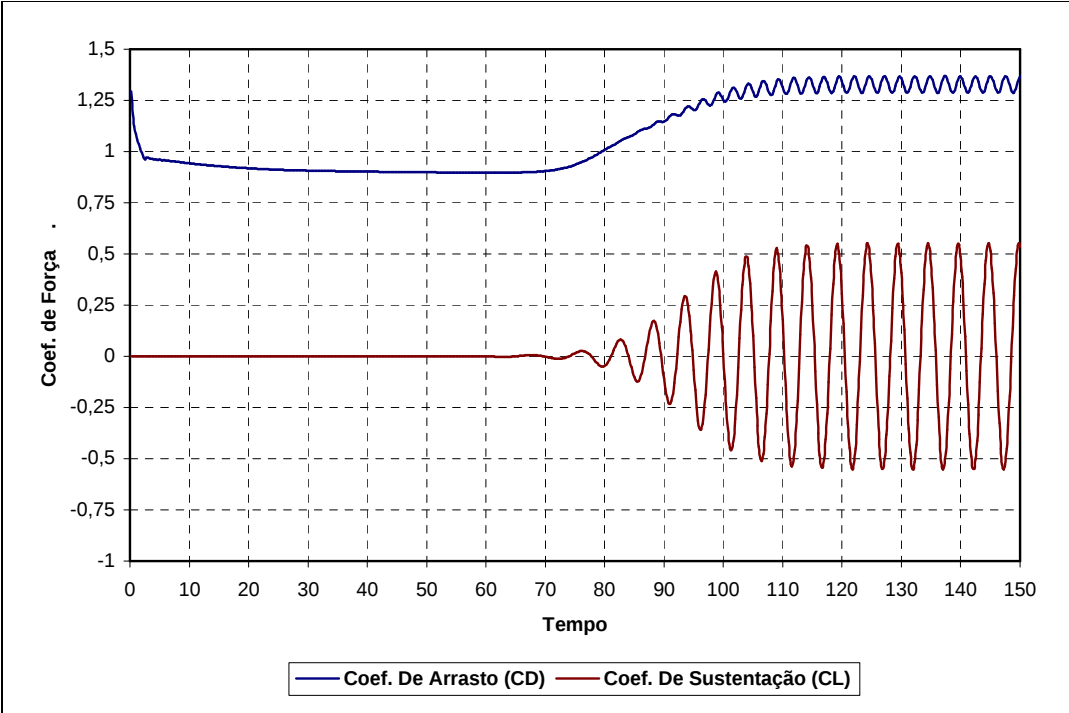


Fig. 6.8. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 200$.

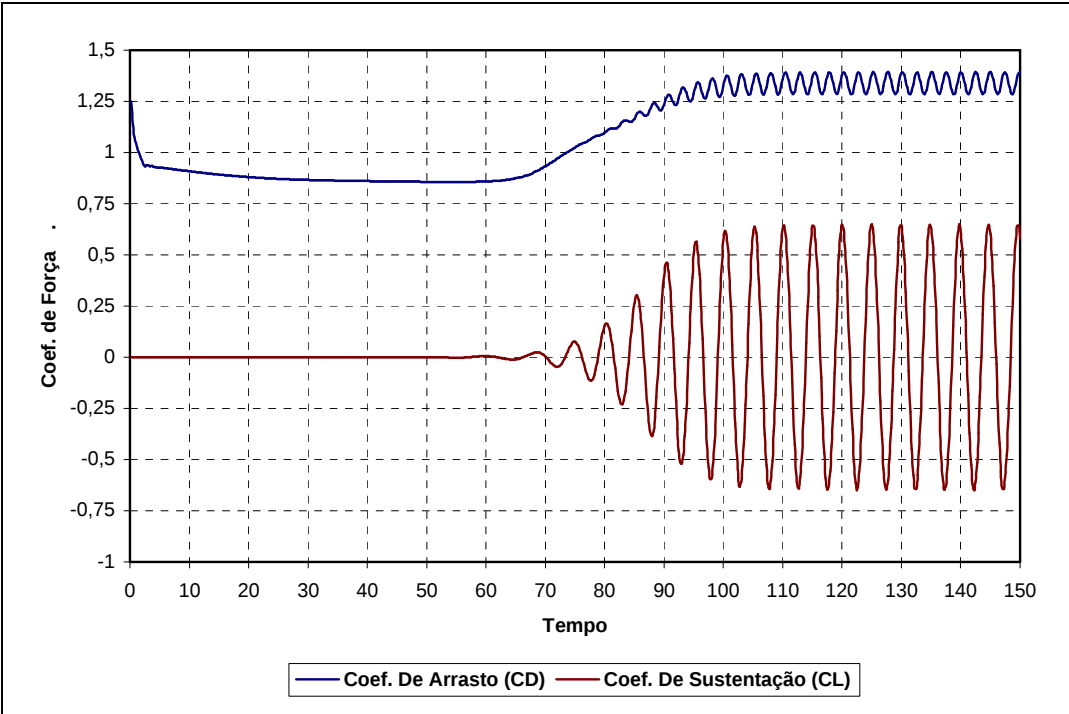


Fig. 6.9. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 240$.

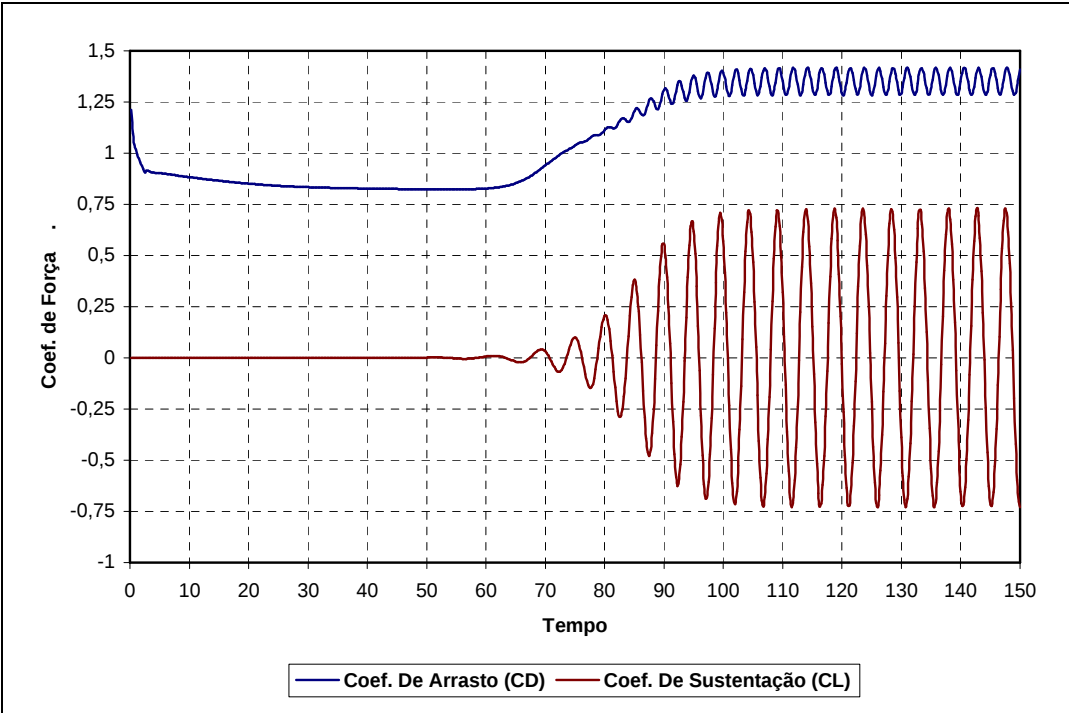


Fig. 6.10. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 280$.

