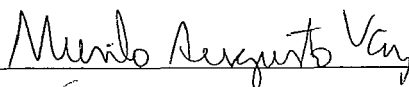


MODELO ANALÍTICO PARA AVALIAÇÃO DE INSTABILIDADE NAS
ARMADURAS DE DUTOS FLEXÍVEIS

Anderson Barata Custódio

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA OCEÂNICA.

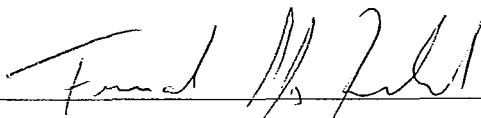
Aprovada por:



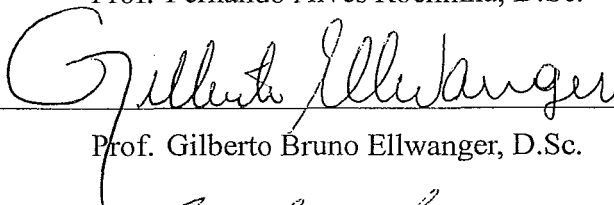
Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.



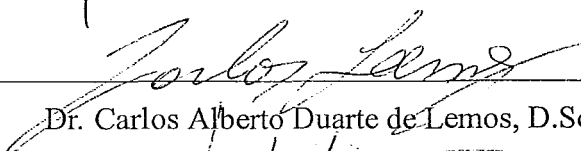
Prof. Peter Kaleff, D.Ing.



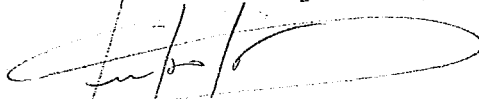
Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.



Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.



Dr. Carlos Alberto Duarte de Lemos, D.Sc.



Prof. Celso Pupo Pesce, D.Sc.

CUSTÓDIO, ANDERSON BARATA

Modelo Analítico para Avaliação de Instabilidade nas Armaduras de Dutos Flexíveis
[Rio de Janeiro] 2005

XVIII, 167 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Oceânica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Falha por formação de gaiola em dutos flexíveis. 2. Instabilidade de armaduras de dutos flexíveis. 3. Dutos flexíveis. 4. Instabilidade estrutural.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Aos meus pais, Adilson e Lúcia Helena, por 30 anos de apoio.

A Giselle Ferreira de Miranda, por apostar em mim, tolerando anos de pequenas e grandes ausências.

Aos grandes amigos da COPPE/UFRJ: Mário Vignoles, Luiz Eduardo Peclat, Rafael Solano, Pedro Paulo Kenedi, meu orientador Murilo Augusto Vaz e tantos outros que não dá para mencionar.

Aos meus colegas da PETROBRAS: Carlos Alberto (Beto), Léa Troina, Cezar Paulo, Pedro Mendes, Eduardo Vardaro, Ricardo Capllonch, Ricardo Franciss, Elton Ribeiro e muitos mais.

À comunidade GNU, que desenvolveu todo software livre que foi usado na pesquisa e composição gráfica dessa tese.

À Agência Nacional de Petróleo, pelo suporte a mim durante mais de três anos e a tantos outros pesquisadores no âmbito do Programa de Desenvolvimento de Recursos Humanos.

Ao professor de matemática Ismael, que no ano de 1986 me encaminhou na área tecnológica, de onde não saí desde então.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MODELO ANALÍTICO PARA AVALIAÇÃO DE INSTABILIDADE NAS ARMADURAS DE DUTOS FLEXÍVEIS

Anderson Barata Custódio

Outubro/2005

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Programa: Engenharia Oceânica

Esta tese sugere um método de estimativa da instabilidade de reforçadores helicoidais de dutos flexíveis sob carregamento axissimétrico, cuja manifestação mais comum é a “formação de gaiola”. O método baseia-se em algumas ações especiais - a proposição de parâmetro angular ϱ associado à variação do raio; o equacionamento do equilíbrio no sistema de coordenadas cilíndricas; a aceitação de condições de extremidade viáveis à configuração axissimétrica e à manutenção da compatibilidade com outras camadas; a linearização da resposta de outras camadas em torno de um ponto de equilíbrio, a aplicação do método de perturbação - para estabelecer um problema de autovalor. A aplicação do modelo é feita para dutos sobre os quais se possui resultados experimentais. Conclusões interessantes são obtidas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYTICAL MODEL FOR INSTABILITY ASSESSMENT OF FLEXIBLE PIPE'S ARMOURS

Anderson Barata Custódio

October/2005

Advisor: Murilo Augusto Vaz

Department: Ocean Engineering

This thesis addresses an analytical model for assessment of the critical loads that may lead to the instability failure on flexible pipe under axisymmetric loading, whose most common manifestation is the birdcaging. This model is based on some special actions - the proposition of an angular parameter ϱ related to the rate of variation of the armour radius; the use of the equilibrium equations in the cylindrical coordinate system; the acceptance of edge conditions to make an axisymmetric solution possible and to respect conditions of compatibility with other layers; the linearization of the response of other layers and the use of perturbation methods - to establish an eigenvalue problem. The model is applied to a flexible pipe whose response was formerly studied by means of testing. Interesting conclusions arise from the comparison.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Descritivo conceitual do duto flexível	4
1.2	Relevância e contextualização do problema	6
1.3	Fundamentos sobre instabilidade estrutural	8
1.4	Pesquisa bibliográfica	12
1.5	Convenção tipográfica	13
1.6	Adimensionalização	15
2	Configuração primária	18
2.1	Definições básicas	18
2.2	Equilíbrio com forças externas	21
2.3	Modelagem das camadas homogêneas	22
2.4	Modelagem de reforçadores helicoidais	23
2.4.1	Descrição das configurações de equilíbrio $\mathbb{E}^{\times}$ e $\mathbb{E}^{\dagger}$	24
2.4.2	Deformações de reforçadores na configuração primária $\mathbb{E}^{\dagger}$	28
2.4.3	Equilíbrio do reforçador na configuração primária $\mathbb{E}^{\dagger}$	29
2.5	Modelagem de bandagens reforçadas	31
2.5.1	Propriedades mecânicas da bandagem	32
2.5.2	Tratamento da bandagem como reforçador helicoidal	34
2.5.3	Tratamento da bandagem como casca ortotrópica	35

3	Trilhando outros caminhos	39
3.1	Introdução	39
3.2	Novidades na cinemática do reforçador	40
3.3	Generalização do equilíbrio de reforçador	43
3.4	Relações constitutivas gerais do reforçador	45
3.5	Aplicação da técnica de perturbação	49
3.5.1	Expansão das incógnitas	50
3.5.2	Expansão das relações constitutivas e cinemáticas	51
3.5.3	Expansão das relações de equilíbrio	53
3.6	Consolidação do PVE para o reforçador	55
3.6.1	Condições de extremidade	56
3.7	Formulação do PVE sobre $\vartheta'_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e $\varrho_{(1)}$	57
3.7.1	Formulação diferencial do equilíbrio para o primeiro PVE	57
3.7.2	Condições de extremidade para o primeiro PVE	59
3.7.3	À procura de solução não-trivial para o PVE.	59
3.8	Determinação de $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$, $\check{\epsilon}_{(1)}$ e $\check{\gamma}_{(1)}$	61
3.8.1	Considerações sobre o equilíbrio e compatibilidade com outras camadas	62
3.9	Energia, suas variações e instabilidade	66
3.10	Pós-instabilidade inicial	67
4	Aplicação	71
4.1	Introdução	71
4.2	Implementação computacional	72
4.3	Comparação numérico-experimental	75
4.3.1	Amostra 10	77
4.3.2	Amostra 11	86
4.4	Estudo de sensibilidade da resposta	95

4.4.1	Influência do ângulo de assentamento	95
4.4.2	Influência da altura do reforçador	100
4.4.3	Influência da rigidez radial	104
4.4.4	Influência da rigidez ao giro k_g da seção do reforçador	112
4.4.5	Influência do comprimento da amostra	114
5	Conclusões	117
A	Provas	127
A.2.1	Equilíbrio de um cilindro espesso sob pressão interna, externa, tração e torque sob pequenas deformações	127
A.2.2	Expansão da distensão do reforçador	130
A.2.3	Dedução de derivadas de vetores-base do sistema de coordenadas cilíndricas	132
A.2.4	Equações de equilíbrio na configuração $\mathbb{E}^+$	133
A.2.5	Relações constitutivas para componentes cilíndricas do momento $\mathring{\mathbf{M}}$	135
A.2.6	Casca ortotrópica representando as bandagens	136
A.3.1	Ângulos de Euler	140
A.3.2	Introdução do parâmetro ϱ	141
A.3.3	Generalização de curvaturas do reforçador	143
A.3.4	Semelhança de trabalho para determinação de rigidez k_{et} equivalente	144
A.3.5	Expansão das incógnitas	146
A.3.6	Expansão das relações cinemáticas e constitutivas	147
A.3.7	Substituição da solução para raízes complexas e diferentes nas condições de extremidade	150
B	Código para estimativa da resposta	153
B.1	Modelo de mola helicoidal	156
B.2	Modelo de duto flexível de $2\frac{1}{2}$ polegadas	159

C Documentação de estudos de caso 162

C.1 Amostra 10 162

C.2 Amostra 11 166

Lista de Figuras

1.1	Duto flexível em dissecação após falha por instabilidade. Fonte:[3].	3
1.2	Descrição conceitual de um duto flexível oceânico.	5
1.3	Flambagem elástica de uma viga perfeita, bi-rotulada.	9
1.4	Caminhos de equilíbrio de uma viga bi-rotulada sofrendo flambagem.	10
1.5	Arco bi-rotulado sob carga externa.	11
1.6	Caminho de equilíbrio de um arco sob carga externa.	11
2.1	Alternativas de configuração possíveis da resposta do problema do reforçador sob carregamento axissimétrico moderado.	24
2.2	Ilustração da relação entre $\check{R}\check{\theta}$ e ξ na configuração $\check{\mathbb{E}}$; relação similar também é válida para a configuração $\check{\mathbb{E}}$	25
2.3	Descrição de alguns elementos de um helicóide.	27
3.1	Descrição de ângulos de Euler utilizados.	41
3.2	Abstração de camadas adjacentes como blocos de rigidez para fins da modelagem da resposta de um único reforçador.	47
3.3	Ilustração clássica de equilíbrio instável, estável e indiferente.	66
4.1	Fluxograma do algoritmo que determina a configuração $\check{\mathbb{E}}$ do duto.	73
4.2	Fluxograma do algoritmo que determina os pontos de bifurcação.	74
4.3	Ajuste da rigidez à compressão (amostra 10).	78
4.4	Evolução da amostra 10 no caminho primário de equilíbrio.	80
4.5	Ajuste da rigidez à compressão (amostra 11).	87

4.6	Evolução da amostra 11 no caminho primário de equilíbrio.	89
4.7	Forma da variação da carga crítica de bifurcação como resposta à mudança do ângulo inicial de assentamento do reforçador e quatro casos de rigidez da fundação elástica. Fonte: [19].	96
4.8	Resposta de carga crítica de instabilidade contra ângulo $\check{\vartheta}_1$ de armadura (amostra 11).	98
4.9	Resposta de deformação associada ao modo de instabilidade com menor carregamento contra ângulo $\check{\vartheta}_1$ (amostra 11).	98
4.10	Resposta de modo de instabilidade contra ângulo $\check{\vartheta}_1$ (amostra 11). . . .	99
4.11	Resposta de componentes de deformação radial, mudança de ângulo e giro da seção contra ângulo $\check{\vartheta}_1$ (amostra 11).	99
4.12	Resposta de carga crítica de instabilidade para casos de altura do reforçador (amostra 11).	102
4.13	Resposta de carga crítica de instabilidade para casos de altura do reforçador (amostra 11).	102
4.14	Fator de comprometimento do primeiro modo instável para vários casos de altura do reforçador (amostra 11).	103
4.15	Fator de comprometimento do primeiro modo instável para vários casos de altura do reforçador (amostra 11).	103
4.16	Evolução da carga crítica de bifurcação para variação da rigidez da fundação elástica para três alternativas de k_g . Fonte: [19].	104
4.17	Variação da carga de instabilidade para vários casos de μ_c sobre a bandagem (amostra 11).	107
4.18	Variação da deformação onde há a instabilidade para vários casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).	107
4.19	Variação do fator de comprometimento f_d e do modo n para casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).	108
4.20	Variação das componentes $\beta_{1...3}$ para vários casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).	108
4.21	Variação da carga de instabilidade para vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).	110

4.22	Variação do fator de comprometimento f_d para carga mínima de instabilidade em vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).	110
4.23	Variação das componentes $\beta_{1...3}$ para vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).	111
4.24	Variação da carga de instabilidade para vários casos de rigidez à torção k_g (amostra 11).	113
4.25	Variação do fator de comprometimento f_d para carga mínima de instabilidade em vários casos de rigidez à torção k_g (amostra 11).	113
4.26	Variação da carga de bifurcação como resposta à mudança do comprimento do reforçador, para quatro casos de rigidez k_e . Fonte: [19]. . . .	116
4.27	Resposta da carga para casos de variação do comprimento (amostra 11). . . .	116
A.1	Relação entre sistemas de coordenadas global cartesiano e cilíndrico. . . .	142
A.2	Comportamento de k_{et} frente à variação de k_s e k_i	145
B.1	Verificação do programa pander para o caso de mola helicoidal.	158
C.1	Evolução da expansão radial contra compressão (amostra 10).	163
C.2	Evolução da giro contra compressão (amostra 10).	163
C.3	Evolução das tensões em várias camadas da amostra 10 no caminho primário de equilíbrio.	164
C.4	Evolução da expansão radial contra compressão (amostra 11).	166
C.5	Evolução da giro contra compressão (amostra 11).	167

Nomenclatura e Lista de Símbolos

A	determinante do sistema de equações características (3.43).
A_1	rigidez à flexão em torno da direção do vetor diretor d_1 (adim.).
A_2	rigidez à flexão em torno da direção do vetor diretor d_2 (adim.).
A_3	rigidez à torção do reforçador (adimensionalizado).
$C_{a[c]}$	matriz de complacência para bandagens modeladas como cascas.
E	módulo de elasticidade do material.
E_f	módulo de elasticidade de cada fibra em uma camada de bandagens.
$\underline{EI}_2$	rigidez à flexão do reforçador em torno da direção do vetor diretor d_2 em relação ao centróide da seção, valor não-adimensionalizado.
E_u	módulo de elasticidade equivalente na direção do urdume.
G	módulo de cisalhamento do material.
I_1	momento de 2ª área da seção S na direção do vetor diretor d_1 em relação ao centróide da seção.
I_2	momento de 2ª área da seção S na direção do vetor diretor d_2 em relação ao centróide da seção.
J	momento polar de área da seção S em relação ao centróide da seção.
K_{11}	rigidez (tangente) à tração do duto completo.
K_{12}	coeficiente de acoplamento (tangente) entre tração e giro do duto completo.
K_{21}	coeficiente de acoplamento (tangente) entre torque e distensão do duto completo.

K_{22}	rigidez (tangente) à torção do duto completo.
M_1	componente de momentos na direção do vetor diretor $\mathbf{d}_1$.
M_2	componente de momentos na direção do vetor diretor $\mathbf{d}_2$.
M_3	componente de momentos na direção tangente à linha central.
$\mathbf{M}$	vetor de momentos em uma seção do reforçador.
M_r	componente de momentos na direção radial.
M_θ	componente de momentos na direção circunferencial.
M_z	componente de momentos na direção longitudinal.
N_1	componente de forças na direção do vetor diretor $\mathbf{d}_1$.
N_2	componente de forças na direção do vetor diretor $\mathbf{d}_2$.
N_3	componente de forças na direção tangente à linha central.
$\mathbf{N}$	vetor de forças em uma seção do reforçador.
N_r	componente de forças na direção radial (perpend. à geratriz $\mathbb{C}_g$).
N_θ	componente de forças na direção circunferencial.
N_z	componente de forças na direção longitudinal.
P	passo de assentamento de camadas helicoidais (reforçadores, etc).
$P_t^{(i)}$	passo da trama na estrutura da bandagem (camada i).
$\check{Q}$	torque global no duto flexível.
$Q^{(i)}$	parcela do torque $\check{Q}$ advinda da camada i .
$\overset{\times}{R}$	raio da linha central do reforçador na configuração referencial.
S	área seccional de camadas, especialmente as homogêneas.
S_w	área seccional de reforçadores.
$\check{T}$	tração global no duto flexível.

$T^{(i)}$	parcela da tração $\check{T}$ advinda da camada i .
$\mathbf{T}_{lc}$	matriz de mudança dos sistemas de coordenadas para tensores.
U	energia de deformação.
W_l	peso por comprimento de uma camada.
a_{ij}	nomenclatura geral de diversos coeficientes usados para simplificar escrita de equações e que são calculados em cada ponto do caminho primário.
c_r	constante de integração em $R_{(1)}$.
c_{ϑ_1}	constante de integração em $\vartheta_{1(1)}$.
$\mathbf{d}_1$	vetor unitário local na seção transversal do reforçador: $\check{\mathbf{d}}_1 = -\mathbf{i}_r$.
$\mathbf{d}_2$	vetor unitário local na seção transversal do reforçador, ortogonal a $\mathbf{d}_1$.
$\mathbf{d}_3$	vetor unitário tangente à curva central $\mathbb{C}$, ortogonal a $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$.
f_d	fator de comprometimento do modo de instabilidade.
$\mathbf{i}_{1\dots 3}$	base de vetores unitários ao sistema de coordenadas cartesianas.
$\mathbf{i}_r$	vetor unitário na direção radial.
$\mathbf{i}_\theta$	vetor unitário na direção circunferencial.
$\mathbf{i}_z$	vetor unitário na direção longitudinal.
$k_{11}^{(i)}$	soma das contribuições de rigidez à tração de todas as camadas exceto (i) .
$k_{12}^{(i)}$	acoplamento de tração e giro de todas as camadas exceto (i) .
$k_{21}^{(i)}$	acoplamento de torque e distensão de todas as camadas exceto (i) .
$k_{22}^{(i)}$	soma das contribuições de rigidez à torção de todas as camadas exceto (i) .
k_{et}	rigidez radial tangente, definida na eq. (3.16).
k_g	rigidez ao giro do tendão em torno da própria linha central.
l_w	largura do perfil de seção transversal de um reforçador (na direção $\mathbf{d}_2$).
m_3	momento distribuído em torno do eixo tendão, causando tendência de giro.

m	vetor de momentos externos distribuídos em uma seção do reforçador.
n_c	número de camadas.
n_ℓ	número de passos da armadura, proporcional ao comprimento do duto.
n_w	número de reforçadores em uma armadura.
$\check{p}_{ext}$	pressão externa no duto flexível.
$p^{(i)}$	pressão na face mais externa da camada (i) : $p^{(i)} = p_{ext}^{(i)}$.
$\check{p}_{int}$	pressão interna no duto flexível.
q	vetor de forças externas distribuídas em uma seção do reforçador.
q_r	carga distribuída sobre o tendão na direção radial.
r	descrição vetorial da curva $\mathbb{C}$.
t_w	altura do perfil de seção transversal de um reforçador (na direção $\mathbf{d}_1$).
z_s	posição de um ponto da curva $\mathbb{C}$ na direção $\mathbf{i}_z$.
$\mathbb{C}$	curva que atravessa o centróide das seções transversal de reforçadores.
$\mathbb{C}_g$	eixo longitudinal do duto flexível.
$\mathbb{D}$	agrupamento de deformações e deslocamentos.
$\mathring{\mathbb{E}}$	configuração de equilíbrio do reforçador livre de forças externas.
$\overset{\times}{\mathbb{E}}$	configuração de equilíbrio referencial.
$\overset{+}{\mathbb{E}}$	configuração deformada de equilíbrio que satisfaz condições da pág. 19.
$\overset{*}{\mathbb{E}}$	configuração de equilíbrio secundária, decorrente da perda de estabilidade.
$\overset{\sim}{\mathbb{T}}$	conjunto de parâmetros que definem carregamento externo axissimétrico.
Ω	energia potencial de forças externas.
Π	energia potencial total, especialmente de um reforçador.
β_1	coeficiente de $\varrho_{(1)}$.

β_2	coeficiente de $\vartheta'_{1(1)}$.
β_3	coeficiente de $\vartheta_{3(1)}$.
ξ	distensão global do duto flexível.
$\tilde{\gamma}$	rotação por unidade de comprimento do duto em torno do eixo $\mathbf{i}_z$.
ℓ_c	comprimento referencial do duto flexível.
ℓ_s	comprimento da linha central $\mathbb{C}$ de um reforçador de armadura.
$\kappa_{1\dots 3}$	curvaturas do reforçador.
μ_c	fator para ajuste experimental da rigidez da bandagem.
μ_{tc}	produto de μ_{tt} e um coeficiente que trata da resistência à compressão.
μ_{tt}	fração volumétrica da tração em relação ao volume total da camada.
μ_{uc}	produto de μ_{ut} e um coeficiente que trata da resistência à compressão.
μ_{ut}	fração volumétrica do urdume em relação ao volume total da camada.
ν	coeficiente de Poisson do material constituinte.
ν_f	coeficiente de Poisson do material das fibras em bandagens.
$\sigma_{\theta z}$	componente de tensão cisalhante.
$\sigma_{\theta\theta}$	componente de tensão na direção circunferencial.
σ_{rr}	componente de tensão na direção radial.
σ_{zz}	componente de tensão na direção longitudinal.
θ	comprimento angular na direção circunferencial.
θ_o	posição angular em $\xi = 0$.
ε	parâmetro de perturbação muito pequeno: $\varepsilon \ll 1$.
ϑ_1	primeiro ângulo de Euler, definido tal que $\cos \vartheta_1 = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_z$ e associado ao passo de um helicóide.
ϑ_2	segundo ângulo de Euler.

ϑ_3	terceiro ângulo de Euler, associado ao giro da seção em torno de $\mathbf{d}_3$.
ξ	parâmetro de comprimento de arco ao longo da linha $\mathbb{C}$ do reforçador.
ω	expoente complexo das soluções do PVE que aponta pontos de bifurcação.
$\tilde{\omega}$	quadrado de ω , usado para simplificar equação característica (3.45).
ω_i	expoente das soluções periódicas das equações do PVE.
ω_r	expoente das soluções hiperbólicas das equações do PVE.

Capítulo 1

Introdução

Duto flexível é o nome dado para um tipo de estrutura tubular, feita pela disposição concêntrica de várias camadas de diferentes materiais metálicos e poliméricos, que é usada em larga escala no escoamento de hidrocarbonetos em ambiente oceânico. Sua conveniência nessa aplicação advém do adequado projeto de sua composição, fornecendo um produto de alta resistência à tração, bom isolamento térmico, baixa rigidez à flexão e, por isso, passível de enrolamento em grandes carretéis sem emendas. Eles foram introduzidos em sistemas de produção brasileiros ainda na década de 1970, poucos anos após seu projeto de engenharia pelos pesquisadores do Institut Français du Pétrole (IFP) Claude Bournazel, Michel Chatard e Pierre Grolet. Em razão das vantagens para sua instalação e reaproveitamento, os dutos flexíveis participaram de uma revolução de paradigmas que viabilizou o aproveitamento das reservas nacionais de hidrocarbonetos em lâminas d'água profundas e ultra-profundas a partir da terceira década da história da PETROBRAS: em sua marcha em busca de reservatórios nas províncias mais remotas, os dutos flexíveis se tornaram um insumo importante na indústria offshore.

Apesar da relevância, dutos flexíveis ainda são, em muitos aspectos, produtos onde há espaço para pesquisa e trabalho de engenharia. De fato, a natureza compósita porta as vantagens de um conceito projetado para desempenho satisfatório sob diversas condições de operação. No entanto, ela torna intrincada a determinação de quase todos os seus mecanismos de falha. Enquanto modelos analíticos para prever-lhes a resposta em condições normais de operação encontraram já na década de 1980 sua formulação fundamental em trabalhos como FÉRET e BOURNAZEL[1], vinte anos adicionais não construíram solidamente métodos para a estimativa de alguns modos de falha mais complexos, particularmente aqueles associados à instabilidade local das suas camadas.

Boa parte da funcionalidade dos dutos flexíveis se deve à presença de conjuntos de reforçadores helicoidais esbeltos assentados na camada chamada de **armadura**. A maioria dos dutos flexíveis contém duas armaduras. Um reforçador helicoidal esbelto é um elemento que, por força da curvatura, associa uma componente de força na direção longitudinal a uma componente de força na direção radial. Esse mecanismo permite que a maior parte da tração externa aplicada seja convertida em cargas de esmagamento sustentadas pelas camadas interiores. Quando a estrutura interior não é rígida suficiente para sustentar tais cargas, os reforçadores podem experimentar deformação excessiva na procura de um novo ponto de equilíbrio. Se, ao invés de uma força de tração, forem aplicadas cargas compressivas ou cargas que produzem esforços compressivos em uma armadura, os reforçadores tentam transferir, também radialmente, uma parcela da carga para as camadas adjacentes, mas no sentido inverso, isto é, para as camadas mais externas. O mecanismo de tal transferência é, no entanto, não-linear: o aumento de diâmetro do helicóide reduz progressivamente a capacidade da estrutura de suportar mais carregamento sem procurar um estado de equilíbrio com um aumento ainda maior de curvatura.

Mesmo estruturas bastante esbeltas têm alguma rigidez inicial à compressão, suficiente para sustentar cargas compressivas moderadas. No entanto, quando um certo limite é ultrapassado, ou essa rigidez desaparece ou se torna possível um estado de equilíbrio com curvaturas que surgem ou aumentam acentuadamente em resposta ao incremento de carga. Nesses casos, diz-se que há um problema de **instabilidade estrutural**. O exemplo mais intuitivo desse fenômeno é a flambagem elástica de uma coluna. No caso de dutos flexíveis, a instabilidade estrutural está relacionada a vários tipos de falha das armaduras, como a mostrada na figura 1.1.

Essa pesquisa pretende a proposição de um modelo analítico que aponte os mecanismos e cargas em que os reforçadores helicoidais de armaduras possam perder a estabilidade da sua resposta quando o duto é submetido a esforços combinados de compressão axial, torque, pressão interna e externa. Da análise dos problemas encontrados por outros grupos de trabalho e da releitura dos próprios erros durante a elaboração, fica claro que a dificuldade que inviabilizara desenvolvimento anterior se origina de dois fatores.

Em primeiro lugar, há uma má compreensão geral do próprio conceito de instabilidade das armaduras. Expressão de uma noção confusa é supor que a instabilidade surge por dois modos de falha distintos: a **formação de gaiola**, mais comum, e a **flambagem lateral**. A API RP 17B[2] cita apenas a primeira, definindo-a como “*flambagem das armaduras de tração que resulta em deformação radial significativa, usualmente causada por compressão extrema*”. Todavia, uma formulação mais completa do equilíbrio



Figura 1.1: Duto flexível em dissecação após falha por instabilidade. Fonte:[3].

sugere que a fase germinal da instabilidade combina necessariamente, em proporções que dependem da estrutura e do carregamento, componentes de perturbação no raio, no ângulo de assentamento e na tortuosidade dos reforçadores. Assim, imediatamente após a perda de estabilidade, não existe um “modo” de instabilidade puramente radial ou puramente lateral¹.

Paralelamente, a elaboração de modelos para análise de estabilidade dos reforçadores esbarrara sempre no erro de não rediscutir as hipóteses (particularmente as cinemáticas) usadas na formulação do problema matemático e também de não pensar na solução de equilíbrio primário como apenas uma das soluções matematicamente possíveis (mas sempre possíveis!) de um sistema de equações mais geral. Esse último princípio é muito importante; suas implicações sobre as condições de extremidade² ditas admissíveis são grandes.

A metodologia encaminhada avalia as soluções possíveis de um sistema de equações baseadas em alguns parâmetros cinemáticos. Ao contrário dos modelos convencionais, as formulações admitem a possibilidade de reforçadores saltarem de uma configuração de equilíbrio primária $\mathbb{E}$ (no qual eles ainda são helicoidalmente assentados com raio

¹Entretanto, evidencia-se que o encaminhamento do processo de colapso da seção do duto, após o início da falha, depende de resistência residual e falha progressiva de outras camadas, o que providencia o aspecto (gaiola, flambagem lateral) identificado em testes e incidentes no campo.

²Alguns autores preferem usar a expressão *condições de contorno*, mas considera-se o termo *condições de extremidade* mais correto.

e tortuosidade constantes) para uma configuração $\mathbb{E}^*$, onde as características geométricas são singulares³. Esse salto acontece em um **ponto de bifurcação**. A existência de um ponto de bifurcação não determina necessariamente que há instabilidade: mesmo na existência de um outro caminho de equilíbrio, mecanismos de restauração podem restaurar o equilíbrio em uma configuração estável. Todavia, usando técnicas de perturbação, o exame das soluções colaterais não-triviais pode indicar a susceptibilidade à falha e fornecer o perfil teórico de uma possível instabilidade ali.

Embora seja intrincado, o levantamento dos vários pontos de equilíbrio da estrutura de várias camadas que formam o caminho primário de equilíbrio de uma estrutura de multicamadas não é problema, pois em CUSTÓDIO[4] desenvolveu-se um algoritmo e código computacional para fazê-lo corretamente. Várias melhorias em tal algoritmo e código, no entanto, são essenciais para que se obtenha os resultados pretendidos de maneira produtiva e confiável. Pode-se encontrar no apêndice B um acompanhamento da estruturação e validação das ferramentas computacionais que foram desenvolvidas para essa finalidade.

Enfim, espera-se que a compreensão do mecanismo de falha subsidie a elaboração de um melhor procedimento para a qualificação de dutos flexíveis, assegurando que não haverá falha por instabilidade no seu serviço, e também a capacitação dos produtos atuais na direção das novas fronteiras econômicas da plataforma continental brasileira, ou seja, de lâminas d'água ainda mais profundas.

1.1 Descritivo conceitual do duto flexível

Como ilustra a figura 1.2, um duto flexível se forma pela disposição concêntrica de vários tipos de camadas: capa externa, bandagens, armaduras, *liner* polimérico, camadas de resistência à pressão, etc. Cada camada possui uma tarefa e contribuição para rigidez e resistência.

Classificam-se como **camadas homogêneas** a capa externa e quaisquer outras camadas cilíndricas, contínuas e feitas de material polimérico. Suas principais funções são estanqueidade, ajuste da rigidez à flexão, amortecimento estrutural e isolamento térmico. Em qualquer duto, há pelo menos duas camadas desse tipo: a capa e um *liner* mais interno. Entre elas, diz-se que há um **espaço anular**, que não é vazio, mas ocupado

³A bilinearidade de uma fundação elástica pode implicar na solução com deslocamentos em um sentido preferencial, dissonante à natureza de uma bifurcação estática do tipo garfo.

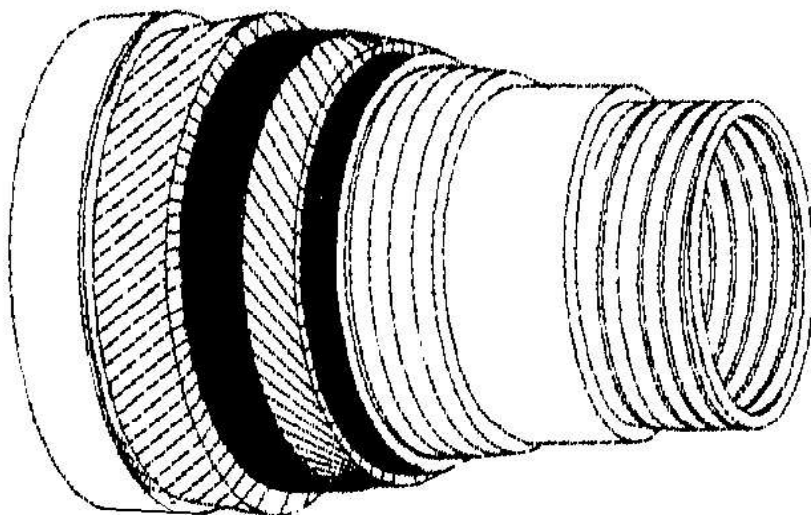


Figura 1.2: Descrição conceitual de um duto flexível oceânico.

pelas armaduras, fitas, bandagens e outras camadas não-estanques. Problemas na instalação podem acarretar cortes na capa e alagamento do espaço anular, em uma condição bastante crítica para a instabilidade das armaduras. Para definir completamente uma camada homogênea, geralmente bastam seu diâmetro, espessura e dados de material.

Os reforçadores helicoidalmente assentados em armaduras ou camadas de resistência a pressão são capazes de sustentar cargas elevadas na direção de seu eixo prismático. São comumente os elementos que determinam a maior parcela da resistência e rigidez⁴ do duto. A geometria de assentamento e da seção transversal dos reforçadores em uma camada definem sua responsabilidade maior no fracionamento interno dos esforços e, em último grau, se eles sustentam principalmente forças axiais ou radiais. As **armaduras** usam tendões esbeltos e numerosos, na maioria das vezes feitos de aço de alta resistência, e sua maior funcionalidade é equilibrar forças externas, transformando-as em forças de esmagamento das camadas mais internas. Reforçadores singelos ou duplos, de mais robusta seção, com passo pequeno de assentamento e com mecanismos

⁴Exceto a rigidez à flexão, cuja maior parcela advém da capa externa.

de intertravamento são freqüentemente utilizados em camadas de resistência à pressão interna (**camada zeta**) ou externa (**carcaça intertravada**).

Fitas esbeltas reforçadas com fibras de alta resistência formam **bandagens**, cuja função é limitar a expansão radial das armaduras e coibir, tanto quanto possível, a instabilidade das armaduras. Bandagens assim reforçadas, usadas nos dutos flexíveis susceptíveis à compressão, são geralmente tecidos unidirecionais com gramatura entre 500 e 900 g/m²; sua composição é um urdume tensionado de muitas fibras e uma trama de fibras de mesmo material ou de um material compatível mais econômico. Entretanto, há notícia de produtos onde, ao invés de um tecido, há realmente uma matriz polimérica e fibras, que parece ser um arranjo mais durável. Bandagens convencionais têm 4 a 8 cm de largura, elas são enroladas helicoidalmente e, em geral, seu passo é igual ou ligeiramente menor que a largura da fita. Em dutos para maior profundidade ou responsabilidade pode haver duas ou mais bandagens enroladas em sentidos alternados e superpostas radialmente. Além disso, entre armadura e o tecido de bandagem é modernamente usada uma camada de fita bastante fina para reduzir o atrito nessa interface.

1.2 Relevância e contextualização do problema

Dutos flexíveis prestam serviço nos sistemas de produção submarinos como *risers*⁵, *flowlines*⁶ ou *jumpers*⁷ em linhas de produção, exportação, injeção e *gas lift*. Com esses encargos, a consequência mais provável da falha de um duto flexível por instabilidade das armaduras é a interrupção ou o adiamento do início da produção, que só pode ser estabelecida depois da substituição do duto empregando um navio de lançamento de linhas flexíveis. Entre despesas operacionais e lucros cessantes, o custo total da falha pode, portanto, ter ordem de grandeza de milhões de dólares, além de atrasos nos cronogramas de desenvolvimento de reservatório e descumprimento de metas de produção.

Na experiência como operadora de exploração no mar, a PETROBRAS nunca sofreu falhas de linhas já em operação - as falhas registradas ocorreram durante a instalação. No entanto, ensaios de amostras [3, 5] demonstram perda de resistência à compressão de dutos flexíveis submetidos a carregamento cíclicos, sugerindo uma possibilidade

⁵Risers: trechos longos de dutos onde há ganho substancial de elevação, que geralmente se iniciam próximo ao leito marinho e freqüentemente encontram-se expostos a efeitos dinâmicos.

⁶Flowlines: trechos de dutos suportados pelo solo, outro tipo de fundação ou pequenos vãos livres, no fundo do mar.

⁷Jumpers: trechos que fazem a interligação entre duas terminações, podendo ou não haver ganho de elevação, mas geralmente esta é menor.

sombria para os sistemas de produção em águas ultraprofundas já existentes.

Para mitigar os riscos de falha, a PETROBRAS determinou que linhas em configurações mais susceptíveis à compressão dinâmica ou compressão por efeito de terminação sejam ensaiadas em escala real, o que implicou no requisito de testes de desempenho de imersão em águas profundas (*Deepwater Immersion Performance - DIP - tests*)⁸ para sua qualificação. Esses ensaios em escala real têm um custo de realização extremamente alto, mas no estágio atual do conhecimento em instabilidade de armaduras, são considerados indispensáveis. De fato, quaisquer avanços na compreensão do mecanismo de instabilidade que permitam estabelecer critérios para dispensar os testes de desempenho em imersão (*DIP tests*) em pelo menos alguns produtos são desejáveis às operadoras de exploração e produção de petróleo em águas profundas.

As situações mais críticas para instabilidade de armaduras são:

1. Descompressão de *flowline* ou *riser* ou instalação com a linha vazia: outrora compensada pela pressão interna, a pressão externa induz, por efeito de terminação (*end cap*), cargas compressivas nas armaduras.
2. Alagamento do espaço anular: quando a capa externa se acha íntegra, a pressão externa pode ajudar a sustentar, comprimindo radialmente, as armaduras⁹. Nessa situação, o alagamento do espaço anular, embora reduza a contribuição de tração por efeito de terminação, elimina esse mecanismo de sustentação radial. Ademais, ele aumenta os espaços entre armaduras (*gaps*), a corrosão e a perda de seção transversal dos reforçadores.
3. Efeitos de dinâmica de topo: desde que o topo de um *riser* pode ter um ângulo de topo pequeno e deslocamentos extremos, é possível o aparecimento de cargas compressivas no trecho de fundo que, em dutos de menor diâmetro, causam grandes deslocamentos laterais (“flambagem” de fundo) e, em dutos de maior diâmetro, instabilidade de armaduras.
4. Torção excessiva: a torção tende a abrir espaços (*gaps*) na estrutura compósita do duto flexível e, por isso, pode tornar suas armaduras susceptíveis a falhas.

⁸Os testes de imersão em águas profundas (*DIP tests*) consistem em submeter amostras com até 100 metros de comprimento a esforços de flexão e pressão externa, estando seu espaço anular seco e alagado. Por efeito de terminação, a pressão externa induz cargas compressivas nas armaduras.

⁹Por outro lado, o efeito de terminação (*end cap*) pode causar uma compressão real no duto, especialmente se sua pressão interna é pequena. O efeito dominante precisa ser avaliado caso a caso.

5. Degradação de bandagens: fibras de aramida (*kevlar*) como as presentes nas bandagens, quando solicitadas em carregamento alternado intenso têm tendência à degradação por um mecanismo de formação de pequenas cocas.

1.3 Fundamentos sobre instabilidade estrutural

Um elemento estrutural esbelto, quando submetido a compressão¹⁰ pode falhar por instabilidade estrutural mediante dois mecanismos: bifurcação do caminho de equilíbrio e ultrapassagem de carga limite.