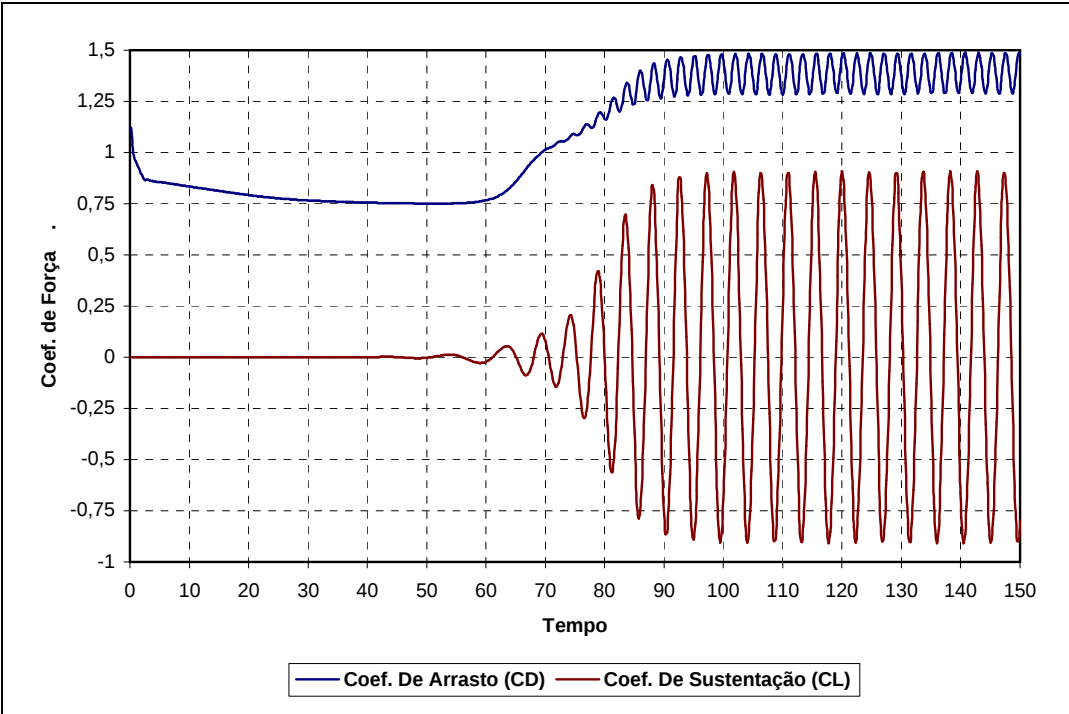


Fig. 6.11. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 400$.

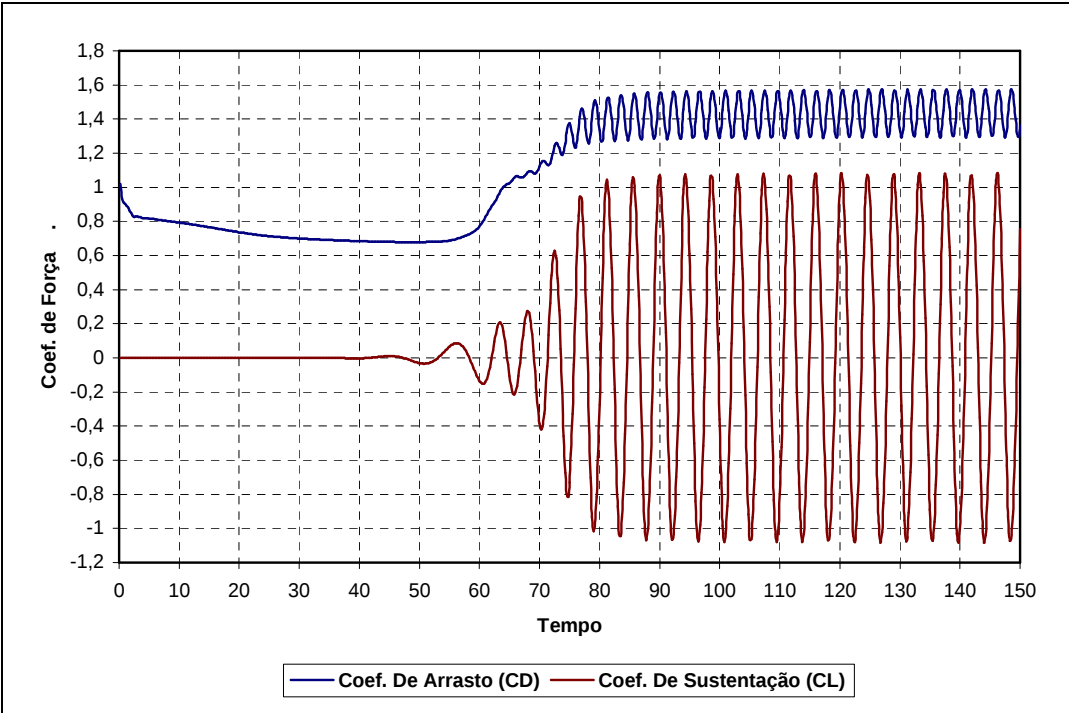


Fig. 6.12. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 600$.

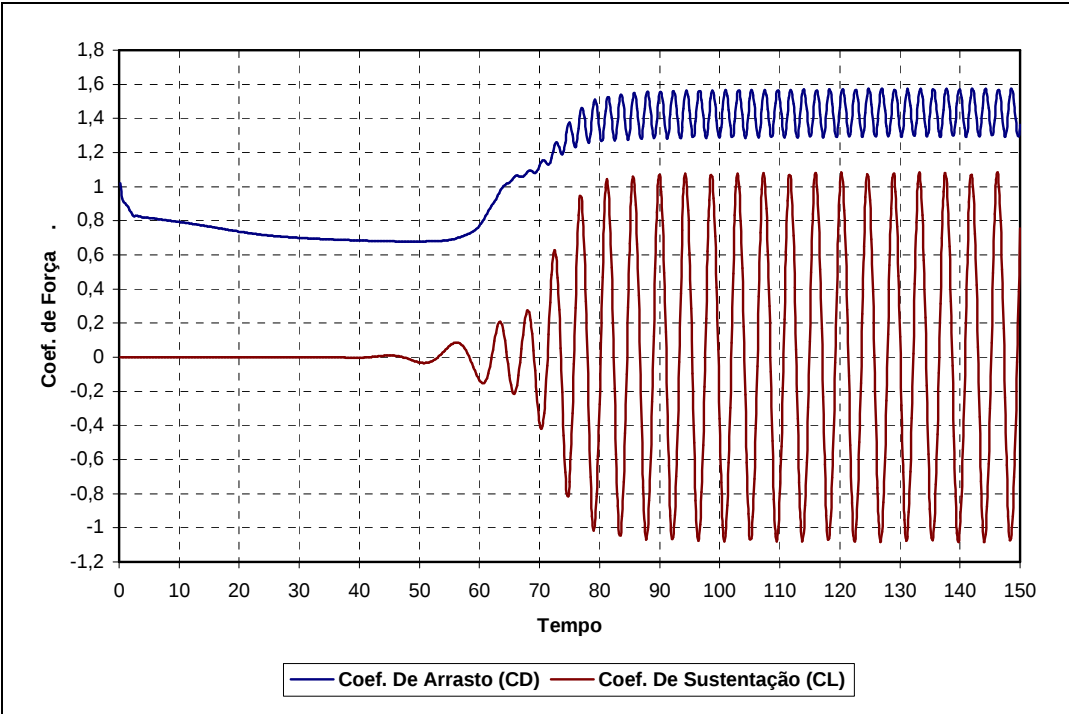


Fig. 6.13. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 800$.