O fenômeno da **instabilidade por bifurcação** está associado a uma multiplicidade de soluções do equilíbrio para um determinado carregamento e condições de contorno do sistema. Pouco antes de tornar-se instável, a estrutura possui alguma rigidez à compressão; freqüentemente ela não emite sinais de que um pequeno acréscimo de carga possa causar problemas¹¹. Ainda assim, quando a força externa ultrapassa um certo valor crítico, a configuração do sistema se altera rapidamente.

O exemplo mais simples de instabilidade por bifurcação é a flambagem elástica de uma viga perfeita, bi-rotulada, sujeita a compressão axial, mostrada na ilustração 1.3. A força N_z aplicada nas extremidades da viga causa um pequeno encurtamento, mas ela não causará outro efeito cinemático até que um valor de carga crítica P_{cr} seja ultrapassado. Se uma rigidez à compressão K_{11} for definida como a relação entre variação de força aplicada e variação de deslocamento na direção de sua aplicação

$$K_{11} = \frac{\delta N_z}{\delta z}$$

... pode-se afirmar que essa viga apresenta uma razoável rigidez à compressão inicial. Esse encurtamento é realmente uma solução admissível para o equilíbrio e cinemática da viga perfeita bi-rotulada para qualquer carregamento compressivo.

Quando a carga crítica é atingida, porém, a viga sofre flambagem. A partir de então, qualquer pequeno aumento da força compressiva N_z amplia a curvatura da viga. Sua

¹⁰Na verdade, a instabilidade pode acontecer não apenas por efeito de uma força externa compressiva, mas também por outras combinações de carregamentos com forte dependência dos deslocamentos.

¹¹Se um analista construir um modelo matemático mais simples, encontrará até mesmo argumentos para afirmar que o sistema sustentará esse acréscimo de carga e manterá o comportamento original, porque realmente existe uma solução que mantém as características daquela associada a um carregamento pequeno.

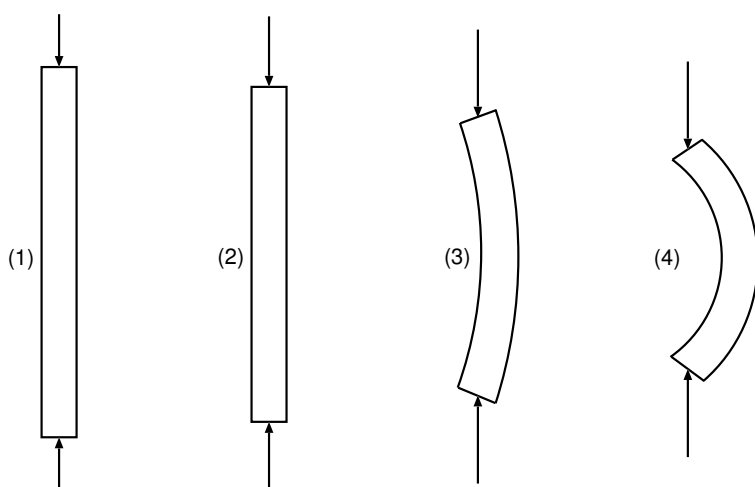


Figura 1.3: Flambagem elástica de uma viga perfeita, bi-rotulada.

rigidez à compressão cai abruptamente e o equilíbrio se estabelece de uma forma bastante diversa da original. O gráfico da figura 1.4 mostra a evolução da flexa lateral contra o aumento de carga; a partir dele, pode-se apresentar alguns conceitos úteis à compreensão da instabilidade estrutural.

Denomina-se **caminho de equilíbrio** a evolução de pontos de equilíbrio ao longo da história de carregamento. Chama-se **caminho de equilíbrio primário** o conjunto de pontos de equilíbrio onde se mantém um mesmo tipo de configuração cinemática desde o início da aplicação de carga.

Em determinados pontos do caminho primário, outro tipo de configuração cinemática pode se estabelecer para os mesmos carregamentos e condições de contorno. Esse lugar geométrico é denominado **ponto de bifurcação**. Exatamente nesse ponto, as mudanças que correspondem a uma nova configuração ainda não se materializaram, mas seus germes estão colocados e qualquer perturbação infinitesimal do carregamento pode levar o sistema até um **caminho de equilíbrio secundário**. Nem sempre um ponto de bifurcação de solução, todavia, é um ponto de instabilidade. Para avaliar a estabilidade dos pontos de bifurcação, considerações sobre a energia do sistema são indispensáveis.

A instabilidade por **ultrapassagem de carga limite** se forma quando, atingida uma certa configuração de equilíbrio, a estrutura não possui mais rigidez à compressão, logo ela não admite acréscimo de carregamento, ao menos sem alterar completamente sua configuração.

Um caso típico de instabilidade por ultrapassagem de carga limite é um arco bi-rotulado,

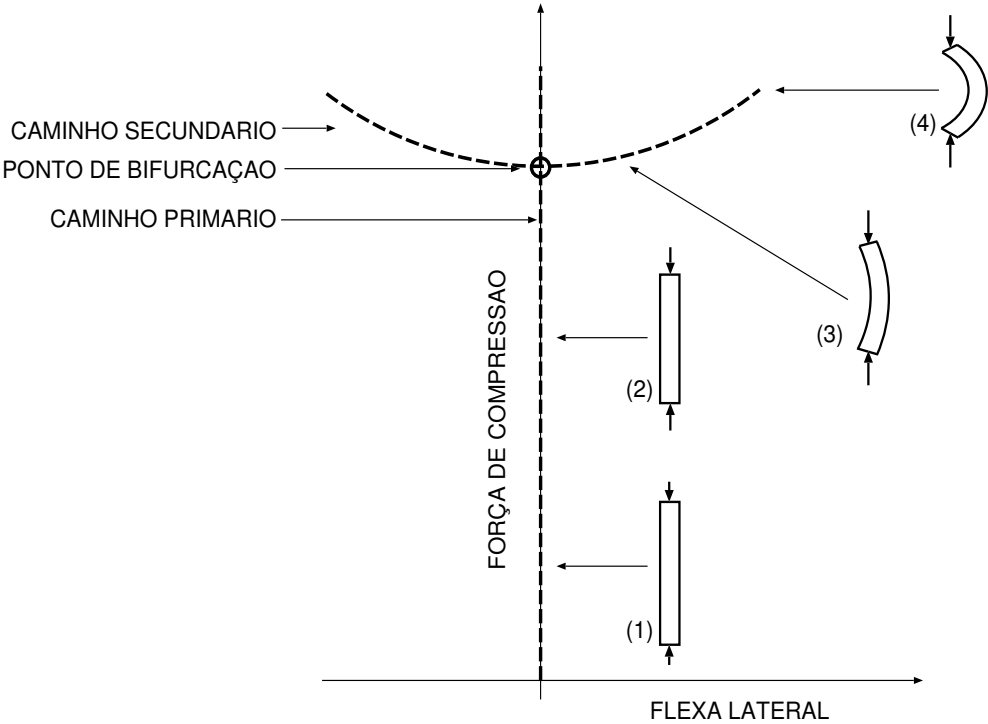


Figura 1.4: Caminhos de equilíbrio de uma viga bi-rotulada sofrendo flambagem.

sob efeito de cargas distribuídas, ilustrado na figura 1.5. Seu caminho de equilíbrio, apresentado na figura 1.6, mostra que as forças externas inicialmente causam uma deflexão pequena, mas, aumentando-a progressivamente, um valor de carga-limite pode ser ultrapassado, quando então a manutenção da mesma força não permite o equilíbrio e deflexões grandes são obtidas. Um novo equilíbrio somente se estabelece após a reversão. O salto desde o ponto onde a carga limite é ultrapassada até um outro ponto de equilíbrio após a reversão, ilustrado na figura, é convencionalmente chamado de “*snap-through*”.

Outro processo de instabilidade por carga-limite é o que ocorre com painéis cilíndricos submetidos a pressão externa. Nesse caso, após certo limite, nenhum equilíbrio é possível com após a carga-limite, pois a estrutura apresenta deslocamentos grandes e sua nova configuração é incapaz de manter aquela carga.

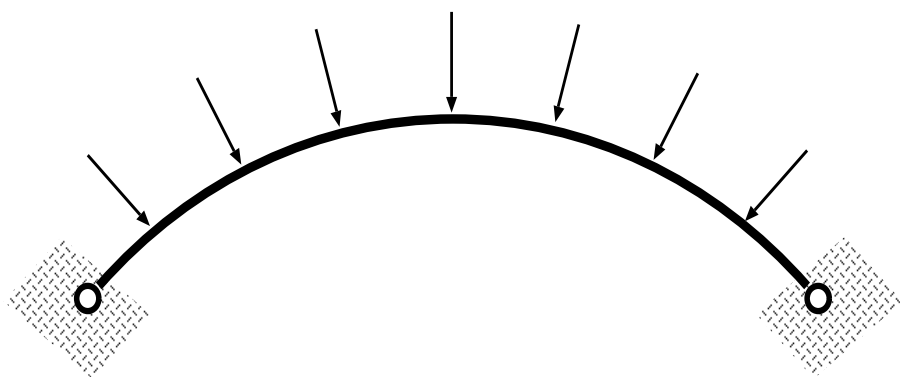


Figura 1.5: Arco bi-rotulado sob carga externa.

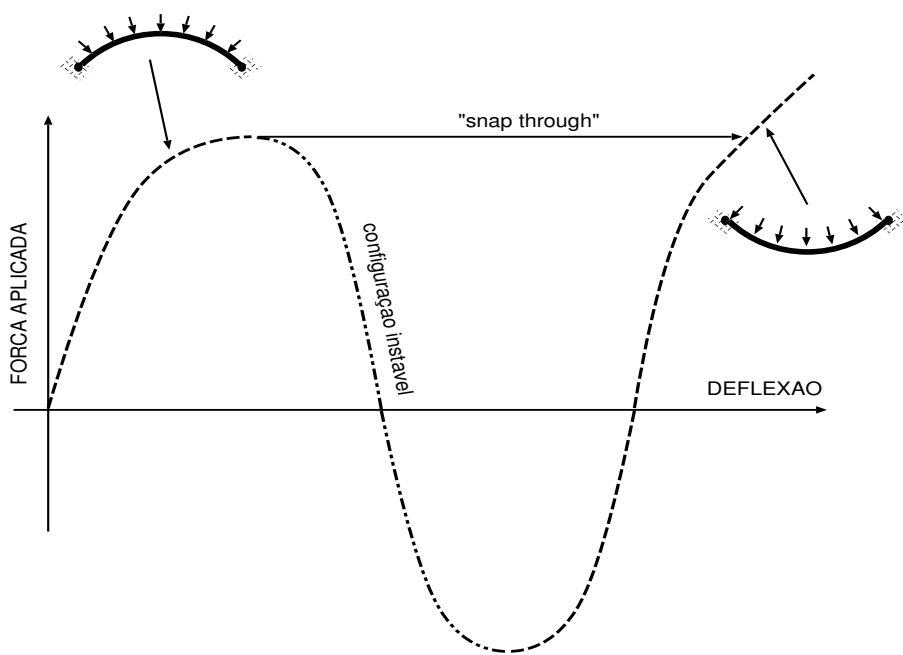


Figura 1.6: Caminho de equilíbrio de um arco sob carga externa.

1.4 Pesquisa bibliográfica

Há um número muito pequeno de trabalhos publicados que referenciam a instabilidade de elementos de armadura em cabos ou dutos flexíveis. Apesar de sua condição de limite técnico para o uso de tais estruturas em lâminas d'água maiores, persiste ainda um lapso tecnológico. Em parte, a dificuldade teórica do assunto, adicionada a uma mencionada má compreensão do fenômeno, é causa da escassez literária. Sob outro ponto de vista, a urgência de um modelo para determinar com precisão a instabilidade de reforçadores de armaduras é contemporânea ao avanço de dutos flexíveis de maior diâmetro para águas ultraprofundas, porque nos cabos armados bastava supor que não deviam experimentar compressão e em dutos flexíveis de menor diâmetro a instabilidade lateral (global) era preocupação maior. Dessa maneira, o estágio atual é de amadurecimento de vários conceitos de maior ou menor validade. Há eventualmente notícias de pesquisa e experimentação no domínio das organizações, porém há enorme comedimento e controle na divulgação de resultados, não apenas pelos ganhos estratégicos que a solução de tal fragilidade acometeria, também porque não interessa a nenhum fabricante a propaganda da falha de seus produtos.

Uma bibliografia subsidiária para a formulação do problema do duto flexível e da instabilidade dos reforçadores em suas armaduras se inicia na pesquisa de métodos para equilíbrio da estrutura de várias camadas como articulados por FÉRET e BOURNAZEL[1], CUSTÓDIO[4] e RAMOS[6]; prossegue pelo detalhamento das condições de equilíbrio de hastes esbeltas¹² como ensinado por LOVE[8]; e afinal inclui necessariamente estudos de instabilidade de vigas esbeltas em fundação elástica como HETENYI[11] e LEE e WASS[12].

Já foi dito que poucos trabalhos enfrentam o problema da falha chamada de “formação de gaiola”, nenhum trabalho, porém, fundamenta um modelo analítico e completo para o problema de instabilidade em armaduras de dutos flexíveis.

COSTELLO[13] argumenta que uma carga compressiva ou uma combinação desfavorável de torque e tração podem causar a formação de gaiola em cabos trançados e sugere como critério de segurança evitar a perda de contato entre as tranças. CONWAY e COSTELLO[14] estabelecem um critério sugerindo que uma onda compressiva pode conduzir à falha de cabos sob carregamento de tração e torção. STUMP e van der

¹²A teoria de hastes esbeltas desenvolvida incrementalmente desde Bernoulli, Euler, KIRCHHOFF[7], Clebsch, Cosserat e LOVE[8] até autores mais recentes [9, 10] descreve a maneira de modelar cada reforçador de armadura como uma viga esbelta com componentes de forças generalizadas (N , M , q , m) e componentes de deformação ($\kappa_{1\dots 3}$, ϵ , etc).

HEIJEN[15] sugerem um procedimento baseado na consideração de que a hélice é uma haste cuja curvatura é uma imperfeição inicial, não se preocupando todavia com a evolução do equilíbrio antes da instabilidade, tampouco com a presença de outras camadas. Em tempos recentes, o interesse brasileiro pelo tema determinou o progresso de pesquisas cujo resultados são notáveis. De fato, três frentes de trabalho foram abertas quase simultaneamente.

BRAGA[3, 5] apresenta um programa de ensaios mecânicos em amostras de dutos flexíveis, no qual aplicou-lhes carregamentos monotônicos e cíclicos de compressão e de flexo-compressão. Os resultados são alarmantes, porque evidenciam grande perda de resistência à compressão no duto quando há ciclos alternados de carregamento. O autor postula que seu mecanismo é a degradação das bandagens. De fato, esse tipo de degradação já foi antes identificado entre os filamentos de linhas de ancoragem, com um mecanismo de formação de cocas entre eles por ocasião da ciclagem, como mostrado por RIEWALD[16]. Porém, persistem algumas questões relacionadas a elevada variação de carregamento aplicada e principalmente o acúmulo substancial de giro nas amostras ao longo dos ciclos.

TROINA *et al.*[17] e de SOUSA[18], na parte em que analisa a instabilidade de armaduras, sugerem modelos pelo método de elementos finitos (FEA) que descrevem a formação e o avanço do colapso de cada reforçador helicoidal na estrutura do duto flexível. O principal questionamento aos trabalhos se situa na suposição de que um modo de falha preferencial, seja somente radial ou lateral, acontece.

CUSTÓDIO[19] apresenta subsídios ao desenvolvimento analítico de um modelo capaz de estimar a carga de bifurcação de um único tendão inicialmente helicoidal e carregado em compressão e torque.

1.5 Convenção tipográfica

A pesquisa de um sistema tão complicado não consegue se isentar de uma notação matemática que, à primeira vista, parece confusa, mas que segue um método simples. A convenção tipográfica apresentada a seguir é necessária devido ao número grande de incógnitas que surgem da manipulação do problema.

1. As variáveis ou incógnitas escritas em letras latinas ou gregas e estilo itálico representam valores escalares. Tenta-se preservar, quase sempre, a nomenclatura universalmente adotada. Por isso, usam-se preferencialmente as letras gregas para

ângulos e outros itens já universalmente consolidados como tensão, deformação, etc.

2. Os ângulos de Euler são representados pela letra ϑ , seguidas pelo índice correspondente em uma posição inferior: $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.
3. Sufixos que completam a identidade da variável são preferencialmente grafados após a letra principal, na posição inferior: k_g, n_w , etc. Entretanto, quando há chance de confusão entre o sufixo e um identificador de direção, este é deslocado para a posição superior, a fim de aumentar a clareza.
4. Quando um sufixo é necessário para particularizar a direção a que um escalar se refere (sendo o escalar um componente de um vetor ou tensor), este é colocado após a letra principal, em uma posição inferior: N_1, σ_{rr}, m_z , etc. Os principais sistemas de coordenadas usados são:
 - $[\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z]$ sistema de coordenadas cilíndricas
 - $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3]$ sistema de coordenadas local para reforçadores helicoidais.
5. Caso seja necessário identificar a camada a que se aplica uma variável, usa-se um sufixo após, em posição superior e entre parênteses: $R_{int}^{(i)}, p_{ext}^{(nc)}$, etc.
6. No caso de elementos de reforço helicoidal, além do identificador da camada, um outro índice identifica cada reforçador: $N_r^{(i,j)}, M_3^{(i,j)}$, etc.
7. As funções associadas às perturbações são ordenadas pela potência de ε associada, subscrita e colocada entre parênteses: $M_{1(1)}^{(i,j)}, R_{(0)}^{(i,j)}$, etc.
8. Em seções do texto onde uma referência ou formulação se aplica obviamente a um tipo de camada, a utilização dos sufixos $^{(i,j)}$ é relaxada em pró de uma apresentação menos confusa.
9. Um vetor ou tensor cujas componentes têm a mesma natureza é grafado em negrito: $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{q}$, etc.
10. Entidades geométricas e designadores gerais para agrupamentos de variáveis ou para condições são grafados com as fontes chamadas de “blackboard fonts”: $\mathbb{C}, \mathbb{T}$, etc. Em especial, o designador $\mathbb{E}$ completado por uma convenção de símbolos acima define o estado cinemático de equilíbrio de um sistema.

11. Quando se deseja evidenciar que uma variável ou incógnita é particular de um tipo de configuração, emprega-se um dos seguintes símbolos acima do seu grafema principal:

- $\square^{\circ}$ configuração livre de esforços internos.
- $\square^{\times}$ configuração referencial, onde não há carregamento no duto.
- $\square^{+}$ configuração primária de equilíbrio.
- $\square^{*}$ configuração secundária de equilíbrio.

12. Uma barra sob o nome da variável indica que não foi feita adimensionalização da grandeza a que ela endereça: $\underline{\check{T}}$, $\underline{R}_{int}^{(i)}$, etc.

13. Uma barra vertical ao lado de um identificador completo, com um índice subscrito ou sobreescrito, indica que o valor se refere a uma posição ou intervalo específico:

$$\sigma_{rr}^{(i)} \Big|_R, \bar{\epsilon}_{zz}^{(i)} \Big|_{R_{int}^{(i)}}, \text{etc}^{13}.$$

14. Uma vírgula dentro do índice subscrito indica uma derivação em relação à variável imediatamente após. Por exemplo: $\dot{N}_{\theta,\xi} = d\dot{N}_{\theta}/d\xi$. A derivação no parâmetro de comprimento de arco ξ é abreviada pelo uso do apóstrofo (').

1.6 Adimensionalização

Para obter resultados mais gerais e também permitir certas constatações a respeito da ordem de grandeza de parâmetros e incógnitas, é feita a adimensionalização das incógnitas e na formulação do problema são empregadas sempre as formas adimensionalizadas.

Em CUSTÓDIO[19], onde as incógnitas referenciam apenas um reforçador, os fatores de adimensionalização eram raio referencial de assentamento da armadura $\underline{\check{R}}$ e a rigidez à flexão da seção do reforçador $\underline{EI}_2$. Modelando uma estrutura de multicamadas é ainda conveniente utilizar a rigidez à flexão do tendão como fator de adimensionalização porque, na maioria dos produtos disponíveis no mercado, as armaduras são compostas de reforçadores de igual seção transversal. Ademais, a ordem de grandeza de $\underline{EI}_2$ é apropriada. Em lugar do raio referencial de assentamento, precisa-se usar um fator que seja comum a todas as camadas como, por exemplo, o diâmetro interno nominal do duto $\underline{D}_{int}$.

¹³Desde que essa notação pode produzir uma expressão de aspecto deslegante quando o identificador da locação é extenso ou complexo demais, nessas situações preferir-se-á escrever literalmente “em variável = posição”.

A tração global $\underline{\check{T}}$ e a parcela $\underline{T}^{(i)}$ da tração na camada i são adimensionalizadas de acordo com a regra:

$$\check{T} = \underline{\check{T}} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2}, \quad T^{(i)} = \underline{T}^{(i)} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2} \quad (1.1)$$

... onde: $\underline{EI}_2 = 2^a$ rigidez à flexão, da seção transversal do reforçador, em torno da direção principal d_2 .

O torque global $\underline{\check{Q}}$ e a parcela $\underline{Q}^{(i)}$ do torque na camada i são adimensionalizadas pela fórmula:

$$\check{Q} = \underline{\check{Q}} \frac{(\underline{D}_{int})}{\underline{EI}_2}, \quad Q^{(i)} = \underline{Q}^{(i)} \frac{(\underline{D}_{int})}{\underline{EI}_2} \quad (1.2)$$

As pressões interna $\underline{\check{p}}_{int}$ e externa $\underline{\check{p}}_{ext}$ são convertidas para a forma adimensional pela aplicação de:

$$p_{int} = \underline{p}_{int} \frac{(\underline{D}_{int})^4}{\underline{EI}_2}, \quad p_{ext} = \underline{p}_{ext} \frac{(\underline{D}_{int})^4}{\underline{EI}_2} \quad (1.3)$$

Sejam $\underline{N}$ e $\underline{M}$ respectivamente a força e o momento em uma seção do reforçador, que possuem componentes em três direções ortogonais, $\underline{q}$ as forças distribuídas (por unidade de comprimento de arco) que atuam sobre ele e $\underline{m}$ os momentos distribuídos. A adimensionalização de tais componentes se faz da seguinte forma:

$$N_{1...3} = \underline{N}_{1...3} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2}, \quad N_{r...z} = \underline{N}_{r...z} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2} \quad (1.4a)$$

$$q_{r...z} = \underline{q}_{r...z} \frac{(\underline{D}_{int})^3}{\underline{EI}_2} \quad (1.4b)$$

$$M_{1...3} = \underline{M}_{1...3} \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{EI}_2}, \quad M_{r...z} = \underline{M}_{r...z} \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{EI}_2}, \quad (1.4c)$$

$$m_{1...3} = \underline{m}_{1...3} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2}, \quad m_{r...z} = \underline{m}_{r...z} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{EI}_2} \quad (1.4d)$$

O parâmetro de comprimento de arco $\underline{\xi}$, o comprimento total $\underline{\ell}_s$ da curva $\mathbb{C}$, o raio de assentamento $\underline{R}$ e a variação do comprimento do duto $\underline{\Delta z}_\ell$ são adimensionalizados por meio de:

$$\xi = \frac{\underline{\xi}}{\underline{D}_{int}}, \quad \ell_s = \frac{\underline{\ell}_s}{\underline{D}_{int}}, \quad R = \frac{\underline{R}}{\underline{D}_{int}}, \quad \Delta z_s = \frac{\underline{\Delta z}_s}{\underline{D}_{int}} \quad (1.5)$$

As curvaturas $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$ e $\underline{\kappa}_3$ são adimensionalizadas pela expressão:

$$\kappa_{1\dots 3} = \underline{\kappa}_{1\dots 3} \underline{D}_{int} \quad (1.6)$$

A rigidez das fundações elásticas e a rigidez à flexão da seção encontram suas formas adimensionalizadas mediante as expressões:

$$k_e = \underline{k}_e \frac{(\underline{D}_{int})^4}{\underline{E} \underline{I}_2}, \quad k_g = \underline{k}_g \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{E} \underline{I}_2} \quad (1.7a)$$

$$A_1 = \frac{\underline{E} \underline{I}_1}{\underline{E} \underline{I}_2}, \quad A_2 = \frac{\underline{E} \underline{I}_2}{\underline{E} \underline{I}_2} = 1, \quad A_3 = \frac{\underline{G} \underline{J}}{\underline{E} \underline{I}_2} \quad (1.7b)$$

Os valores de rigidez à tração $\underline{k}_{11}$, à torção $\underline{k}_{22}$ e os termos de acoplamento $\underline{k}_{12}$ e $\underline{k}_{21}$ chegam a suas formas adimensionais mediante:

$$k_{11} = \underline{k}_{11} \frac{(\underline{D}_{int})^2}{\underline{E} \underline{I}_2}, \quad k_{22} = \frac{\underline{k}_{22}}{\underline{E} \underline{I}_2} \quad (1.8a)$$

$$k_{12} = \underline{k}_{12} \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{E} \underline{I}_2}, \quad k_{21} = \underline{k}_{21} \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{E} \underline{I}_2} \quad (1.8b)$$

A energia potencial $\underline{\Pi}$, finalmente, é adimensionalizada pela relação:

$$\Pi = \underline{\Pi} \frac{\underline{D}_{int}}{\underline{E} \underline{I}_2} \quad (1.9)$$

Capítulo 2

Configuração primária

2.1 Definições básicas

Suponha um duto flexível de comprimento $\check{\ell}_c$ grande, feito de n_c camadas superpostas e submetido às hipóteses de **construção ideal**, ou seja: um duto que, na ausência de forças externas, tenha uma configuração referencial $\check{\mathbb{E}}$ onde:

- sua linha central $\check{\mathbb{C}}_g$ é reta;
- as camadas homogêneas são cilindros uniformes, isotrópicos, concêntricos e com comprimento $\check{\ell}_c$, cujos eixos longitudinais são alinhados a $\check{\mathbb{C}}_g$;
- as linhas centrais $\check{\mathbb{C}}^{(i,j)}$ dos reforçadores são arranjos na forma de helicóides cilíndricos perfeitos cuja geratriz é $\check{\mathbb{C}}_g$ e a direção principal $\check{\mathbf{d}}_1^{(i,j)}$ na seção transversal dos reforçadores está alinhada à direção radial $\mathbf{i}_r$;
- os reforçadores de uma mesma camada estão perfeitamente espaçados e, nas armaduras, são numerosos e ocupam quase todo perímetro interno e externo dessas camadas.
- a estrutura tem continuidade na direção radial: o raio externo $\check{R}_{ext}^{(i)}$ de cada uma delas se iguala ao raio interno $\check{R}_{int}^{(i-1)}$ da camada imediatamente acima.

Suponha agora que um carregamento axissimétrico moderado e constante seja aplicado no duto de construção ideal. Um carregamento **axissimétrico constante** $\check{\mathbb{T}}$ se compõe de esforços de tração/compressão axial $\check{T}$, torque $\check{Q}$, pressão externa $\check{p}_{ext}$ e interna $\check{p}_{int}$ -

excluindo cargas distribuídas longitudinais relacionadas, por exemplo, ao peso próprio - que possuem simetria em relação ao eixo longitudinal $\mathbb{C}_g$ do duto. Ele é **moderado** se as deformações e deslocamentos associados se mantêm, em todas as camadas, dentro de limites compatíveis com as simplificações usadas nas formulações (especialmente nas relações cinemáticas); nem há instabilidade global (flambagem lateral do duto), ou seja: sua linha central $\mathbb{C}_g$ permanece reta.

Quando o carregamento $\check{\mathbb{T}}$ - axissimétrico, constante e moderado - é aplicado no duto de construção ideal, é razoável que suas camadas se deformem até uma configuração de equilíbrio $\check{\mathbb{E}}$ onde:

- a linha central $\check{\mathbb{C}}_g$ do duto é reta;
- camadas homogêneas se conservam cilíndricas e concêntricas;
- as linhas centrais $\check{\mathbb{C}}^{(i,j)}$ dos reforçadores mantêm sua forma helicoidal, a despeito da mudança de ângulo $\check{\vartheta}^{1(i,j)}$ e raio médio $\check{R}^{(i,j)}$ de assentamento;
- a direção principal $\check{\mathbf{d}}_1^{(i,j)}$ na seção transversal dos reforçadores se mantém alinhada à direção radial $\mathbf{i}_r$;
- todos os reforçadores de uma mesma camada percebem os mesmos esforços e deformações;
- as forças internas e deformações são constantes¹ ao longo do comprimento.

O estado $\check{\mathbb{E}}$ que satisfaz as condições acima é chamado de **configuração primária de equilíbrio**. Para fins da construção de um modelo que descreva a configuração $\check{\mathbb{E}}$, admita que

Postulado 1 *Para um carregamento axissimétrico constante moderado $\check{\mathbb{T}}$ aplicado sobre um duto de construção ideal infinitamente longo, existe sempre pelo menos uma configuração $\check{\mathbb{E}}$ que satisfaz o equilíbrio de todas as camadas.*

Em qualquer estado de equilíbrio, a estrutura compósita do duto flexível está submetida também a **condições de compatibilidade geométrica entre camadas**, que são:

¹Constantes, nesse caso, significa que elas são independentes da posição ao longo do duto.

- são iguais, nos extremos de duto flexível, os deslocamentos longitudinais $\Delta z^{(i)}$ e rotação² $\Delta \theta^{(i)}$ de todas as camadas, ou seja: as extremidades se comportam como corpos semi-rígidos com liberdade para se deformar apenas radialmente;
- não há penetração entre as camadas e, enquanto houver pressão de contato na interface para ser transmitida, nesse lugar geométrico o raio interno $\check{R}_{int}^{(i)}$ da camada acima é igual ao raio externo $\check{R}_{ext}^{(i+1)}$ da camada abaixo;
- em dutos de estrutura não-aderente, nas interfaces entre camadas não pode haver tensões radiais trativas, pois, nesse caso, as camadas se separam formando espaços (*gaps*) - rompendo a condição de continuidade radial no item anterior definida - que são preenchidos com ar ou fluido em comunicação hidráulica.

Em virtude da primeira das condições de compatibilidade citadas, é possível definir duas medidas globais de deformação do duto flexível, a distensão longitudinal $\check{\epsilon}$ e o giro por unidade de comprimento $\check{\gamma}$, respectivamente, por:

$$\check{\epsilon} = \frac{\Delta z_s}{\check{\ell}_c} \quad (2.1a)$$

$$\check{\gamma} = \frac{\Delta \theta_\ell}{\check{\ell}_c} \quad (2.1b)$$

Algumas hipóteses simplificadoras adicionais são empregadas³ na construção de modelos para determinar a configuração de equilíbrio $\mathbb{E}^\dagger$:

- os reforçadores de armadura são esbeltos e a contribuição da mudança de curvatura no deslocamento de seus pontos materiais é desprezível frente à contribuição dos deslocamentos da sua linha central.
- em dutos sob carregamento axissimétrico constante moderado, o cisalhamento nas interfaces das camadas é desprezível, pois assim o é qualquer tendência de movimento tangencial relativo entre as superfícies⁴.

²Refere-se obviamente à rotação em torno do eixo $\mathbb{C}_g$.

³Apesar de as duas últimas hipóteses nessa lista já terem sido resolvidas em CUSTÓDIO[4], o tratamento de não-linearidades de material e travamento são excluídas da pesquisa porque são complicadores que tiram a atenção do problema principal.

⁴Essa hipótese fundamenta o desprezo dos efeitos de atrito, que tornariam o problema bastante complicado. Ela não implica em paradoxo na distribuição da torção entre as camadas, pois esse esforço é balanceado e aplicado nas extremidades (condição de compatibilidade de deslocamentos).

- as forças de contato radial entre os reforçadores e as camadas adjacentes são substituíveis por uma pressão homogênea na interface⁵.
- os materiais têm comportamento linear elástico.
- os mecanismos de travamento e contato lateral dos reforçadores podem ser ignorados.

2.2 Equilíbrio com forças externas

A partilha do carregamento $\check{\mathbb{T}}$ em parcelas $\mathbb{T}^{(i)}$ é um problema hiperestático sujeito às condições de compatibilidade entre as camadas. Estas últimas implicam que cada contribuição $\mathbb{T}^{(i)}$ seja proporcional à rigidez da camada. O equilíbrio entre esforços internos, tração externa⁶ $\check{T}$ e torque externo $\check{Q}$ é dado por:

$$\check{T} = \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \begin{array}{l} T^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{n_w^{(i)}} N_z^{(i,j)}, \text{ se } i \text{ é uma camada helicoidal} \\ T^{(i)} \equiv 2\pi \int_{R_{int}^{(i)}}^{R_{ext}^{(i)}} R \sigma_{zz}^{(i)} dR, \text{ se } i \text{ é uma camada homogênea} \end{array} \right. \quad (2.2a)$$

$$\check{Q} = \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \begin{array}{l} Q^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{n_w^{(i)}} N_{\theta}^{(i,j)} R^{(i)} + M_z^{(i,j)}, \text{ se } i \text{ é camada helicoidal} \\ Q^{(i)} \equiv 2\pi \int_{R_{int}^{(i)}}^{R_{ext}^{(i)}} R^2 \sigma_{\theta z}^{(i)} dR, \text{ se } i \text{ é camada homogênea} \end{array} \right. \quad (2.2b)$$

... onde: $T^{(i)}$, $Q^{(i)}$ = contribuições de tração e torque da camada i ; $n_w^{(i)}$ = número de reforçadores; $N_z^{(i,j)}$ = força na direção global $\mathbf{i}_z$ atuando no reforçador (i, j) ; $N_{\theta}^{(i,j)}$ = força cortante do reforçador (i, j) na direção global $\mathbf{i}_{\theta}$; $M_z^{(i,j)}$ = componente do momento na direção global $\mathbf{i}_z$; $\sigma_{zz}^{(i)}$ = componente de tensão na direção $\mathbf{i}_z$; $\sigma_{\theta z}^{(i)}$ = componente de tensão cisalhante devido ao giro; $R_{ext}^{(i)}$, $R_{int}^{(i)}$ = raios externo e interno da camada i ; $R^{(i,j)}$

⁵Essa simplificação supõe que todo (ou quase todo) o perímetro da interface está em contato regular com os reforçadores, permitindo uma distribuição regular das forças de contato. A teoria de contato de Hertz é alternativa mais sofisticada para esse tratamento.

⁶A tração $\check{T}$ é entendida como “tração real” ou “tração de paredes”, não a tração efetiva usada para a determinação de rigidez geométrica durante a análise global. Essa tração, portanto, incorpora contribuições da pressão interna $\check{p}_{int}$ e externa $\check{p}_{ext}$ por efeitos de terminação (*end cap*).

= raio médio dos reforçadores⁷.

Ao tomar partido do desprezo do cisalhamento nas interfaces de camadas, admite-se que a única maneira de transferir esforços nelas é através de uma pressão de interface:

$$p^{(i)} \equiv p_{ext}^{(i)}, \quad p^{(i+1)} \equiv p_{int}^{(i)}, \quad p^{(1)} = \check{p}_{ext}, \quad p^{(n_c+1)} = \check{p}_{int} \quad (2.3)$$

2.3 Modelagem das camadas homogêneas

Pode-se tratar camadas homogêneas sob carregamento $\check{\mathbb{T}}$ como cilindros espessos (contínuo tridimensional) ou cascas. Como a formulação do equilíbrio de um cilindro espesso isotrópico não é complicada e ainda determina adequadamente a variação da espessura, ela é preferida nessa pesquisa⁸.

O equilíbrio primário $\check{\mathbb{E}}^{(i)}$ de um elemento infinitesimal de parede de cilindro equaciona as tensões circunferenciais $\check{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)}$, longitudinais $\check{\sigma}_{zz}^{(i)}$ e cisalhantes $\check{\sigma}_{\theta z}^{(i)}$, os raios finais $\check{R}_{ext}^{(i)}$ e $\check{R}_{int}^{(i)}$ e as deformações $\check{\epsilon}_z^{(i)} \equiv \check{\epsilon}$ e $\check{\gamma}^{(i)} \equiv \check{\gamma}$ em função de parâmetros de geometria e material da camada, da pressão externa $\check{p}^{(i)} \equiv \check{p}_{ext}^{(i)}$ e interna $\check{p}^{(i+1)} \equiv \check{p}_{int}^{(i)}$ da camada e das contribuições de tração $\check{T}^{(i)}$ e torque $\check{Q}^{(i)}$. Supondo que as deformações circunferenciais são moderadas, então pode-se usar as seguintes formulações⁹:

$$\check{T}^{(i)} = \check{S}^{(i)} \left\{ E_s^{(i)} \check{\epsilon} + 2 \nu_s^{(i)} \frac{\left[\check{p}_{int}^{(i)} \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2 - \check{p}_{ext}^{(i)} \left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 \right]}{\left[\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} \right\} \quad (2.4a)$$

$$\check{Q}^{(i)} = G_s^{(i)} \check{\gamma} \check{J}^{(i)} \quad (2.4b)$$

⁷Desde que nas equações (2.2) emprega-se a tensão média nas camadas homogêneas, acha-se implícito que este modelo presume que elas são esbeltas de modo que as tensões nos perímetros externo e interno sejam muito próximas. Se não as forem, o algoritmo deve retalhar cada camada homogênea em suficiente número para que as variações de $\sigma_{zz}^{(i)}$ e de $\sigma_{\theta z}^{(i)}$ sejam ambas pequenas e assim tensões médias sejam representativas.

⁸Poder-se-ia empregar uma formulação de casca para tratar casos mais sofisticados como uma camada homogênea ortotrópica, mas o tratamento correto da deformações radiais fica prejudicado.

⁹Para acompanhar a dedução dessa formulação, vide prova A.2.1, a partir da página 127.

$$\frac{\dot{\bar{R}}_{ext}^{(i)}}{\bar{R}_{ext}^{(i)}} = 1 + 2 \frac{\dot{\bar{p}}_{int}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \frac{\left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2}{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} - \frac{\dot{\bar{p}}_{ext}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left\{ \frac{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 + \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]}{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} + \nu_s^{(i)} \right\} - \nu_s^{(i)} \frac{\dot{T}^{(i)}}{E_s^{(i)} \bar{S}^{(i)}} \quad (2.4c)$$

$$\frac{\dot{\bar{R}}_{int}^{(i)}}{\bar{R}_{int}^{(i)}} = 1 - 2 \frac{\dot{\bar{p}}_{ext}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \frac{\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2}{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} + \frac{\dot{\bar{p}}_{int}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left\{ \frac{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 + \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]}{\left[\left(\bar{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\bar{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} - \nu_s^{(i)} \right\} - \nu_s^{(i)} \frac{\dot{T}^{(i)}}{E_s^{(i)} \bar{S}^{(i)}} \quad (2.4d)$$

... onde: $E_s^{(i)}$ = módulo secante de elasticidade; $G_s^{(i)}$ = módulo secante de cisalhamento; $\nu_s^{(i)}$ = coeficiente de Poisson; $\bar{S}^{(i)}$ = área seccional; $\bar{J}^{(i)}$ = momento polar de área.