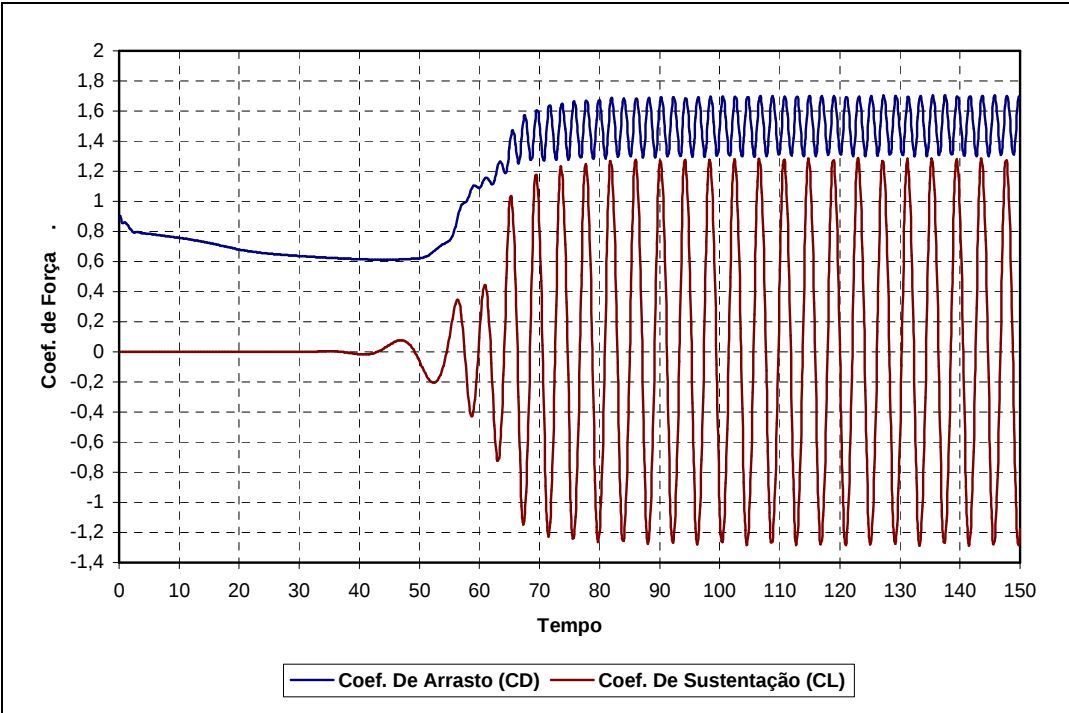


Fig. 6.14. Coeficientes de Forças sobre o Cilindro para $Re = 1000$.

Em todos os casos mostrados acima, os coeficientes de força exibem um padrão periódico bastante regular de onde é possível extrair, o valor médio do

109

coeficiente de arrasto, o valor máximo do coeficiente de sustentação e a frequência de liberação de vórtices. Também, estes resultados comprovam que o coeficiente de arrasto oscila com uma frequência igual a duas vezes a frequência com que oscila o coeficiente de sustentação, que como foi dito acima corresponde à frequência de liberação de vórtices.

Um resumo dos resultados mencionados anteriormente apresenta-se na tabela 6.1, onde também se mostra o número de passos de tempo que foram executados por segundo (passos/s) em cada uma das simulações. Isto último é um índice da velocidade de processamento do código computacional. É bom ressaltar que as simulações realizaram-se num computador CELERON de 1.4 GHz e 1 Gb de memória RAM.

Tabela 6.1. Resultados dos coeficientes de força e do número de Strouhal para os diferentes números de Reynolds estudados.

Re	Coeficiente de Arrasto Médio (C _D)	Coeficiente de Sustentação Máximo (C _L)	Número de Strouhal (S)	Passos/ s ^(*)
40	1,54	0,00	-	12
100	1,34	0,25	0,167	12
150	1,32	0,41	0,182	12
180	1,32	0,50	0,190	12
200	1,33	0,55	0,195	11
240	1,34	0,64	0,200	11
280	1,35	0,73	0,220	10
400	1,39	0,90	0,220	9
525	1,44	1,00	0,225	8
600	1,43	1,08	0,230	8
800	1,47	1,19	0,240	7
1000	1,50	1,28	0,240	7

^(*) Número de passos de tempo (Δt) que avança a solução a cada segundo.

Neste ponto é importante salientar que a velocidade de avanço no tempo da solução computacional reduz-se na medida em que aumenta o número de Reynolds, dado que para resolver a equação de Poisson discretizada está-se usando o esquema

iterativo Gauss_Seidel. Como as mudanças no campo de velocidade são maiores requer-se maior número de iterações para satisfazer a equação discreta de Poisson e por tanto a condição de incompressibilidade.

Para verificar se o esquema numérico implementado está conseguindo reproduzir as características relevantes do escoamento simulado, na tabela 6.2, alguns dos resultados obtidos no presente trabalho são comparado com resultados numéricos e experimentais obtidos por outros pesquisadores que usaram diferentes métodos de discretização.

Tabela 6.2. Comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com outros reportados na literatura.

Fonte	Re	C _D	C _L	S	Comentários
Wieselsberger (1959)	525	1,15-1,20	--	-	Experimental
Roshko (1959)	40	--	--	0,21	Experimental
Tritton (1954)	525	1,57	0,00	-	Experimental
Sphaier (1991)	1000	1,00	--	--	Numérico ("Random Vortex")
Meneghini (1993)	100	1,52	0,353	0,162	Numérico (Método dos Vórtices)
	200	1,395	0,57	0,195	
Herfdjord (1995)	100	1,36	0,34	0,168	Numérico (Elementos Finitos)
	200	1,35	0,70	0,196	
	1000	1,47	1,45	0,234	
Mittal (1995)	525	1,44	1,21	0,22	Numérico (Métodos Espectrais)
	40	1,54	--	--	
Presente Trabalho	100	1,34	0,25	0,167	Numérico (Volumes Finitos) 96 x 96
	200	1,33	0,55	0,195	
	525	1,44	1,00	0,225	
	1000	1,50	1,28	0,240	

Na tabela acima pode-se observar que o resultado do presente trabalho, para um número de Reynolds igual a 40, concorda bastante bem com o resultado experimental obtido por TRITTON (1959). O mesmo pode-se dizer dos resultados para os números de Reynolds de 100 e 200, quando comparados com os resultados

numéricos de HERFJORD (1995) e MENEHINI (1993), ambos já comparados em seus próprios trabalhos com resultados experimentais.

O resultado numérico de MITTAL (1995) é reproduzido com excelente precisão, embora esteja sobreestimado em relação ao valor experimental de WIESELSBERGER (1922), no entanto, o número de Strouhal obtido no presente trabalho concorda muito bem com o valor obtido experimentalmente por ROSHKO (1954) . A mesma discrepância aparece para $Re = 1000$ no que diz respeito aos coeficientes de arrasto e de sustentação, sobretudo quando comparados com o valor tido como referência para o coeficiente de arrasto, $C_d = 1.0$, e que SPHAIER (1991) conseguiu reproduzir aplicando o método “random vortex”. É importante ressaltar, no entanto, que os parâmetros do escoamento obtidos no presente trabalho, estão em concordância com outros resultados numéricos apresentados na literatura; na tabela acima aparecem os valores obtidos por HERFJORD para este número de Reynolds.

Além dos testes descritos anteriormente fizeram-se outros com a finalidade de validar ainda mais o esquema proposto. Um destes consistiu em simular o escoamento para um número de Reynolds igual a 200, usando diferentes condições iniciais. Neste sentido, usaram-se como condições iniciais as soluções de estado estacionário obtidas anteriormente para três números de Reynolds, 40, 100 e 1000. Tomou-se como parâmetro de comparação a história temporal dos coeficientes de força, a qual se mostra nas figuras 6.15 e 6.16, para o coeficiente de arrasto e o coeficiente de sustentação, respectivamente. Estas figuras mostram que nos três casos o escoamento chega à mesma condição de estado estacionário, o que mostra a robustez do esquema numérico implementado.