2.4 Modelagem de reforçadores helicoidais

Reforçadores helicoidais são tratados como hastes esbeltas que têm curvaturas iniciais conhecidas. De acordo com a teoria de estruturas unidimensionais, cada configuração de equilíbrio $\mathbb{E} (\equiv \mathbb{E}^{(i,j)})^{10}$ de reforçador é definida não apenas pela linha central¹¹ $\mathbb{C}$, mas também por vetores diretores $\mathbf{d}_{1...2}$, que atribuem-lhe a capacidade de girar em torno de si¹². Escreve-se, portanto, uma configuração de equilíbrio de um reforçador como:

$$\mathbb{E} = \{ \mathbb{C} : \xi \rightarrow \mathbf{r}(\xi); \mathbf{d}_{1...2} : \xi \rightarrow \mathbf{d}_{1...2}(\xi) \}, \quad \xi \in [-\ell_s/2, \ell_s/2] \quad (2.5)$$

... onde: $\mathbf{r}$ = função vetorial que descreve a curva $\mathbb{C}$ no espaço; ξ = parâmetro de comprimento de arco na curva $\mathbb{C}$; ℓ_s = comprimento da curva $\mathbb{C}$. Sobre esse último, na

¹⁰Vide nota de simplificação da notação na página 14 para escrever $\mathbb{E}$ ao invés de $\mathbb{E}^{(i,j)}$, $\mathbb{C}$ ao invés de $\mathbb{C}^{(i,j)}$, $\mathbf{d}_{1...2}$ ao invés de $\mathbf{d}_{1...2}^{(i,j)}$ e assim por diante. Subentende-se, portanto, que as grandezas citadas nessa seção do texto se referem ao reforçador j de uma camada i .

¹¹A linha central $\mathbb{C}$ atravessa os centróides das seções do reforçador.

¹²A medida da rotação em torno da linha central é dada pela variação do ângulo de Euler ϑ_3 que, segundo a convenção adotada, é $\pi/2$ inicialmente.

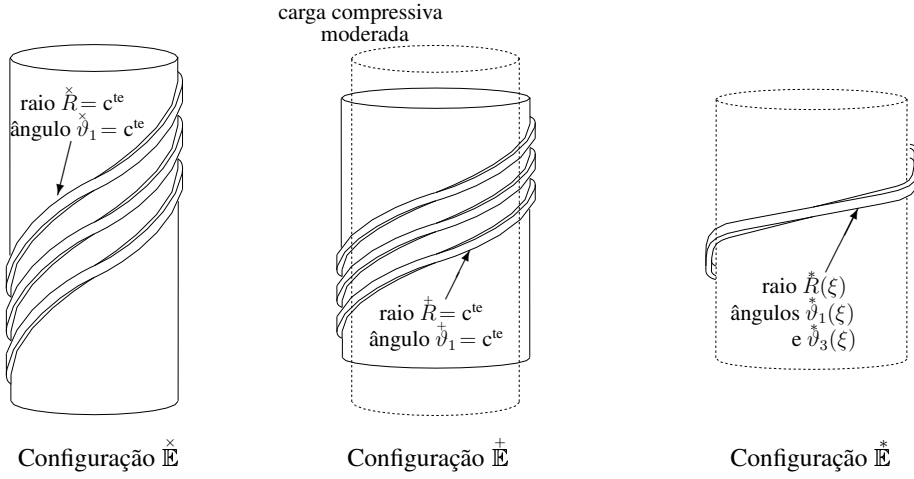


Figura 2.1: Alternativas de configuração possíveis da resposta do problema do reforçador sob carregamento axissimétrico moderado.

configuração referencial é conveniente algumas vezes escrevê-lo como:

$$\check{\ell}_s = n_\ell \frac{2\pi \check{R}}{\sin \check{\vartheta}_1} \quad (2.6)$$

... onde: n_ℓ = número de passos da armadura.

Quando não há forças sobre o duto, seus reforçadores permanecem na configuração referencial¹³ $\check{\mathbb{E}}$, onde a linha central $\check{\mathbb{C}}$ é um helicóide perfeito e o vetor diretor $\check{\mathbf{d}}_1$ é oposto ao vetor radial $\mathbf{i}_r$. Se um carregamento axissimétrico constante e moderado é aplicado, uma solução possível do equilíbrio é uma configuração deformada primária $\check{\mathbb{E}}^{\dagger}$. Tais configurações são vistas na figura 2.1.

2.4.1 Descrição das configurações de equilíbrio $\check{\mathbb{E}}$ e $\check{\mathbb{E}}^{\dagger}$

O helicóide é uma geometria simples. Em primeiro lugar, considere a configuração referencial $\check{\mathbb{E}}$ ($\equiv \check{\mathbb{E}}^{(i,j)}$). A função vetorial $\check{\mathbf{r}}$, descrevendo a curva $\check{\mathbb{C}}$ no espaço $\mathbb{R}^3$, tem a expressão:

¹³A configuração $\check{\mathbb{E}}^{(i,j)}$ não é sem esforços, pois a conformação (*pre-forming*) plástica dos reforçadores impõe curvaturas iniciais $\check{\kappa}_{2...3}$, diferentes das curvaturas $\check{\kappa}_{2...3}$. Eles se mantêm no estado $\check{\mathbb{E}}^{(i,j)}$ porque são enrolados sobre camadas com raio maior que $\check{R}$, que os empurram afora mesmo sem forças externas no duto. Entretanto, essas forças internas são ínfimas, logo é razoável supor que no estado $\check{\mathbb{E}}^{(i,j)}$ o reforçador está praticamente livre de esforços.

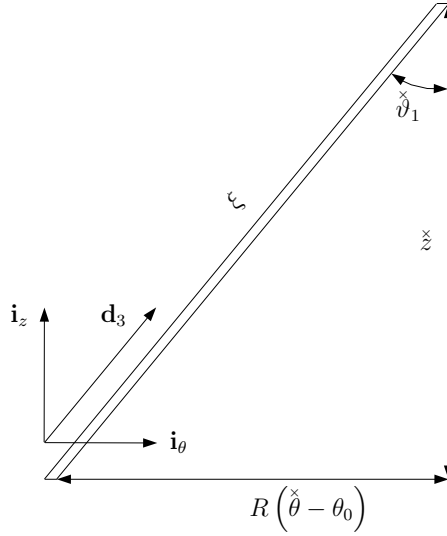


Figura 2.2: Ilustração da relação entre $\check{R}\check{\theta}$ e ξ na configuração $\check{\mathbb{E}}$; relação similar também é válida para a configuração $\check{\mathbb{E}}$.

$$\begin{aligned}
 \check{\mathbf{r}} &= (\check{R} \cos \check{\theta}) \mathbf{i}_1 + (\check{R} \sin \check{\theta}) \mathbf{i}_2 + \left[\check{R} \frac{(\check{\theta} - \theta_o)}{\tan \check{\vartheta}_1} \right] \mathbf{i}_3 \\
 &= \check{R} \mathbf{i}_r + \left[\check{R} \frac{(\check{\theta} - \theta_o)}{\tan \check{\vartheta}_1} \right] \mathbf{i}_z
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

... onde: $\mathbf{i}_{1...3}$ = base do sistema de coordenadas global cartesiano; $\mathbf{i}_{r...z}$ = base do sistema de coordenadas global cilíndrico; $\check{R}$ = raio da hélice na configuração referencial; $\check{\theta}$ = posição angular em torno do eixo longitudinal $\mathbf{i}_3$; $\check{\vartheta}_1$ = ângulo de passo na configuração referencial; θ_o = posição angular em $\xi = 0$.

A relação entre $\check{\theta}$ e o parâmetro de comprimento de arco ξ é dada por¹⁴:

$$\check{\theta} = \theta_o + \xi \sin \check{\vartheta}_1 / \check{R} \quad (2.8)$$

... e chega-se facilmente às igualdades:

$$\check{z} = \xi \cos \check{\vartheta}_1, \quad \left(\check{\theta} - \theta_o \right) \check{R} = \xi \sin \check{\vartheta}_1 \quad (2.9)$$

Como já dito, o tratamento dado às deformações da haste evita maiores sofisticções. Determinar cisalhamento e empenamento da seção dos reforçadores é irrelevante ao estudo de instabilidade, logo valem as hipóteses:

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3 \equiv \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}; \quad \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad i, j = 1 \dots 3 \quad (2.10)$$

O vetor tangente $\check{\mathbf{d}}_3$ é dado por:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{d}}_3 &\equiv \frac{\check{\mathbf{r}}'}{\|\check{\mathbf{r}}'\|} = \left(-\sin \check{\vartheta}_1 \sin \check{\theta} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\theta} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\cos \check{\vartheta}_1 \right) \mathbf{i}_3 \\ &= \sin \check{\vartheta}_1 \mathbf{i}_\theta + \cos \check{\vartheta}_1 \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (2.11)$$

A configuração referencial $\check{\mathbb{E}}$ é definida de modo que as direções principais $\check{\mathbf{d}}_{1\dots 2}$ do helicóide se encontrem em um plano cuja normal é a tangente à curva $\check{\mathbb{C}}$ (e de todas as suas variantes deformadas) e que a direção principal $\check{\mathbf{d}}_1$ se alinhe sempre ao vetor normal a tal curva. Na figura 2.3 é possível acompanhar essa definição e a forma de $\check{\mathbf{d}}_{1\dots 2}$ é dada por:

$$\check{\mathbf{d}}_1 = \left(-\cos \check{\theta} \right) \mathbf{i}_1 + \left(-\sin \check{\theta} \right) \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_r \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{d}}_2 &= \left(\cos \check{\vartheta}_1 \sin \check{\theta} \right) \mathbf{i}_1 + \left(-\cos \check{\vartheta}_1 \cos \check{\theta} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\sin \check{\vartheta}_1 \right) \mathbf{i}_3 = \\ &= -\cos \check{\vartheta}_1 \mathbf{i}_\theta + \sin \check{\vartheta}_1 \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Seja agora a configuração de equilíbrio primária $\check{\mathbb{E}}^\dagger (\equiv \check{\mathbb{E}}^{(i,j)})$. A função vetorial $\check{\mathbf{r}}^\dagger$, capaz

¹⁴O parâmetro θ apresenta, na hélice perfeita, a mesma taxa de variação ao longo do comprimento que o ângulo de Euler ϑ_2 , sendo rigorosamente distinto dele para finalidades mais gerais. Essa separação é muito importante para a correta formulação do problema.

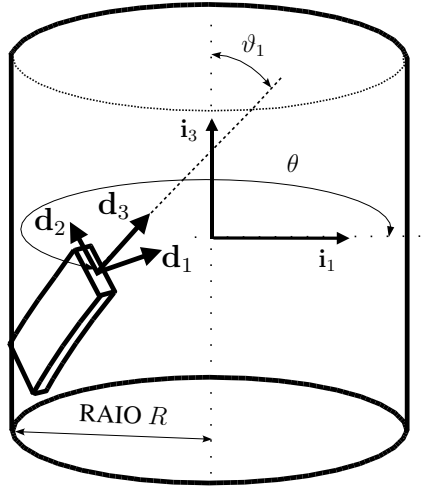


Figura 2.3: Descrição de alguns elementos de um helicóide.

de descrever a curva $\mathring{\mathbb{C}}$ no espaço, é dada por:

$$\begin{aligned}\mathring{\mathbf{r}} &= \left(\mathring{R} \cos \mathring{\theta} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\mathring{R} \sin \mathring{\theta} \right) \mathbf{i}_2 + \left[\mathring{R} \frac{(\mathring{\theta} - \theta_o)}{\tan \mathring{\vartheta}_1} \right] \mathbf{i}_3 \\ &= \mathring{R} \mathbf{i}_r + \left[\mathring{R} \frac{(\mathring{\theta} - \theta_o)}{\tan \mathring{\vartheta}_1} \right] \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (2.13)$$

... com:

$$\mathring{\theta} = \theta_o + \xi \sin \mathring{\vartheta}_1 / \mathring{R}$$

... onde: $\mathring{R}$ = raio da hélice na configuração deformada; $\mathring{\vartheta}_1$ = ângulo de passo na configuração deformada; ξ = parâmetro de comprimento de arco na configuração deformada.

O vetor tangente $\mathring{\mathbf{d}}_3$ e os vetores diretores $\mathring{\mathbf{d}}_{1...2}$ são formulados por:

$$\mathring{\mathbf{d}}_1 = \left(-\cos \mathring{\theta} \right) \mathbf{i}_1 + \left(-\sin \mathring{\theta} \right) \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_r \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2 &= \left(\cos \vartheta_1^\dagger \sin \theta^\dagger \right) \mathbf{i}_1 + \left(-\cos \vartheta_1^\dagger \cos \theta^\dagger \right) \mathbf{i}_2 + \left(\sin \vartheta_1^\dagger \right) \mathbf{i}_3 = \\ &= -\cos \vartheta_1^\dagger \mathbf{i}_\theta + \sin \vartheta_1^\dagger \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (2.14b)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_3 &\equiv \frac{\mathbf{r}_{,\xi}^\dagger}{\|\mathbf{r}_{,\xi}^\dagger\|} = \left(-\sin \vartheta_1^\dagger \sin \theta^\dagger \right) \mathbf{i}_1 + \left(\sin \vartheta_1^\dagger \cos \theta^\dagger \right) \mathbf{i}_2 + \left(\cos \vartheta_1^\dagger \right) \mathbf{i}_3 = \\ &= \sin \vartheta_1^\dagger \mathbf{i}_\theta + \cos \vartheta_1^\dagger \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (2.14c)$$

2.4.2 Deformações de reforçadores na configuração primária $\mathbb{E}$

Segundo as teorias de estruturas unidimensionais mais simples, as deformações de uma haste esbelta extensível são a distensão ϵ_{33} de sua linha central $\mathbb{C}$ e a mudança de curvaturas $\Delta\kappa_{1\dots 3}$. Em particular, interessa a descrição de tais deformações *locais* (do reforçador) em função das deformações *globais* (do duto flexível) $\check{\epsilon}$, $\check{\gamma}$ e $\check{R}/\check{R}$, utilizando as hipóteses apresentadas no início desse capítulo (pág.19).

Em termos algébricos, a distensão $\epsilon_{33}^\dagger$ da linha central do reforçador é a medida da variação da norma¹⁵ de $\mathbf{r}$ desde a configuração referencial até a configuração primária (ou qualquer outra)¹⁶:

$$\epsilon_{33}^\dagger \approx \check{\epsilon} \cos^2 \check{\vartheta}_1 + \check{\gamma} \check{R} \sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1 + \frac{(\check{R}^\dagger - \check{R})}{\check{R}} \sin^2 \check{\vartheta}_1 \quad (2.15)$$

O conceito de curvatura precisa ser entendido como a taxa de variação da mudança de direção dos vetores diretores $\mathbf{d}_{1\dots 3}$, ou seja:

$$\kappa_1 = \mathbf{d}_{2,\xi} \cdot \mathbf{d}_3, \quad \kappa_2 = \mathbf{d}_{3,\xi} \cdot \mathbf{d}_1, \quad \kappa_3 = \mathbf{d}_{1,\xi} \cdot \mathbf{d}_2 \quad (2.16)$$

... logo, desde que¹⁷

$$\check{R}' = \check{R}^\dagger = 0, \quad \mathbf{i}_r' \cdot \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_\theta' \cdot \mathbf{i}_\theta = 0, \quad \mathbf{i}_r' \cdot \mathbf{i}_\theta = \theta' \quad \text{e} \quad \mathbf{i}_\theta' \cdot \mathbf{i}_r = -\theta'$$

... então:

$$\check{\kappa}_1 = \kappa_1^\dagger = 0, \quad (2.17a)$$

¹⁵A norma de $\mathbf{r}$ é o próprio parâmetro de comprimento de arco ξ .

¹⁶Vide prova A.2.2 na página 130.

¹⁷Vide prova A.2.3 na página 132.

$$\check{\kappa}_2 = \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}}, \quad \check{\kappa}_2 = \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \quad (2.17b)$$

$$\check{\kappa}_3 = \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}}, \quad \check{\kappa}_3 = \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \quad (2.17c)$$

Portanto, a variação da curvatura é regida pela mudança de raio e ângulo de assentamento. Pode-se redigir o ângulo de assentamento final $\check{\vartheta}_1$ em função das deformações globais na forma¹⁸:

$$\tan \check{\vartheta}_1 = \frac{\left(\tan \check{\vartheta}_1 + \check{\gamma} \check{R} \right) \check{R}}{(1 + \check{\epsilon}) \check{R}} \quad (2.18)$$

2.4.3 Equilíbrio do reforçador na configuração primária $\mathbb{E}$

De acordo com os modelos mais simples de estruturas unidimensionais, pode-se integrar as tensões na seção transversal do reforçador para obter componentes de força internas generalizadas, que são grandezas vetoriais de força $\mathbf{N}$, momento $\mathbf{M}$, força distribuída ao longo do comprimento $\mathbf{q}$ e momento distribuído $\mathbf{m}$. Pode-se escrever componentes vetoriais em qualquer base de sistema de coordenadas, mas geralmente o equilíbrio das hastes esbeltas é formulado em um sistema de coordenadas solidário à linha central da haste. O principal motivo para isso é a facilitação da expressão da relação constitutiva das componentes de força generalizada.

O equilíbrio estático de uma haste esbelta é formulado por:

$$\mathbf{N}_{,\xi} + \mathbf{q} = 0 \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{M}_{,\xi} + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{N} + \mathbf{m} = 0 \quad (2.19b)$$

Quando manipulado convenientemente¹⁹, o sistema (2.19) simplifica-se até:

$$\sin \check{\vartheta}_1 \check{N}_\theta = \check{R} \check{q}_r \quad (2.20a)$$

$$\sin \check{\vartheta}_1 \check{M}_\theta = \check{R} \left(\sin \check{\vartheta}_1 \check{N}_z - \cos \check{\vartheta}_1 \check{N}_\theta \right) \quad (2.20b)$$

¹⁸Vide prova detalhada na seção A.2.2 a partir da página 130.

¹⁹Vide prova A.2.4 na página 133.

... onde: $\vartheta_1^\dagger$ = ângulo de assentamento (passo) dos reforçadores na camada i ; $\dot{N}_\theta^\dagger$ = componente de força interna na direção circunferencial; $\dot{M}_\theta^\dagger$ = componente de momento interno na direção circunferencial; $\dot{N}_z^\dagger$ = componente de força interna na direção longitudinal; $\dot{q}_r^\dagger$ = força distribuída na direção radial.

Consistente à hipótese de que as cargas distribuídas $\dot{q}_r^\dagger$ de um conjunto de reforçadores - equalitariamente distribuídos em uma camada, de modo a preencher quase completamente o perímetro - são equivalentes a uma diferença de pressão interna e externa, homogênea em cada interface, é razoável estabelecer o equilíbrio na direção radial dessa interface por meio de:

$$\dot{q}_r^\dagger = -2 \left[\dot{q}_{lat} \sin \left(\frac{\pi}{n_w} \right) + \left(\dot{p}_{ext} \dot{R}_{ext} - \dot{p}_{int} \dot{R}_{int} \right) \frac{\pi}{n_w} \cos \vartheta_1^\dagger \right] \quad (2.21)$$

... onde: $\dot{q}_{lat}$ = força distribuída, simetricamente atuando nas laterais do reforçador, normalmente causada por contato lateral entre reforçadores e mecanismos de travamentos em perfis de carcaça²⁰.

Em poucos passos chega-se²¹ à relação constitutiva das componente de momento $\dot{M}_\theta^\dagger$ e $\dot{M}_z^\dagger$ presentes, respectivamente, nas equações (2.20) e (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{M}_\theta^\dagger = & -\cos \vartheta_1^\dagger A_2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) + \\ & + \sin \vartheta_1^\dagger A_3 \left(\frac{\sin \vartheta_1^\dagger \cos \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} - \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_z^\dagger = & \sin \vartheta_1^\dagger A_2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) + \\ & + \cos \vartheta_1^\dagger A_3 \left(\frac{\sin \vartheta_1^\dagger \cos \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} - \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \end{aligned} \quad (2.22b)$$

... onde: A_1, A_2 = rigidez à flexão nas direções $\check{d}_1$ e $\check{d}_2$; A_3 = rigidez à torção.

A última relação constitutiva necessária ao modelo para camadas de reforçadores escreve a força tangente $\dot{N}_3^\dagger$ em função da distensão $\epsilon_{33}^\dagger$. Supondo que as deformações da seção

²⁰A componente de força distribuída externa $\dot{q}_\theta^\dagger$ é ignorada no restante desse trabalho pois, para centrar o foco na instabilidade, supõe-se que não há contato lateral nem travamento. Essas questões já foram adequadamente tratadas em CUSTÓDIO[20].

²¹Vide prova A.2.5 na página 135.

são desprezíveis, obtém-se:

$$\dot{N}_3 = E_s S_w \dot{\epsilon}_{33} = \dot{N}_\theta \sin \vartheta_1 + \dot{N}_z \cos \vartheta_1 \quad (2.23)$$

... onde: E_s = módulo de elasticidade do material; S_w = área da seção transversal.

2.5 Modelagem de bandagens reforçadas

As bandagens são raramente mencionadas nos modelos para determinação da configuração $\mathbb{E}$ porque sua contribuição é pequena enquanto predomina a tração no duto. Todavia, bandagens reforçadas por fibras de alta resistência têm um papel central quando o carregamento tende a causar expressiva expansão radial das armaduras, pois elas limitam-lhe essa deformação.

A maioria dos fabricantes usa bandagens com estrutura de tecido unidirecional, onde os filamentos são agrupados formando um **urdume** e uns poucos filamentos são entrelaçados aos primeiros, estes denominados de **trama**. Entretanto, sabe-se da existência de dutos cujas bandagens têm filamentos inseridos em uma matriz polimérica²².

As fitas de bandagem são geralmente enroladas com passo igual ou ligeiramente menor que sua largura. Passos menores que a largura produzem um **apinhamento** que, embora aumente a resistência radial por aumento da seção e enrijecimento, implica em perda de eficiência em termos de massa de bandagem por capacidade. Um pequeno apinhamento, porém, evita espaços entre as fitas, formando interface mais suave e menos sensível a desgaste de bordas.

A resistência e a rigidez transversal de cada fita de bandagem, associadas à trama do tecido, são muito pequenas frente às mesmas propriedades na direção do urdume. Supondo que a espessura é também pequena, de modo que é possível ignorar propriedades na direção normal, pode-se determinar as propriedades do tecido a partir apenas das propriedades da fibra, da sua orientação e do fator de ocupação, associado à gramatura do tecido empregado. Por sua vez, a partir das propriedades mecânicas do tecido, há duas alternativas para tratar esse tipo de camada:

- incorporar cada fita ao modelo como um reforçador singelo; ou

²²Estes últimos não são enfocados nessa seção, mas a determinação de suas propriedades mecânicas é realmente mais fácil, pois pode-se utilizar diretamente a regra das misturas.

- incorporar toda a camada de bandagem como uma membrana ortotrópica.

A primeira alternativa é preferida, ao menos quando o apinhamento é pequeno, porque o ângulo de assentamento da bandagem se torna um grau de liberdade na formulação, facilitando a atualização da rigidez da camada. Ademais, o cálculo de forças e tensões internas é mais direto. Um pequeno apinhamento é tratado através de uma perda de efetividade da parte superposta da seção. Por outro lado, a modelagem como membrana ortotrópica é mais estável e econômica do ponto de vista computacional, especialmente se dispensa a atualização das propriedades ortotrópicas, que rigorosamente são função do passo e raio de assentamento.

2.5.1 Propriedades mecânicas da bandagem

As propriedades mecânicas de uma bandagem de tecido advêm quase completamente do urdume; pouco contribui a trama, cujo encargo é evitar o enovelamento dos filamentos. Logo, é natural que o módulo de elasticidade na direção de urdume seja maior que em outras direções. Outra nota importante é que a bandagem sob tração responde mais rigidamente que sob compressão, por efeito de vários fenômenos.

No levantamento dos coeficientes elásticos da bandagem a literatura em geral utiliza conceito semelhante à **regra das misturas** para estruturas compósitas de fibras e matriz. Na ausência de uma resina de adjunção, porém, as propriedades mecânicas são dadas pela fração²³ volumétrica da fibra em relação à seção da fita de bandagem, e pelas próprias características do seu material.

O módulo de elasticidade equivalente $E_u^{(i)}$ na direção do urdume é dado por²⁴

$$E_u^{(i)} = \begin{cases} \mu_c^{(i)} \mu_{ut}^{(i)} E_f, & \text{para tração} \\ \mu_c^{(i)} \mu_{uc}^{(i)} \sqrt{\min(p_{int}^{(i)}, p_{ext}^{(i)})} E_f, & \text{para compressão} \end{cases} \quad (2.24)$$

... onde: $\mu_{ut}^{(i)}$ = fração volumétrica do urdume em relação ao volume total da camada; $\mu_{uc}^{(i)}$ = produto de $\mu_{ut}^{(i)}$ e um coeficiente que trata da resistência à compressão; E_f = módulo de elasticidade da fibra; $\min(p_{int}^{(i)}, p_{ext}^{(i)})$ = mínimo entre pressão interna e externa na camada; $\mu_c^{(i)}$ = coeficiente de correção para ajustar a correlação numérico-experimental,

²³ A fração volumétrica é proporcional à gramatura do tecido.

²⁴ A rigidez da bandagem à compressão tem reduzido interesse prático. Além de a rigidez ser pequena, enfoca-se aqui a instabilidade das armaduras, que geralmente traciona as bandagens.

se necessário²⁵.

O módulo de elasticidade equivalente $E_t^{(i)}$ na direção da trama tem pouca necessidade prática, mas pode ser determinado por relação semelhante à anterior:

$$E_t^{(i)} = \begin{cases} \mu_c^{(i)} \mu_{tt}^{(i)} E_f, & \text{para tração} \\ \mu_c^{(i)} \mu_{tc}^{(i)} \sqrt{\min(p_{int}^{(i)}, p_{ext}^{(i)})} E_f, & \text{para compressão} \end{cases} \quad (2.25)$$

... onde: $\mu_{tt}^{(i)}$ = fração volumétrica da trama em relação ao volume total da camada; $\mu_{tc}^{(i)}$ = produto de $\mu_{tt}^{(i)}$ e um coeficiente que trata da resistência à compressão.

Os coeficientes de Poisson equivalentes $\nu_{ut}^{(i)}$ e $\nu_{tu}^{(i)}$ são dados por:

$$\nu_{ut}^{(i)} = \mu_{ut}^{(i)} \nu_f, \quad \nu_{tu}^{(i)} = \left(\frac{E_t^{(i)}}{E_u^{(i)}} \right) \nu_{ut}^{(i)} \quad (2.26)$$

... onde: ν_f = coeficiente de Poisson do material das fibras.

O valor correto do módulo de cisalhamento $G_{ut}^{(i)}$ é difícil de determinar, pois depende de termos de flexão dos filamentos e de fricção entre eles. Para evitar longa dedução, constatou-se que uma estimativa usando

$$G_{ut}^{(i)} = \frac{E_t^{(i)}}{2 \left(1 + \nu_{ut}^{(i)} \right)} \quad (2.27)$$

... resulta em valores dentro de uma faixa de 30% de erro²⁶ nos poucos resultados numéricos que se obtinha na literatura.

Na falta da relação volumétrica exata, pode-se aproximar $\mu_{ut}^{(i)}$ e $\mu_{tt}^{(i)}$ por meio de:

$$\mu_{ut}^{(i)} = \left[\frac{n_{fu}^{(i)} P_t^{(i)}}{\left(n_{fu}^{(i)} P_t^{(i)} + l_w^{(i)} \right)} \right] \frac{W_l^{(i)} \cos \vartheta_1^{(i)}}{\rho_m^{(i)} l_w^{(i)} t_w^{(i)}} \quad (2.28a)$$

$$\mu_{tt}^{(i)} = \left[\frac{l_w^{(i)}}{\left(n_{fu}^{(i)} P_t^{(i)} + l_w^{(i)} \right)} \right] \frac{W_l^{(i)} \cos \vartheta_1^{(i)}}{\rho_m^{(i)} l_w^{(i)} t_w^{(i)}} \quad (2.28b)$$

... onde: $n_{fu}^{(i)}$ = número de filamentos na direção de urdume; $P_t^{(i)}$ = passo da trama; $W_l^{(i)}$ =

²⁵Esse fator foi colocado após verificar que a rigidez radial é quase sempre diferente da prevista por esse modelo. Acredita-se que ainda há trabalho para fazer em tais modelos para bandagens.

²⁶Desde que o impacto de um erro nesse coeficiente elástico é pequeno na resposta do duto, essa estimativa grosseira é aceitável para a maioria dos propósitos.

peso da camada i por comprimento de duto (informado em sua folha de dados); $\vartheta_1^{(i)}$ = ângulo de assentamento da bandagem; $\rho_m^{(i)}$ = massa específica do material dos filamentos; $l_w^{(i)}$, $t_w^{(i)}$ = largura e espessura da bandagem.

Se for estabelecida uma tensão máxima admissível $\sigma_{fa}^{(i)}$ nas fibras de alta resistência, é possível estimar a carga máxima $N_{3a}^{(i)}$ que a bandagem pode receber por:

$$N_{3a}^{(i)} = \mu_{ut}^{(i)} \sigma_{fa}^{(i)} l_w^{(i)} t_w^{(i)} \quad (2.29)$$

2.5.2 Tratamento da bandagem como reforçador helicoidal

A primeira alternativa de modelagem das bandagens é tratá-las como reforçadores helicoidais, cuja seção transversal corresponde a exatamente uma fita. Não é necessário corrigir área da seção nem momentos de área, pois essa emenda é providenciada pela formulação proposta para o módulo de elasticidade equivalente.

Como reforçadores, cada fita de bandagem tem três graus de liberdade:

- raio de assentamento $\dot{R}^{(i)}$,
- ângulo de assentamento $\dot{\vartheta}_1^{(i)}$,
- distensão $\epsilon_{33}^{(i)}$ na direção tangente.

... que são relacionados às deformações globais pelas equações (2.15) e (2.18):

$$\begin{aligned} \epsilon_{33}^{(i)} &\approx \check{\epsilon} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} + \check{\gamma} \check{R}^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} + \frac{(\dot{R}^{(i)} - \check{R}^{(i)})}{\check{R}^{(i)}} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \\ \tan \dot{\vartheta}_1^{(i)} &= \frac{(\tan \check{\vartheta}_1^{(i)} + \check{\gamma} \check{R}^{(i)}) \dot{R}^{(i)}}{(1 + \check{\epsilon}) \check{R}^{(i)}} \end{aligned}$$

Eles se acham acoplados às componentes de forças pelas relações (2.22) e (2.23):

$$\begin{aligned} \dot{M}_\theta^{(i)} &= -\cos \dot{\vartheta}_1^{(i)} A_2^{(i)} \left(\frac{\sin^2 \dot{\vartheta}_1^{(i)}}{\dot{R}^{(i)}} - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)}}{\check{R}^{(i)}} \right) + \\ &+ \sin \dot{\vartheta}_1^{(i)} A_3^{(i)} \left(\frac{\sin \dot{\vartheta}_1^{(i)} \cos \dot{\vartheta}_1^{(i)}}{\dot{R}^{(i)}} - \frac{\sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)}}{\check{R}^{(i)}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{M}_z^{(i)} &= \sin \vartheta_1^{(i)} A_2^{(i)} \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1^{(i)}}{\vec{R}^{(i)}} - \frac{\sin^2 \vartheta_1^{(i)}}{\vec{R}^{(i)}} \right) + \\
&\quad + \cos \vartheta_1^{(i)} A_3^{(i)} \left(\frac{\sin \vartheta_1^{(i)} \cos \vartheta_1^{(i)}}{\vec{R}^{(i)}} - \frac{\sin \vartheta_1^{(i)} \cos \vartheta_1^{(i)}}{\vec{R}^{(i)}} \right) \\
\vec{N}_3^{(i)} &= E_w^{(i)} S_w^{(i)} \epsilon_{33}^{(i)} = \vec{N}_\theta^{(i)} \sin \vartheta_1^{(i)} + \vec{N}_z^{(i)} \cos \vartheta_1^{(i)}
\end{aligned}$$

As contribuições de tração $\vec{T}^{(i)}$ e torque $\vec{Q}^{(i)}$ são conformes às expressões (2.2) e o equilíbrio é dado pelas igualdades (2.20):

$$\begin{aligned}
\vec{T}^{(i)} &= n_w^{(i)} \vec{N}_z^{(i)}, & \vec{Q}^{(i)} &= n_w^{(i)} \left(\vec{N}_\theta^{(i)} \vec{R}^{(i)} + \vec{M}_z^{(i)} \right) \\
n_w^{(i)} \vec{N}_\theta^{(i)} \sin \vartheta_1^{(i)} &= 2\pi \vec{R}^{(i)} \left(\vec{p}_{ext}^{(i)} \vec{R}_{ext}^{(i)} - \vec{p}_{int}^{(i)} \vec{R}_{int}^{(i)} \right) \cos \vartheta_1^{(i)} \\
\sin \vartheta_1^{(i)} \vec{M}_\theta^{(i)} &= \vec{R}^{(i)} \left(\sin \vartheta_1^{(i)} \vec{N}_z^{(i)} - \cos \vartheta_1^{(i)} \vec{N}_\theta^{(i)} \right)
\end{aligned}$$

... onde, na maioria das estruturas, $n_w^{(i)} = 1$.

2.5.3 Tratamento da bandagem como casca ortotrópica

A segunda forma de incorporar as bandagens ao modelo de equilíbrio do duto flexível é supor que elas formam uma casca ortotrópica. A configuração de equilíbrio $\mathbb{E}^{(i)}$ dessa camada admite três graus de liberdade, a saber:

- Distensão longitudinal $\epsilon_{zz}^{(i)}$ homogênea,
- Torção $\epsilon_{\theta z}^{(i)}$ em torno do eixo longitudinal $\mathbf{i}_z$,
- Variação do raio médio, identificada pela deformação $\epsilon_{\theta\theta}^{(i)}$.

Presumindo que a casca não altera sua espessura e portanto há uma situação de **estado plano de deformações**²⁷ e que os coeficientes de Poisson relacionados à direção normal à casca são muito pequenos, estabelecem-se as relações constitutivas da casca por meio

²⁷Embora qualquer abstração implique em perda de qualidade na representação, essa hipótese é mais adequada para uma casca firme sob pressão interna e externa que supor que a tensão na direção radial é nula, que corresponderia ao estado plano de tensões.

de²⁸:

$$\begin{bmatrix} \check{\epsilon}_{\theta\theta}^{(i)} \\ \check{\epsilon}_{zz}^{(i)} \\ \check{\epsilon}_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\mathbf{a}[c]} \cdot \begin{bmatrix} \check{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} \\ \check{\sigma}_{zz}^{(i)} \\ \check{\sigma}_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

... onde:

$$\check{\epsilon}_{\theta\theta}^{(i)} = d\check{R}^{(i)} / \check{R}^{(i)}, \quad \check{\epsilon}_{zz}^{(i)} = \check{\epsilon}, \quad \check{\epsilon}_{\theta z}^{(i)} = \check{\gamma} \check{R}^{(i)}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} &= \left(\check{p}_{int}^{(i)} - \check{p}_{ext}^{(i)} \right) \left(\check{R}_{ext} - \check{R}_{int} \right) / \check{R}^{(i)}, \\ \check{\sigma}_{zz}^{(i)} &= \check{T}^{(i)} / \check{S}^{(i)}, \quad \check{\sigma}_{\theta z}^{(i)} = \check{Q}^{(i)} \check{R}^{(i)} / \check{J}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

... e $\mathbf{C}_{\mathbf{a}[c]}$ = matriz de complacência para sistema cilíndrico de coordenadas, de expressão bastante complexa, cujos elementos são:

$$\begin{aligned} C_{a11} &= \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} E_u^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} - \\ &\quad - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} + \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)}}{G_{ut}^{(i)}} \\ C_{a12} &= - \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - E_u^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} - \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)}}{G_{ut}^{(i)}} \\ C_{a13} &= - 2 \frac{\cos^3 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(E_u^{(i)} + \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + 2 \frac{\sin^3 \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} + 1 \right)}{E_u^{(i)}} + \\ &\quad + \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(2 \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - 1 \right)}{G_{ut}^{(i)}} \\ C_{a21} &= \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} E_u^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} - \\ &\quad - \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} - \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)}}{G_{ut}^{(i)}} \end{aligned}$$

²⁸Vide a prova detalhada na seção A.2.6 a partir da página 136.

$$\begin{aligned}
C_{a22} &= - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - E_u^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + \\
&\quad + \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} + \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)}}{G_{ut}^{(i)}} \\
C_{a23} &= - 2 \frac{\sin^3 \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(E_u^{(i)} + \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + 2 \frac{\cos^3 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} + 1 \right)}{E_u^{(i)}} - \\
&\quad - \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(2 \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - 1 \right)}{G_{ut}^{(i)}} \\
C_{a31} &= - \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} E_u^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} - \\
&\quad - \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} + \\
&\quad + \frac{\left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right) \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)}}{2 G_{ut}^{(i)}} \\
C_{a32} &= \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - E_u^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + \\
&\quad + \frac{\cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \nu_{ut}^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right)}{E_u^{(i)}} - \\
&\quad - \frac{\left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right) \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin \check{\vartheta}_1^{(i)}}{2 G_{ut}^{(i)}} \\
C_{a33} &= 2 \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(E_u^{(i)} + \nu_{ut}^{(i)} E_t^{(i)} \right)}{E_t^{(i)} E_u^{(i)}} + \\
&\quad + 2 \frac{\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \left(\nu_{ut}^{(i)} + 1 \right)}{E_u^{(i)}} + \\
&\quad + \frac{\left(\cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \right) \left(2 \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - 1 \right)}{2 G_{ut}^{(i)}}
\end{aligned}$$

Os tensores de tensão e deformação são passados do sistema de coordenadas local para o sistema global cilíndrico usando a matriz de transformação $\mathbf{T}_{lc}$ (a mesma matriz faz a

operação inversa pois $(\mathbf{T}_{lc})^{-1} = \mathbf{T}_{lc}$):

$$[\mathbf{T}_{lc}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} & \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} & -2 \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \\ \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} & \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} & 2 \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} \\ -\sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} & \sin \check{\vartheta}_1^{(i)} \cos \check{\vartheta}_1^{(i)} & \sin^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} - \cos^2 \check{\vartheta}_1^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Mediante a transformação dos tensores, é possível determinar a tensão $\sigma_{33}^{(i)}$, usada para averiguar a adequação da camada à resistência.

Capítulo 3

Trilhando outros caminhos

3.1 Introdução

Nas armaduras, cada reforçador funciona como uma pequena viga, que possui curvaturas de fabricação idealmente constantes e que pode-se supor submetida a uma fundação elástica não-linear e um conjunto de condições de extremidade que não são simples de tratar. Recebendo forças externas, essas vigas se deformam e transferem parte dos esforços para outras camadas às quais estão cinematicamente acopladas.

Sob compressão, os reforçadores - como vigas que flambam - podem se tornar instáveis. Na maioria dos casos, essa instabilidade ocorre por uma bifurcação do caminho de equilíbrio, explicada pela existência de configurações que não são helicoidais e que também são soluções para o problema.

Para descobrir onde e como um caminho de equilíbrio bifurca, é preciso revisitar a geometria e a cinemática do reforçador. Nesse processo, ao invés de supor a forma helicoidal da curva $\mathbb{C}$ e a orientação dos vetores diretores como foi mostrado no capítulo anterior, uma formulação mais geral é indispensável. Com um manuseio mais destro das equações e incógnitas - isto é: adotando um sistema cilíndrico de coordenadas, com parâmetros apropriados e algum trabalho - evidencia-se que:

- a configuração helicoidal $\mathbb{E}^{(i,j)}$ dos reforçadores é simplesmente a solução trivial de um conjunto de equações muito sofisticado.
- a anulação de três parâmetros - associados à derivada do raio, à derivada do ângulo de assentamento e ao giro da seção transversal - permite que a configuração helicoidal $\mathbb{E}^{(i,j)}$ se forme.

- se qualquer dos três parâmetros citados for não-nulo, obtém-se outra configuração que não é helicoidal.
- consonante ao Postulado 1, $\mathbb{E}^{(i,j)}$ é realmente uma solução válida para o problema, no domínio das hipóteses empregadas.

O tratamento anterior para calcular esforços internos e deformações nas armaduras não fazia uso de hipóteses de manutenção de geometria helicoidal por capricho. Claramente, evitando simplificações e adotando formulação mais geral, uma solução analítica, elegante e fechada fica inviável, porque cinemática, relações constitutivas e equilíbrio da armadura produzem termos contendo vários produtos cruzados das incógnitas, que funcionam como fontes de não-linearidades muito difíceis de tratar.

Nesse momento, uma técnica de perturbação de Poincaré tem enorme utilidade para criar, a partir do conjunto de equações originais, versões delas com domínio de validade reduzido, mas suficiente para muitas tarefas. Nas equações simplificadas pelo método, aqueles produtos cruzados das incógnitas, onde se via problemas, são linearizados. O domínio de validade da técnica de perturbação de Poincaré depende das próprias equações e está relacionado com a manutenção de um parâmetro ε com valor pequeno.

Após a geração de um conjunto de equações viáveis de resolução, o próximo passo é fundi-las, consecutivamente, até que existam apenas 3 equações e 3 incógnitas, que são aqueles parâmetros associados à derivada do raio, à derivada do ângulo de assentamento e ao giro da seção transversal. Uma solução analítica, nesses termos, é possível, onde se trata convenientemente os graus de liberdade do problema.

3.2 Novidades na cinemática do reforçador

A configuração de equilíbrio de um reforçador ainda é descrita pela sua linha central $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}^{(i,j)}$ e seus vetores diretores $\mathbf{d}_{1...3} \equiv \mathbf{d}_{1...3}^{(i,j)}$ associados.

Em sua forma mais geral, a tríade de vetores diretores $\mathbf{d}_{1...3}$ é escrita no sistema global de coordenadas cartesianas, usando os ângulos de Euler ilustrados na figura 3.1, na

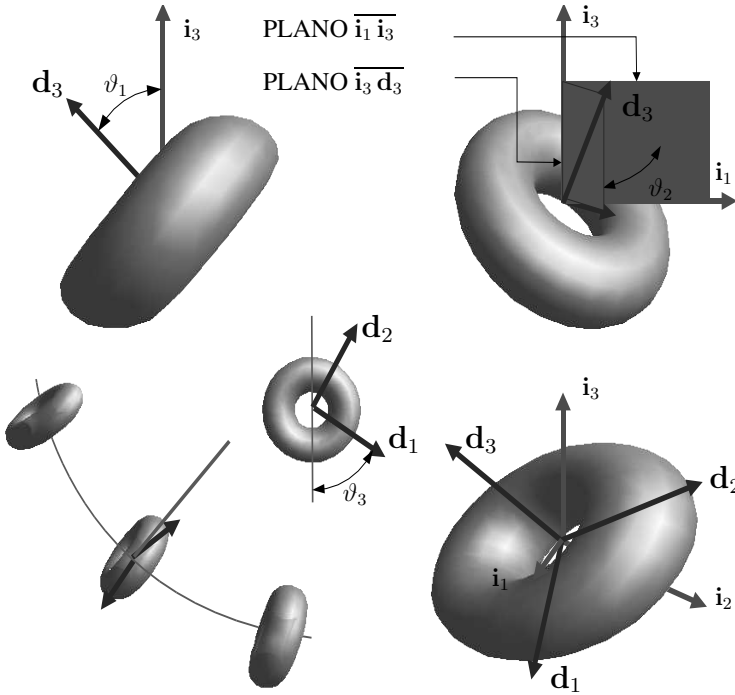


Figura 3.1: Descrição de ângulos de Euler utilizados.

seguinte forma¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 = & (\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_2) \mathbf{i}_1 + \\ & + (\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2) \mathbf{i}_2 + \\ & + (-\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1) \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 = & (-\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2) \mathbf{i}_1 + \\ & + (-\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_2) \mathbf{i}_2 + \\ & + (\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1) \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{d}_3 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta_1 \mathbf{i}_3 \quad (3.1c)$$

Na mudança de base para um sistema global de coordenadas cilíndricas, o ordenamento

¹Vide prova A.3.1 na página 140.

apropriado dos termos² encaminha à concepção do parâmetro ϱ :

$$\varrho = \theta - \vartheta_2 + \pi/2 \quad (3.2)$$

Aproveitando-o, as igualdades (3.1) são redigidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 = & (\sin \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \sin \vartheta_3) \mathbf{i}_r + \\ & + (\cos \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \sin \vartheta_3) \mathbf{i}_\theta - \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 = & (-\sin \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \cos \vartheta_3) \mathbf{i}_r + \\ & + (-\cos \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \cos \vartheta_3) \mathbf{i}_\theta + \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{d}_3 = \sin \vartheta_1 \sin \varrho \mathbf{i}_r + \sin \vartheta_1 \cos \varrho \mathbf{i}_\theta + \cos \vartheta_1 \mathbf{i}_z \quad (3.3c)$$

Nesse momento, deve-se notar que a expressão geral (3.3) dos vetores diretores endereça à configuração referencial $\overset{\times}{\mathbb{E}}$ quando

$$\varrho = 0, \quad \vartheta_3 = \pi/2, \quad \vartheta_1 = \overset{\times}{\vartheta}_1$$

... e ela endereça perfeitamente a configuração primária $\overset{+}{\mathbb{E}}$ quando

$$\varrho = 0, \quad \vartheta_3 = \pi/2, \quad \vartheta_1 = \overset{+}{\vartheta}_1 \quad .$$

O parâmetro ϱ é uma medida proporcional à derivada³ do raio de assentamento ao longo do reforçador. A componente da direção tangente $\mathbf{d}_3$ na direção radial é dada por:

$$R' = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_r = \sin \vartheta_1 \sin \varrho \quad (3.4)$$

De grande valia para aproveitamento futuro é, também, definir a taxa de variação da posição longitudinal z e da posição angular θ :

$$z' = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_z = \cos \vartheta_1 \quad (3.5)$$

²Vide prova A.3.2 na página 141.

³Derivada em relação ao parâmetro de comprimento de arco ξ .

$$R \theta' = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_\theta = \sin \vartheta_1 \cos \varrho \quad (3.6)$$

As expressões mais gerais das curvaturas são bastante complexas⁴:

$$\kappa_1 = \vartheta_1' \sin \vartheta_3 - \left(\frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \quad (3.7a)$$

$$\kappa_2 = \vartheta_1' \cos \vartheta_3 + \left(\frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \quad (3.7b)$$

$$\kappa_3 = \vartheta_3' + \left(\frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \cos \vartheta_1 \quad (3.7c)$$

As posições longitudinal z e angular θ correspondentes a uma determinada posição do arco ξ_1 podem ser determinadas através de:

$$z(\xi_1) = \int_{-\ell_s/2}^{\xi_1} \cos \vartheta_1 d\xi \quad (3.8a)$$

$$\theta(\xi_1) = \theta_o + \int_{-\ell_s/2}^{\xi_1} \frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho d\xi \quad (3.8b)$$

A distensão $\check{\epsilon}$ e o giro por comprimento $\check{\gamma}$ são dados pelas relações:

$$\check{\epsilon} = \frac{1}{\check{\ell}_c} \int_{-\ell_s/2}^{\ell_s/2} \left[(1 + \epsilon_{33}) \cos \vartheta_1 - \cos \check{\vartheta}_1 \right] d\xi \quad (3.9a)$$

$$\check{\gamma} = \frac{1}{\check{\ell}_c} \int_{-\ell_s/2}^{\ell_s/2} \left[(1 + \epsilon_{33}) \frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \frac{\sin \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right] d\xi \quad (3.9b)$$

3.3 Generalização do equilíbrio de reforçador

A natureza do problema sugere que a formulação seja mais naturalmente estabelecida em um sistema de coordenadas global cilíndrico ao invés de um sistema local como a maioria dos modelos convencionais fazem, porque o carregamento externo $\check{\mathbb{T}}$ sobre o duto, suas deformações e seus deslocamentos são todos melhor descritos em termos de componentes radial, circunferencial e longitudinal que de qualquer outra forma. Reproducindo então o equilíbrio em termos das componentes nas direções radial, circunferen-

⁴Vide prova A.3.3 na página 143.

cial e longitudinal, obtém-se:

$$N_r' + N_\theta (\mathbf{i}_\theta' \cdot \mathbf{i}_r) + q_r = 0 \quad (3.10a)$$

$$N_\theta' + N_r (\mathbf{i}_r' \cdot \mathbf{i}_\theta) + q_\theta = 0 \quad (3.10b)$$

$$N_z' + q_z = 0 \quad (3.10c)$$

$$M_r' + M_\theta (\mathbf{i}_\theta' \cdot \mathbf{i}_r) + N_z (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_\theta) - N_\theta (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_z) + m_r = 0 \quad (3.10d)$$

$$M_\theta' + M_r (\mathbf{i}_r' \cdot \mathbf{i}_\theta) + N_r (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_z) - N_z (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_r) + m_\theta = 0 \quad (3.10e)$$

$$M_z' + N_\theta (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_r) - N_r (\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_\theta) + m_z = 0 \quad (3.10f)$$

A constituição dos problemas de dutos sob carregamento axissimétrico em geral não cuida da presença de forças distribuídas q_z e q_θ . De fato, na ausência de forças de campo (gravidade, etc), as componentes de força distribuída q_θ e q_z devem-se somente ao atrito entre camadas que, para existir, depende de uma tendência de deslocamentos relativos - na direção circunferencial ou longitudinal - entre elas. Os fundamentos do modelo para determinar a configuração $\mathbb{E}^\dagger$ suportam as teses de que (1) os deslocamentos são homogêneos ao longo do comprimento; (2) nas extremidades, os deslocamentos circunferencial e longitudinal de todas as camadas são iguais. Conseqüentemente, os deslocamentos nas direções $\mathbf{i}_\theta$ e $\mathbf{i}_z$ de reforçadores e camadas adjacentes - ao menos para as linhas centrais dos primeiros⁵ e os planos médios dos segundos - são os mesmos. Assim:

$$\overset{\dagger}{q}_\theta = 0, \quad \overset{\dagger}{q}_z = 0 \quad (3.11)$$

Também no modelo aqui proposto, **utiliza-se a hipótese de que os atritos relacionados a deslocamentos longitudinal e circunferencial são irrelevantes no início do caminho secundário**⁶. De fato, em dutos de projeto mais recentes, camadas de fitas anti-fricção reduziram substancialmente o fator de atrito entre as armaduras e outras camadas; o valor do módulo $|q_\theta \mathbf{i}_\theta + q_z \mathbf{i}_z|$ é menor que 5% do valor de q_r . Ademais, na

⁵Uma hipótese colateral, a de que os reforçadores são suficientemente esbeltos para que os deslocamentos de seus pontos materiais (na superfície especialmente) sejam dados somente pelos deslocamentos da linha central é decisivo.

⁶Essa hipótese tem suas conseqüências nos resultados. Discute-se se o atrito pode oferecer ao reforçador, tal como um cabrestante, uma ancoragem nas camadas adjacentes, que funcionaria como mecanismo estabilizador. Por outro lado, o atrito incorpora termos não homogêneos nas equações diferenciais que, de outro modo, tornariam muito difícil a proposição de uma solução analítica. O trabalho, então, de incorporá-los na formulação é deixado para outros autores.

medida que os deslocamentos do reforçador são uma função com termos periódicos e não-periódicos, a introdução dessas duas cargas distribuídas complica bastante a solução dos sistemas de equações diferenciais⁷. Portanto, estabelece-se por força de hipótese:

$$q_\theta = 0, \quad q_z = 0 \quad (3.12)$$

Simplificando as relações (3.10) e multiplicando algumas das equações⁸ por R ou $\dot{R}$, obtém-se:

$$N_r' R - N_\theta \sin \vartheta_1 \cos \varrho + q_r R = 0 \quad (3.13a)$$

$$N_\theta' R + N_r \sin \vartheta_1 \cos \varrho = 0 \quad (3.13b)$$

$$N_z' = 0 \quad (3.13c)$$

$$M_r' R - M_\theta \sin \vartheta_1 \cos \varrho + N_z R \sin \vartheta_1 \cos \varrho - \\ - N_\theta R \cos \vartheta_1 + m_r R = 0 \quad (3.13d)$$

$$M_\theta' R + M_r \sin \vartheta_1 \cos \varrho + N_r R \cos \vartheta_1 - \\ - N_z R \sin \vartheta_1 \sin \varrho + m_\theta R = 0 \quad (3.13e)$$

$$M_z' + N_\theta \sin \vartheta_1 \sin \varrho - N_r \sin \vartheta_1 \cos \varrho + m_z = 0 \quad (3.13f)$$

O sistema de equações diferenciais (3.13) não basta para a solução do problema de determinar a forma do reforçador nas situações enfocadas. Sua formulação é complementada por relações constitutivas e condições de extremidade.

3.4 Relações constitutivas gerais do reforçador

O principal obstáculo à formulação do problema no sistema de coordenadas cilíndrico se encontra na expressão mais intrincada das relações constitutivas. Exceto pela relação para a força distribuída radial, as outras relações são melhor construídas em um sistema de coordenadas solidário, incorporando fatores associados às mudanças de curvatura e ao giro do tendão em torno de si mesmo.

⁷Em verdade, tentou-se durante alguns meses a inclusão dessas duas componentes e uma solução usando várias técnicas (séries, etc), sem resultados fechados satisfatórios. Esse é, portanto, um espaço para o aperfeiçoamento do modelo aqui proposto.

⁸Isso se mostrará importante adiante, na etapa de expansão para aplicar a técnica de perturbação, porque evita o surgimento de variáveis a serem expandidas no denominador de termos das equações de equilíbrio.

Por hipótese, o material dos reforçadores helicoidais permanece no regime elástico pelo menos até quaisquer pontos de bifurcação do caminho de equilíbrio e, nesse regime, a relação entre tensão e deformação do material é linear⁹.

As componentes de momentos nas direções locais M_1 , M_2 e M_3 são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} M_1 &= A_1 (\kappa_1 - \check{\kappa}_1) = \\ &= A_1 \left[\vartheta_1' \sin \vartheta_3 - \left(\frac{\sin \vartheta_1 \cos \varrho}{R} - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \right] \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= A_2 (\kappa_2 - \check{\kappa}_2) = \\ &= A_2 \left[\left(\frac{\sin \vartheta_1 \cos \varrho}{R} - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 + \vartheta_1' \cos \vartheta_3 - \check{\kappa}_2 \right] \end{aligned} \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= A_3 (\kappa_3 - \check{\kappa}_3) = \\ &= A_3 \left[\vartheta_3' + \left(\frac{\sin \vartheta_1 \cos \varrho}{R} - \varrho' \right) \cos \vartheta_1 - \check{\kappa}_3 \right] \end{aligned} \quad (3.14c)$$

... onde as curvaturas κ_1 , κ_2 e κ_3 são dadas pelas formulações (3.7). As componentes de momentos nas direções radial, circunferencial e longitudinal são obtidas mediante mudança de base usando as expressões (3.14):

$$\begin{aligned} M_r &= (\sin \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \sin \vartheta_3) M_1 + \\ &\quad + (-\sin \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \cos \vartheta_3) M_2 + \\ &\quad + \sin \vartheta_1 \sin \varrho M_3 \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= (\cos \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \sin \vartheta_3) M_1 + \\ &\quad + (-\cos \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \cos \vartheta_3) M_2 + \\ &\quad + \sin \vartheta_1 \cos \varrho M_3 \end{aligned} \quad (3.15b)$$

$$M_z = -\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 M_1 + \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 M_2 + \cos \vartheta_1 M_3 \quad (3.15c)$$

Quando um reforçador é submetido a carregamentos e deforma-se aumentando ou diminuindo seu raio, ele geralmente aplica forças radiais sobre as camadas mais internas ou mais externas, que reagem se opondo a tais forças, como ilustrado na figura 3.4. Em geral, problemas de instabilidade surgem com a compressão (embora possam surgir com

⁹Isso é representativo do comportamento de aços usualmente empregados.

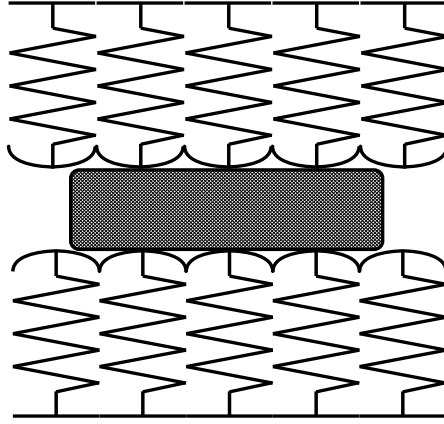


Figura 3.2: Abstração de camadas adjacentes como blocos de rigidez para fins da modelagem da resposta de um único reforçador.

combinações de tração e grande torque), onde há expansão radial da armadura. Quanto mais rígidas radialmente forem as camadas adjacentes, menor será a variação do raio médio do reforçador. Na configuração $\mathbb{E}^*$, o reforçador possui uma componente de deslocamento radial δR , ou seja, ele tenta se deslocar radialmente e o fará, enfrentando a oposição das camadas adjacentes.

$$\delta q_r = -k_{et} \delta R \quad (3.16)$$

... onde: k_{et} = rigidez radial tangente, oferecida pelas camadas adjacentes sobre o reforçador.

O conceito da rigidez k_{et} é, em verdade, uma abstração da situação real de que o reforçador enfrenta dois valores de rigidez diferentes: uma quando tenta deslocar-se no sentido positivo de $\mathbf{i}_r$, outra quando desloca-se no sentido negativo. A equivalência procura se estabelecer simplificadaamente pela semelhança das contribuições de energia potencial ao sistema, como apresentado na seção A.3.4:

$$k_{et} = \frac{[2 k_i g_t(\theta_a, \pi, \alpha_k) + k_s g_t(-\theta_a, \theta_a, \alpha_k)]}{2 \pi \left(\alpha_k^2 + \frac{1}{2} \right)} \quad (3.17)$$

... onde k_i = rigidez oferecida pela camada mais interna; k_s = rigidez oferecida pela camada mais externa; θ_a = medida angular da porção do reforçador que fica exposta

à rigidez superior; $g_t \equiv g_t(t_1, t_2, \alpha_k)$ = função de integração $\int_{t_1}^{t_2} (\alpha_k + \cos \theta)^2 d\theta$, α_k = relação entre os valores de rigidez. Esses três últimos fatores são dados por:

$$\alpha_k = \frac{k_i - k_s}{k_s + k_i}, \quad (3.18a)$$

$$\theta_a = \arccos(-\alpha_k), \quad (3.18b)$$

$$g_t(t_1, t_2, \alpha_k) = (t_2 - t_1) \left(\alpha_k^2 + \frac{1}{2} \right) + 2 \alpha_k (\sin t_2 - \sin t_1) + \frac{1}{2} (\sin t_2 \cos t_2 - \sin t_1 \cos t_1) \quad (3.18c)$$

O momento distribuído m_3 advém da oposição de camadas adjacentes ao giro do reforçador. Suponha que essa oposição seja medida por uma rigidez¹⁰ à rotação da seção k_g . A relação entre o momento distribuído m_3 e a medida de giro da seção ($\vartheta_3 - \pi/2$) é linearizada e fornecida por:

$$m_3 = -k_g (\vartheta_3 - \pi/2) \quad (3.19)$$

Em reforçadores de seção chata, é possível relacionar facilmente a rigidez ao giro k_g com a rigidez radial tangente k_{et} , pois o momento m_3 é a reação de infinitos blocos de rigidez (k_{et}/l_w), distribuídos ao longo da largura l_w , aos deslocamentos radiais em cada ponto da largura l_w , logo:

$$m_3 = - \int_{-l_w/2}^{l_w/2} \left(\frac{k_{et}}{l_w} \right) \left(w \sin \left(\vartheta_3 - \frac{\pi}{2} \right) \right) w dw \quad \therefore \quad k_g \approx \frac{1}{12} k_{et} l_w^2 \quad (3.20)$$

As componentes desse momento distribuído m_3 no sistema de coordenadas cilíndrico são dadas por:

$$m_r = \sin \vartheta_1 \sin \varrho m_3 \quad (3.21a)$$

$$m_\theta = \sin \vartheta_1 \cos \varrho m_3 \quad (3.21b)$$

$$m_z = \cos \vartheta_1 m_3 \quad (3.21c)$$

¹⁰Na forma dimensional k_g tem unidade de momento por comprimento, ou seja, força.

3.5 Aplicação da técnica de perturbação

Quando admite-se uma configuração de equilíbrio secundário $\mathbb{E}^{*(i,j)}$ onde as componentes de força e deformação dependem do parâmetro de comprimento de arco, o sistema de equações (3.13) preserva sua natureza diferencial - não se pode mais simplificá-lo até as equações (2.20). Essas equações diferenciais que regem o problema, infelizmente, possuem vários termos que são produtos cruzados das incógnitas e são fonte de não-linearidades e muita dificuldade para tratar. Por isso, essa forma mais geral das equações, ao invés de ajudar, prejudica o encaminhamento da solução.

No entanto, empregando a técnica de perturbação de Poincaré descrita a seguir, é possível criar versões das equações mais complexas, linearizando alguns de seus termos. Essa formulação alternativa tem um domínio de validade pequeno, pois se baseia na expansão - em séries de outras funções - das incógnitas em torno de uma solução exata, supostamente determinável. Porém, esse domínio é suficiente para a maior parte dos cálculos que se deseja fazer.

Quando confrontado com um conjunto de equações com termos não-lineares semelhantes aos que encontram-se na formulação da instabilidade da armadura, POINCARÉ[21] (*in* NAYFEH[22]) propôs redigir cada uma das variáveis usando expansões como:

$$x = x_{(0)} + \varepsilon x_{(1)} + \varepsilon^2 x_{(2)} + \varepsilon^3 x_{(3)} + \dots$$

... onde: ε = parâmetro de perturbação pequeno; $x_{(i)}$ = funções que fornecem o perfil analítico da variável na 1ª, 2ª, etc ordem de variação na vizinhança de $x_{(0)}$.

Se a solução exata e determinável $x_{(0)}$ é um ponto de equilíbrio com configuração $\mathbb{E}^{+(i,j)}$, uma pequena perturbação em torno dele somente leva a uma configuração $\mathbb{E}^{*(i,j)}$ se existe um caminho de equilíbrio colateral e portanto uma bifurcação naquele primeiro ponto. Caso contrário, a pequena perturbação não leva a uma solução com configuração $\mathbb{E}^{*(i,j)}$.

Além de apontar a existência ou não de uma configuração colateral de equilíbrio, a técnica de perturbação pode, caso o ponto de equilíbrio seja de um ponto de bifurcação, ajudar a fornecer informações sobre o caminho secundário de equilíbrio que se inicia ali. Para isso, basta o estudo da 1ª variação das incógnitas nessa vizinhança.

O método de perturbação proposto por Poincaré tem outras vantagens além da linearização de alguns dos termos das equações. Ele permite também um reordenamento de termos que conformam a solução em níveis sucessivos de relevância e a viabilização de várias simplificações relacionadas à ordem de grandeza do parâmetro ε .

3.5.1 Expansão das incógnitas

As expansões gerais de componentes - similares à apresentada acima - apontarão para uma configuração secundária $\mathbb{E}^*$ somente quando existir soluções não-triviais para suas variações de maior ordem. Nessa situação, o ponto do caminho primário associado a $\mathbb{E}$ é também um ponto de bifurcação. A expansão¹¹ das componentes relevantes é escrita da seguinte maneira:

$$R = \mathring{R} + \varepsilon R_{(1)}, \quad z'_s = \mathring{z}'_s + \varepsilon z'_{s(1)}, \quad R\theta' = \mathring{R}\mathring{\theta}' + \varepsilon \left(R_{(1)}\mathring{\theta}' + \mathring{R}\theta'_{(1)} \right) \quad (3.22a)$$

$$\kappa_1 = \varepsilon \kappa_{1(1)}, \quad \kappa_2 = \mathring{\kappa}_2 + \varepsilon \kappa_{2(1)}, \quad \kappa_3 = \mathring{\kappa}_3 + \varepsilon \kappa_{3(1)} \quad (3.22b)$$

$$\vartheta_1 = \mathring{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)}, \quad \vartheta_3 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \vartheta_{3(1)}, \quad \varrho = \varepsilon \varrho_{(1)} \quad (3.22c)$$

$$N_r = \varepsilon N_{r(1)}, \quad N_\theta = \mathring{N}_\theta + \varepsilon N_{\theta(1)}, \quad N_z = \mathring{N}_z + \varepsilon N_{z(1)} \quad (3.22d)$$

$$M_r = \varepsilon M_{r(1)}, \quad M_\theta = \mathring{M}_\theta + \varepsilon M_{\theta(1)}, \quad M_z = \mathring{M}_z + \varepsilon M_{z(1)} \quad (3.22e)$$

$$M_1 = \varepsilon M_{1(1)}, \quad M_2 = \mathring{M}_2 + \varepsilon M_{2(1)}, \quad M_3 = \mathring{M}_3 + \varepsilon M_{3(1)} \quad (3.22f)$$

$$m_r = \varepsilon m_{r(1)}, \quad m_\theta = \varepsilon m_{\theta(1)}, \quad m_z = \varepsilon m_{z(1)}, \quad m_3 = \varepsilon m_{3(1)} \quad (3.22g)$$

$$q_r = \mathring{q}_r + \varepsilon q_{r(1)}, \quad q_\theta = \varepsilon q_{\theta(1)}, \quad q_z = \varepsilon q_{z(1)} \quad (3.22h)$$

Quase todas as primeiras variações são, de alguma forma, dependentes do parâmetro de comprimento de arco. Isso conserva a natureza diferencial das equações de equilíbrio. Em especial, as componentes de força $N_{z(1)}$ e $N_{\theta(1)}$ e de momento $M_{z(1)}$ são divididas em duas parcelas. A primeira delas segue a dependência do parâmetro de comprimento de arco tal como várias outras grandezas. A outra parcela, porém, advém da reação das outras camadas às tendências de variação de comprimento e de giro que decorrem da passagem da configuração $\mathbb{E}$ para a configuração $\mathbb{E}^*$. Essa reação é aplicada nas extremidades somente; ela pode ser modelada - tal como foi feito com a rigidez radial - usando blocos de rigidez (tangente) axial e torcional que representam todas as outras camadas.

¹¹Expansão até a primeira variação, não é preciso mais que isso para conhecer o ponto de bifurcação e o perfil da solução. Após cada expressão, subentende-se a presença do termo $+O(\varepsilon^2)$.

3.5.2 Expansão das relações constitutivas e cinemáticas

O alinhamento de termos com mesma potência de ε , obtidos da substituição das variáveis pelas suas convenientes expansões nas equações (3.4), (3.5) e (3.6), permite obter as seguintes igualdades¹²:

$$R'_{(1)} = \varrho_{(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.23a)$$

$$\overset{\dagger}{z}' = \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1, \quad \overset{\dagger}{z}'_{(1)} = -\vartheta_{1(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.23b)$$

$$\overset{\dagger}{R}\overset{\dagger}{\theta}' = \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1, \quad \overset{\dagger}{R}\overset{\dagger}{\theta}'_{(1)} + R_{(1)}\overset{\dagger}{\theta}' = \vartheta_{1(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.23c)$$

O mesmo método, aplicado sobre as definições de curvaturas dadas em (3.7), define as seguintes igualdades:

$$\kappa_{1(1)} \overset{\dagger}{R} = \vartheta'_{1(1)} \overset{\dagger}{R} + \vartheta_{3(1)} \sin^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{\kappa}_2 \overset{\dagger}{R} &= \sin^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1, \\ \overset{\dagger}{\kappa}_2 R_{(1)} + \kappa_{2(1)} \overset{\dagger}{R} &= \left(2 \vartheta_{1(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - \varrho'_{(1)} \overset{\dagger}{R} \right) \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \end{aligned} \quad (3.24b)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{\kappa}_3 \overset{\dagger}{R} &= \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1, \\ \overset{\dagger}{\kappa}_3 R_{(1)} + \kappa_{3(1)} \overset{\dagger}{R} &= \overset{\dagger}{R} \left(\vartheta'_{3(1)} - \varrho'_{(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \right) + \vartheta_{1(1)} \left(2 \cos^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.24c)$$

... e, substituindo as curvaturas nas relações constitutivas (3.14), obtém-se:

$$M_{1(1)} \overset{\dagger}{R} = A_1 \left(\vartheta'_{1(1)} \overset{\dagger}{R} + \vartheta_{3(1)} \sin^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \right) \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{M}_2 \overset{\dagger}{R} &= A_2 \left(\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - \overset{\dagger}{\kappa}_2 \overset{\dagger}{R} \right) \\ \overset{\dagger}{M}_2 R_{(1)} + M_{2(1)} \overset{\dagger}{R} &= A_2 \left[\left(2 \vartheta_{1(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - \varrho'_{(1)} \overset{\dagger}{R} \right) \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - \overset{\dagger}{\kappa}_2 R_{(1)} \right] \end{aligned} \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{M}_3 \overset{\dagger}{R} &= A_3 \left(\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - \overset{\dagger}{\kappa}_3 \overset{\dagger}{R} \right) \\ \overset{\dagger}{M}_3 R_{(1)} + M_{3(1)} \overset{\dagger}{R} &= A_3 \left[\overset{\dagger}{R} \left(\vartheta'_{3(1)} - \varrho'_{(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \vartheta_{1(1)} \left(1 - 2 \sin^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \right) - \overset{\dagger}{\kappa}_3 R_{(1)} \right] \end{aligned} \quad (3.25c)$$

Substituindo as componentes expandidas na equação constitutiva do termo $q_r R$, obtém-

¹²Vide prova na seção A.3.6 a partir da página 147.

se:

$$q_{r(1)} = -\overset{\dagger}{k}_{et} R_{(1)} \quad (3.26)$$

... e a equação constitutiva do termo $m_3 R$ se torna:

$$m_{3(1)} = -k_g \vartheta_{3(1)} \quad (3.27)$$

A partir da disponibilização das componentes de momento $M_{1...3}$ nas direções locais, é possível usar as relações (3.15):

$$M_{r(1)} = \overset{\dagger}{M}_2 \vartheta_{3(1)} + \overset{\dagger}{M}_\theta \varrho_{(1)} - A_1 \kappa_{1(1)} \quad (3.28a)$$

$$\overset{\dagger}{M}_\theta = -\overset{\dagger}{M}_2 \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 + \overset{\dagger}{M}_3 \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.28b)$$

$$M_{\theta(1)} = \overset{\dagger}{M}_z \vartheta_{1(1)} - A_2 \kappa_{2(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 + A_3 \kappa_{3(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1$$

$$\overset{\dagger}{M}_z = \overset{\dagger}{M}_2 \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 + \overset{\dagger}{M}_3 \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.28c)$$

$$M_{z(1)} = -\overset{\dagger}{M}_\theta \vartheta_{1(1)} + A_2 \kappa_{2(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 + A_3 \kappa_{3(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1$$

... e pode-se usar regra semelhante para componentes de momentos distribuídos:

$$m_{r(1)} = 0 \quad (3.29a)$$

$$m_{\theta(1)} = k_g \vartheta_{3(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.29b)$$

$$m_{z(1)} = k_g \vartheta_{3(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \quad (3.29c)$$

Para simplificar tratamentos futuros, escrevam-se as relações constitutivas das componentes $M_{r(1)}$, $M_{\theta(1)} \overset{\dagger}{R}$ e $M_{z(1)} \overset{\dagger}{R}$ na forma:

$$M_{r(1)} = a_{11} \vartheta_{3(1)} + a_{12} \vartheta'_{1(1)} + a_{13} \varrho_{(1)} \quad (3.30a)$$

$$\overset{\dagger}{R} M_{\theta(1)} = a_{21} \vartheta'_{3(1)} + a_{22} \vartheta_{1(1)} + a_{23} \left[\varrho'_{(1)} + \frac{\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1}{\overset{\dagger}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{\dagger}{R}} \right) \right] \quad (3.30b)$$

$$\overset{\dagger}{R} M_{z(1)} = a_{31} \vartheta'_{3(1)} + a_{32} \vartheta_{1(1)} + a_{33} \left[\varrho'_{(1)} + \frac{\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1}{\overset{\dagger}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{\dagger}{R}} \right) \right] \quad (3.30c)$$

... onde:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \dot{M}_2 - A_1 \dot{\kappa}_2 \\
 a_{12} &= -A_1 \\
 a_{13} &= \dot{M}_\theta \\
 a_{21} &= A_3 \dot{R} \sin \vartheta_1 \\
 a_{22} &= \dot{M}_z \dot{R} + \left[2 (A_3 - A_2) \cos^2 \vartheta_1 - A_3 \right] \sin \vartheta_1 \\
 a_{23} &= (A_2 - A_3) \dot{R} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \\
 a_{31} &= A_3 \dot{R} \cos \vartheta_1 \\
 a_{32} &= -\dot{M}_\theta \dot{R} + \left[2 A_2 \dot{\kappa}_2 \dot{R} + A_3 \left(2 \cos^2 \vartheta_1 - 1 \right) \right] \cos \vartheta_1 \\
 a_{33} &= -\dot{R} \left(A_2 \sin^2 \vartheta_1 + A_3 \cos^2 \vartheta_1 \right)
 \end{aligned}$$

3.5.3 Expansão das relações de equilíbrio

Tomando a equação (3.13b), expandindo as componentes de força e isolando os termos em ε^1 , consegue-se:

$$N'_{\theta(1)} \dot{R} + N_{r(1)} \sin \vartheta_1 = 0 \quad \therefore \quad -N'_{\theta(1)} \dot{R} = N_{r(1)} \sin \vartheta_1 \quad (3.31)$$

Em seguida, fazendo o mesmo procedimento com a equação (3.13a), obtém-se:

$$\dot{N}_\theta \sin \vartheta_1 = \dot{q}_r \dot{R} \quad (3.32a)$$

$$(3.32b)$$

Uma forma mais útil dessa última igualdade é obtida derivando-a em ξ , multiplicando por $\dot{R}$ e inserindo a igualdade (3.31):

$$N''_{r(1)} \dot{R}^2 + N_{r(1)} \sin^2 \vartheta_1 = \dot{N}_\theta \dot{R} \cos \vartheta_1 \vartheta'_{1(1)} + k_{et} \dot{R}^2 \sin \vartheta_1 \varrho_{(1)} \quad (3.32c)$$

... e, com a equação (3.13c), chega-se a:

$$N'_{z(1)} = 0 \quad (3.33)$$

Resgatando a equação (3.13d) e expandindo as incógnitas convenientemente:

$$\left(-\dot{M}_\theta + \dot{N}_z \dot{R}\right) \sin \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_\theta \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 = 0 \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} M'_{r(1)} \dot{R} - \left(\dot{M}_\theta \vartheta_{1(1)} + N_{\theta(1)} \dot{R} + \dot{N}_\theta R_{(1)} - \dot{N}_z \dot{R} \vartheta_{1(1)}\right) \cos \dot{\vartheta}_1 + \\ + \left(-M_{\theta(1)} + N_{z(1)} \dot{R} + \dot{N}_z R_{(1)} + \dot{N}_\theta \dot{R} \vartheta_{1(1)}\right) \sin \dot{\vartheta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.34b)$$

Também a equação (3.34b) necessita de um manuseio destro para tornar-se parte de um sistema de equações mais interessante. Para isso, deriva-se todos os seus termos e multiplica-se por $\dot{R}$, produzindo:

$$\begin{aligned} M''_{r(1)} \dot{R}^2 - M'_{\theta(1)} \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 - \left(\dot{M}_\theta \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_z \dot{R}^2 \cos \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_\theta \dot{R}^2 \sin \dot{\vartheta}_1\right) \vartheta'_{1(1)} + \\ + N_{r(1)} \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 + \left(\dot{N}_z \sin^2 \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_\theta \sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1\right) \dot{R} \varrho_{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.34c)$$

É notável que, mediante as igualdades (3.30), as componentes $M_{r(1)}$ e $M_{\theta(1)}$ são funções de $\vartheta_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e $\varrho_{(1)}$. Logo, uma versão melhor da equação acima é:

$$N_{r(1)} \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 + a_{41} \vartheta''_{3(1)} + a_{42} \vartheta'''_{1(1)} + a_{43} \vartheta'_{1(1)} + a_{44} \varrho''_{(1)} + a_{45} \varrho_{(1)} = 0 \quad (3.34d)$$

... onde:

$$\begin{aligned} a_{41} &= a_{11} \dot{R}^2 - a_{21} \sin \dot{\vartheta}_1 \\ a_{42} &= a_{12} \dot{R}^2 \\ a_{43} &= -a_{22} \sin \dot{\vartheta}_1 + \dot{N}_\theta \dot{R}^2 \sin \dot{\vartheta}_1 + \dot{N}_z \dot{R}^2 \cos \dot{\vartheta}_1 - \dot{M}_\theta \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 \\ a_{44} &= a_{13} \dot{R}^2 - a_{23} \sin \dot{\vartheta}_1 \\ a_{45} &= \dot{N}_z \dot{R} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_\theta \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 - a_{23} \sin^3 \dot{\vartheta}_1 / \dot{R}^2 \end{aligned}$$

A equação (3.13e) não produz termos com ordem ε^0 e os termos na ordem imediatamente superior se agrupam na igualdade:

$$M'_{\theta(1)} \dot{R} + \left(M_{r(1)} - \dot{N}_z \dot{R} \varrho_{(1)}\right) \sin \dot{\vartheta}_1 + N_{r(1)} \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 + k_g \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 \vartheta_{3(1)} = 0 \quad (3.35)$$

Finalmente, a equação diferencial de equilíbrio (3.13f) sofre manipulações e tem seus termos expandidos pela técnica de perturbação, obtendo termos de ordem ε^1 que se

agrupam na igualdade:

$$M'_{z(1)} \ddot{R} + \ddot{N}_\theta \ddot{R} \sin \vartheta_1 \varrho_{(1)} - \ddot{N}_{r(1)} \ddot{R} \sin \vartheta_1 + k_g \ddot{R} \cos \vartheta_1 \vartheta_{3(1)} = 0 \quad (3.36)$$

3.6 Consolidação do problema de valor de extremidade para o reforçador

A avaliação das condições de existência de uma configuração secundária $\mathbb{E}^*$ decorre da estruturação formal de **problema de valor de extremidade** (PVE) e sua solução não-trivial. Constituem-no equações diferenciais de equilíbrio e cinemática, condições de extremidade e também as de compatibilidade com outras camadas. O manuseio das equações de equilíbrio torna evidente que as incógnitas $\varrho_{(1)}$, $\vartheta'_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e suas derivadas pares (2^a , 4^a , etc) aparecem em algumas das expressões, mas nunca simultaneamente a $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$ e às derivadas ímpares (1^a , 3^a , etc) daquelas incógnitas. De modo simétrico, as equações onde há $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$ e as derivadas ímpares não possuem aqueles primeiros termos. Notando essa apartação, pode-se agrupar incógnitas em duas *famílias*.