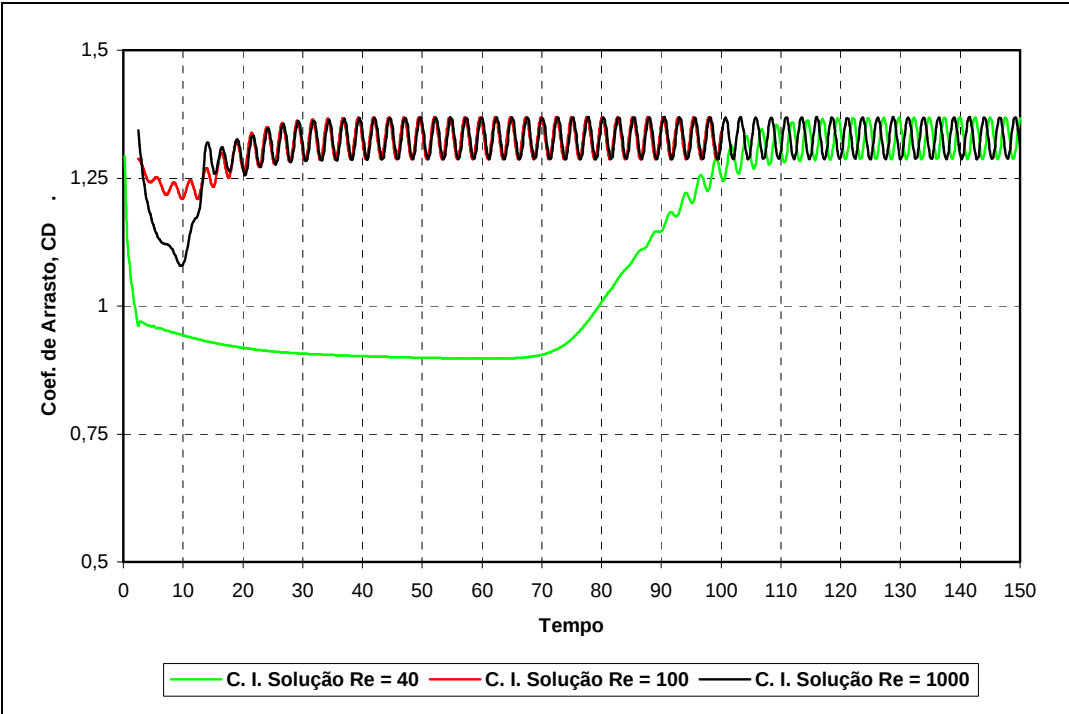
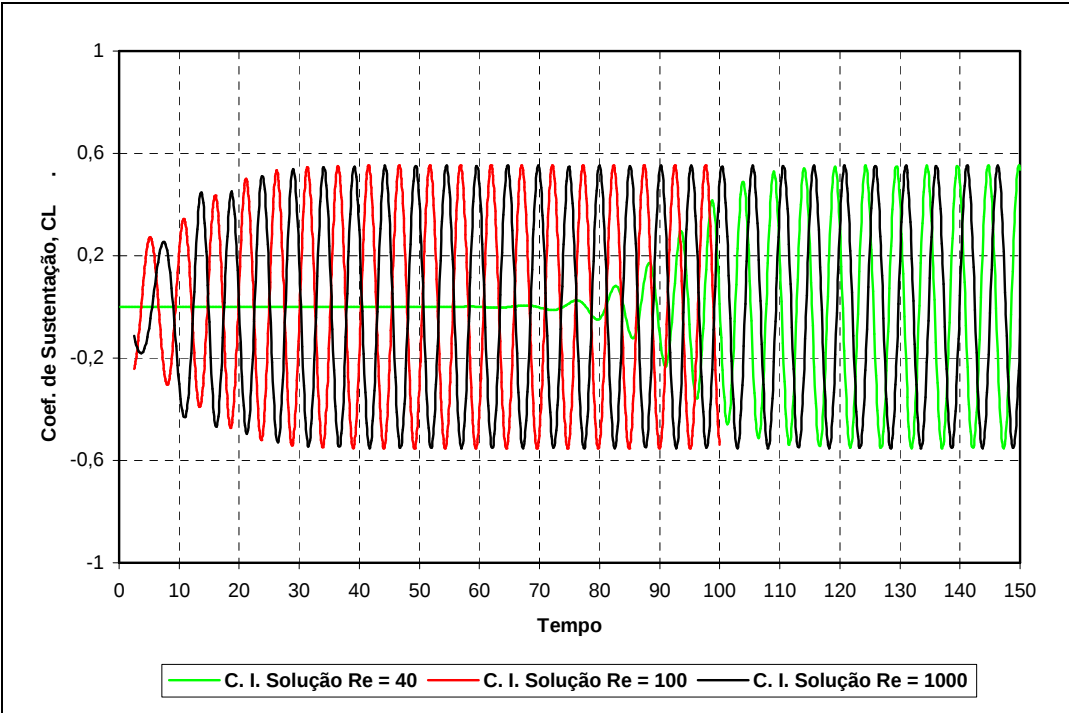


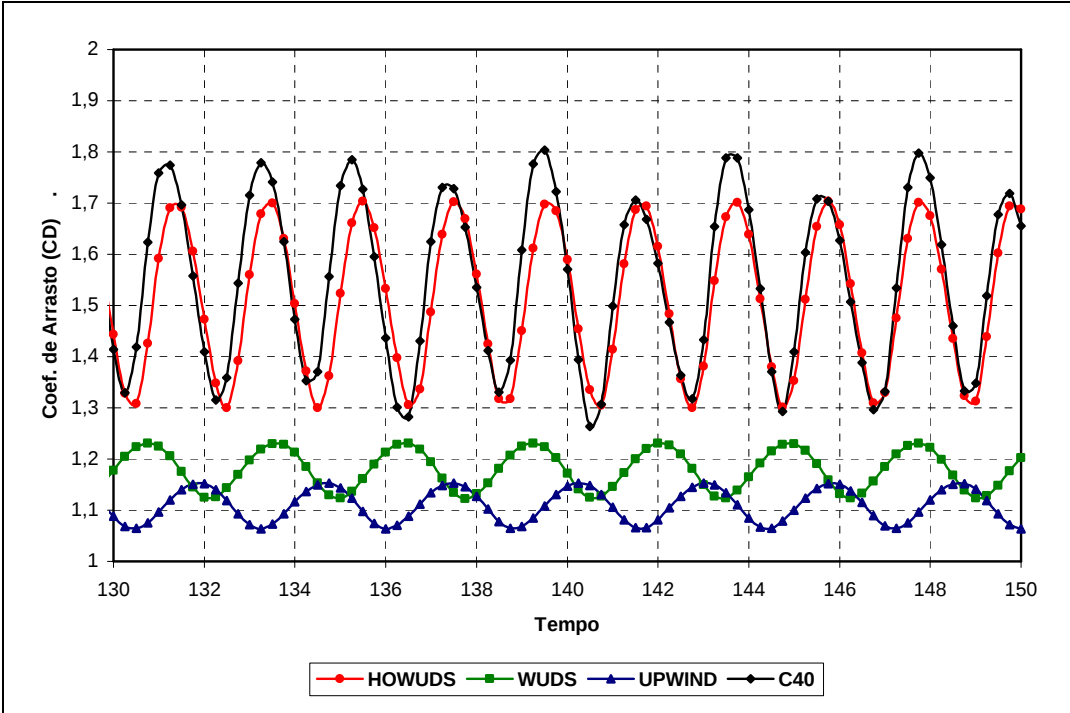
Fig. 6.15. Variação temporal do coeficiente de arrasto para diferentes condições iniciais. Escoamento em torno do cilindro com $Re = 200$.



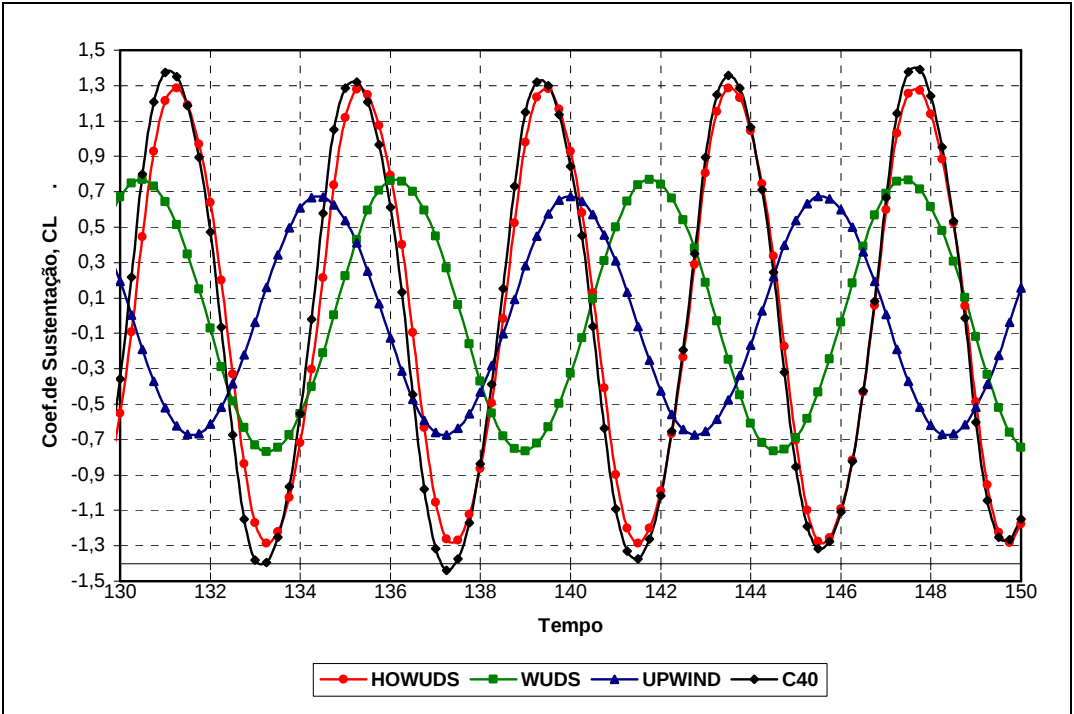
6.16. Variação temporal do coeficiente de Sustentação para diferentes condições iniciais. Escoamento em torno do cilindro com $Re = 200$.