Denomine-se *família* $\mathbb{F}_1$ ao primeiro grupo de incógnitas:

$$\mathbb{F}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \varrho_{(1)}, \vartheta'_{1(1)}, \vartheta_{3(1)}, N_{r(1)}, M_{r(1)}, m_{\theta(1)}, m_{z(1)}, N'_{\theta(1)}, \\ N'_{z(1)}, M'_{\theta(1)}, M'_{z(1)}, R'_{(1)} \text{ e todas as suas derivadas pares} \end{array} \right\}$$

As incógnitas do grupo $\mathbb{F}_1$ aparecem explicitamente nas equações de equilíbrio (3.31), (3.33), (3.35) e (3.36). Desde que esse número de relações é insuficiente, outras igualdades são obtidas derivando-se as equações (3.32b) e (3.34b), gerando (3.32c) e (3.34d), respectivamente, compostas de incógnitas da *família* $\mathbb{F}_1$.

Outro grupo $\mathbb{F}_2$ de incógnitas é formado por:

$$\mathbb{F}_2 = \left\{ \begin{array}{l} R_{(1)}, \vartheta_{1(1)}, \vartheta'_{3(1)}, N_{\theta(1)}, N_{z(1)}, M_{\theta(1)}, M_{z(1)}, \\ m_{r(1)}, N'_{r(1)}, M'_{r(1)} \text{ e todas as suas derivadas pares} \end{array} \right\}$$

É possível estruturar e resolver um primeiro PVE cujas incógnitas e equações são relacionadas apenas ao grupo $\mathbb{F}_1$. Mediante sucessivas substituições de umas equações em outras, obtem-se um sistema de três equações diferenciais homogêneas, com coeficientes constantes na vizinhança de um ponto de equilíbrio, cujas incógnitas são as funções

$\varrho_{(1)}$, $\vartheta'_{1(1)}$ e $\vartheta_{3(1)}$. A partir da solução do primeiro PVE, outros membros de $\mathbb{F}_1$ são calculados. Alguns componentes da família $\mathbb{F}_2$ podem, então, ser deduzidos através da integração. Essa operação exige a providência de constantes de integração, cuja especificação depende da satisfação de condições de compatibilidade com outras camadas.

3.6.1 Condições de extremidade

Trechos de dutos flexíveis em operação possuem conectores em cada extremidade, onde os reforçadores são dobrados e cobertos por uma resina dura. Esse mecanismo permite que a seção do duto nessas locações tenha deslocamentos axiais e rotação em torno do eixo $\mathbb{C}_g$, todavia variações de raio das camadas e de orientação da seção dos reforçadores (dada pelos vetores diretores $\mathbf{d}_{1\dots 3}$) são impedidas. Embora essas restrições se assemelhem mais a engastes, supô-lo criaria um paradoxo com a solução para carregamentos moderados apontada pelo Postulado 1, tornando necessária a lida com termos que desaparecem da solução quando se afasta das extremidades¹³. Assim, condições de extremidade são estabelecidas por intermédio dos compromissos de:

- serem compatíveis com a configuração $\mathbb{E}^+$ para carregamentos moderados, logo respeitando o Postulado 1.
- garantirem a compatibilidade dos deslocamentos longitudinal e circunferencial nos extremos de todas as camadas.
- nos extremos do duto, os vetores diretores $\mathbf{d}_{1\dots 3}$ de cada reforçador podem mudar a orientação da tangente ao cilindro inscrito, dada pelo ângulo ϑ_1 , mas não giram em torno do seu próprio eixo.

A conjugação de tais pequenos postulados estabelece que as condições de extremidades sejam dadas pelas igualdades:

¹³Por analogia à solução de engaste de vigas, aos resultados de MEF de dutos em CRUZ[23] e RAMOS Jr[6] e ao próprio princípio de Saint-Venant, sabe-se que a resposta de uma estrutura longa não é afetada pelas condições de extremos senão em uma vizinhança. A perturbação nessa locação está associada a termos evanescentes na solução exata.

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_r = -1, \quad \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_\theta = \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_z = 0 \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{i}_r = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_r = 0 \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.37b)$$

$$\mathbf{d}_3|_{-\ell_s/2} = \mathbf{d}_3|_{\ell_s/2} \quad (3.37c)$$

$$\epsilon_{(1)}^{(i,j)} = \epsilon_{(1)}^{(\forall i)} \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.37d)$$

$$\check{\gamma}_{(1)}^{(i,j)} \check{R}^{(i,j)} = \check{\gamma}_{(1)}^{(\forall i)} \check{R}^{(\forall i)} \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.37e)$$

3.7 Formulação do PVE sobre $\vartheta'_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e $\varrho_{(1)}$

O primeiro PVE é constituído por três equações de equilíbrio em termos das incógnitas $\varrho_{(1)}$, $\vartheta'_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e suas derivadas pares. Enquanto é possível a manutenção do reforçador helicoidal na sua configuração primária de equilíbrio $\mathbb{E}$, as equações diferenciais (que constituem o núcleo do PVE) e as condições de extremidade são ambos satisfeitos pela solução trivial:

$$\varrho_{(1)} = 0, \quad \vartheta'_{1(1)} = 0, \quad \vartheta_{3(1)} = 0$$

A existência de uma solução não-trivial para o problema de valor de extremidade é a primeira condição para um ponto de bifurcação relacionado à perda de estabilidade do reforçador helicoidal.

3.7.1 Formulação diferencial do equilíbrio para o primeiro PVE

Depois de isolar o termo $N_{r(1)}$ na equação (3.34d) como uma função dos parâmetros cinemáticos $\vartheta'_{1(1)}$, $\vartheta_{3(1)}$ e ϱ e suas derivadas, enxerta-se essa expressão na equação diferencial (3.32c) e consegue-se:

$$\begin{aligned} a_{51} \vartheta_{3(1)}'''' + a_{52} \vartheta_{3(1)}'' + a_{53} \vartheta_{1(1)}'''' + a_{54} \vartheta_{1(1)}''' + a_{55} \vartheta_{1(1)}' + \\ + a_{56} \varrho_{(1)}'''' + a_{57} \varrho_{(1)}'' + a_{58} \varrho_{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

... onde:

$$\begin{aligned}
a_{51} &= a_{41} \dot{R}^2 \\
a_{52} &= a_{41} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \\
a_{53} &= a_{42} \dot{R}^2 \\
a_{54} &= a_{42} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 + a_{43} \dot{R}^2 \\
a_{55} &= a_{43} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 + \dot{N}_\theta \dot{R}^2 \sin \dot{\vartheta}_1 \cos^2 \dot{\vartheta}_1 \\
a_{56} &= a_{44} \dot{R}^2 \\
a_{57} &= a_{44} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 + a_{45} \dot{R}^2 \\
a_{58} &= a_{45} \sin^2 \dot{\vartheta}_1 + \dot{R}^2 \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 \left(k_{et} \dot{R} - \dot{q}_r \right)
\end{aligned}$$

Mediante um número grande de substituições e manipulações, a equação (3.35) é escrita como:

$$a_{61} \vartheta_{3(1)}'' + a_{62} \vartheta_{3(1)} + a_{63} \vartheta_{1(1)}''' + a_{64} \vartheta_{1(1)}' + a_{65} \varrho_{(1)}'' + a_{66} \varrho_{(1)} = 0 \quad (3.39)$$

... onde:

$$\begin{aligned}
a_{61} &= 2 a_{21} \dot{R}^2 \sin^2 \dot{\vartheta}_1 - a_{11} \dot{R}^4 \\
a_{62} &= \dot{R}^2 \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \left(a_{11} + k_g \dot{R} \right) \\
a_{63} &= -a_{12} \dot{R}^4 \\
a_{64} &= \dot{R}^2 \sin \dot{\vartheta}_1 \left(a_{12} \sin \dot{\vartheta}_1 + 2 a_{22} \right) + \\
&\quad + \dot{R}^3 \left(\dot{M}_\theta \cos \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_z \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 - \dot{N}_\theta \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 \right) \\
a_{65} &= -a_{13} \dot{R}^4 + 2 a_{23} \dot{R}^2 \sin \dot{\vartheta}_1 \\
a_{66} &= a_{13} \dot{R}^2 \sin^2 \dot{\vartheta}_1 + 2 a_{23} \sin^3 \dot{\vartheta}_1 + \dot{R}^3 \sin \dot{\vartheta}_1 \left(\dot{N}_\theta \cos \dot{\vartheta}_1 - 2 \dot{N}_z \sin \dot{\vartheta}_1 \right)
\end{aligned}$$

No lugar dos termos $M_{z(1)}$ e $N_{r(1)}$ da expressão (3.36), as formulações obtidas mediante as equações (3.30) e (3.34d) são utilizadas. Então:

$$a_{71} \vartheta_{3(1)}'' + a_{72} \vartheta_{3(1)} + a_{73} \vartheta_{1(1)}''' + a_{74} \vartheta_{1(1)}' + a_{75} \varrho_{(1)}'' + a_{76} \varrho_{(1)} = 0 \quad (3.40)$$

... onde:

$$\begin{aligned}
a_{71} &= a_{31} - a_{21} \tan \vartheta_1 + a_{11} \dot{R}^2 / \cos \vartheta_1 \\
a_{72} &= -k_g \dot{R} \cos \vartheta_1 \\
a_{73} &= a_{12} \dot{R}^2 / \cos \vartheta_1 \\
a_{74} &= -a_{22} \tan \vartheta_1 + \dot{N}_\theta \dot{R}^2 \tan \vartheta_1 - \dot{M}_\theta \dot{R} + \dot{N}_z \dot{R}^2 + a_{32} \\
a_{75} &= a_{33} - a_{23} \tan \vartheta_1 + a_{13} \dot{R}^2 / \cos \vartheta_1 \\
a_{76} &= \left(a_{33} - a_{23} \tan \vartheta_1 \right) \sin^2 \vartheta_1 / \dot{R}^2 + \dot{N}_z \dot{R} \sin \vartheta_1 \tan \vartheta_1
\end{aligned}$$

3.7.2 Condições de extremidade para o primeiro PVE

As condições de extremidade (3.37) implicam em:

$$\varrho_{(1)} = 0 \quad \text{em} \quad \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (3.41a)$$

$$\vartheta_{3(1)} = 0 \quad \text{em} \quad \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (3.41b)$$

$$\vartheta'_{1(1)} = 0 \quad \text{em} \quad \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (3.41c)$$

$$\vartheta_{1(1)}|_{-\ell_s/2} = \vartheta_{1(1)}|_{\ell_s/2} \quad (3.41d)$$

3.7.3 À procura de solução não-trivial para o PVE

As equações (3.38), (3.39) e (3.40) formam um **sistema de equações diferenciais homogêneas e com coeficientes constantes em cada ponto de equilíbrio**. A forma geral de solução de tal tipo de sistema é:

$$\varrho_{(1)} = \beta_1 e^{\omega \xi}, \quad \vartheta'_{1(1)} = \beta_2 e^{\omega \xi}, \quad \vartheta_{3(1)} = \beta_3 e^{\omega \xi} \quad (3.42)$$

... onde: $\beta_{1...3}$ = coeficientes¹⁴ que controlam a cinemática no início do caminho secundário; ω = expoente complexo, onde vale:

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$

Quando as formas gerais dadas em (3.42) são substituídas nas equações (3.38), (3.39) e

¹⁴Na forma geral, os coeficientes $\beta_{1...3}$ são complexos, ou seja: $\beta_1 \equiv \beta_{1r} + i \beta_{1i}$ et cætera.

(3.40), monta-se um sistema de equações algébricas:

$$(a_{56} \omega^4 + a_{57} \omega^2 + a_{58}) \beta_1 + (a_{53} \omega^4 + a_{54} \omega^2 + a_{55}) \beta_2 + (a_{51} \omega^4 + a_{52} \omega^2) \beta_3 = 0 \quad (3.43a)$$

$$(a_{65} \omega^2 + a_{66}) \beta_1 + (a_{63} \omega^2 + a_{64}) \beta_2 + (a_{61} \omega^2 + a_{62}) \beta_3 = 0 \quad (3.43b)$$

$$(a_{75} \omega^2 + a_{76}) \beta_1 + (a_{73} \omega^2 + a_{74}) \beta_2 + (a_{71} \omega^2 + a_{72}) \beta_3 = 0 \quad (3.43c)$$

O sistema de equações (3.43) é equivalente a forma matricial:

$$[\mathbf{A}] \cdot [\beta] = [0] \quad (3.44)$$

... onde: $[\mathbf{A}]$ = matriz de coeficientes das igualdades (3.43); $[\beta]$ = vetor $\beta_{1...3}$.

A igualdade (3.44), por sua vez, tem solução não-trivial somente quando o determinante de $\mathbf{A}$ é nulo. Usando $\tilde{\omega} \equiv \omega^2$, a expressão do determinante é:

$$\det \mathbf{A} = a_{80} + a_{81} \tilde{\omega} + a_{82} \tilde{\omega}^2 + a_{83} \tilde{\omega}^3 + a_{84} \tilde{\omega}^4 = 0 \quad (3.45)$$

... onde:

$$a_{80} = -a_{66} a_{55} a_{72} + a_{58} a_{64} a_{72} + a_{76} a_{55} a_{62} - a_{58} a_{62} a_{74}$$

$$a_{81} = -a_{66} a_{54} a_{72} + a_{57} a_{64} a_{72} - a_{58} a_{62} a_{73} + a_{66} a_{52} a_{74} - a_{57} a_{62} a_{74} \\ + a_{75} a_{55} a_{62} - a_{65} a_{55} a_{72} + a_{58} a_{64} a_{71} - a_{58} a_{61} a_{74} + a_{76} a_{54} a_{62} \\ + a_{76} a_{55} a_{61} + a_{58} a_{63} a_{72} - a_{66} a_{55} a_{71} - a_{76} a_{52} a_{64}$$

$$a_{82} = -a_{54} a_{65} a_{72} + a_{66} a_{52} a_{73} - a_{54} a_{66} a_{71} + a_{57} a_{63} a_{72} + a_{66} a_{51} a_{74} \\ - a_{53} a_{66} a_{72} + a_{56} a_{64} a_{72} - a_{58} a_{61} a_{73} - a_{55} a_{65} a_{71} - a_{75} a_{52} a_{64} \\ - a_{56} a_{62} a_{74} + a_{76} a_{53} a_{62} + a_{76} a_{54} a_{61} + a_{57} a_{64} a_{71} + a_{75} a_{55} a_{61} \\ + a_{58} a_{63} a_{71} + a_{65} a_{52} a_{74} - a_{57} a_{62} a_{73} - a_{76} a_{52} a_{63} - a_{57} a_{61} a_{74} \\ + a_{75} a_{54} a_{62} - a_{76} a_{51} a_{64}$$

$$a_{83} = a_{65} a_{51} a_{74} + a_{66} a_{51} a_{73} + a_{56} a_{64} a_{71} - a_{54} a_{65} a_{71} - a_{75} a_{51} a_{64} \\ - a_{53} a_{66} a_{71} - a_{53} a_{65} a_{72} - a_{57} a_{61} a_{73} + a_{57} a_{63} a_{71} + a_{56} a_{63} a_{72} \\ - a_{56} a_{62} a_{73} + a_{76} a_{53} a_{61} - a_{56} a_{61} a_{74} - a_{75} a_{52} a_{63} + a_{75} a_{53} a_{62} \\ + a_{65} a_{52} a_{73} + a_{75} a_{54} a_{61} - a_{76} a_{51} a_{63}$$

$$a_{84} = a_{65} a_{51} a_{73} - a_{56} a_{61} a_{73} + a_{75} a_{53} a_{61} - a_{53} a_{65} a_{71} + a_{56} a_{63} a_{71} \\ - a_{75} a_{51} a_{63}$$

O polinômio (3.45) pode ter até quatro raízes reais ou complexas. Desde que esse polinômio é construído pelo produto de polinômios diferentes entre si, a possibilidade de duas raízes iguais é remota, o que se confirma após o exercício numérico com vários dutos diferentes.

Para o caso de raízes diferentes, a forma geral de solução (3.42) é particularizada¹⁵ pelas condições de extremidade (3.41), produzindo:

$$\varrho_{(1)} = \beta_1 \sin \omega \xi, \quad \vartheta'_{1(1)} = \beta_2 \sin \omega \xi, \quad \vartheta_{3(1)} = \beta_3 \sin \omega \xi \quad (3.46a)$$

... onde a frequência ω , que é uma raiz quadrada da raiz $\tilde{\omega}$ do polinômio característico (3.45), é restrita a valores que satisfaçam:

$$\omega = \frac{2 \pi n}{\ell_s} i = \left(\frac{n}{n_\ell} \right) \frac{\sin^\dagger \vartheta_1}{\tilde{R}} i \quad (3.46b)$$

... onde: n = número inteiro que dá o “modo” da solução; n_ℓ = número de passos de armadura que corresponde a ℓ_s , como definido em (2.6).

Para cada valor de ω ou n há um vetor $\beta_{1...3}$ associado. É importante lembrar a possibilidade de mais de uma raiz do polinômio (3.45) satisfazendo a condição (3.46b). Nesse caso, tem-se que a combinação linear das soluções para cada valor de ω também é uma solução.

3.8 Determinação de $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$, $\check{\epsilon}_{(1)}$ e $\check{\gamma}_{(1)}$

A partir de $\varrho_{(1)}$, $\vartheta'_{1(1)}$ e $\vartheta_{3(1)}$ pode-se obter $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$, $\check{\epsilon}_{(1)}$ e $\check{\gamma}_{(1)}$ mediante integração. Tomando, de início, a expressão (3.23a) e integrando-a:

$$R_{(1)} = \left[\int \varrho_{(1)} d\xi \right] \sin^\dagger \vartheta_1 = \left(-\frac{\beta_1}{\omega} \cos \omega \xi + c_r \right) \sin^\dagger \vartheta_1 \quad (3.47)$$

... onde: c_r = constante de integração associada a $R_{(1)}$.

¹⁵Vide prova A.3.7 na página 150.

A partir da derivada $\vartheta'_{1(1)}$ obtem-se:

$$\vartheta_{1(1)} = \int \vartheta'_{1(1)} d\xi = -\frac{\beta_2}{\omega} \cos \omega \xi + c_{\vartheta 1} \quad (3.48)$$

... onde: $c_{\vartheta 1}$ = constante de integração associada a $\vartheta_{1(1)}$.

A primeira perturbação da distensão longitudinal $\check{\epsilon}_{(1)}$ é determinada a partir da igualdade (3.23b):

$$\check{\epsilon}_{(1)} = -\frac{\sin \overset{+}{\vartheta}_1}{\ell_s \cos \overset{+}{\vartheta}_1} \int_{-\ell_s/2}^{\ell_s/2} \vartheta_{1(1)} d\xi = -c_{\vartheta 1} \tan \overset{+}{\vartheta}_1 \quad (3.49)$$

A primeira perturbação do giro por unidade de comprimento $\check{\gamma}_{(1)}$ provém da relação cinemática (3.23c):

$$\begin{aligned} \check{\gamma}_{(1)} \overset{+}{R} &= \frac{1}{\ell_s \cos \overset{+}{\vartheta}_1} \int_{-\ell_s/2}^{\ell_s/2} \left(\vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 - \frac{R_{(1)}}{\overset{+}{R}} \sin \overset{+}{\vartheta}_1 \right) d\xi = \\ &= c_{\vartheta 1} - c_r \frac{\sin \overset{+}{\vartheta}_1 \tan \overset{+}{\vartheta}_1}{\overset{+}{R}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

As duas constantes de integração $c_{\vartheta 1}$ e c_r são determinadas a partir da condição de compatibilidade de deslocamentos nas extremidades.

3.8.1 Considerações sobre o equilíbrio e compatibilidade com outras camadas

Supondo que a rigidez de outras camadas não seja muito alterada na vizinhança do ponto de bifurcação, é possível estudar a redistribuição de forças que acontece na estrutura compósita do duto por força da tomada de um caminho de equilíbrio secundário pelos reforçadores de uma armadura.

Se a carga é controlada e os deslocamentos são meramente sua consequência, então as variações de forças e torque nas extremidades, em torno do ponto de equilíbrio, são fundamentadas por:

$$\delta \check{T} = K_{11} \delta \check{\epsilon} + K_{12} \delta \check{\gamma} = k_{11}^{(i)} \delta \check{\epsilon} + k_{12}^{(i)} \delta \check{\gamma} + n_w^{(i)} \delta N_z^{(i,j)}, \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.51a)$$

$$\delta \check{Q} = K_{21} \delta \check{\epsilon} + K_{22} \delta \check{\gamma} = k_{21}^{(i)} \delta \check{\epsilon} + k_{22}^{(i)} \delta \check{\gamma} + n_w^{(i)} \delta M_z^{(i,j)} + n_w^{(i)} \overset{+}{R}^{(i,j)} \delta N_\theta^{(i,j)}, \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.51b)$$

... onde K_{11} = rigidez (tangente) à tração do duto completo; $k_{11}^{(i)}$ = rigidez à tração equivalente de todas as outras camadas exceto a camada i ; K_{22} = rigidez (tangente) à torção do duto completo; $k_{22}^{(i)}$ = rigidez à torção equivalente de todas as outras camadas exceto a camada i ; K_{12} , K_{21} = termos de acoplamento de tração e giro e de torque e distensão para o duto completo; $k_{12}^{(i)}$, $k_{21}^{(i)}$ = termos de acoplamento de tração e giro e de torque e distensão para todas as outras camadas, respectivamente.

Se na passagem de $\mathbb{E}^{\dagger}$ para $\mathbb{E}^*$ não há redução imediata da força externa total, atuante sobre todo o duto, então:

$$N_{z(1)} = \frac{\left(k_{11}^{(i)} - K_{11}\right)}{n_w^{(i)}} c_{\vartheta 1} \tan \vartheta_1^{\dagger} - \frac{\left(k_{12}^{(i)} - K_{12}\right)}{n_w^{(i)}} \left(c_{\vartheta 1} - c_r \frac{\sin \vartheta_1^{\dagger} \tan \vartheta_1^{\dagger}}{\bar{R}} \right), \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.52)$$

$$M_{z(1)} + \bar{R} N_{\theta(1)} = \frac{\left(k_{21}^{(i)} - K_{21}\right)}{n_w^{(i)}} c_{\vartheta 1} \tan \vartheta_1^{\dagger} - \frac{\left(k_{22}^{(i)} - K_{22}\right)}{n_w^{(i)}} \left(c_{\vartheta 1} - c_r \frac{\sin \vartheta_1^{\dagger} \tan \vartheta_1^{\dagger}}{\bar{R}} \right), \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s/2 \quad (3.53)$$

Utilizando as equações de equilíbrio (3.32b) e (3.34b) que fazem referência a incógnitas do grupo $\mathbb{F}_2$ para redigir $N_{\theta(1)}$ e $N_{z(1)}$ como funções de $R_{(1)}$, $\vartheta_{1(1)}$ e suas derivadas e depois as relações constitutivas (3.28), determina-se o valor das constantes de integração c_r e $c_{\vartheta 1}$:

$$c_r = \frac{(-1)^n}{(a_{1r} a_{2a} - a_{2r} a_{1a})} \left[(a_{1\beta_1} \beta_1 + a_{1\beta_2} \beta_2 + a_{1\beta_3} \beta_3) a_{2a} - (a_{2\beta_1} \beta_1 + a_{2\beta_2} \beta_2 + a_{2\beta_3} \beta_3) a_{1a} \right] \quad (3.54a)$$

$$c_{\vartheta 1} = \frac{(-1)^n}{(a_{1a} a_{2r} - a_{2a} a_{1r})} \left[(a_{1\beta_1} \beta_1 + a_{1\beta_2} \beta_2 + a_{1\beta_3} \beta_3) a_{2r} - (a_{2\beta_1} \beta_1 + a_{2\beta_2} \beta_2 + a_{2\beta_3} \beta_3) a_{1r} \right] \quad (3.54b)$$

... onde os coeficientes a_{1r} , a_{1a} , a_{2r} , a_{2a} , $a_{1\beta_1}$, $a_{1\beta_2}$, $a_{1\beta_3}$, $a_{2\beta_1}$, $a_{2\beta_2}$ e $a_{2\beta_3}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
a_{1r} &= \frac{(k_{12} - K_{12})}{n_w} \sin^3 \vartheta_1^\dagger \tan \vartheta_1^\dagger + \left(\dot{M}_\theta - \frac{(k_{22} - K_{22})}{n_w} \right) \sin^3 \vartheta_1^\dagger + \\
&\quad + \frac{\sin \vartheta_1^\dagger \cos \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} \left[2 (A_3 - A_2) \sin^4 \vartheta_1^\dagger - A_3 \sin^2 \vartheta_1^\dagger \right] \\
a_{2r} &= \frac{(A_2 - A_3)}{(\dot{R})^2} \sin^6 \vartheta_1^\dagger - \left[\dot{N}_z \sin^2 \vartheta_1^\dagger + k_{et} (\dot{R})^2 \cos \vartheta_1^\dagger \right] \sin \vartheta_1^\dagger \tan \vartheta_1^\dagger + \\
&\quad + \frac{\sin \vartheta_1^\dagger \tan^2 \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} \left[2 \dot{N}_\theta \dot{R} \cos^2 \vartheta_1^\dagger - \frac{(k_{12} - K_{12})}{n_w} \sin^2 \vartheta_1^\dagger \right] \\
a_{1a} &= \frac{(k_{11} - K_{11})}{n_w} (\dot{R})^2 \sin^2 \vartheta_1^\dagger \tan \vartheta_1^\dagger + \sin \vartheta_1^\dagger \left[A_3 + 4 (A_2 - A_3) \sin^2 \vartheta_1^\dagger \cos^2 \vartheta_1^\dagger \right] + \\
&\quad + \dot{N}_\theta (\dot{R})^2 (1 + \cos^2 \vartheta_1^\dagger) + \left(\frac{(k_{22} - K_{22})}{n_w} - \dot{N}_z \dot{R} \right) \dot{R} \sin \vartheta_1^\dagger \cos \vartheta_1^\dagger - \\
&\quad - \left[\dot{M}_z + \frac{(k_{21} - K_{21} + k_{12} - K_{12})}{n_w} \right] \dot{R} \sin^2 \vartheta_1^\dagger \\
a_{2a} &= \left(\frac{(k_{12} - K_{12})}{n_w} + \dot{M}_z \right) \sin^2 \vartheta_1^\dagger \tan \vartheta_1^\dagger - \dot{N}_\theta \dot{R} \tan \vartheta_1^\dagger (1 + \cos^2 \vartheta_1^\dagger) + \\
&\quad + \frac{\sin^3 \vartheta_1^\dagger \tan \vartheta_1^\dagger}{\dot{R}} \left[(A_3 - 2 A_2) + 2 (A_2 - A_3) \sin^2 \vartheta_1^\dagger \right] \\
a_{1\beta_1} &= \left[\left(\frac{n}{n_\ell} \right) - \left(\frac{n_\ell}{n} \right) \right] \left\{ \dot{M}_\theta \dot{R} \sin^2 \vartheta_1^\dagger + \right. \\
&\quad \left. + \left[2 (A_3 - A_2) \sin^2 \vartheta_1^\dagger - A_3 \right] \sin^2 \vartheta_1^\dagger \cos \vartheta_1^\dagger \right\} \\
a_{1\beta_2} &= - \left(\frac{n}{n_\ell} \right) A_1 \dot{R} \sin^2 \vartheta_1^\dagger + \left(\frac{n_\ell}{n} \right) \dot{R} \left\{ \left[4 (A_3 - A_2) \sin^2 \vartheta_1^\dagger \cos^2 \vartheta_1^\dagger - A_3 \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1 + \cos^2 \vartheta_1^\dagger)}{\sin \vartheta_1^\dagger} \dot{N}_\theta (\dot{R})^2 + \dot{M}_z \dot{R} \sin \vartheta_1^\dagger + \dot{N}_z (\dot{R})^2 \cos \vartheta_1^\dagger \right\} \\
a_{1\beta_3} &= \left(\frac{n}{n_\ell} \right) \left[\dot{M}_2 \dot{R} \sin^2 \vartheta_1^\dagger + A_3 \sin^2 \vartheta_1^\dagger - (A_1 + 2 A_3) \sin^4 \vartheta_1^\dagger \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2\beta_1} &= \frac{2}{\cos \vartheta_1} \left(\frac{n}{n_\ell} \right) \left[\dot{N}_\theta \dot{R} \sin^2 \vartheta_1 - \dot{N}_z \dot{R} \sin^3 \vartheta_1 + (A_2 - A_3) \frac{\sin^5 \vartheta_1}{\dot{R}} \right] + \\
&\quad + \left(\frac{n}{n_\ell} \right)^3 \sin^2 \vartheta_1 \left[\dot{N}_z \dot{R} \tan \vartheta_1 - \dot{N}_\theta \dot{R} + \frac{(A_3 - A_2)}{\dot{R}} \sin^3 \vartheta_1 \right] + \\
&\quad + \left(\frac{n_\ell}{n} \right) \sin \vartheta_1 \left[k_{et} \left(\dot{R} \right)^3 + (A_3 - A_2) \frac{\sin^4 \vartheta_1}{\dot{R}} + \right. \\
&\quad \left. + \dot{N}_z \dot{R} \sin \vartheta_1 \tan \vartheta_1 - 2 \dot{N}_\theta \dot{R} \sin \vartheta_1 \right] \\
a_{2\beta_2} &= \frac{1}{\cos \vartheta_1} \left(\frac{n}{n_\ell} \right) \left[\dot{M}_z \dot{R} \sin^2 \vartheta_1 + 2 (A_2 - A_3) \sin^5 \vartheta_1 + \right. \\
&\quad \left. + (A_1 + A_3 - 2 A_2) \sin^3 \vartheta_1 - \dot{N}_\theta \left(\dot{R} \right)^2 \right] - \\
&\quad - \left(\frac{n}{n_\ell} \right)^3 A_1 \sin^2 \vartheta_1 \tan \vartheta_1 + \\
&\quad + \left(\frac{n_\ell}{n} \right) \left[-\dot{M}_z \dot{R} \sin^2 \vartheta_1 + \dot{N}_\theta \left(\dot{R} \right)^2 \left(1 + \cos^2 \vartheta_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 (A_3 - A_2) \sin^5 \vartheta_1 + (2 A_2 - A_3) \sin^3 \vartheta_1 \right] \\
a_{2\beta_3} &= \left[\left(\frac{n}{n_\ell} \right) - \left(\frac{n}{n_\ell} \right)^3 \right] \sin^2 \vartheta_1 \tan \vartheta_1 \left[(A_1 + A_3) \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\dot{R}} - \dot{M}_2 \right]
\end{aligned}$$

A formulação de cálculo dos parâmetros c_r e c_{ϑ_1} possui um problema com maior relevância. Desde que o cálculo do ponto de bifurcação considera apenas uma rigidez equivalente k_{et} no lugar da bilinearidade ditada por k_i e k_s , não é introduzida na formulação uma oposição muito maior aos deslocamentos em um dos sentidos da direção radial. Como a equivalência opera em igualdade de energia – respeitando uma função de forma compatível com a solução – e que k_{et} tende para o menor valor entre k_i e k_s (vide gráfico da figura A.2, na página 145), isso não implica em maior erro quando c_r causa deslocamento no sentido de menor rigidez radial. Todavia, quando o contrário acontece, o modelo não determinará um valor de c_r e c_{ϑ_1} bem representativo dos fenômenos envolvidos.

EQUILÍBRIO INSTÁVEL EQUILÍBRIO ESTÁVEL EQUILÍBRIO INDIFERENTE

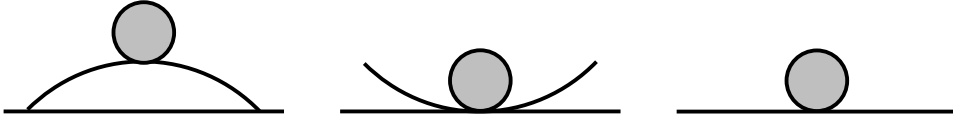


Figura 3.3: Ilustração clássica de equilíbrio instável, estável e indiferente.

3.9 Energia, suas variações e instabilidade

Um ponto de bifurcação do caminho de equilíbrio não é um ponto de instabilidade se o sistema reage a uma perturbação do equilíbrio retornando ao caminho primário. Assim, para estudar a instabilidade de uma armadura, não basta determinar os pontos de bifurcação, outras considerações são necessárias. A forma clássica de exemplificar as situações de estabilidade e instabilidade de um sistema é a figura 3.3: pequenas perturbações deslocam o equilíbrio para uma configuração totalmente diferente no caso (a), são restauradas completamente no caso (b) e causam pequenas mudanças na configuração sem restauração ou grandes deslocamentos no caso (c).

A avaliação da estabilidade de um sistema é feita pelo estudo da variação da energia potencial total Π , dada pela soma da energia potencial de forças externas Ω e pela energia de deformação U :

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.55)$$

A variação da energia potencial $\Delta\Pi$ em torno de um ponto é aproximada por:

$$\Pi = \overset{+}{\Pi} + \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi \quad \therefore \quad \Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi \quad (3.56a)$$

Sendo os pontos de bifurcação também de equilíbrio, de acordo com o princípio da mínima energia, a primeira variação $\delta\Pi$ é nula na passagem de uma configuração para outra. O encargo de avaliar a estabilidade recai, então, sobre a segunda variação $\delta^2\Pi$: se a troca de configuração está associada a uma tendência de acréscimo da energia potencial, o sistema reage retornando ao estado de menor energia e ele é estável; simetricamente, se a energia potencial total tende a diminuir, há instabilidade.

Então, o critério para avaliar se um ponto de bifurcação encaminha a solução para a configuração secundária é:

$$\delta^2 \Pi < 0 \quad (3.56b)$$

As expressões da energia de deformação U e da energia potencial de forças externas Ω de um reforçador podem ser formuladas de maneira aproximada, ignorando o trabalho de deformação da distensão da linha central, a variação da rigidez radial das outras camadas ao longo da história de carregamento e, especialmente, a bilinearidade¹⁶.

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{\mathbb{C}} & \left[A_2 \kappa_{2(1)} (\overset{+}{\kappa}_2 - \overset{\times}{\kappa}_2) + A_3 \kappa_{3(1)} (\overset{+}{\kappa}_3 - \overset{\times}{\kappa}_3) + \right. \\ & + N_{z(1)}|_{\ell_{s/2}} (\overset{+}{z}' - \overset{\times}{z}') + \overset{+}{N}_z|_{\ell_{s/2}} z'_{(1)} - \frac{1}{2} q_{r(1)} (\overset{+}{R} - \overset{\times}{R}) - \frac{1}{2} \overset{+}{q}_r R_{(1)} + \\ & \left. + (M_{z(1)} + \overset{+}{R} N_{\theta(1)})|_{\ell_{s/2}} (\overset{+}{\theta}' - \overset{\times}{\theta}') + (\overset{+}{M}_z + \overset{+}{R} \overset{+}{N}_\theta)|_{\ell_{s/2}} \theta'_{(1)} \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.56c)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = \int_{\mathbb{C}} & \left[\frac{A_1}{2} (\kappa_{1(1)})^2 + \frac{A_2}{2} (\kappa_{2(1)})^2 + \frac{A_3}{2} (\kappa_{3(1)})^2 - \frac{1}{2} q_{r(1)} R_{(1)} + \right. \\ & + N_{z(1)}|_{\ell_{s/2}} z'_{(1)} + (M_{z(1)} + \overset{+}{R} N_{\theta(1)})|_{\ell_{s/2}} \theta'_{(1)} + \\ & \left. - \frac{1}{2} m_{3(1)} \vartheta_{3(1)} \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.56d)$$

3.10 Pós-instabilidade inicial

Quando os reforçadores de uma armadura se deformam, o restante da estrutura do duto flexível interage¹⁷ e não é diferente quando eles passam de uma configuração primária $\overset{+}{\mathbb{E}}$ para uma secundária $\overset{\times}{\mathbb{E}}$. Além disso, boa parte da rigidez de uma armadura é dada pela oposição que outras camadas lhe oferecem aos deslocamentos radiais, que não se altera rapidamente após a perda de estabilidade. Esses dois fatores, conjugados, determinam que as armaduras raramente experimentem deslocamentos grandes, causados pela instabilidade, na vizinhança de um ponto de bifurcação.

¹⁶Apesar de não empregado aqui, é possível discutir se pode-se corrigir a energia potencial de forças externas Ω para penalizar a situação em que c_r implica em deslocamento radial da armadura na direção de maior rigidez, tentando tratar a bilinearidade. É provável que muitos dos casos classificados como instáveis pela formulação usando a rigidez equivalente k_{et} sejam, na verdade, estáveis, porque a rigidez efetiva é muito maior que a equivalente.

¹⁷Na seção 3.8.1 supôs-se mesmo que a rigidez e outros termos de acoplamento das outras camadas não seriam, ao menos na proximidade do ponto de bifurcação, alteradas.