No presente esquema, implementaram-se diferentes esquemas de interpolação dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes discretizadas pelo método dos volumes finitos. Os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos com cada um deles, nas simulações para escoamento com número de Reynolds igual a 1000, apresentam-se nas figuras 6.17 e 6.18, respectivamente.

Ao observar ditas figuras verifica-se que o esquema HOWUDS provê melhores resultados que os outros esquemas implementados. Lembre-se que já foi comprovado que os resultados providos pelo esquema HOWUDS estão em concordância com resultados apresentados na literatura. Destas figuras pode-se extrair que os esquemas UPWIND e WUDS introduzem excessiva difusão artificial na solução enquanto que o esquema centrado de quarta ordem (C40), produz soluções com oscilações erráticas dos coeficientes de força, sobretudo, do coeficiente de arrasto.



6.17. Solução do coeficiente de arrasto provida por diferentes esquemas de interpolação. (O esquema centrado de quarta ordem é nomeado de C40)



6.18. Solução do coeficiente de arrasto provida por diferentes esquemas de interpolação. (O esquema centrado de quarta ordem é nomeado de C40)

Na figura 6.19 apresenta-se os contornos de pressão obtidos, já na condição de escoamento estacionário, para um número de Reynolds igual a 1000 quando se usa o esquema HOWUDS. Desta figura é evidente que a solução fornecida por este esquema está livre de oscilações espúrias da pressão, embora esteja-se usando um esquema de variáveis colocadas.

Para finalizar a análise do escoamento bidimensional em torno de cilindros circulares, mostra-se a na figura 6.20, através dos contornos da vorticidade, uma seqüência de liberação de vórtices na condição de estado estacionário do escoamento para um número de Reynolds igual a 200. Com esta seqüência verifica-se que o algoritmo computacional implementado no presente trabalho consegue capturar em detalhe as características principais do escoamento em torno de cilindros bidimensionais.

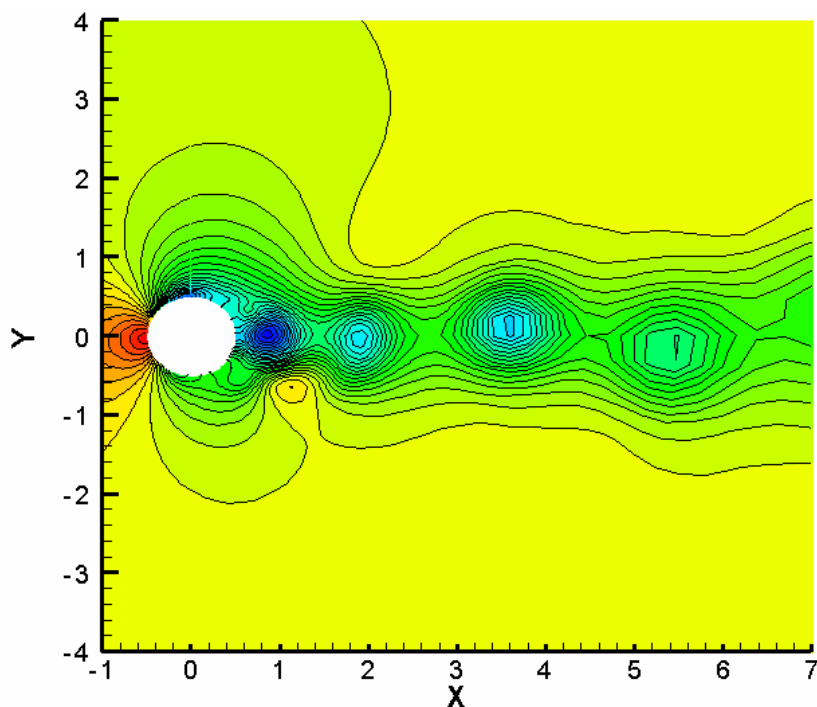


Fig. 6.19. Contornos de pressão para $Re = 1000$.

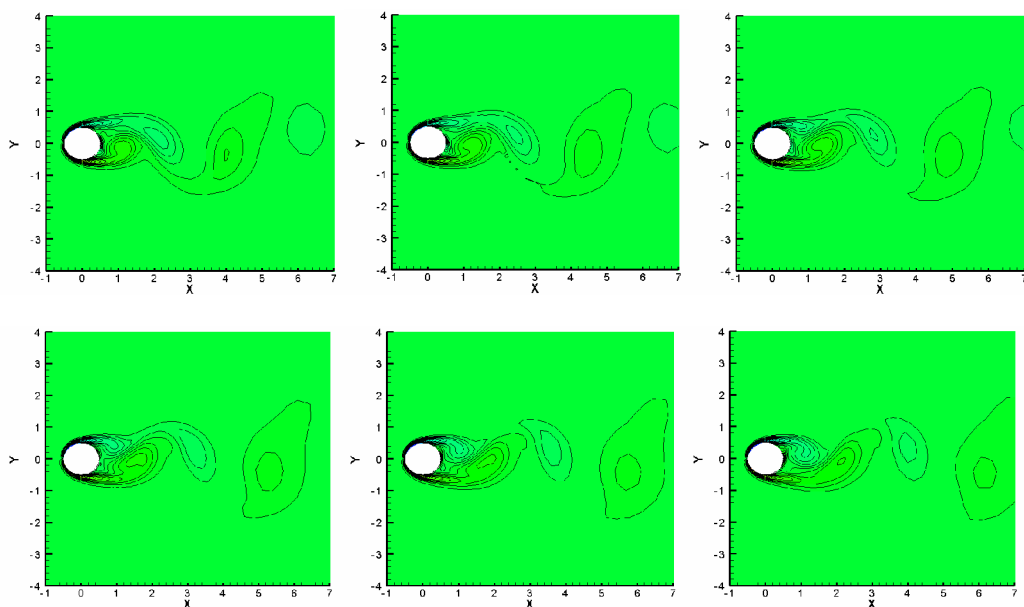


Fig. 6.20. Sequência de liberação de vórtices na condição de escoamento em estado estacionário em torno de um cilindro para $Re = 200$.

6.3. Simulação Tridimensional

O sonho de todo pesquisador envolvido com o desenvolvimento de códigos computacionais para simular escoamento de fluidos, é implementá-lo em três

dimensões porque, em teoria, as simulações são mais realísticas. Como não poderia deixar de ser, o algoritmo computacional desenvolvido neste trabalho implementou-se para fazer a simulação tridimensional do escoamento em torno do cilindro. Esta simulação é computacionalmente exigente pelo que só se tem resultados preliminares parciais dado que até agora os testes foram feitos em um computador CELERON de 1,4 GHz, e o processamento de cada caso dura alguns dias para um nível de refinamento relativamente grosseiro da malha computacional. Está-se trabalhando na implementação, em paralelo, do código num “cluster” de computadores.

A seguir, mostram resultados obtidos na simulação do escoamento em torno do cilindro para números de Reynolds igual a 40 e 280. Usou-se uma malha de 64x64x40, com um cilindro de razão de aspecto (comprimento/diâmetro) igual a 2.

Na figura 6.21 apresenta-se a evolução temporal dos coeficientes de força obtidos da simulação tridimensional do escoamento em torno do cilindro para um número de Reynolds igual a 40. Neste caso obteve-se um coeficiente de arrasto igual a 1.55, que está bem próximo do valor obtido por TRITTON (1959) no seus experimentos (vide tabela 6.2).