De fato, uma perturbação moderada do carregamento no início do caminho de equilíbrio secundário, em geral, causa uma perturbação muito menor dos deslocamentos, logo a instabilidade das armaduras não se manifesta bruscamente como a flambagem de uma coluna, nem o caminho secundário de equilíbrio diverge rapidamente do caminho primário. Na estrutura real, a iniciação da instabilidade pode mesmo passar despercebida e seus efeitos somente se tornarão notáveis quando grandes deslocamentos forem obtidos ou um outro mecanismo de instabilidade da nova configuração - por exemplo, por ultrapassagem de carga limite - se fizer presente.

De acordo com o técnica de perturbação de Poincaré, a solução do caminho secundário no entorno do ponto de bifurcação é previsível pela linearização das incógnitas que a caracterizam na forma:

$$\mathring{x} = \bar{x} + \varepsilon x_{(1)} \quad (3.57)$$

O equacionamento conveniente, como foi apresentado, permite determinar o perfil teórico das incógnitas no início do caminho secundário, dado por $x_{(1)}$.

Se $\delta\mathbb{T} \equiv \{\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{m} \text{ e } \delta\mathbf{N}, \delta\mathbf{M} \text{ nos extremos}\}$ é uma pequena variação do carregamento além do ponto de bifurcação, para ele corresponderá um valor de parâmetro de perturbação ε :

$$\varepsilon = \frac{\delta\mathbb{T}}{\mathbb{T}_{(1)}} \quad (3.58a)$$

Para esse mesmo valor do parâmetro ε , pode-se associar um conjunto de deformações e deslocamentos $\delta\mathbb{D} \equiv \{\delta\check{\epsilon}, \delta\check{\gamma}, \delta\kappa_1, \delta\kappa_{1\dots 3}, \delta R, \text{ etc}\}$:

$$\delta\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{D}_{(1)} \quad (3.58b)$$

As várias formas de razão entre as componentes de $\delta\mathbb{T}$ e de $\delta\mathbb{D}$ são medidas da rigidez remanescente do sistema no regime de pós-instabilidade inicial. As razões inversas - entre componentes de $\delta\mathbb{D}$ sobre $\delta\mathbb{T}$ - são medidas da complacência do sistema que, quando é grande, indica a perda da capacidade de operar depois de ele se tornar instável.

Pode-se empregar a razão entre a norma do vetor $\{\delta\rho, \delta\vartheta'_1, \delta\vartheta_3\}$ e a variação da força compressiva δN_z como uma das medidas da criticalidade da instabilidade no reforçador. Como normalmente os métodos numéricos de extração de auto-vetor fornecem resultado normalizado, a norma do vetor cujas componentes é β_1 , β_2 e β_3 é unitária, logo vale a relação:

$$\frac{|\{\delta\rho, \delta\vartheta'_1, \delta\vartheta_3\}|}{\delta N_z} = \frac{\varepsilon |\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}|}{\varepsilon N_{z(1)}} = \frac{1}{N_{z(1)}}$$

Então o inverso da forma de primeira variação $N_{z(1)}$ da força longitudinal é uma medida possível de complacência e criticalidade da instabilidade. Essa medida é melhor colocada em termos relativos, pela razão entre a carga crítica $\dot{N}_z$ e $N_{z(1)}$. Dividindo-a por 100, obtém-se um indicador que se denomina **fator de comprometimento** f_d de um modo de instabilidade:

$$f_d = \left| \frac{\dot{N}_z}{100 N_{z(1)}} \right| \quad (3.59)$$

Além da definição formulada, o fator de comprometimento também é o próprio parâmetro de perturbação ε associado a uma perturbação de 1% na carga de compressão.

Embora o restante da pesquisa utilize o fator de comprometimento como uma medida de criticalidade de um modo de instabilidade, não é o melhor, pois ele nada infere a respeito dos deslocamentos radial, de distensão e giro da amostra. Uma medida muito melhor da criticalidade é a complacência para tais deslocamentos, que estão fortemente relacionados às constantes de integração c_r e c_{ϑ_1} , e que são dadas pelas equações (3.47), (3.49) e (3.50).

Finalmente, um resumo das expressões que permitem calcular as incógnitas no início do caminho secundário é dado a seguir. Em primeiro lugar, as expressões das grandezas cinemáticas:

$$\varrho_{(1)} = \beta_1 \sin \omega \xi \quad (3.60a)$$

$$\vartheta'_{1(1)} = \beta_2 \sin \omega \xi \quad (3.60b)$$

$$\vartheta_{1(1)} = -\frac{\beta_2}{\omega} \cos \omega \xi + c_{\vartheta_1} \quad (3.60c)$$

$$\vartheta_{3(1)} = \beta_3 \sin \omega \xi \quad (3.60d)$$

$$R_{(1)} = \left(-\frac{\beta_1}{\omega} \cos \omega \xi + c_r \right) \sin \vartheta_1 \quad (3.60e)$$

$$\check{\epsilon}_{(1)} = -c_{\vartheta_1} \tan \vartheta_1 \quad (3.60f)$$

$$\check{\gamma}_{(1)} \dot{R} = c_{\vartheta_1} - c_r \frac{\sin \vartheta_1 \tan \vartheta_1}{\dot{R}} \quad (3.60g)$$

$$\kappa_{1(1)} \dot{R} = \vartheta'_{1(1)} \dot{R} + \vartheta_{3(1)} \sin^2 \vartheta_1 \quad (3.60h)$$

$$\kappa_{2(1)} \dot{R} = \left(2 \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1 - \varrho'_{(1)} \dot{R} \right) \sin \vartheta_1 - \kappa_2 R_{(1)} \quad (3.60i)$$

$$\kappa_{3(1)} \overset{\dagger}{R} = \overset{\dagger}{R} \left(\vartheta'_{3(1)} - \varrho'_{(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \right) + \vartheta_{1(1)} \left(2 \cos^2 \overset{\dagger}{\vartheta}_1 - 1 \right) - \overset{\dagger}{k}_3 R_{(1)} \quad (3.60j)$$

... depois das componentes de força:

$$q_{r(1)} = -\overset{\dagger}{k}_{et} R_{(1)} \quad (3.61a)$$

$$m_{3(1)} = -k_g \vartheta_{3(1)} \quad \therefore \quad \begin{cases} m_{r(1)} = 0, \\ m_{\theta(1)} = k_g \vartheta_{3(1)} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1, \\ m_{z(1)} = k_g \vartheta_{3(1)} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \end{cases} \quad (3.61b)$$

$$N_{r(1)} = - \frac{\left(a_{41} \vartheta''_{3(1)} + a_{42} \vartheta'''_{1(1)} + a_{43} \vartheta'_{1(1)} + a_{44} \varrho''_{(1)} + a_{45} \varrho_{(1)} \right)}{\overset{\dagger}{R} \sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1} \quad (3.61c)$$

$$N_{\theta(1)} = \frac{N'_{r(1)} \overset{\dagger}{R} - \overset{\dagger}{N}_{\theta} \cos \overset{\dagger}{\vartheta}_1 \vartheta_{1(1)} - \left(k_{et} \overset{\dagger}{R} - \overset{\dagger}{q}_r \right) R_{(1)}}{\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1} \quad (3.61d)$$

$$N_{z(1)} = - \left(k_{11}^{(i)} - K_{11} \right) \check{\epsilon}_{(1)} - \left(k_{12}^{(i)} - K_{12} \right) \check{\gamma}_{(1)} \quad (3.61e)$$

$$M_{1(1)} = A_1 \kappa_{1(1)} \quad (3.61f)$$

$$M_{2(1)} \overset{\dagger}{R} = A_2 \kappa_{2(1)} \overset{\dagger}{R} - \overset{\dagger}{M}_2 R_{(1)} \quad (3.61g)$$

$$M_{3(1)} \overset{\dagger}{R} = A_3 \kappa_{3(1)} \overset{\dagger}{R} - \overset{\dagger}{M}_3 R_{(1)} \quad (3.61h)$$

$$M_{r(1)} = a_{11} \vartheta_{3(1)} + a_{12} \vartheta'_{1(1)} + a_{13} \varrho_{(1)} \quad (3.61i)$$

$$\overset{\dagger}{R} M_{\theta(1)} = a_{21} \vartheta'_{3(1)} + a_{22} \vartheta_{1(1)} + a_{23} \left[\varrho'_{(1)} + \frac{\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1}{\overset{\dagger}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{\dagger}{R}} \right) \right] \quad (3.61j)$$

$$\overset{\dagger}{R} M_{z(1)} = a_{31} \vartheta'_{3(1)} + a_{32} \vartheta_{1(1)} + a_{33} \left[\varrho'_{(1)} + \frac{\sin \overset{\dagger}{\vartheta}_1}{\overset{\dagger}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{\dagger}{R}} \right) \right] \quad (3.61k)$$

Capítulo 4

Aplicação

4.1 Introdução

As formulações propostas no último capítulo são parte da solução do problema de prever as condições em que uma armadura falhará. Outra parte é dispô-las em um algoritmo que, determinando a evolução do equilíbrio no caminho primário, examine-o ponto a ponto em busca das condições de existência do caminho secundário e depois determine se o ponto de bifurcação é instável.

A construção de uma ferramenta computacional para a análise de instabilidade de armaduras foi conseguida após faina desgastante. Na verdade, essa análise usa dois códigos distintos: um primeiro para construir o caminho primário de equilíbrio e um outro para, aplicando a formulação desenvolvida, procurar pontos de bifurcação. A implementação permitiu ensaios numéricos do modelo.

O acesso aos dados de dutos que foram usados em projeto de pesquisa associado à pesquisa de doutoramento de BRAGA[3], obtido apenas em meados de 2004, foi fundamental para assegurar maior solidez ao estudo numérico. Os ensaios mecânicos citados por aquele autor são, até onde se conhece, os únicos já publicados sobre instabilidade de armaduras, embora o registro de alguns parâmetros relevantes tenha sido negligenciado.

Uma extensão da aplicação do modelo é a análise de sensibilidade da resposta da instabilidade à variação de alguns parâmetros como a rigidez k_{et} , a rigidez k_g , ângulo de assentamento ϑ_1^x e outros. Esse estudo fornece subsídio para conclusões bastante proveitosas.

4.2 Implementação computacional

Como foi comentado ainda na introdução, o equacionamento da evolução no caminho primário não é dificuldade, pois o autor já construíra em CUSTÓDIO[4] um código capaz de mapear numericamente a resposta de um duto flexível no caminho primário evitando algumas simplificações que sonegariam efeitos importantes de não-linearidades. Em sua versão mais atual, esse código recebeu o nome de pander. Seu algoritmo é resumidamente apresentado na figura 4.1.

Tendo tornado o programa pander suficientemente intrincado, preferiu-se gerar outro código mais simples e econômico para fazer a análise de estabilidade. Um protocolo de comunicação define a estrutura dos dados repassados de um programa para outro, que se constituem principalmente das propriedades e esforços internos de cada camada identificada como armadura, mas também das informações necessárias para computar os coeficientes $k_{11}^{(i)}$, $k_{12}^{(i)}$, $k_{21}^{(i)}$ e $k_{22}^{(i)}$ que representam a rigidez equivalente de todas as outras camadas.

O código implementado ganhou o nome - pouco inspirado - de instab. Foram previstos alguns recursos necessários à análise de sensibilidade como, por exemplo, a substituição de alguns parâmetros - como k_{et} , k_g , k_{11} , etc - que, outrora seriam calculados a partir das deformações globais e das outras camadas, por valores definidos pelo usuário.

O algoritmo do programa instab é apresentado na figura 4.2. Em sua versão atual, esse código calcula discretamente os valores de $\det \mathbf{A}$ (dado pela equação 3.45), para os modos com $n = 1 \cdots 20 n_\ell$. Quando, entre um passo de carga e outro, há mudança de sinal do valor calculado para um modo, o algoritmo aponta que houve passagem por um ponto de bifurcação. O carregamento correspondente é interpolado linearmente, tentando determinar o ponto onde $\det \mathbf{A} = 0$. Em seguida, determina-se o auto-vetor $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ associado, os coeficientes c_r e c_{ϑ_1} , a primeira variação de distensão $\epsilon_{(1)}$ e giro $\gamma_{(1)}$, das componentes de força e torque, a energia potencial total e assim por diante. O processo segue a proposta de seguir todo o caminho de equilíbrio primário mapeado pelo programa pander.

Tentativas recentes de melhorar o algoritmo usado pelo programa instab não conseguiram resultados antes do fechamento desse texto. Sobre os problemas que cabe registrar, arrolam-se os seguintes:

- a interpolação do ponto de bifurcação privilegia a garantia de um $\det \mathbf{A}$ mais

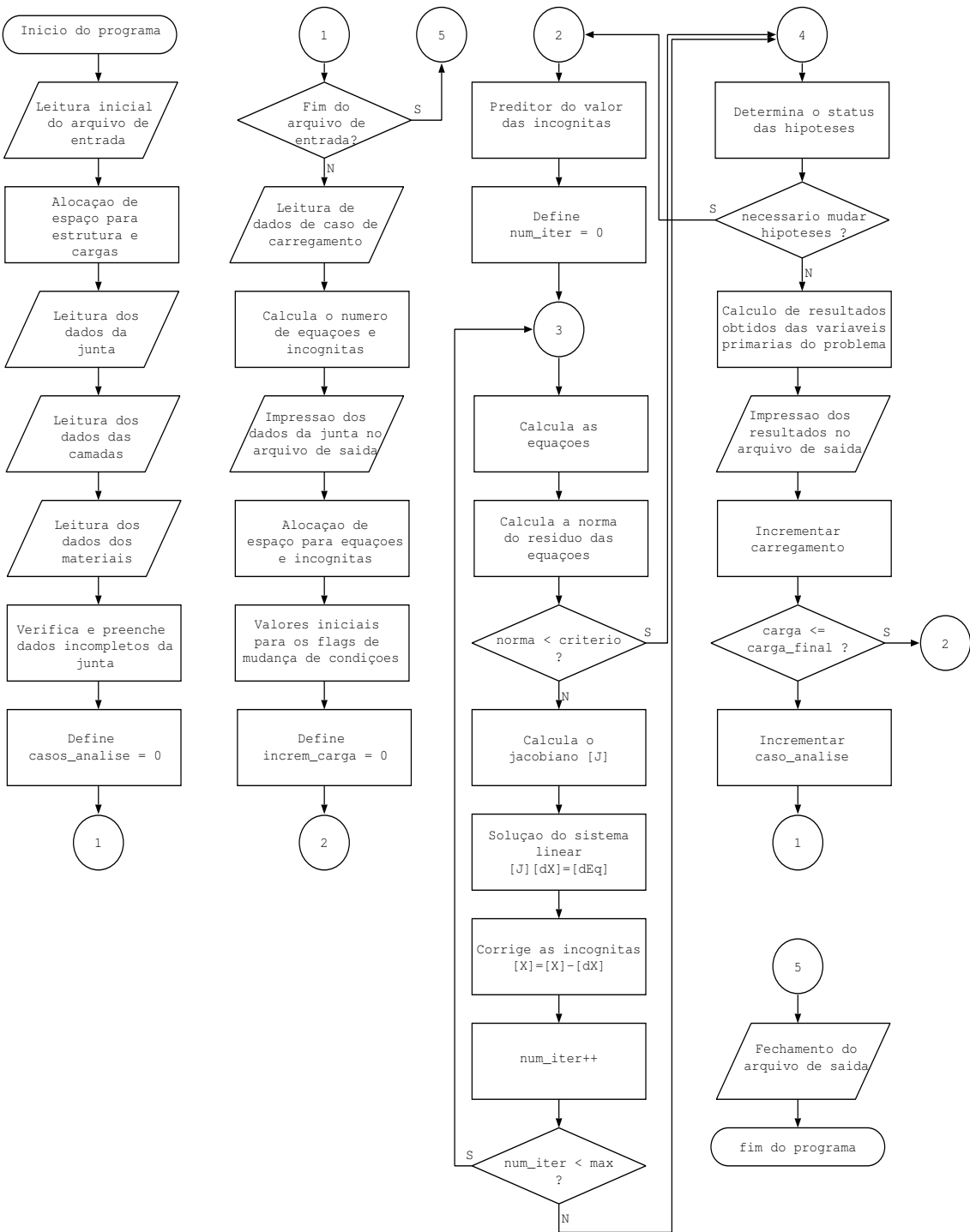


Figura 4.1: Fluxograma do algoritmo que determina a configuração $\frac{+}{E}$ do duto.

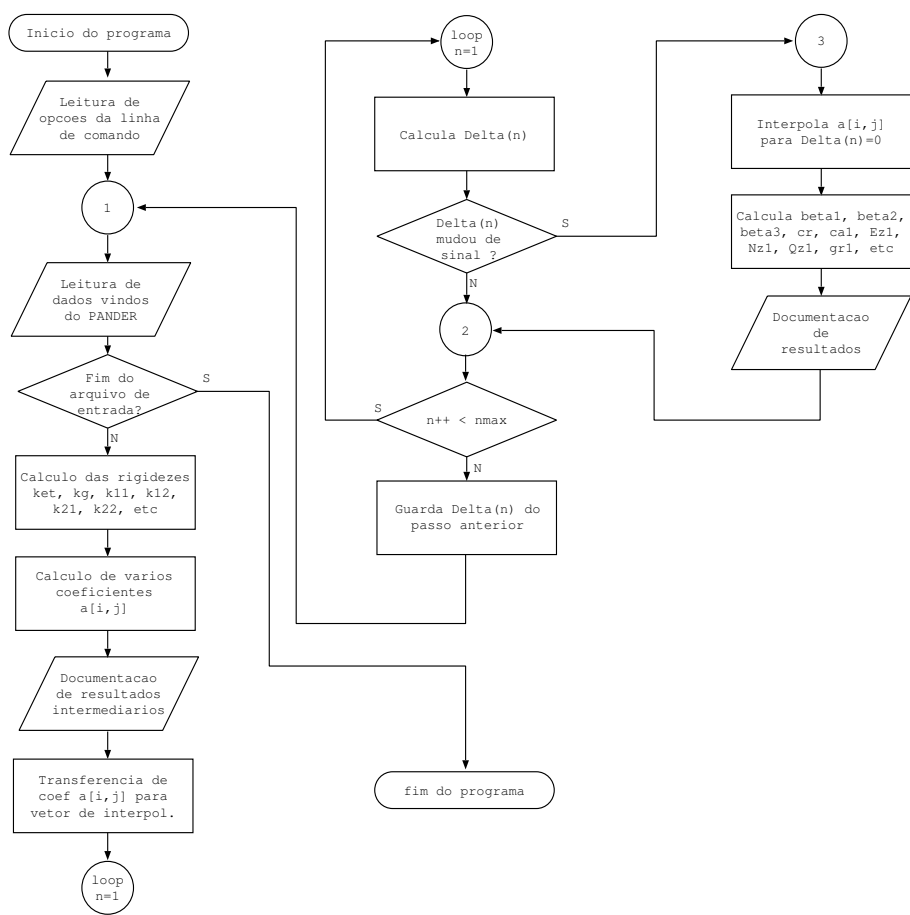


Figura 4.2: Fluxograma do algoritmo que determina os pontos de bifurcação.

próximo de zero e por vezes desvia-se do próprio equilíbrio da estrutura¹, o que é apontado pelo resíduo na primeira variação da energia potencial.

- a adoção de k_{et} e k_g próximos de zero produz erros numéricos significativos. Para contornar esse problema, quando a relação entre os valores de rigidez k_s e k_i (acima e abaixo) é maior que 10^4 , a menor delas é corrigida para se tornar essa fração da outra.

4.3 Comparação numérico-experimental

A fim de estudar a integridade do modelo analítico e do programa pander, os dados da campanha de ensaios monotônicos de compressão de dutos citada em BRAGA[3, 5] foram levantados e - utilizando alguns parâmetros adicionais que não eram mencionados no trabalho - modelos numéricos das amostras foram feitos. As principais informações sobre as estruturas dos dutos são apresentadas na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Dados e resultados dos ensaios monotônicos de BRAGA[3, 5].

		Amostra 9	Amostra 10	Amostra 11
Aplicação		Riser	Flowline	Riser
Profundidade de aplicação, m		1500	2000	1500
Diâmetro nominal, pol		4	4	4
Diâmetro externo, mm		156,3	158,6	166,3
Ângulo das armaduras, graus		?	±35	±30
Massa das bandagens, kg/m		?	0,40	0,52
Comprimento útil, mm		2810	3206	3162
Carga de 1º incidente no teste, kN		352	430	282
Reação residual após 1º incidente, kN		195	368	263
Carga de falha, kN		352	553	504
Carga residual após falha, kN		195	189	74
Morfologia da falha final	Bandagens	íntegras	rompidas	íntegras
	Armadura externa	desarrumada	flamb. radial	desarrumada
	Armadura interna	flamb. lateral	flamb. radial	desarrumada

¹Um melhor resultado depende de retornar a chamada ao programa pander para refinar a análise na vizinhança dos pontos candidatos de bifurcação - um procedimento bastante sofisticado, que não foi bem sucedido a tempo.

O programa de ensaios[3, 5] consistiu de três amostras, mas, em função da montagem inadequada ²da amostra 9, somente duas têm resultados válidos.

O procedimento executado para a estimativa analítica das falhas apontadas pelos experimentos seguiu os seguintes passos:

1. Construir modelo de duto com os dados presentes na folha de dados (*data sheet*) da linha flexível e, quando não houvessem dados sobre os materiais, obtê-los em referências confiáveis como MATWEB[24].
2. Rodar o programa pander para verificar se a rigidez à tração, à torção e o peso das camadas são acurados em relação à documentação de desempenho do duto. Desde que o modelo convencional implementado no pander fornece resultados acurados para esses indicadores, quando há desvios, provavelmente são causados por erros nos dados de entrada.
3. Rodar o programa pander para verificar se a rigidez à compressão é acurada em relação aos dados de ensaio de compressão. Frequentemente é necessário ajustar os parâmetros da bandagem.
4. Rodar o programa instab para levantar as estimativas teóricas de modos de instabilidade, selecionando aqueles que tem fator de comprometimento capaz de deixar evidência nos ensaios mecânicos.
5. Analisar a correlação numérico-experimental. Quando ela é muito distante, revisar cuidadosamente os dados de entrada, averiguando erros. Documentar a distância entre a estimativa numérica e os resultados experimentais e justificá-la.

O passo (3) é necessário porque a estimativa de rigidez radial da bandagem é, na maioria das vezes, incompatível com a rigidez à compressão mensurada no ensaio mecânico³.

²Ainda que seja capaz de adaptar o modelo para tratar a restrição ao giro com alguma informação adicional, pode haver outros problemas associados e optou-se pelo descarte dos resultados do teste.

³Compartilham a culpa disso tanto as simplificações do modelo teórico de bandagem proposto, quanto a natureza duvidosa de grande parcela dos dados que tal modelo usa. De início, a própria folha de dados, preparada pelo fabricante do duto, frequentemente se encontra desalinhada dos parâmetros de construção. Ademais, outras fontes de erro superpõem-se. A fração volumétrica de urdume, por exemplo, é uma função da massa específica da aramida, do ângulo de assentamento e do peso por comprimento da camada presente na folha de dados. O ângulo de assentamento é definido para que uma volta de enrolamento não deixe espaços entre as fitas nem haja apinhamento. Em paralelo, o módulo de elasticidade da aramida, segundo os dados do banco de dados MATWEB[24] e outras referências sobre mangueiras hidráulicas, pode variar entre 52 e 179 GPa. Há problemas com folgas iniciais também. Portanto, as incertezas são parte da definição dessa camada e, para lidar com elas, nada melhor que evidências experimentais que viabilizem um ajuste do parâmetro μ_c .

Tabela 4.2: Principais dados da amostra 10.

Diâmetro externo, mm	158,6
Comprimento útil da amostra, mm	3206
Número de passos (arm. externa)	4,98
Número de passos (arm. interna)	5,16
Rigidez à tração, MN	167
Rigidez à compressão medida, MN	36,2

O volume de informação gerada pelos programas pander e instab é muito grande, por isso os resultados mais relevantes são trazidos para esse capítulo e o restante será documentado no apêndice C, tentando manter boa fluência no texto.

Os dados de composição dos dutos flexíveis ensaiados e estudados numericamente aqui são confidenciais e, por isso, não se pode citá-los sem a autorização do fabricante das amostras. A fim de permitir a comparação entre os dados sem ferir os direitos de proteção de informação do fabricante, menciona-se apenas a razão entre os valores estimados e os documentados na folha de dados ou medidos durante o ensaio.

4.3.1 Amostra 10

A amostra 10 é um *flowline*⁴ de 4 polegadas cuja aplicação é suposta adequada até uma lâmina d’água de 2000 metros. Em complemento às informações já dispostas na tabela 4.1, outros dados dessa amostra são apresentados na tabela 4.2.

Ajuste de rigidez à compressão

Previam-se rigidez à compressão da amostra 10 menor que a da amostra 11, pois, de acordo com as respectivas folhas de dados, esta última tem 30% mais massa de bandagem e também ângulo de armaduras menor. Portanto, é surpreendente que, nos ensaios mecânicos, as duas amostras possuam praticamente a mesma rigidez à compressão. O ajuste desse parâmetro - informado na figura 4.3 - converge para $\mu_c = 3,08$.

⁴*Flowline* é um duto de aplicação estática assentado no leito marinho.

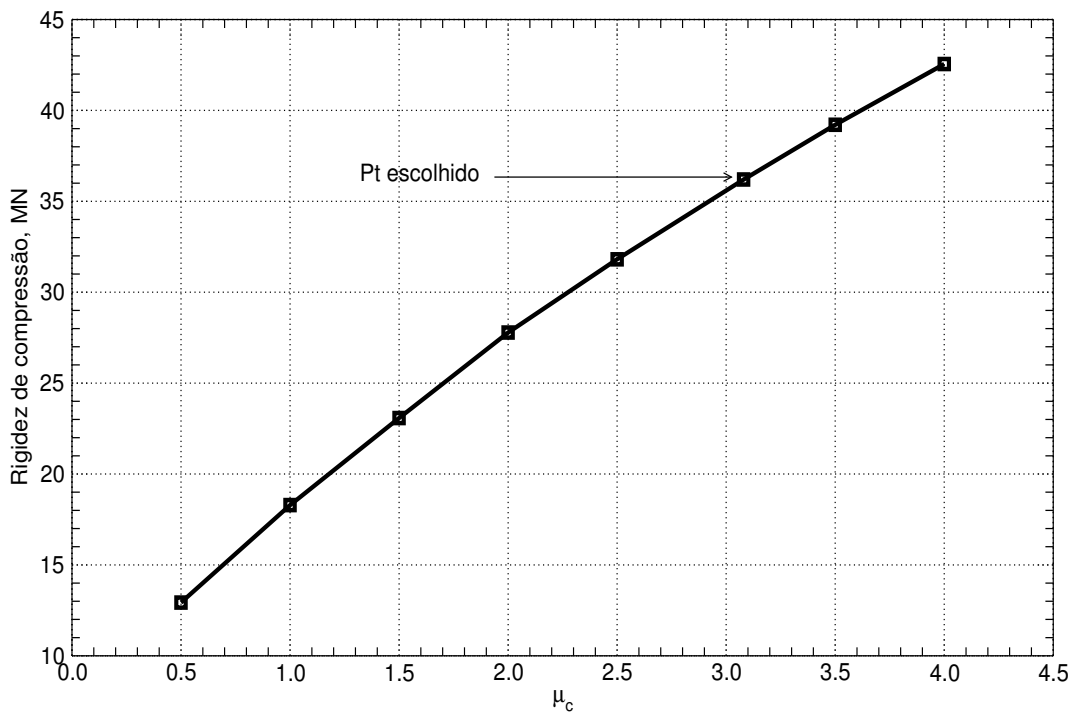


Figura 4.3: Ajuste da rigidez à compressão (amostra 10).

Tabela 4.3: Comparativo de dados para a amostra 10.

	pander / <i>data sheet</i>	pander / ensaio
Massa de bandagens ⁽¹⁾	1,00	?
Peso total	1,011	?
Rigidez à tração	0,985	?
Rigidez à compressão ⁽²⁾	n.i.	0,997
Rigidez à torção	0,382(AH); 1,041(H)	?

- (1) Essa informação advinda da folha de dados conflita com documentação interna à Petrobras que indica gramatura do tecido 60% maior.
- (2) Após a correção aplicada no modelo de bandagem. Antes era 18,3 MN.

Caminho primário

O modelo de duto flexível foi submetido a força de compressão até 650 kN e torque nulo, usando controle de força. O deslocamento longitudinal e a rotação da extremidade se mantêm livres.

A estimativa da resposta de força compressiva contra deformação de retração no caminho primário é mostrada na figura 4.4. As principais características da resposta do duto são apresentadas na tabela 4.3. No apêndice C, os seguintes diagramas adicionais são disponibilizados:

- resposta de compressão contra expansão radial: figura C.1, pág. 163.
- resposta de compressão contra giro: figura C.2, pág. 163.
- resposta de compressão contra tensões nas armaduras e bandagem: figura C.3, pág. 164.

Efeitos de fortes não-linearidades são notáveis a partir de 400 kN de compressão. A análise de tensões na estrutura do duto indica que a principal origem da inflexão na resposta é a perda de rigidez do material de bandagem, onde as fibras de aramidadas são expostas a altas tensões. A evolução da tensão equivalente no material pode ser obtida no gráfico da figura C.3.

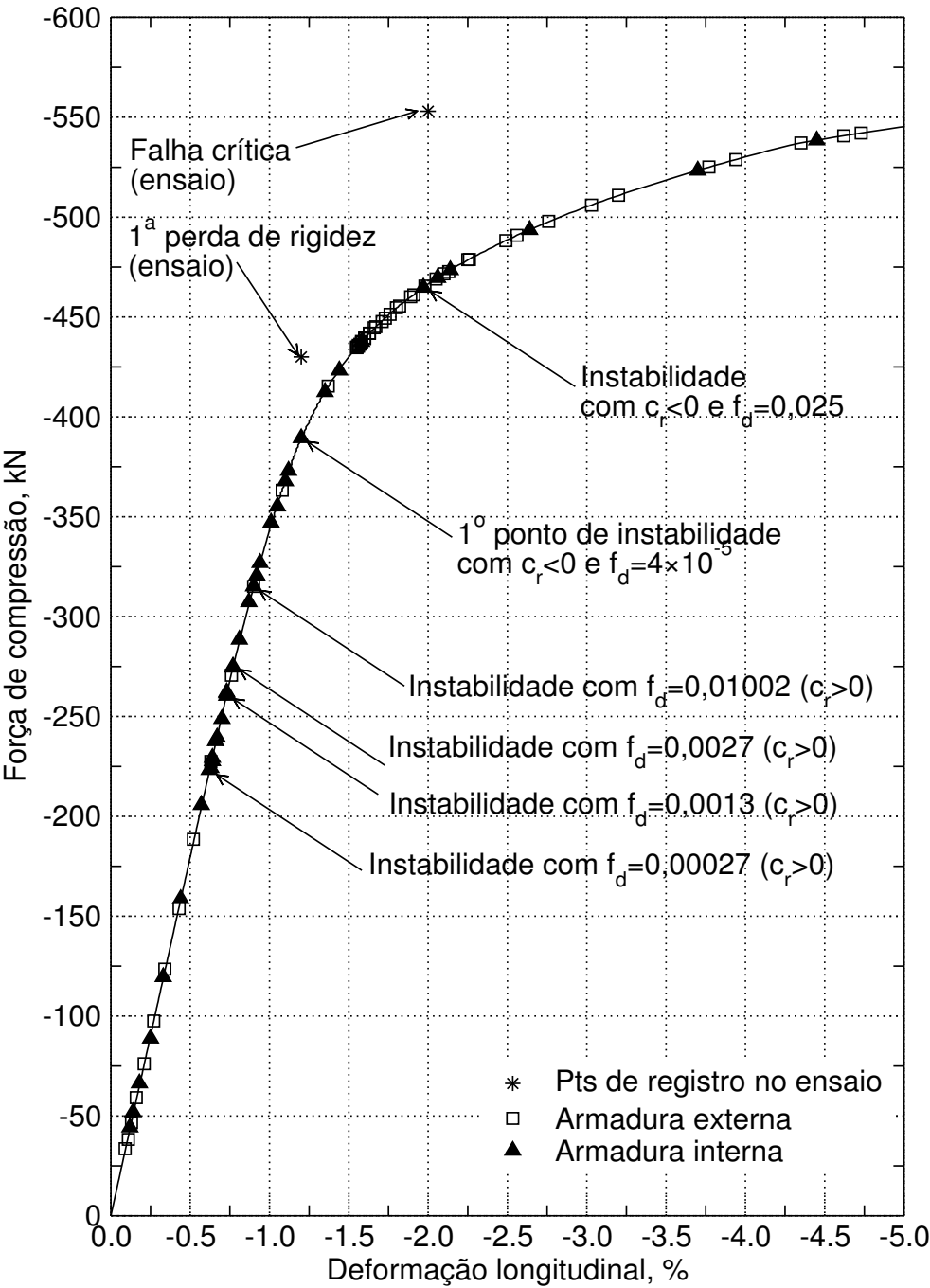


Figura 4.4: Evolução da amostra 10 no caminho primário de equilíbrio.

Pontos de instabilidade

O estudo da estabilidade dos reforçadores das armaduras externa e interna foi feita através do programa instab. Pontos de bifurcação, onde a condição

$\det \mathbf{A} = 0$

... é satisfeita, foram encontrados a partir de 33,6 kN (armadura externa) e 44,3 kN (armadura interna). Entretanto, o cálculo da 2ª variação da energia em tais pontos mostrou que esses primeiros pontos são estáveis. Os pontos de bifurcação foram identificados pelo programa instab; aqueles com fator de comprometimento não desprezível foram publicados nas tabelas 4.4 (armadura externa) e 4.5 (armadura interna).

Tabela 4.4: Pontos de bifurcação da armadura externa previstos (amostra 10).

<i>n</i>	<i>T</i> , kN	β_1	β_2	β_3	$1/2 \delta^2 \Pi$	<i>f_d</i>
1	-33,58	-0,003	-0,795	0,607	594,9	0,00009
2	-38,24	-0,004	-0,823	0,568	187,1	0,00021
3	-46,61	-0,004	-0,859	0,512	115,0	0,00034
4	-59,15	-0,004	-0,894	0,448	92,5	0,00045
5	-76,11	-0,004	-0,923	0,384	83,8	0,00052
6	-97,56	-0,004	-0,945	0,326	79,9	0,00056
7	-123,49	-0,004	-0,961	0,277	77,8	0,00056
8	-153,82	-0,003	-0,972	0,235	76,5	0,00055
9	-188,50	-0,003	-0,980	0,201	75,9	0,00053
10	-227,46	-0,002	-0,985	0,174	76,4	0,00050
11	-270,64	-0,002	-0,988	0,152	78,9	0,00046
12	-315,09	-0,001	-0,991	0,134	103,5	0,00027
13	-363,23	0,000	-0,993	0,121	167,0	0,00021
14	-415,41	0,001	-0,994	0,110	-342,6	0,00020
15	-472,72	0,050	-0,989	0,137	-2509,3	0,00055
16	-478,69	0,704	-0,486	0,518	-99961,0	0,00010
15	-488,21	0,817	0,285	0,501	-2388,0	0,00090
14	-497,87	0,800	-0,266	0,537	-4101,1	0,00090
13	-510,93	0,792	-0,313	0,524	-8189,1	0,00093
12	-528,80	0,794	-0,332	0,510	-5605,9	0,00193
11	-537,13	0,798	-0,344	0,496	-1019,5	0,01237
16	-540,70	-0,031	-0,995	0,092	-115,5	0,07860

Obs: modos menos expressivos (*f_d* < 10⁻⁴) foram retirados da tabela.

Vários pontos de bifurcação também estáveis são ultrapassados na medida que a força de compressão aumenta. O primeiro ponto de instabilidade no caminho de equilíbrio primário da armadura interna se situa em

$$\underline{T} = -223,3 \text{ kN}, \quad \check{\epsilon} = -0,62277\%, \quad n = 17.$$

Esse primeiro ponto de instabilidade, porém, possui um fator de comprometimento baixo - cerca de $2,3 \times 10^{-4}$. A solução associada ao caminho secundário – fornecida pela teoria desenvolvida no capítulo anterior – se torna:

$$\begin{aligned} \varrho^{(4)} &= \varepsilon [-0,761 \sin(2,83\xi)] & \vartheta_1'^{(4)} &= \varepsilon [0,341 \sin(2,83\xi)] \\ \vartheta_3^{(4)} &= \pi/2 + \varepsilon [-0,552 \sin(2,83\xi)] & R^{(4)} &= 0,676 + \varepsilon [0,156 \cos(2,83\xi) + 10,692] \\ N_z^{(4)} &= -10,5 - 455,6\varepsilon & \vartheta_1^{(4)} &= 0,619 + \varepsilon [-0,120 \cos(2,83\xi) + 11,03] \end{aligned}$$

A presença de um coeficiente c_r positivo torna a solução para o caminho secundário questionável, em acordo ao comentário feito na página 65, logo a estimativa dos termos acima citados fica comprometida⁵.

⁵É interessante comentar que, continuando o equilíbrio no caminho primário, o primeiro ponto de instabilidade onde o coeficiente c_r , associado ao deslocamento médio da armadura na direção radial, se situa em $\underline{T} = -389 \text{ kN}$, mas conta com um fator de comprometimento praticamente desprezível. Acima, há outro ponto de instabilidade com deslocamento radial negativo e fator de comprometimento razoável em $\underline{T} = -469,6 \text{ kN}$. Esses dois valores são próximos das cargas com eventos observados no experimento, de modo que isso sugere que o uso de algum tipo de penalização na energia potencial – visando representar o fato de que a situação de deslocamento na direção da maior rigidez radial entre k_i e k_s torna a solução mais estável – pode ter fundamento na observação experimental para a correção do modelo analítico.

Tabela 4.5: Pontos de bifurcação da armadura interna previstos (amostra 10).

n	$\underline{T}$, kN	β_1	β_2	β_3	$1/2 \delta^2 \Pi$	f_d
1	-44,30	-0,111	-0,627	0,771	277,5	0,00841
2	-51,92	-0,127	-0,677	0,725	97,5	0,02039
3	-66,36	-0,147	-0,747	0,649	71,3	0,03176
4	-88,78	-0,165	-0,818	0,551	68,8	0,03906
5	-119,59	-0,176	-0,876	0,448	72,2	0,04358
6	-158,67	-0,181	-0,918	0,352	76,2	0,04811
7	-205,74	-0,184	-0,945	0,271	79,0	0,05476
17	-223,27	0,761	-0,341	0,552	-6037,8	0,00023
18	-224,24	0,757	-0,345	0,555	-13460,0	0,00016
16	-227,71	0,767	-0,336	0,547	-2796,9	0,00037
19	-229,34	0,753	-0,348	0,559	-30591,0	0,00011
15	-239,53	0,774	-0,330	0,541	-1317,8	0,00064
8	-260,44	-0,189	-0,961	0,202	80,8	0,06633
14	-261,73	0,783	-0,321	0,533	-598,2	0,00130
13	-275,05	0,795	-0,306	0,524	-327,1	0,00270
12	-315,19	0,814	-0,274	0,512	-101,5	0,01002
9	-320,62	-0,266	-0,957	0,113	81,8	0,12568
11	-355,1	0,854	-0,170	0,491	-20,7	0,13459
28	-367,81	0,735	-0,366	0,572	-51732000,0	0,00017
10	-373,06	0,750	0,615	0,244	33,3	55,83900
10	-423,30	0,469	-0,790	0,396	15,8	0,05260
9	-469,63	0,743	-0,497	0,447	-27,3	0,02496
11	-473,52	0,115	-0,963	0,244	-91,9	0,01084
12	-538,47	0,024	-0,979	0,202	-1641,8	0,00332
13	-589,22	-0,025	-0,978	0,209	-33329,0	0,00092
14	-617,47	-0,050	-0,973	0,224	-395140,0	0,00033

Obs: modos menos expressivos ($f_d < 10^{-4}$) foram retirados da tabela.

Modos da armadura interna com contração radial média ($c_r < 0$)

Se os resultados são simplesmente filtrados de acordo com o critério de obter uma contração radial média $c_r < 0$, há uma melhoria muito grande da correlação numérico-experimental. Isso sugere uma inadequação do modelo para o tratamento da bilinearidade, pois sua aplicação nos casos onde a armadura no caminho secundário tende a um aumento do raio médio ($c_r > 0$) aparentemente é prejudicada pela suposição de que a rigidez radial é um valor k_{et} quando, na verdade, ela tende a um valor bem maior.

O primeiro ponto de instabilidade que satisfaz o critério de filtragem colocado acontece em

$$T = 389,42 \text{ kN}, \quad \epsilon = -1,2031\%, \quad n = 29$$

É interesse o registro de que todos os pontos de instabilidade acima do valor citado acima são pontos com $c_r < 0$. Esse primeiro ponto em $T = 389,42 \text{ kN}$ possui um fator de comprometimento $f_d = 3,81 \times 10^{-5}$. A solução associada ao caminho secundário é:

$$\begin{aligned} \varrho^{(4)} &= \varepsilon [0,73352 \sin(4,832 \xi)] & \vartheta_1'^{(4)} &= \varepsilon [-0,367 \sin(4,832 \xi)] \\ \vartheta_3^{(4)} &= \pi/2 + \varepsilon [0,572 \sin(4,832 \xi)] & R^{(4)} &= 0,682 + \varepsilon [-0,089 \cos(4,832 \xi) - 584,56] \\ N_z^{(4)} &= -18,28 - 4793,8 \varepsilon & \vartheta_1^{(4)} &= 0,626 + \varepsilon [0,076 \cos(4,832 \xi) - 614,54] \end{aligned}$$

Os valores das constantes de integração c_r e c_{ϑ_1} são bastante altos, portanto o fator de comprometimento não é uma medida adequada para avaliar a criticalidade desse modo. Desde que uma de suas definições é o valor do parâmetro ε para uma variação δN_z de 1%, então pode-se estimar que essa mesma variação provocará uma variação do raio médio e do ângulo da seguinte grandeza:

$$\delta T \approx 4 \text{ kN}, \quad f_d = 3,81 \times 10^{-5} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \delta R^{(4)} \approx -0,0223 + O(10^{-5}) \cos(4,832 \xi) \\ \delta \vartheta_1^{(4)} \approx -0,0234 + O(10^{-5}) \cos(4,832 \xi) \end{cases}$$

Tabela 4.6: Estimativas de instabilidade para a amostra 10 - sem filtragem.

	ensaio	instab	instab/ensaio
Carga de instabilidade inicial ⁽¹⁾ , kN	430	223	0,519
Carga na falha ⁽²⁾ , kN	553	270	0,488
Deformação na instabilidade inicial, %	1,2	0,62	0,517
Deformação na falha, %	2,0	0,896	0,448
Tensão na bandagem na falha, MPa	n.i.	> 800 MPa	

- (1) Considerou-se a carga de instabilidade inicial como:
- (a) no modelo numérico: menor carga de instabilidade;
 - (b) no ensaio mecânico: menor carga com perda de rigidez à compressão.
- (2) No modelo numérico, considerou-se a carga de falha como menor carga com $f_d > 0,027$ ou 20% acima de um ponto de instabilidade.

Tabela 4.7: Estimativas de instabilidade para a amostra 10 - com filtragem.

	ensaio	instab	instab/ensaio
Carga de instabilidade inicial, kN	430	389	0,905
Carga na falha, kN	553	465	0,841
Deformação na instabilidade inicial, %	-1,2	-1,2	1,00
Deformação na falha, %	-2,0	-2,0	1,00
Tensão na bandagem na falha, MPa	n.i.	>800 MPa	

Avaliação dos resultados

A tabela 4.6 permite a comparação entre os resultados do modelo e do experimento sem qualquer procedimento de filtragem. As estimativas numéricas do modelo - alimentados pelas informações da folha de dados do duto flexível, por propriedades de materiais obtidas na MATWEB[24] e com rigidez à compressão ajustada de acordo com a rigidez inicial verificada no ensaio - foram muito inferiores aos pontos de falha anotados.

Entretanto, se apenas as estimativas com $c_r < 0$ para armadura interna são considerados, a correlação não é ruim. A tabela 4.7 fornece esses dados.

A perda de rigidez das bandagens - que conforma os resultados numéricos - não foi evidenciada nos ensaios mecânicos, suspeita-se de que o modelo constitutivo do seu material não se foi bem escolhido. Por outro lado, a presença de grandes tensões⁶ e deformações na bandagem levanta a suspeita de que a falha final advenha da perda de rigidez, e portanto da funcionalidade, das bandagens devido a solicitação excessiva.

⁶A figura C.3 apresenta as tensões nas duas armaduras e na seção da bandagem, contra a carga externa.

4.3.2 Amostra 11

A amostra 11 é um duto projetado para serviço como *riser*⁷, com aplicação prevista até 1500 metros de lâmina d’água. Suas principais características são dadas na tabela 4.8.

Tabela 4.8: Principais dados da amostra 11.

Diâmetro externo, mm	166,3
Comprimento útil da amostra, mm	3162
Número de passos (arm. externa)	3,874
Número de passos (arm. interna)	4,121
Rigidez à tração, MN	250
Rigidez à compressão medida, MN	37,1

No ensaio mecânico descrito em BRAGA[3, 5], essa amostra apresentou três eventos de perda de rigidez:

- em $\underline{T}$ = 282 kN, quando media-se um deslocamento de 24 mm ($\epsilon \approx 0,76\%$).
- em $\underline{T}$ = 481 kN, quando media-se um deslocamento de 45 mm ($\epsilon \approx 1,42\%$).
- em $\underline{T}$ = 504 kN, com deslocamento de 50 mm ($\epsilon \approx 1,58\%$).

Ajuste de rigidez à compressão

Ao invés de enrijecer o material na calibração das propriedades da bandagem como feito na amostra anterior, uma rigidez à compressão acurada em relação aos ensaios foi obtida com $\mu_c = 0,40$, ou seja, reduzindo-lhe o módulo de tração. O gráfico da figura 4.5 mostra os resultados do ajuste.

Caminho primário

Assim como no caso do amostra 10, usou-se o controle de força para impor sobre o modelo numérico do duto flexível uma carga de compressão até 650 kN, mantendo o torque nulo, ou seja, as extremidades completamente livres para girar.

⁷Riser é duto cuja responsabilidade é o transporte de fluidos desde o leito marinho até a superfície.

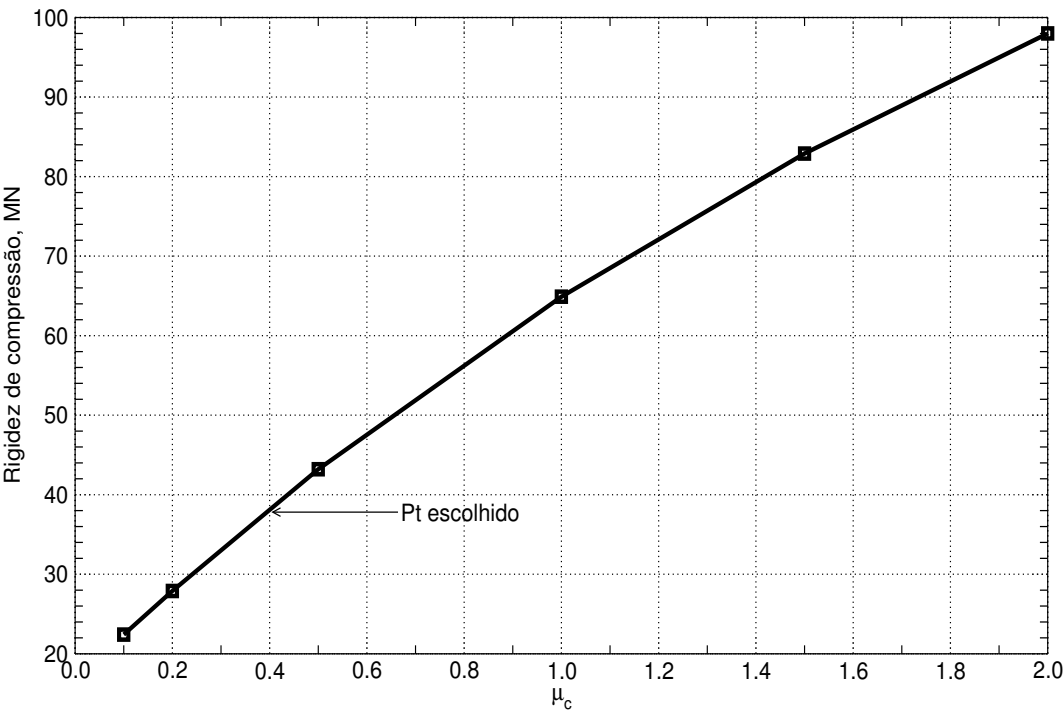


Figura 4.5: Ajuste da rigidez à compressão (amostra 11).

Tabela 4.9: Comparativo de resultados para a amostra 11.

	pander/data sheet	pander/ensaio
Massa das bandagens, kg/m	1,019	-
Peso total, kg/m	1,007	-
Rigidez à tração, MN	1,024	-
Rigidez à compressão*, MN	-	1,018
Rigidez à torção, kNm ²	0,406(AH)/1,025(H)	-

* Após a correção aplicada no modelo de bandagem.

Devido ao menor ângulo de armaduras, a rigidez à compressão tem maior dependência da fundação elástica representada pelas bandagens. Entretanto, tais camadas não são sobrecarregadas como no caso anterior. De fato, o caminho primário da estrutura mapeado até 650 kN é próximo de ter uma resposta linear, como se ilustra na figura 4.6. Um resumo da resposta do duto no caminho primário é apresentado na tabela 4.9.

No apêndice C, documentam-se outros resultados da estimativa do caminho primário da amostra 11:

- resposta de compressão contra expansão radial: figura C.4, pág. 163.
- resposta de compressão contra giro: figura C.5, pág. 163.

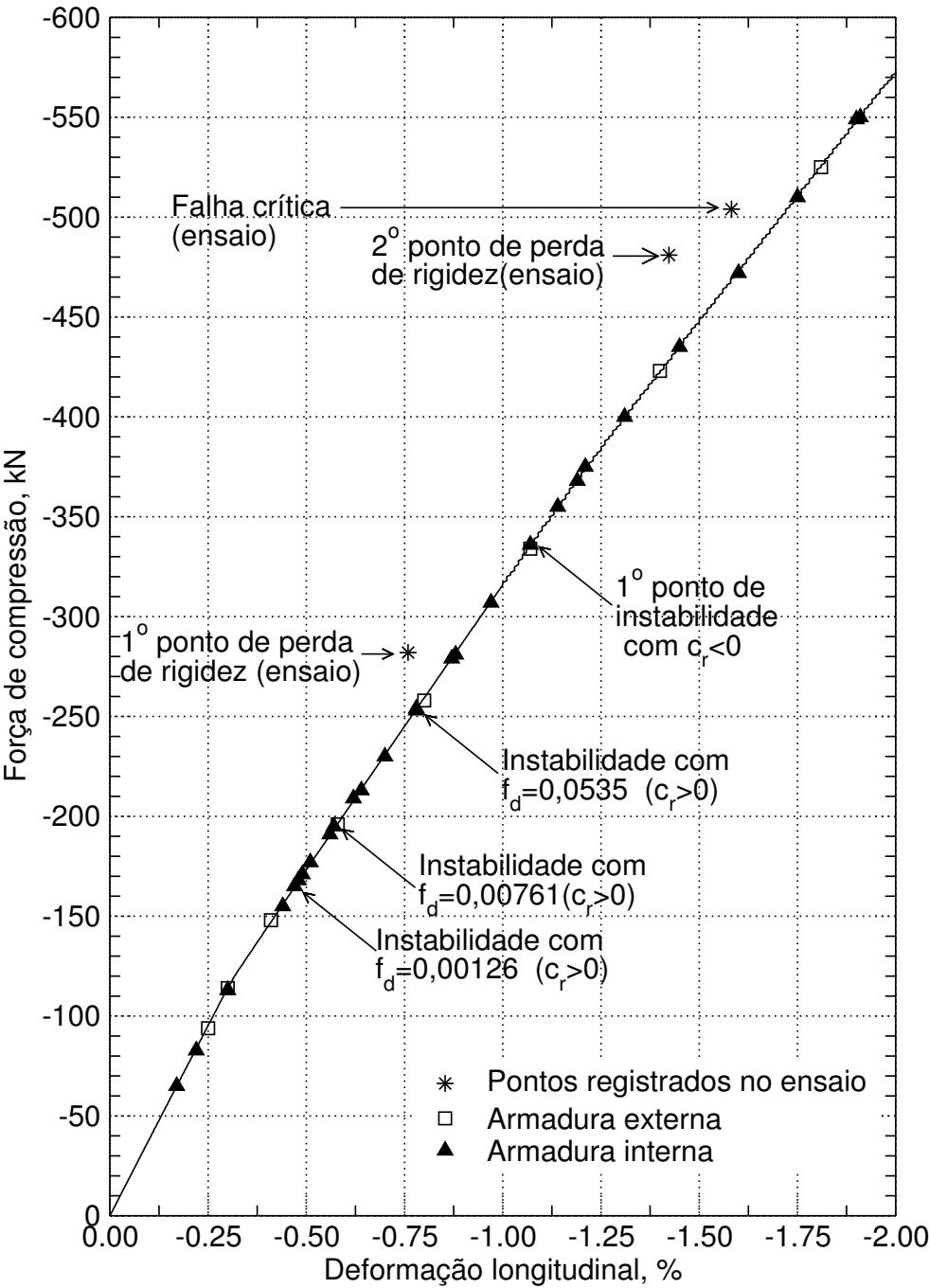


Figura 4.6: Evolução da amostra 11 no caminho primário de equilíbrio.

Pontos de instabilidade

As tabelas 4.10 e 4.11 descrevem as características dos pontos de bifurcação. Não há, dentro dos limites de compressão aplicada, instabilidade da armadura externa.

Pelo menos quatro pontos de bifurcação estáveis são encontrados com carregamento moderado no caminho primário de equilíbrio da armadura interna antes de um ponto de instabilidade. O ponto instável com menor carga de compressão é:

$$\underline{T} = -165,0 \text{ kN}, \quad \check{\epsilon} = -0,471\%, \quad n = 12.$$

Tal ponto possui um fator de comprometimento de $2,62 \times 10^{-3}$. A solução associada ao caminho secundário, na forma adimensional, se torna:

$$\begin{aligned} \varrho^{(5)} &= \varepsilon [-0,786 \sin(2,10\xi)] & \vartheta_1'^{(5)} &= \varepsilon [0,248 \sin(2,10\xi)] \\ \vartheta_3^{(5)} &= \pi/2 + \varepsilon [-0,566 \sin(2,10\xi)] & R^{(5)} &= 0,683 + \varepsilon [0,190 \cos(2,10\xi) + 1,50] \\ N_z^{(5)} &= -5,42 - 20,7\varepsilon & \vartheta_1^{(5)} &= 0,531 + \varepsilon [-0,118 \cos(2,10\xi) + 1,10] \end{aligned}$$

Tal como no caso da amostra 10, esse primeiro modo de instabilidade tem uma tendência de deslocamento radial médio – dado por c_r – para fora do duto, o que não é adequadamente tratado pela rigidez radial equivalente k_{et} , que melhor se aproxima de k_i (a rigidez no sentido para dentro do duto). Por isso, a estimativa de resposta do caminho secundário é considerada duvidosa.

Assim mesmo, é prudente o registro de que foi identificado um ponto de instabilidade com um fator de comprometimento bastante alto - $f_d = 0,053$ - com carregamento de 254,3 kN e distensão axial de 0,783%.

Tabela 4.10: Pontos de bifurcação da armadura externa previstos (amostra 11).

n	$\underline{T}$, kN	β_1	β_2	β_3	$1/2 \delta^2 \Pi$	f_d
1	-93,90	-0,019	-0,946	0,324	804,0	0,00202
2	-114,00	-0,019	-0,963	0,268	257,0	0,00503
3	-148,00	-0,023	-0,976	0,218	154,0	0,00956
4	-196,00	-0,022	-0,985	0,171	118,0	0,01550
5	-258,00	-0,021	-0,990	0,138	102,0	0,02310
6	-334,00	-0,018	-0,993	0,115	92,2	0,03190
7	-423,00	-0,017	-0,995	0,101	86,3	0,04070
8	-525,00	-0,013	-0,996	0,092	82,4	0,04630
9	-640,00	-0,009	-0,996	0,086	79,5	0,04620

Tabela 4.11: Pontos de bifurcação da armadura interna previstos (amostra 11).

n	$\underline{T}$, kN	β_1	β_2	β_3	$1/2 \delta^2 \Pi$	f_d
1	-64,96	-0,342	-0,660	0,670	195,3	0,01266
2	-82,83	-0,399	-0,743	0,537	93,4	0,03234
3	-113,33	-0,462	-0,815	0,350	82,4	0,05966
4	-154,88	-0,530	-0,832	0,163	77,5	0,12933
12	-164,68	0,786	-0,248	0,566	-1464,1	0,00126
13	-167,76	0,777	-0,255	0,576	-4568,6	0,00074
11	-171,31	0,797	-0,239	0,554	-412,2	0,00261
14	-177,20	0,770	-0,260	0,583	-12959	0,00050
15	-191,28	0,764	-0,265	0,588	-34084	0,00038
10	-194,94	0,813	-0,224	0,538	-95,2	0,00761
16	-208,99	0,759	-0,269	0,593	-84205	0,00031
5	-212,57	0,535	0,845	-0,017	78,1	0,34442
17	-229,72	0,756	-0,272	0,596	-197220	0,00027
18	-253,07	0,752	-0,275	0,599	-440970	0,00027
9	-254,34	0,835	-0,192	0,516	-16,1	0,05345
19	-278,74	0,750	-0,277	0,601	-946510	0,00031
6	-281,09	0,565	0,819	0,099	73,1	0,78092
20	-306,56	0,747	-0,280	0,603	-1959100	0,00050
21	-335,98	0,745	-0,282	0,604	-4018800	0,00123
7	-354,97	0,698	0,670	0,251	51,9	0,90911
22	-367,73	0,744	-0,284	0,605	-7837700	0,00021
8	-374,80	0,880	0,020	0,475	-2,9	0,95897
8	-548,89	0,697	-0,569	0,435	8,0	0,17487
9	-587,89	0,232	-0,946	0,225	62,3	0,17404

Modos da armadura interna com contração radial média ($c_r < 0$)

O primeiro ponto onde se identificou contração radial da armadura interna no caminho secundário ocorre em

$$\underline{T} = -336,0 \text{ kN}, \quad \check{\epsilon} = -1,072\%, \quad n = 21.$$

Assim como na análise da outra amostra, todos os modos de instabilidade acima desse ponto são soluções onde a constante de integração c_r é negativa.

Após o resgate das características desse ponto, redige-se a solução do início do caminho secundário a partir desse ponto de instabilidade na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varrho^{(4)} &= \varepsilon [0,745 \sin(3,67\xi)] & \vartheta_1'^{(4)} &= \varepsilon [-0,282 \sin(3,67\xi)] \\ \vartheta_3^{(4)} &= \pi/2 + \varepsilon [0,604 \sin(3,67\xi)] & R^{(4)} &= 0,714 + \varepsilon [-0,1045 \cos(3,67\xi) - 157,85] \\ N_z^{(4)} &= -11,069 - 90,101\varepsilon & \vartheta_1^{(4)} &= 0,540 + \varepsilon [0,0768 \cos(3,67\xi) - 133,8] \end{aligned}$$

Avaliação de resultados

Essa amostra demonstrou um comportamento mais previsível, pois as bandagens não foram tão solicitadas quando na amostra anterior e portanto os efeitos de não-linearidade de material não foram maiores. De novo, o modelo analítico previu cargas de instabilidade muito abaixo dos resultados dos testes se um procedimento de filtragem é ignorado. A comparação numérico-experimental desse primeiro caso é apresentada na tabela 4.12.

É interessante notar que há um ponto de instabilidade, ainda com $c_r > 0$, porém com um fator de comprometimento bastante alto ($f_d = 0,053$) com $\bar{T} = 254,3 \text{ kN}$ e $\check{\epsilon} = 0,784\%$, que são valores próximos ao primeiro ponto com perda de rigidez nos testes.

A tabela 4.13 apresenta a comparação entre ensaio e estimativa analítica, selecionando apenas pontos com $c_r < 0$ para armadura interna. O primeiro ponto de instabilidade se situa entre o primeiro e o segundo ponto onde foram identificadas perdas de rigidez durante o ensaio mecânico, mas é quase 20% acima do menor valor adotado como carga de instabilidade inicial no teste.

Tabela 4.12: Estimativas de instabilidade para a amostra 11 - sem filtragem

	ensaio	instab	instab/ensaio
Carga de instabilidade inicial ⁽¹⁾ , kN	282	165	0,585
Carga na falha ⁽²⁾ , kN	504	198	0,393
Deformação na instabilidade inicial, %	0,76	0,475	0,625
Deformação na falha, %	1,58	0,575	0,365

- (1) Considerou-se a carga de instabilidade inicial como:
- (a) no modelo numérico: a menor carga de instabilidade;
 - (b) no ensaio mecânico: a menor carga onde foi notada perda acentuada de rigidez à compressão.
- (2) No modelo numérico, considerou-se a carga de falha como menor carga com $f_d > 0,027$ ou mais de 20% da menor carga de instabilidade.

Tabela 4.13: Estimativas de instabilidade para a amostra 11 - com filtragem

	ensaio	instab	instab/ensaio
Carga de instabilidade inicial ⁽¹⁾ , kN	282	336,0	1,19
Carga na falha ⁽²⁾ , kN	504	374,8	0,74
Deformação na instabilidade inicial, %	0,76	1,07	1,41
Deformação na falha, %	1,58	1,214	0,77

4.4 Estudo de sensibilidade da resposta

A análise de sensibilidade procura avaliar a relevância de cada parâmetro da estrutura ou do modelo na estimativa dada pelo modelo. Para fins de estudos, são considerados os seguintes parâmetros:

- ângulo de assentamento das armaduras.
- altura da seção transversal dos reforçadores.
- coeficiente μ_c da rigidez da bandagem.
- rigidez radial equivalente k_{et} e ao giro k_g aplicada sobre a armadura interna.
- comprimento da amostra.

A maior parte desses parâmetros não afeta apenas a posição do ponto de bifurcação no caminho de equilíbrio; eles afetam o próprio caminho de equilíbrio porque alteram a rigidez à compressão da estrutura.

Essa análise é um processo computacionalmente oneroso, porque cada variação paramétrica requer nova execução dos programas pander e instab. O tempo para tantas análises, especialmente do primeiro programa, seria proibitivo com uma malha de carregamento muito refinada, por isso os incrementos de carga são valores altos⁸ como 10 kN.

O estudo foi feito sobre os dados da amostra 11 apenas, porque a resposta da outra amostra incorpora fortes efeitos de não-linearidade de material que se misturam aos parâmetros estudados, obscurecendo o comportamento da armadura e do duto.

4.4.1 Influência do ângulo de assentamento

O ângulo de assentamento $\check{\vartheta}_1$ é um parâmetro básico que qualquer estudo de sensibilidade precisa citar. CUSTÓDIO[4], por exemplo, determina a alteração da rigidez à tração e alguns outros parâmetros à variação desse ângulo. No trabalho em que condições de extremidade diferentes são usadas, CUSTÓDIO[19] estuda a evolução da menor carga de bifurcação de um reforçador isolado, submetido apenas a oposições radiais ao deslocamento, e conclui pelo comportamento ilustrado⁹ na figura 4.7.

⁸Uma malha não muito refinada causou alguns problemas de imprecisão na interpolação usada pelo programa pander, de maneira que fica a advertência de imprecisão nas estimativas fornecidas por esse programa. Uma avaliação da orientação da resposta, no entanto, não fica comprometida.

⁹É relevante assinalar que os valores mencionados em CUSTÓDIO[19] e nos gráficos retirados daquele trabalho usam fatores adimensionalizadores diferentes dos usados neste texto.

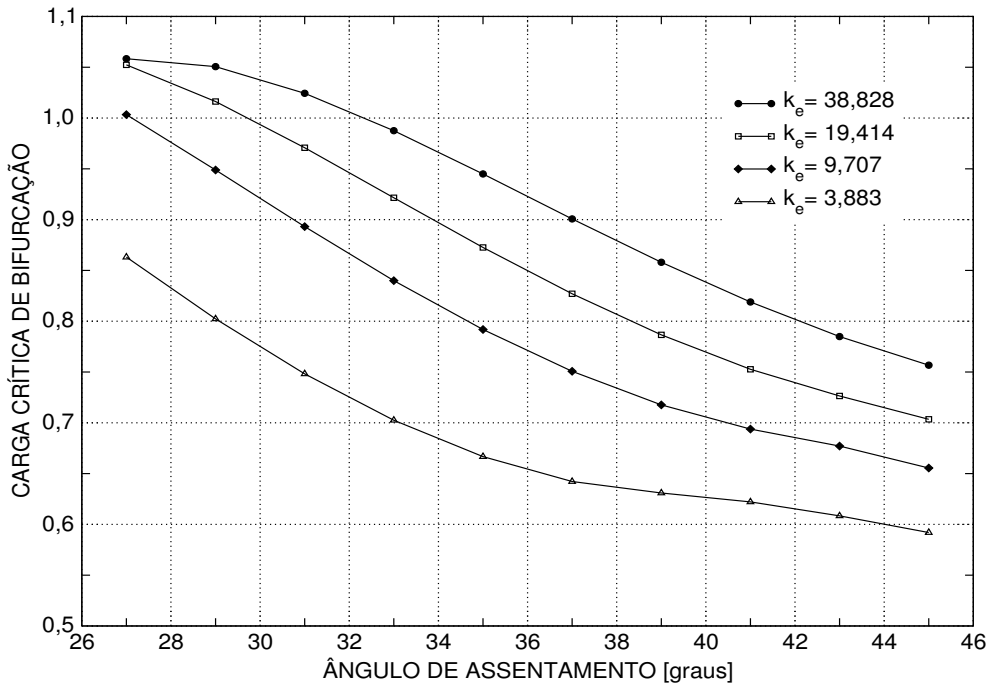


Figura 4.7: Forma da variação da carga crítica de bifurcação como resposta à mudança do ângulo inicial de assentamento do reforçador e quatro casos de rigidez da fundação elástica. Fonte: [19].

Onze casos de ângulo ϑ_1^x , apresentados na tabela 4.14 são estudados numericamente. O número de reforçadores em cada armadura, nesse caso, também precisa de ajuste¹⁰.

O comportamento das cargas de instabilidade é apresentado na figura 4.8. Após uma queda entre 20° e 30°, as cargas necessárias ao fenômeno de instabilidade se estabilizam, embora elas ocorram em valores de deformação diferentes¹¹. O comportamento em deformações se torna mais claro no gráfico da figura 4.9.

A estrutura do parâmetro ω é afetada pela mudança de ângulo ϑ_1^x . Por isso, espera-se a alteração do modo n onde a instabilidade ocorre. Esse comportamento foi evidenciado no gráfico na figura 4.10. Os pontos de instabilidade mais relevantes possuem valores de n próximos. As componentes $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, associadas ao modo onde a instabilidade se forma, são também representadas na figura 4.11. Não há alteração significativa da composição desse autovetor.

¹⁰Deve-se variar o número de reforçadores como função do ângulo de assentamento porque, do contrário, seria impossível dispor a mesma quantidade de reforçadores na armadura ou os espaços laterais se tornariam excessivos. Uma boa medida para esse ajuste é a massa do duto por comprimento - ao mantê-la, garante-se que não há problemas construtivos.

¹¹É natural, pois a rigidez à compressão do duto também varia com o ângulo ϑ_1^x .

Tabela 4.14: Casos de ângulo de armadura $\check{\vartheta}_1$ para estudo de sensibilidade (amostra 11).

Caso:	$\check{\vartheta}_1^{(3)}$ graus	$\check{\vartheta}_1^{(5)}$ graus	$n_w^{(3)}$	$n_w^{(5)}$	peso/L kg/m
1.A	-20	20	46	44	50,6
1.B	-22	22	45	43	50,7
1.C	-24	24	45	43	50,9
1.D	-26	26	44	42	50,8
1.E	-28	28	43	41	50,7
1.F	-30	30	42	40	50,8
1.G	-32	32	42	40	51,0
1.H	-34	34	41	39	51,0
1.I	-36	36	40	38	51,0
1.J	-38	38	39	37	51,0
1.K	-40	40	38	36	51,0

⁽³⁾ refere-se à armadura externa.

⁽⁵⁾ refere-se à armadura interna.

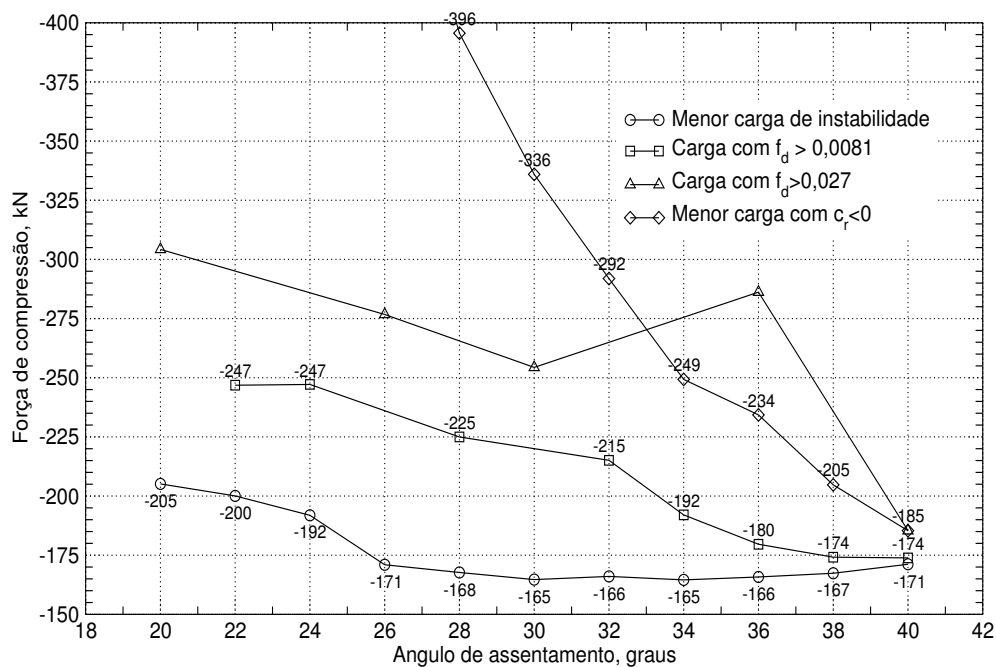


Figura 4.8: Resposta de carga crítica de instabilidade contra ângulo ϑ_1 de armadura (amostra 11).

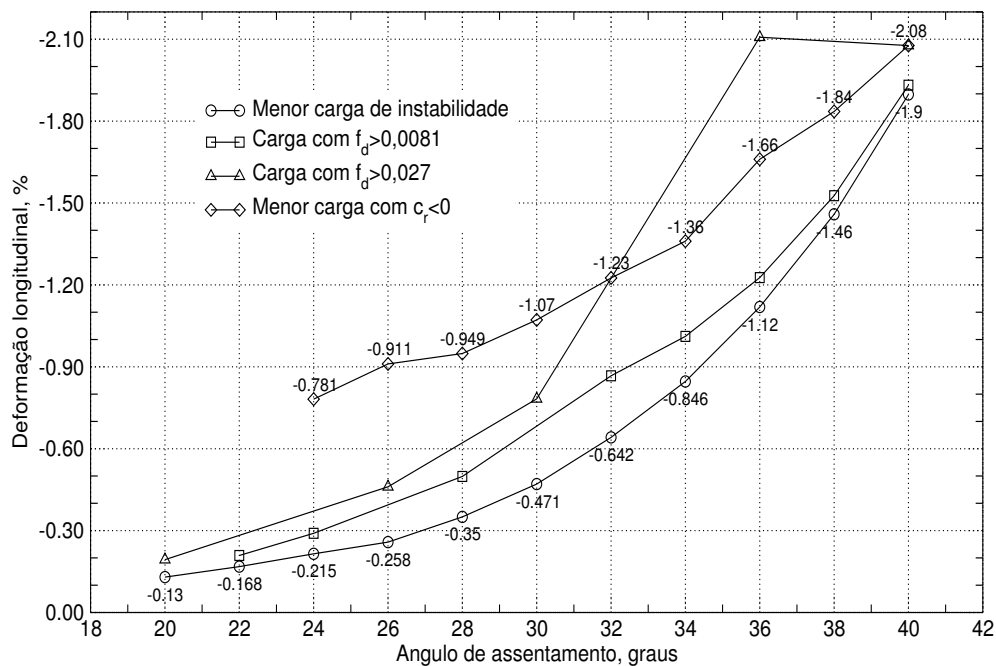


Figura 4.9: Resposta de deformação associada ao modo de instabilidade com menor carregamento contra ângulo ϑ_1 (amostra 11).

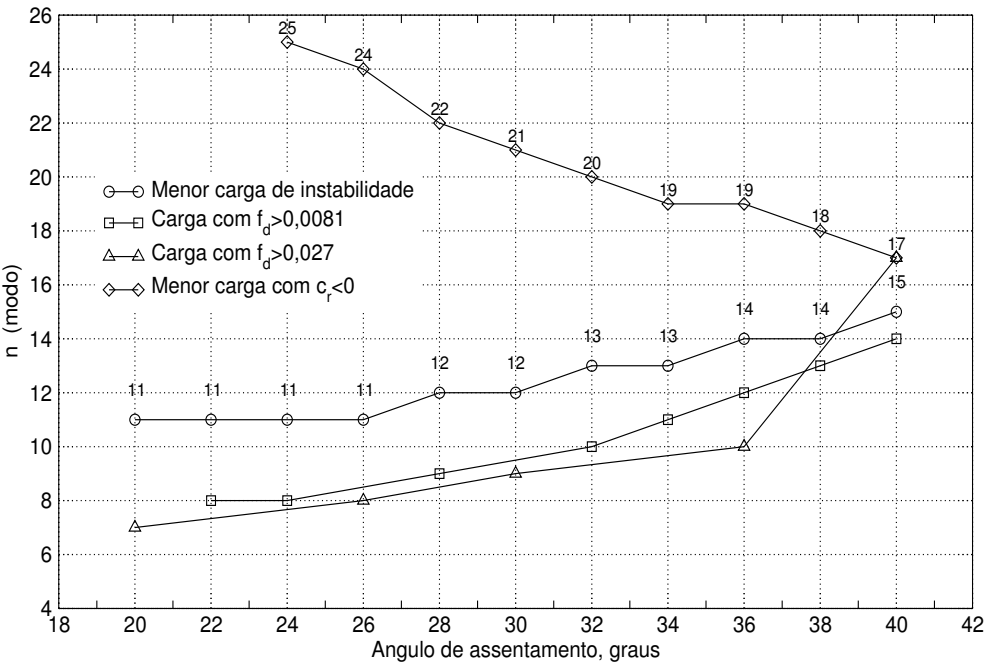


Figura 4.10: Resposta de modo de instabilidade contra ângulo ϑ_1 (amostra 11).

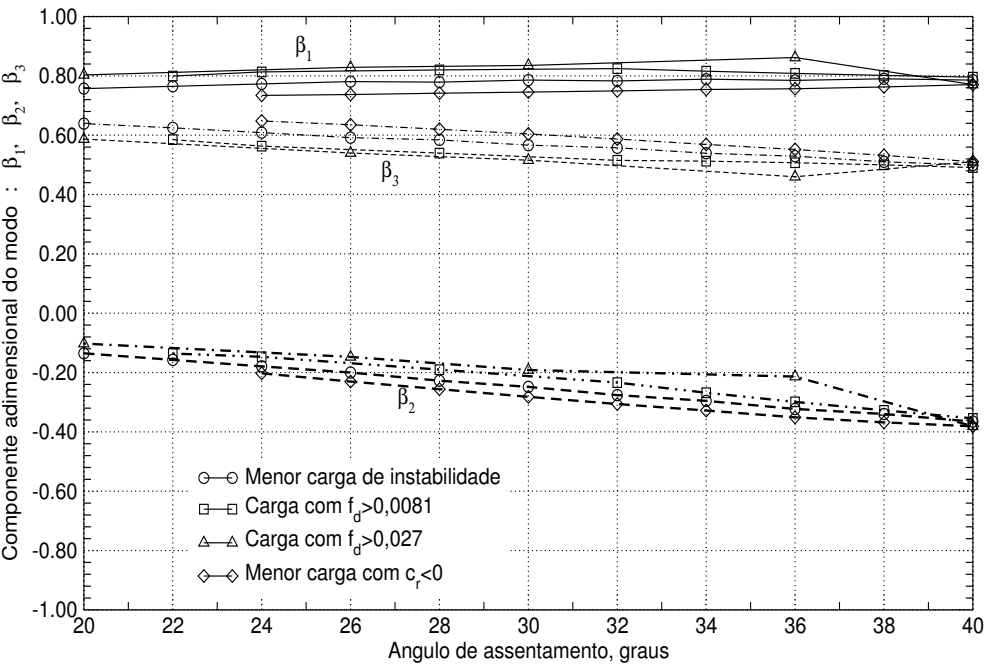


Figura 4.11: Resposta de componentes de deformação radial, mudança de ângulo e giro da seção contra ângulo ϑ_1 (amostra 11).