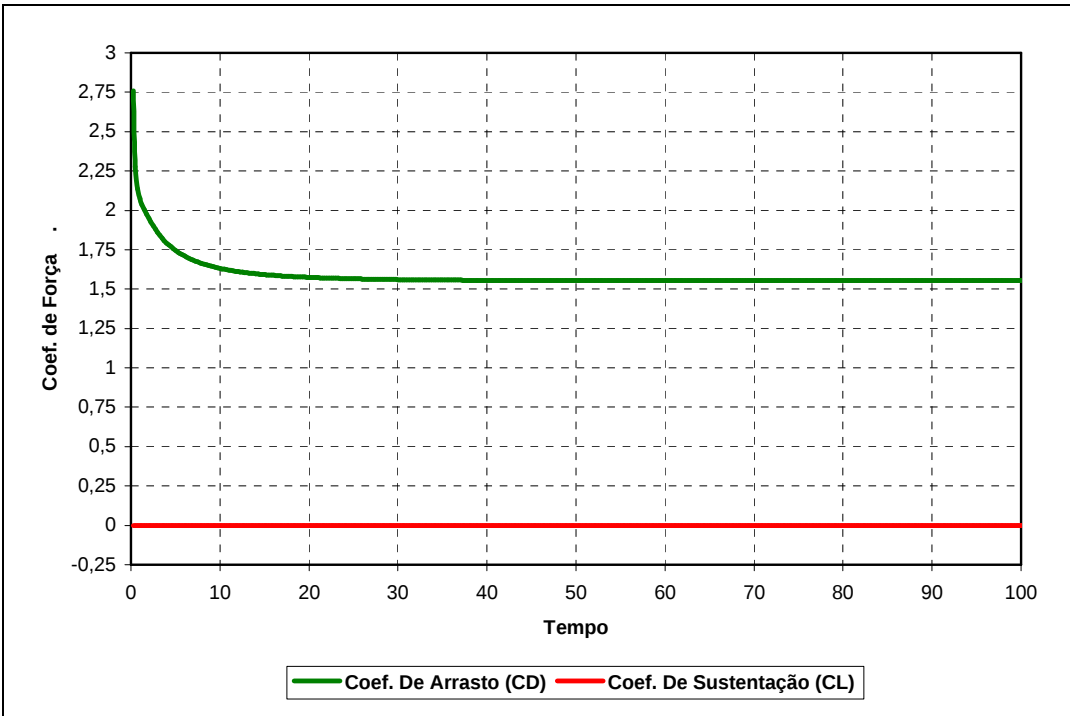


Fig. 6.21. Coeficientes de arrasto (CD) e de sustentação (CL)para um número de Reynolds igual a 40. Simulação Tridimensional.

Os coeficientes de força, no estado estacionário, resultantes da simulação do escoamento para $Re = 280$, mostram-se na figura 6.22. Aqui lê-se um coeficiente de arrasto de 1.35 e um coeficiente de sustentação igual a 0.70; praticamente os mesmos resultados obtidos no caso bidimensional, o que indica que faltam testes mais detalhados, até o código capturar os efeitos tridimensionais que apresentam-se nesta condição do escoamento.

A modo de ilustração, na figura 6.23, mostram-se as iso-superfícies de vorticidade obtidas da simulação do escoamento para $Re = 280$.

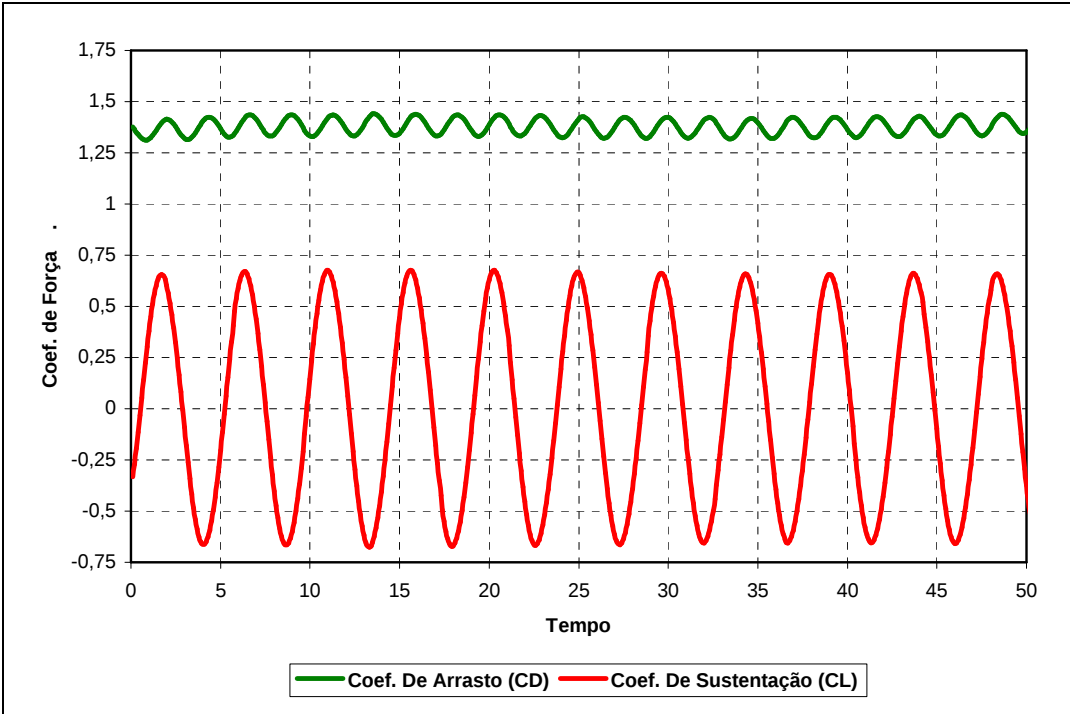


Fig. 6.22. Coeficientes de Força sobre o cilindro para $Re = 280$. Simulação tridimensional.

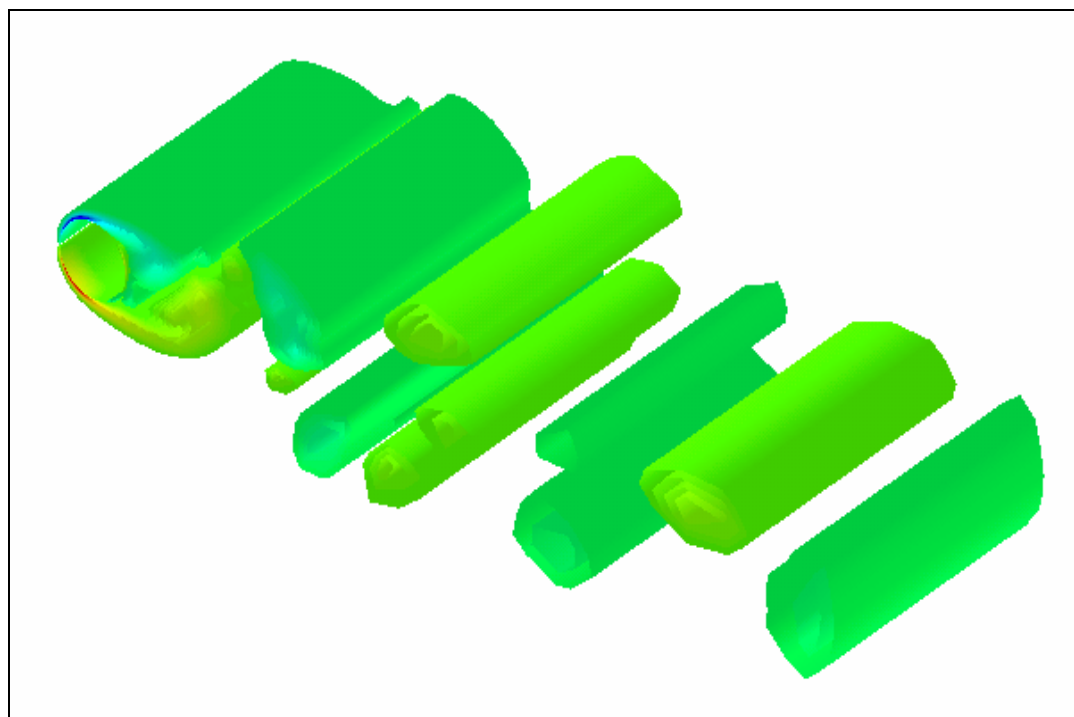


Fig. 6.23. Iso-superfícies de vorticidade para o escoamento em torno de um cilindro para $Re = 280$. Simulação tridimensional.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1. Conclusões

No presente trabalho empregou-se o método da decomposição de Adomian para obter funções de interpolação unidimensionais para serem usadas na discretização das equações de Navier-Stokes. Obtiveram-se expressões apropriadas tanto para o método dos elementos finitos quanto para o método dos volumes finitos.

No contexto dos volumes finitos, desenvolveram-se funções de interpolação para os termos convectivos e os difusivos, cujos parâmetros permitem-lhes levar em consideração tanto a magnitude quanto a direção da velocidade do escoamento em cada ponto do domínio fluido e, o que é mais importante ainda, leva em conta a relação de magnitude convecção-difusão (número de Peclet ou Reynolds local).

A análise da função de interpolação dos termos convectivos, permite concluir que:

- A nova função de interpolação apresenta um erro de terceira ordem, caracterizando um esquema de baixa difusão e dispersão numérica

Para verificar a capacidade do método para solucionar com precisão problemas de difusão-convecção, implementou-se um algoritmo numérico para resolver equações unidimensionais com solução analítica. Neste sentido, resolveram-se numericamente a equação linear da onda e a equação de Burgers usando o esquema HOWUDS proposto neste trabalho e outros esquemas clássicos como os métodos UPWIND, WUDS e CENTRAL de segunda e quarta ordem. Em todos os casos simulados, produziram-se resultados que permitem assegurar que:

- O novo esquema de interpolação produz soluções estáveis com menor difusão e dispersão numérica que as produzidas pelos outros esquemas.

Também se desenvolveu um algoritmo que aplica o método da projeção no contexto dos volumes finitos para resolver o escoamento bidimensional, incompressível e laminar numa cavidade quadrada e ao redor de um corpo cilíndrico circular. O algoritmo implementa as mesmas funções de interpolação usadas no caso descrito anteriormente. Os resultados obtidos compararam-se com resultados numéricos de outras fontes. As conclusões destas provas são:

- O algoritmo numérico que implementa o novo esquema de interpolação proposto (HOWUDS) permite obter soluções precisas quando se usa dentro das limitações presentes nele, quer dizer, simulação numérica direta do escoamento (se modelo de turbulência).
- O esquema HOWUDS produz soluções estáveis para escoamentos altamente convectivos e com fortes recirculações.
- O método da projeção implícito (Crank-Nicolson), aqui implementado, associado ao método dos volumes finitos, é uma ferramenta eficiente na solução das equações de Navier-Stokes.

7.2. Sugestões

No estágio de desenvolvimento no qual se encontra o algoritmo implementado no presente trabalho, é possível realizar os seguintes estudos:

- Implementação do código para o estudo das vibrações induzidas por vórtices em cilindros circulares. Podem-se fazer estudos tanto em duas quanto em três dimensões.
- Usar o código no estudo mais detalhado das tridimensionalidades do escoamento em torno de cilindros.

Sugerem-se os seguintes trabalhos para melhorar alguns aspectos do algoritmo que precisam ser aprimorados:

- Implementar outras condições de contorno para dar maior versatilidade ao algoritmo. Sugere-se fazer ênfase em condições de contorno especiais para fronteiras artificiais, que evitem reflexão a montante.

- Estudar a possibilidade de implementar as funções de interpolação aqui obtidas no contexto dos elementos finitos.
- Aplicar modelos de turbulência, para poder avançar no estudo de problemas com números de Reynolds relativamente altos.

REFERÊNCIAS

- ADOMIAN, G., 1994, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. 1ed., Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- ANDERSEN, D. A., TANNEHILL, J. C., PLETCHER R. H., 1984, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Washington, DC., USA, Taylor&Francis
- BAKER, A. J., 1983, *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Washington, D.C., USA, Hemisphere Publishing Corporation
- BEDDHU, M., TAYLOR, L. K., WHITFIELD, D. L., 1994, "A Time Accurate Calculation Procedure for Flows with a Free Surface Using a Modified Artificial Compressibility Formulation", *Applied Mathematics and Computation*, v. 65, pp. 33-48.
- BLEVINS, R. D., 1977, *Flow Induced Vibration*, Firth Edition, New York, NY, USA, Van Nostrand Reinhold
- BOTELLA, O., PEYRET, R., 1998, "Benchmark Spectral Solutions on the Lid-Driven Cavity Flow", *Computers & Fluids*, v. 27, pp. 421-433.
- BRAZA, M., CHASSAING, P., HA MINH, H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder", *J. Fluid Mech.*, v. 165, pp. 79-130
- CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A., et al., 1988, *Spectral Methods in Fluids Dynamic*, First Edition, Berlin, Germany, Springer-Verlag
- CARETTO, L. S., CURR, R. M., SPALDING, D. B., 1972, "Two Numerical Methods for Three-dimensional Boundary Layers", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, v. 1, pp 39-57
- CHANG, K., SA, J., 1992, "Patterns of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder", *AIAA Journal*, v. 30, n. 5, pp. 1331-1336.
- CHENG, L., ARMFIELD, A., 1995, "A Simplified Marker and Cell Method for Unsteady Flows on Non-Staggered Grids", *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, v. 21, pp. 15-34.
- CHORIN, A. J., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *Journal of Computational Physics*, v. 2, No. 1, pp. 12-26
- CHORIN, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations", *Mathematics of Computation*, v. 23, pp. 745-762
- COLELLA, P., WOODWARD P., 1984, "The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas Dynamic Simulations", *J. of Computational Physics*, v. 54, pp. 174-201

- DE VAHL DAVIS, G., MALLINSON, G., 1976, "An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximations by a Study of Recirculating Flow", *Computers and Fluids*, v. 4, pp. 29-43
- EISEMAN, P. R., 1985, "Grid Generation for Fluid Mechanics Computations", *Annual Rev. Fluid Mechanic*, v. 17, pp. 487-522
- FASEL, H., 1976, "Investigation of the Stability of Boundary Layers by a Finite-Difference Model of the Navier-Stokes Equations": *J. Fluid Mechanic*, V. 78, pp. 355-383.
- FLETCHER, C. A. J., 1991a, *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, Second Edition, Berlin, Germany, Springer-Verlag
- FLETCHER, C. A. J., 1991b, *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*, Second Edition, Berlin, Germany, Springer-Verlag
- FROMM, J. E., 1964, "The Time Dependent Flow of a Incompressible Viscous Fluid", *Meth. Comput. Phys.*, v.3, pp. 345-382
- GASKELL, P. H., LAU, A. K., 1988, "Curvature-Compensation Convective Transport: SMART, a New Boundedness-Preserving Transport Algorithm", *Int. J. Num. Methods Fluids*, v. 8, pp. 617-
- GERRARD, J. H., The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, v.25, pp.401-413, 1966.
- GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *J. Computational Physics*, v. 48, pp. 387-411
- GODUNOV, 1959, "A finite-Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equation of Fluid Dynamics", *Mat. Sb.*, v. 47, pp. 428-441
- GRESHO, P. M., 1990, "On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for viscous Incompressible Flow and Its Implementation Via a Finite Element Method that also Introduces a Nearly Consistent Mass Matrix. Part 1: Theory", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, v. 11, pp. 587-620
- GRIEBEL, M., DORNSEIFER, T., NEUNHOEFFER, T., 1998, *Numerical Simulation in Fluid Dynamics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Press
- GROPP, W., LUSK, E., SKJELLUM, A., 1999, *Using MPI*, 2 ed., MIT Press.
- GUNZBURGER, M. D., 1989, *Finite Element Method for Viscous Incompressible Flows*, NY, USA, Academic Press.
- HARLOW, F. H., WELCH, J. E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", *The Physics of Fluids*, v. 8, No. 12, pp. 2182-2189
- HARTEN, A., OSHER, S., 1987, "Uniformly High-Order Accurate Non-Oscillatory Schemes", *SIAM J. Numerical Anal.*, v. 24, pp. 279-309

- HARTEN, A., ENGQUIST, B., OSHER, S., CHAKRAVARTHY, S., 1987, "Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III", *J. of Computational Physics*, v. 71, pp. 231-303
- HERFJORD, K., 1995, *A Study of Two-dimensional Separated Flow by a Combination of the Finite Element Method and Navier-Stokes Equations*, Dr. Eng. These, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway
- HIRSCH, C., 1988a, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, v. 1, *Fundamentals of Numerical Discretization*, Wiley Series in Numerical Methods in Engineering
- HIRSCH, C., 1988b, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, v. 2, Wiley Series in Numerical Methods in Engineering
- HUGHES, T. J. R., LID, W. K., e BROOKS, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by The Penalty Method", *J. Comput. Phys.*, v. 30, pp. 1-6.
- IKOHAGI, T., SHIN, B. R., e DAIGUJI, H., 1992,. "Application of an Implicit Time-Marching Scheme to a Three-Dimensional Incompressible Flow Problem in Curvilinear Coordinate Systems", *Computer and Fluids*, v. 21, n. 2, pp. 163-175
- JIANG, G., SHU C., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes", *J. of Computational Physics*, v. 126, pp. 202-28
- KARNIADAKIS, G. E., ISRAELI, M., ORZAG, S. A., 1991, "High-Order Splitting Methods for Incompressible Navier-Stokes Equations", *Journal of Computational Physics*, v. 97, pp. 414-443
- LEONARD, B. P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure based on Quadratic Upstream Interpolation", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 19, pp. 59-98
- LEONARD, B. P., 1988, "Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities", *Int. J. Num. Methods Fluids*, v. 8 , pp. 1291-
- LEONARD B. P., 1991, "The ULTIMATE Conservative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Dimensional Advection", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 88, pp. 17-74.
- LESCHZINER, M. A., 1980, "Practical Evaluation of Three Finite Difference Schemes for the Computation of Steady-State Recirculating Flows", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 23, pp. 293-
- MAHESH, K., 1996, "A New Class of Finite Difference Scheme", CTR - Annual Research Brief, pp. 297-305.
- MALISKA, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional. Fundamentos e Coordenadas Generalizadas*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, LTC Editora
- MALLINSON, G. D., DE VAHL DAVIS, G., 1977, "Three Dimensional Natural Convection in a Box: A Numerical Study", *J. Fluid Mechanic*, v. 83, pp. 1-31.

- MCCORMACK, R. W., 1982, "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow", *AIAA Journal*, v. 20, No. 9, pp. 1275-1281
- MENEZHINI, J. R., 1993, *Numerical Simulation of Bluff Flow Control using a Discrete Vortex Method*, Ph.D. Dissertation, University of London, England
- MITTAL, R., 1995, Study of Flow Past Elliptic and Circular Cylinders using Direct Numerical Simulation, Ph.D. Thesis, University Illinois at Urbana-Champaign, USA
- MONTERO, R., LLORENTE, I., 2000, "Robust Multigrid Algorithms for the Incompressible Navier-Stokes Equations", *ICASE Report No. 2000-27*, pp. 1-18
- ORZAG, S. A., Israeli, M., Deville, M. O., 1986, "Boundary Conditions for Incompressible Flows", *J. Scientific Computing*, v. 1, No. 1, pp. 75-111
- PANTON, R. L., 1996, *Incompressible Flow*. 2 ed., NY, USA, John Wiley and Son, INC.
- PATANKAR, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Washington, D.C., USA, Hemisphere Publishing Corporation
- PEYRET, R., TAYLOR, T. D., 1983, *Computational Methods in Fluid Flow*, Springer Series Comput. Phys., Berlin, Germany. Springer-Verlag
- RAITHBY, G. D., 1976, "Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 9, pp. 153-164
- RAITHBY, G. D., 1976, "Prediction of Dispersion by Surface Discharge", *Basin Investigation and Modelling Section*, Canada Centre for Inland Waters, Canada
- RAITHBY, G. D., TORRANCE, K. E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computers & Fluids*, v. 2, pp. 191-206
- REDDY, M. P., REDDY, J. N., AKAY, H. U., 1992, "Penalty Finite Element Analysis of Incompressible Flows using Element by Element Solution Algorithms", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, v. 100, pp. 169-205
- RICHARDSON, S. M., CORNISH, A. R. H., 1977, *J. Fluid Mechanic*, v. 82, pp. 309-340
- RHIE, C. M., CHOW, W. L., 1983, "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", *AIAA Journal*, v. 21, No. 11, pp. 1525-1532
- RIZZI, A., ERICKSSON, L. E., 1985, "Computation of Inviscid Incompressible Flow Problem", *J. Fluid Mech.*, v. 153, pp. 275-312
- ROACHE, P. J., 1976, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque, USA
- ROSHKO, A., 1954, "On the development of turbulent wakes from vortex streets", *National Advisory Committee for Aeronautic Report 1991*, 124-132

- TAFTI, D., 1995, "Alternate Formulations for the Pressure Equation Laplacian on Collocated Grid for Solving the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations", *J. Computational Physics*, v. 116, pp.143-153
- SADRI, R. M., FLORYAN, J. M., 2002, "Entry Flow in a Channel", *Computers and Fluids*, v. 31, pp. 133-157.
- SHAMES, I. H., 1995, *Mecânica de Fluidos*, Tercera Edição, Santafé de Bogotá, Bogotá, Colombia, McGraw Hill
- SMITH, B., BJORSTAD, P., GROPP, W., 1996, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press
- SNIR, M., OTTO, S., HUSS-LEDERMAN et. al., 1998, *MPI: The Complete Reference*, 2 ed, MIT Press
- SPALDING, D. B., 1972, "A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving both First and Second Derivatives", *Int. J. of Numerical Meth. Engng.*, v. 4, pp. 551-
- SPHAIER, S. H., 1991, "Aplicação do Random Vortex Method para Cálculos de Forças Hidrodinâmicas em Seções Circulares", XI Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
- STEGER, J. L., 1978, "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries", *AIAA Journal*, v. 16, No. 7, pp. 679-686
- THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A., MASTIN, C. W., 1985, *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, Elsevier, New York
- TRITTON, D. J., 1959, "Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.*, v. 6, pp. 547-567
- VAN DOORMAAL, J. P., RATHBY, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", *Numerical Heat Transfer*, v.7, pp. 147-163.
- WANDERLEY, J. Y., 2001, "An Algorithm for Slightly Compressible Flows". In: *Proceedings of the 20th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, June.
- WHITE, F. M., 1990, *Viscous Fluid Flow*. 2 ed., NY, USA, McGraw-Hill.
- WIESELSBERGER, C., 1922, New data on the laws of fluid resistance, *National Advisory Committee for Aeronautics*, TN 84
- WILLIAMS, P. T., BAKER, A. J., 1996, "Incompressible Computational Fluid Dynamics and the Continuity Constraint Method for the Three-dimensional Navier-Stokes Equations", *Numerical Heat Transfer*, v. 29, No. 2, pp. 137-273
- YANENKO, N., 1971, *The Method of the Fractional Steps*, First Edition, Berlin, Germany, Springer-Verlag

- YANG, H., CAMARERO, 1991, "Internal Three-Dimensional Viscous Flow Solutions using the Vorticity-Potential Method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 12, pp. 1-15.
- YEUNG, R. W., SPHAIER, S. H., e VAIDHYANATHAN, M., 1993, "Unsteady Flow about Bluff Cylinders", *Int. Journal of Offshore and Polar Engineering*, v. 3, n. 2, pp. 81-92.
- ZALESAK, S., 1979, "Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids", *J. of Computational Physics*, v. 31, pp. 335-62.
- ZANG, Y., STREET, R. L., KOSEFF, J. R., 1994, "A Non-Staggered Grid, Fractional Step Method for Time Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates", *Journal of Computational Physics*, v. 114, pp. 18-33
- ZIENKIEWICZ, O. C., 1974, "Constrained Variational Principles and Penalty Function Methods in Finite Element Analysis", In: *Lecture Notes in Mathematics: Conference on the Numerical Solution of Differential Equations*, Springer-Verlag, pp. 207-214, Berlin.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.