4.4.2 Influência da altura do reforçador

O objetivo de tal investigação é determinar a relevância dos valores de rigidez à flexão A_1 e A_2 e à torção A_3 , dadas pela seção transversal do reforçador, na instabilidade. Ainda no tópico anterior, a análise de autovetores apontou que a participação da rigidez oferecida pelas outras camadas pode ser majoritária, mas ao multiplicar a rigidez do reforçador de fatores grandes pode-se obter comportamento diferente.

Os casos de carregamento arrolados na tabela 4.15 são ensaiados numericamente no estudo. Casos em que a altura do reforçador é menor que a altura do caso-base (3,0 mm) são interessantes, porque deseja-se também saber se a perda de espessura da armadura, causada por desgaste ou corrosão, tem efeito na instabilidade.

Os resultados de evolução de carga crítica de instabilidade contra altura do reforçador são dados no gráfico da figura 4.12. O gráfico da figura 4.13 é semelhante, mas substitui-se o valor da altura pela razão A_2/A_1 , que é melhor forma de interpretar os resultados.

Entre outras evidências, fica manifesto nos resultados que o aumento da seção é efetivo no aumento da carga mínima, mas que também, quando a falha acontece, ela é mais crítica. Para tornar esse fenômeno mais claro, o fator de comprometimento f_d correspondente à menor carga de instabilidade é apresentado na figura 4.14. Nesse gráfico, indicam-se os modos correspondentes a cada ponto de instabilidade. Há claramente uma sensibilidade do modo com a razão A_2/A_1 até que um determinado valor de n seja atingido¹².

Novas relações entre os valores de rigidez A_1 , A_2 e A_3 também poderiam modificar as componentes $\beta_{1...3}$ relacionadas aos modos de instabilidade. O gráfico da figura 4.15 sugere que o efeito da variação de tais componentes é pequena.

¹²Esse valor “especial” de n é função principalmente do comprimento do duto e do ângulo de assentamento do reforçador.

Tabela 4.15: Casos de altura dos reforçadores (nas camadas 3 e 5 da amostra 11).

Caso	$\underline{t}_w^{(3,5)}$ [mm]	$\underline{A}_1^{(3,5)}$ [Nm ²]	$\underline{A}_2^{(3,5)}$ [Nm ²]	$\underline{A}_3^{(3,5)}$ [Nm ²]	A_2/A_1	$\underline{EA}$ (tr) [MN]	$\underline{EA}$ (cp) [MN]
2.A	1,5	15,35	0,478	6,09	0,0311	130,9	35,1
2.B	2,0	20,47	1,13	8,31	0,0554	175,3	36,4
2.C	2,5	25,59	2,21	10,69	0,0865	216,5	37,5
2.D	3,0	30,71	3,83	13,28	0,1246	256,0	37,9
2.E	3,5	35,82	6,07	16,11	0,1696	297,0	38,1
2.F	4,0	40,94	9,07	19,23	0,2215	340,3	38,6
2.G	4,5	46,06	12,91	22,67	0,2803	374,8	39,1

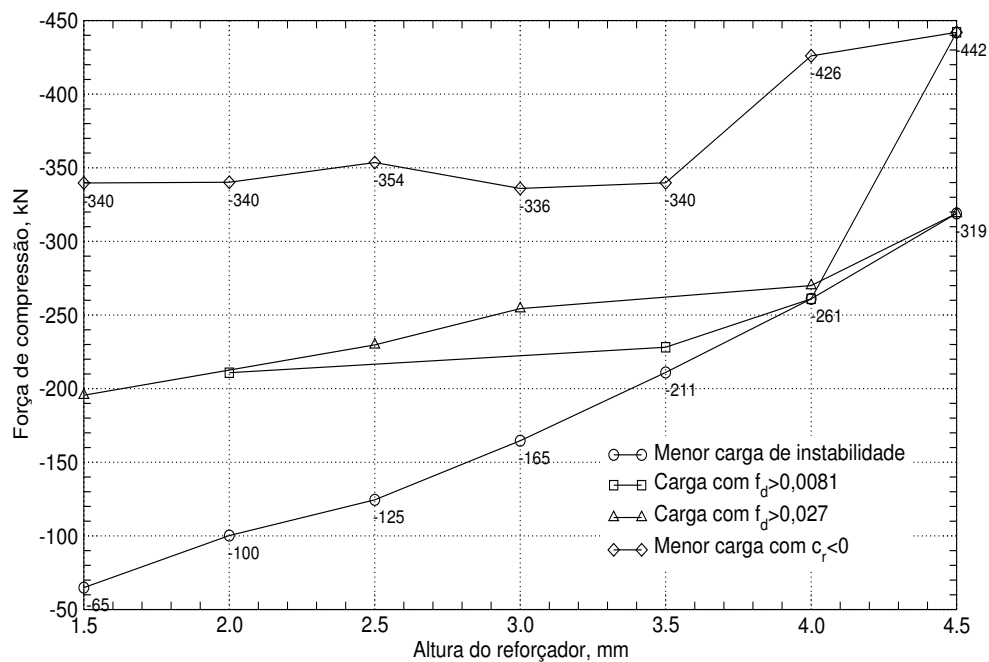


Figura 4.12: Resposta de carga crítica de instabilidade para casos de altura do reforçador (amostra 11).

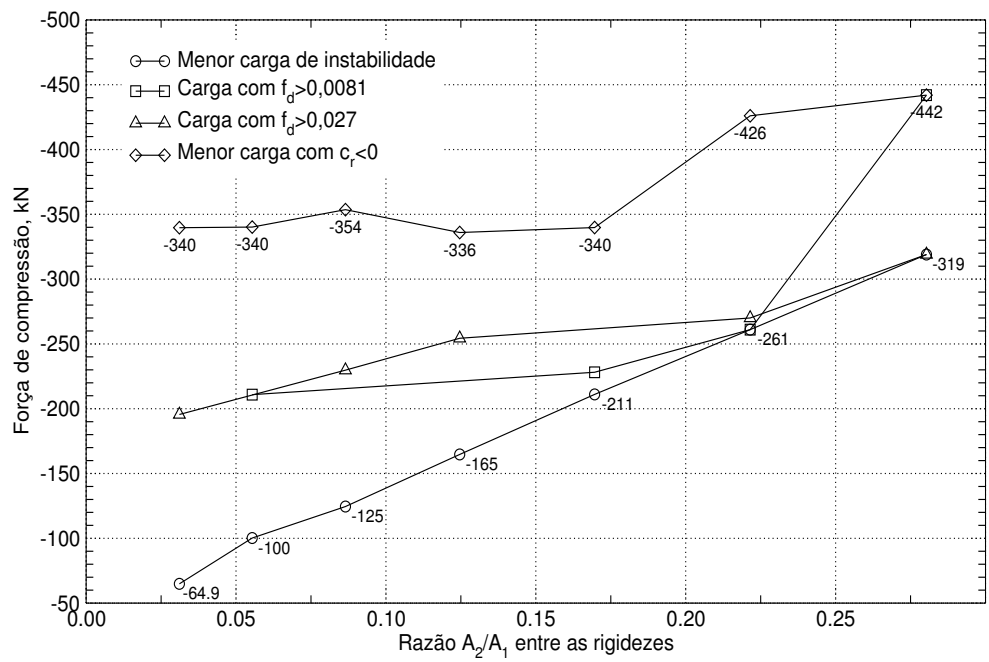


Figura 4.13: Resposta de carga crítica de instabilidade para casos de altura do reforçador (amostra 11).

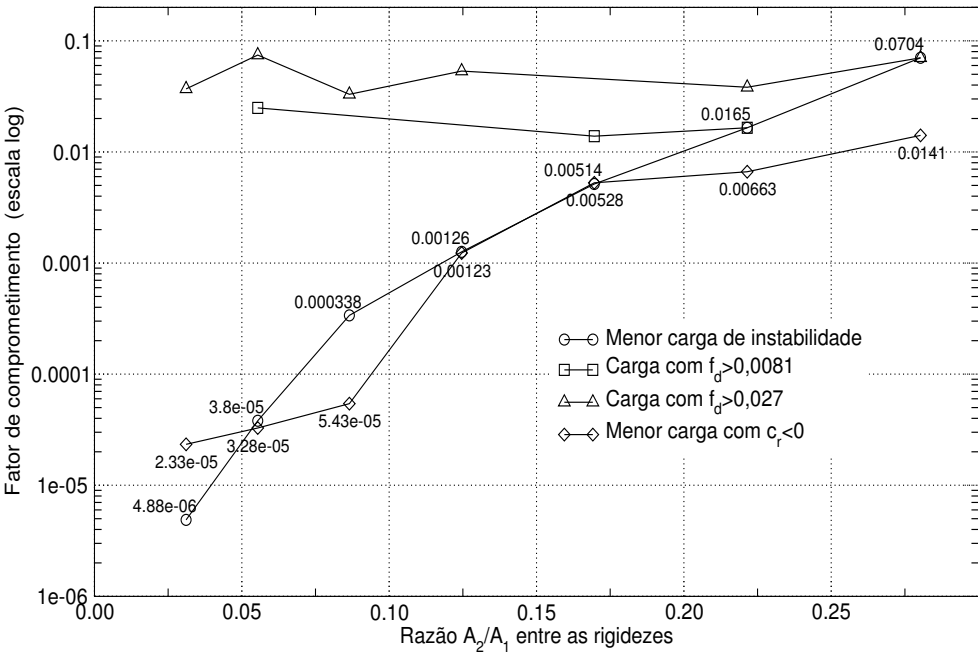


Figura 4.14: Fator de comprometimento do primeiro modo instável para vários casos de altura do reforçador (amostra 11).

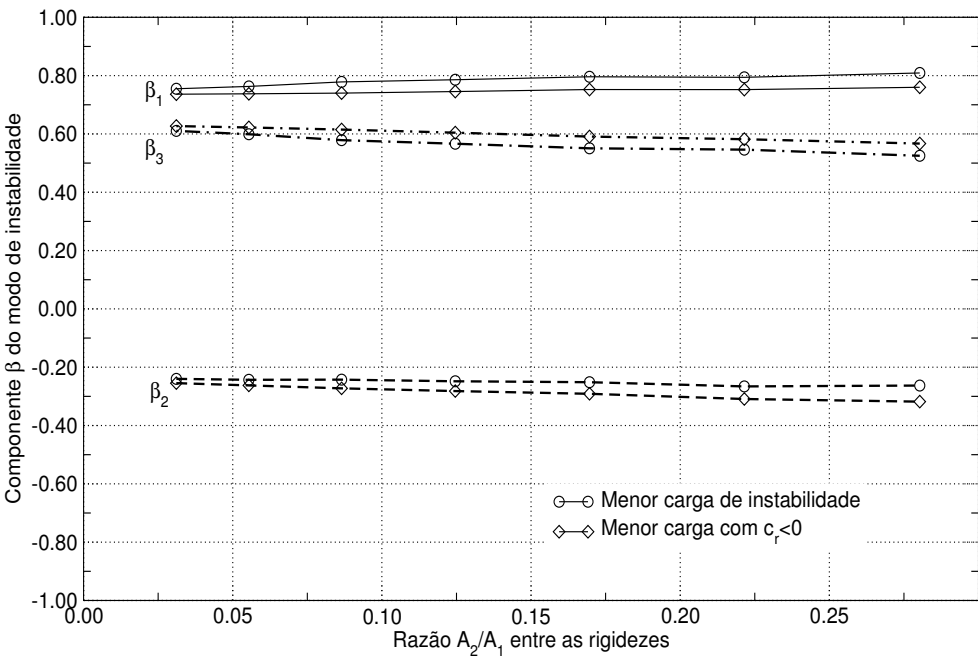


Figura 4.15: Fator de comprometimento do primeiro modo instável para vários casos de altura do reforçador (amostra 11).

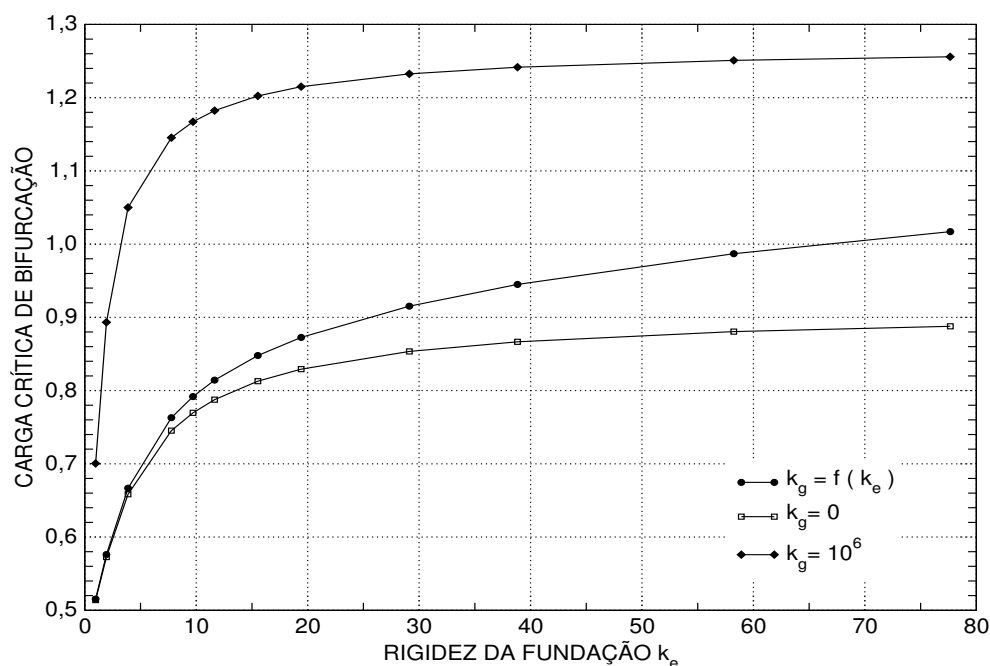


Figura 4.16: Evolução da carga crítica de bifurcação para variação da rigidez da fundação elástica para três alternativas de k_g . Fonte: [19].

4.4.3 Influência da rigidez radial

Em todos os casos de estudo apresentados, as propriedades das bandagens foram corrigidas para que se mantivesse a mesma rigidez à compressão que se observou nos ensaios mecânicos. Identificar os efeitos de tais modificações, então, se torna indispensável para o entendimento dos fenômenos envolvidos. Ademais, essa investigação subsidia a compreensão do efeitos de perda de propriedades da bandagem, identificado por RIEWALD[16] e também BRAGA[3, 5].

De maneira similar ao estudo da variação do ângulo de armadura, CUSTÓDIO[19] estudou os efeitos da rigidez da fundação elástica sobre a estimativa da força de compressão necessária para um ponto de bifurcação com $n = 1$ de um reforçador isolado. A figura 4.16 é um dos resultados obtidos na investigação.

Do ponto de vista operacional, há três meios de variar a rigidez radial a que as armaduras estão submetidas:

- Alterar o fator μ_c da bandagem, executar os programas pander e instab.

- Declarar ao programa instab o valor da rigidez radial k_{et} que será usada.
- Aplicar uma pressão interna ou externa no duto, comprimindo radialmente toda a estrutura compósita.

A primeira alternativa é trabalhosa, mas ela permite simular uma condição mais real, porque todo o equilíbrio da estrutura compósita é recalculado, produzindo novos valores não apenas de k_{et} , como também k_g , k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} e todas as componentes de força e deformação do caminho primário. Além do esforço computacional necessário, seu problema é que a variação efetiva da rigidez radial equivalente k_{et} é pequena, porque a formação de vazios (*gaps*) entre a armadura interna e a camada imediatamente abaixo torna a rigidez radial inferior k_i muito pequena, logo k_{et} também o é – e nada se pode fazer contra isso. Para um estudo paramétrico, onde se deseja exatamente exercitar o aumento e a redução da rigidez, esse comportamento é pouco interessante.

Por isso, na construção do programa instab previu-se que fosse possível declarar o valor da rigidez k_{et} ao invés de usar os dados advindos do programa pander. Assim, é possível estudar a resposta da armadura interna se os vazios não se formassem¹³, uma situação que é difícil de construir sem a aplicação de pressão nas camadas.

A terceira maneira de alterar a rigidez radial – aplicar pressão interna ou externa – merece um estudo em um trabalho próprio, pois há vários complicadores que se precisa tratar como a questão de estar o espaço anular alagado ou não, a efetividade da camada de resistência à pressão e muitos outros.

A variação do fator μ_c foi ensaiada numericamente para os casos especificados na tabela 4.16. Deve-se enfatizar que o código corrige o menor valor entre k_s e k_i durante o cálculo de k_{et} , evitando diferenças em ordem de grandeza maior que 10^4 – isso tem realmente influência nos resultados, felizmente favorável ao estudo de sensibilidade.

Os resultados de carga crítica de compressão contra μ_c são apresentados no gráfico da figura 4.17, onde sugere-se que a influência da rigidez é alta. Na figura 4.18, resultados de carga crítica contra deformação axial, expurgando assim os efeitos da rigidez à compressão diferente entre os casos. O estudo da relevância do modo e da evolução do próprio modo é feito no gráfico da figura 4.19. Finalmente, no gráfico da figura 4.20, apresentam-se os resultados das componentes dos modos de instabilidade.

¹³A formação de vazios suposta pelos modelos é ideal, suspeita-se que na situação real eles não se formam nas condições que se estabelece. Uma evidência disso é que a rigidez à torção medida experimentalmente não tem boa correlação com a prevista pelos modelos analíticos.

Tabela 4.16: Casos de variação de μ_c das bandagens (camada 2 da amostra 11).

Caso	$\mu_c^{(2)}$	k_{et}	k_g	$\frac{EA(cp)}{[MN]}$
3.A	0,1	5,99	0,00349	22,40
3.B	0,2	7,82	0,00456	27,93
3.C	0,5	13,3	0,00777	43,12
3.D	1,0	22,5	0,0131	64,81
3.E	1,5	31,8	0,0185	83,00
3.F	2,0	41,1	0,024	98,13
3.G	2,5	50,5	0,0294	111,14
3.H	3,0	59,9	0,0349	122,09
3.I	3,5	69,3	0,0404	132,08
3.J	4,0	80,2	0,0468	140,94
3.K	4,5	90,3	0,0527	148,94

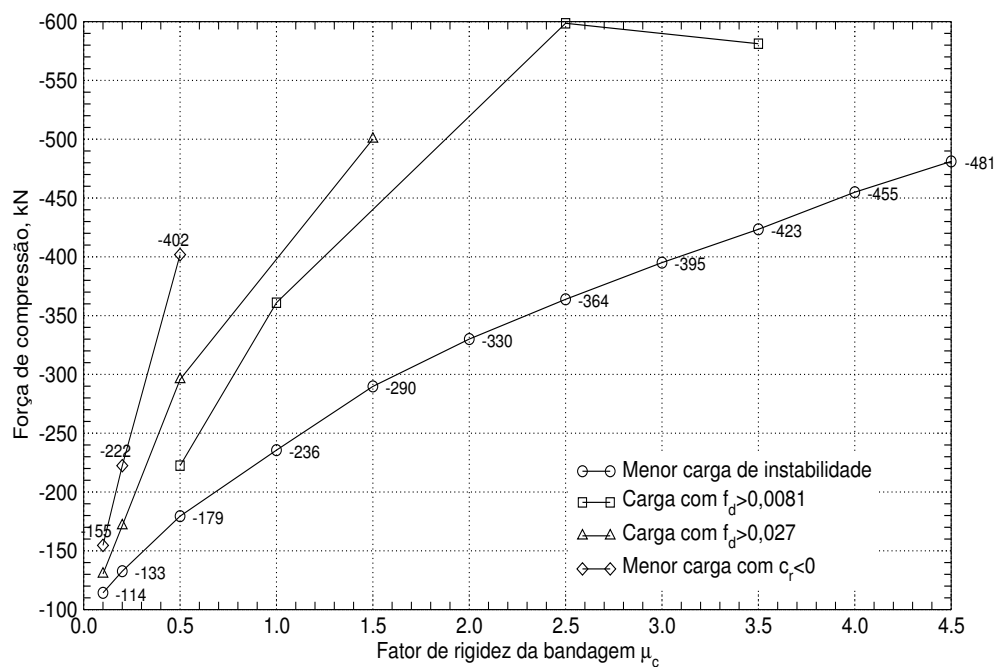


Figura 4.17: Variação da carga de instabilidade para vários casos de μ_c sobre a bandagem (amostra 11).

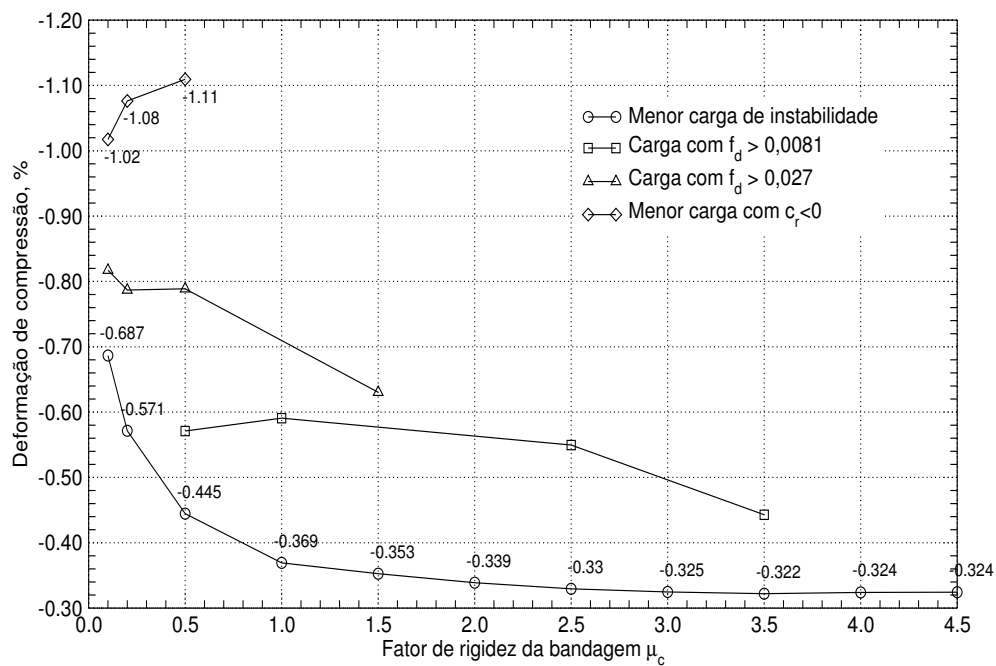


Figura 4.18: Variação da deformação onde há a instabilidade para vários casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).

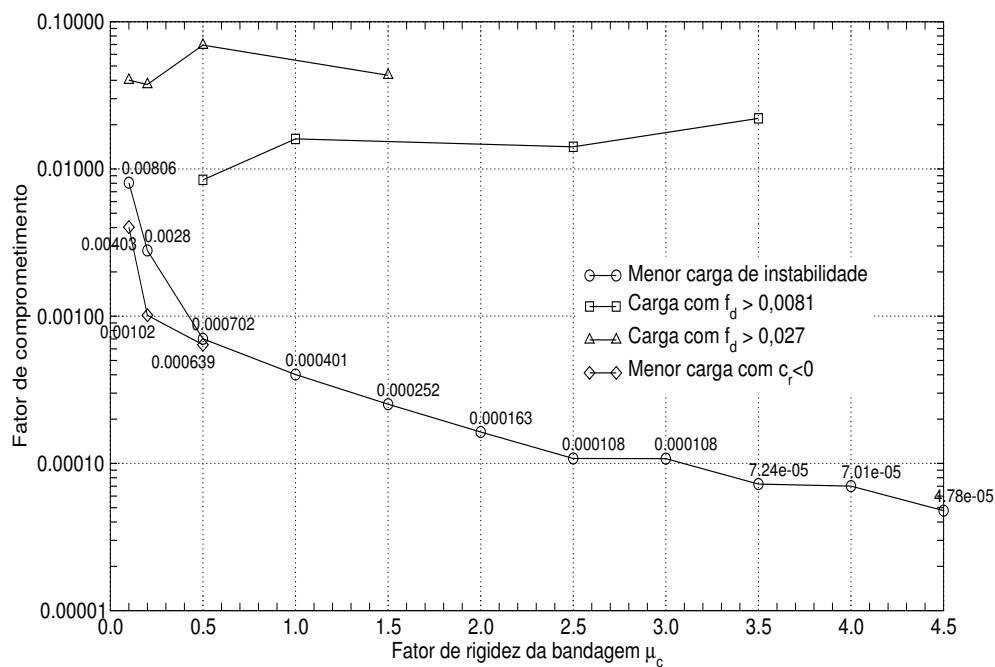


Figura 4.19: Variação do fator de comprometimento f_d e do modo n para casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).

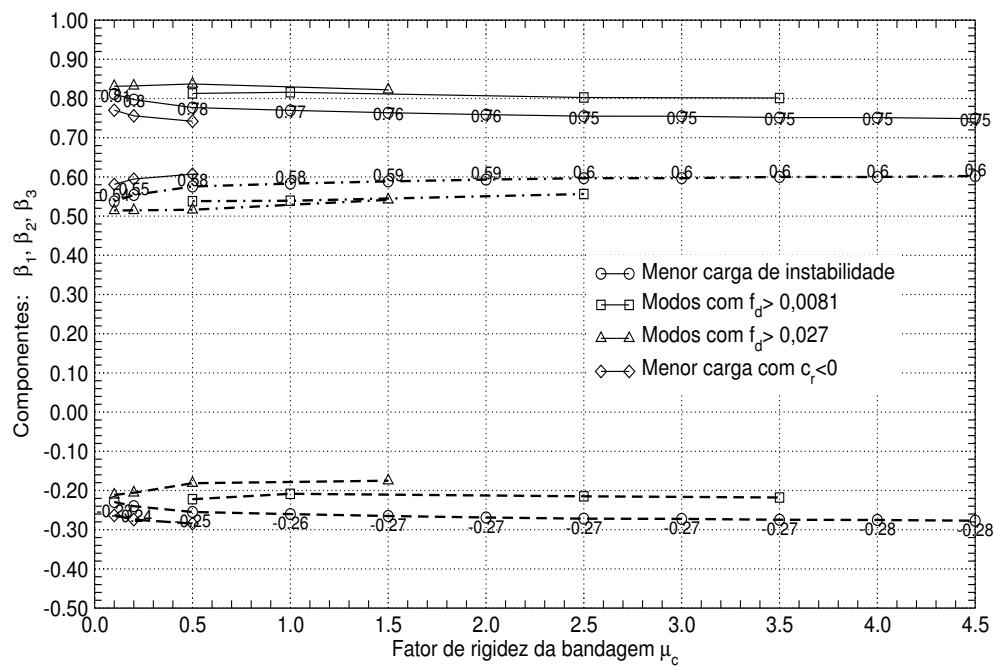


Figura 4.20: Variação das componentes $\beta_{1...3}$ para vários casos de variação da rigidez de bandagem (amostra 11).

Desde que apenas a variação de μ_c não é suficiente para um mapeamento mais completo da sensibilidade da resposta às alterações da rigidez radial, proveu-se o programa instab de maneiras de implementá-las explicitamente. Assim, os casos de rigidez de fundação elástica k_{et} listados na tabela 4.17 foram simulados numericamente.

Os resultados de crescimento da carga crítica de instabilidade contra a rigidez radial k_{et} são apresentados no gráfico da figura 4.21. A saturação observada em CUSTÓDIO[19] se repetiu no ensaio numérico do duto completo, apesar de não ficar claro na figura devido à escala logarítmica – no ponto em $k_{et}=1$, a derivada $d\underline{T}/dk_{et}$ vale -18,26 kN; em $k_{et} = 2$, ela vale -9,9 kN; em $k_{et}=16$, vale -5,05 kN e em $k_{et}=64$, vale -2,50 kN.

Assim, o efeito do aumento da rigidez radial k_{et} , ao menos dentro do campo de estudo realizado, é um aumento da carga crítica, embora em proporções cada vez menores, acompanhado de um decréscimo do fator de comprometimento f_d . Ambos os efeitos são benéficos à resistência do duto¹⁴.

¹⁴Entretanto, interpretando seu reverso, a perda de rigidez implica em carga críticas mais baixas e maiores fatores de comprometimento.

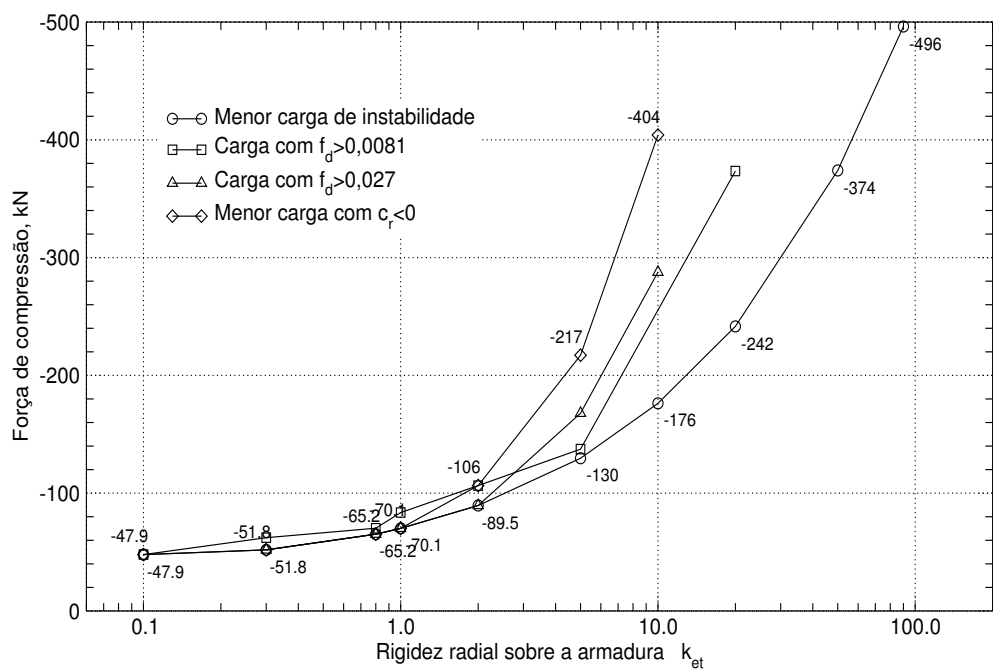


Figura 4.21: Variação da carga de instabilidade para vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).

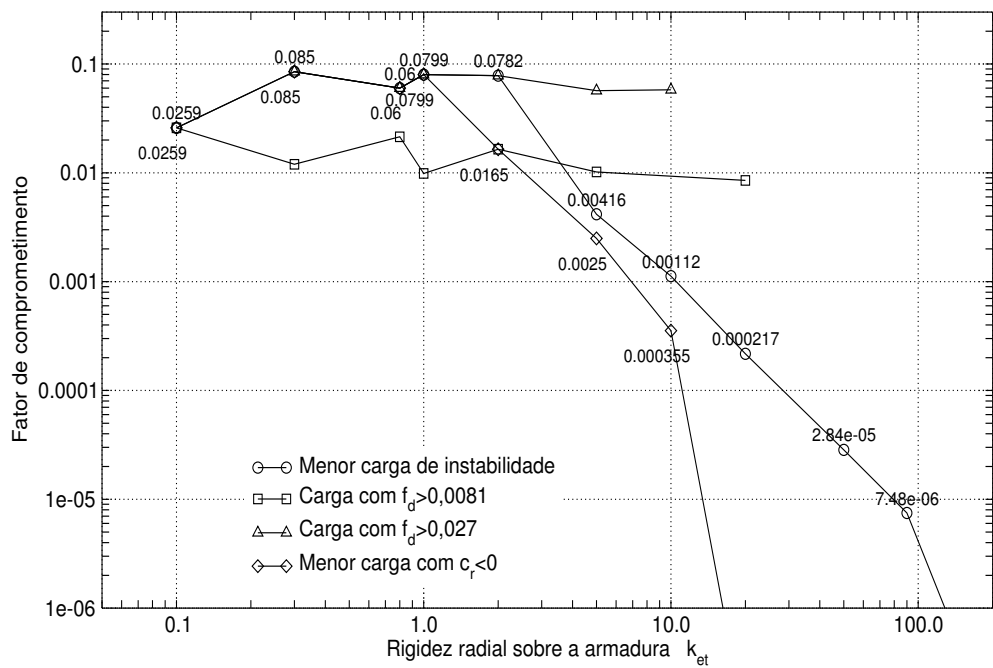


Figura 4.22: Variação do fator de comprometimento f_d para carga mínima de instabilidade em vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).

Tabela 4.17: Casos de variação de k_{et} explicitamente aplicados sobre armadura interna (amostra 11).

Caso	k_{et}	k_g
3.L	0,10	$5,83 \times 10^{-4}$
3.M	0,30	$1,75 \times 10^{-4}$
3.N	0,80	$4,67 \times 10^{-4}$
3.O	1,0	$5,83 \times 10^{-4}$
3.P	2,0	$1,17 \times 10^{-3}$
3.Q	5,0	$2,92 \times 10^{-3}$
3.R	10,0	$5,83 \times 10^{-3}$
3.S	20,0	0,0117
3.T	50,0	0,0292
3.U	90,0	0,0525
3.V	200,0	0,117
3.W	500,0	0,292
3.X	2000	1,17
3.Y	8000	4,67
3.Z	20000	11,7

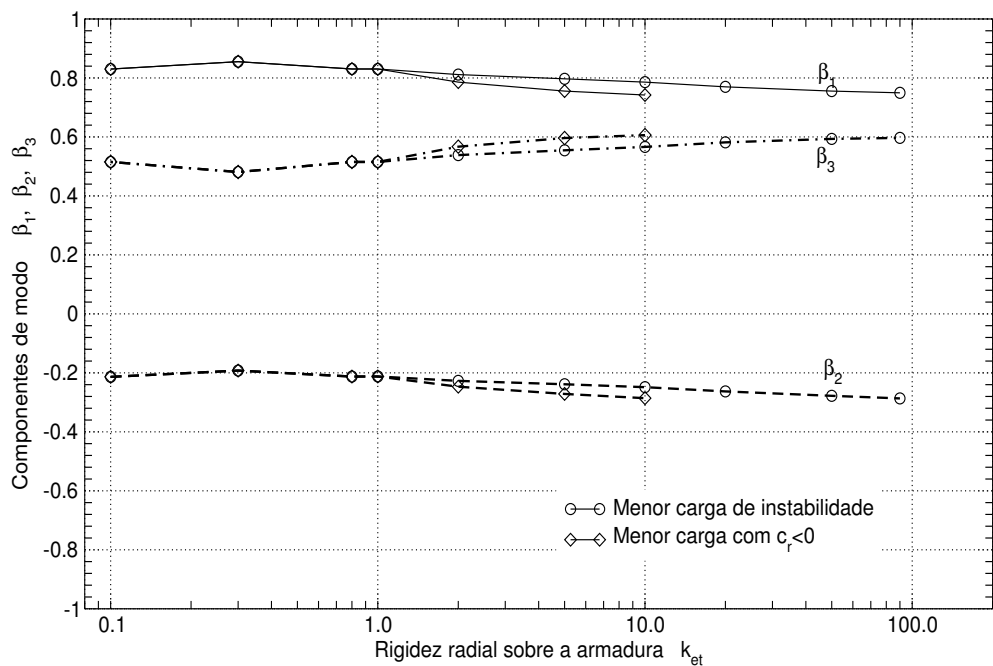


Figura 4.23: Variação das componentes $\beta_{1...3}$ para vários casos de rigidez radial k_{et} (amostra 11).

4.4.4 Influência da rigidez ao giro k_g da seção do reforçador

Em todos os casos ensaiados até agora, o valor da rigidez à rotação do reforçador em torno de seu próprio eixo foi determinada pelo programa instab por meio da expressão (3.20). Mediante tal acoplamento, aumento ou redução da rigidez radial é repassada à rigidez k_g . Esse estudo visa determinar qual são os efeitos da variação de tal parâmetro. Os casos de análise são apresentados na tabela 4.18. Os resultados de carga crítica contra rigidez k_g , impressos no gráfico da figura 4.24, evidenciam que pequenas alterações de tal parâmetro não afetam de modo significativo a carga crítica onde há a falha, ao menos para a natureza do duto flexível estudado. O fator de comprometimento f_d de cada ponto de instabilidade é registrado na figura 4.25. Maior correlação entre f_d e k_g também não é obtida senão para um valor de rigidez à torção bastante alto.

Tabela 4.18: Casos de variação de k_g explicitamente aplicados sobre armadura interna (amostra 11).

Caso	k_g
4.A	$3,9062 \times 10^{-4}$
4.B	$1,563 \times 10^{-4}$
4.C	0,0625
4.D	0,25
4.E	1
4.F	4
4.G	16
4.H	64
4.I	256

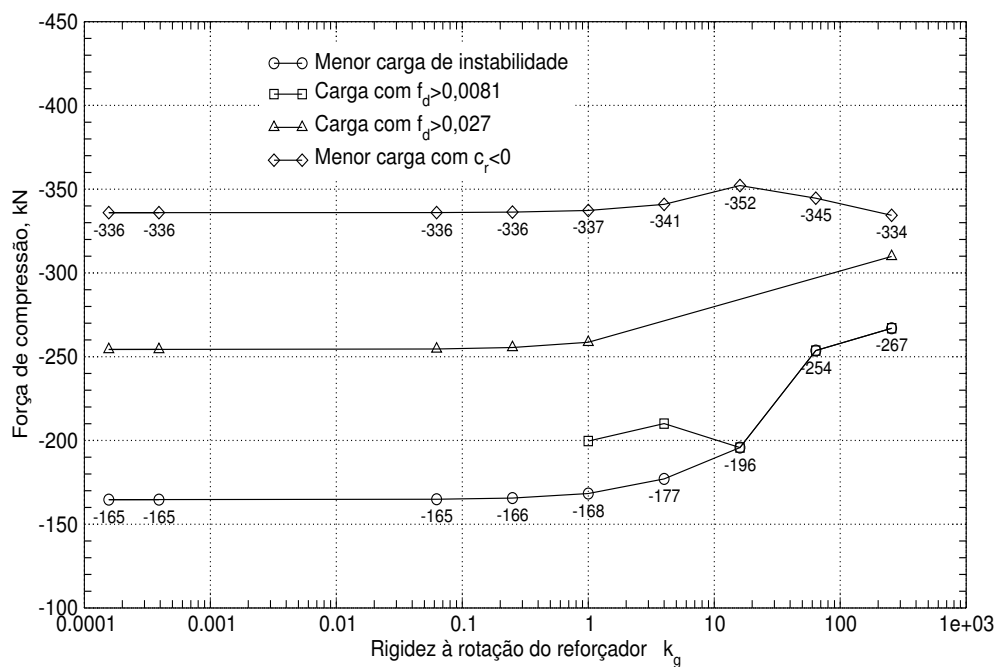


Figura 4.24: Variação da carga de instabilidade para vários casos de rigidez à torção k_g (amostra 11).

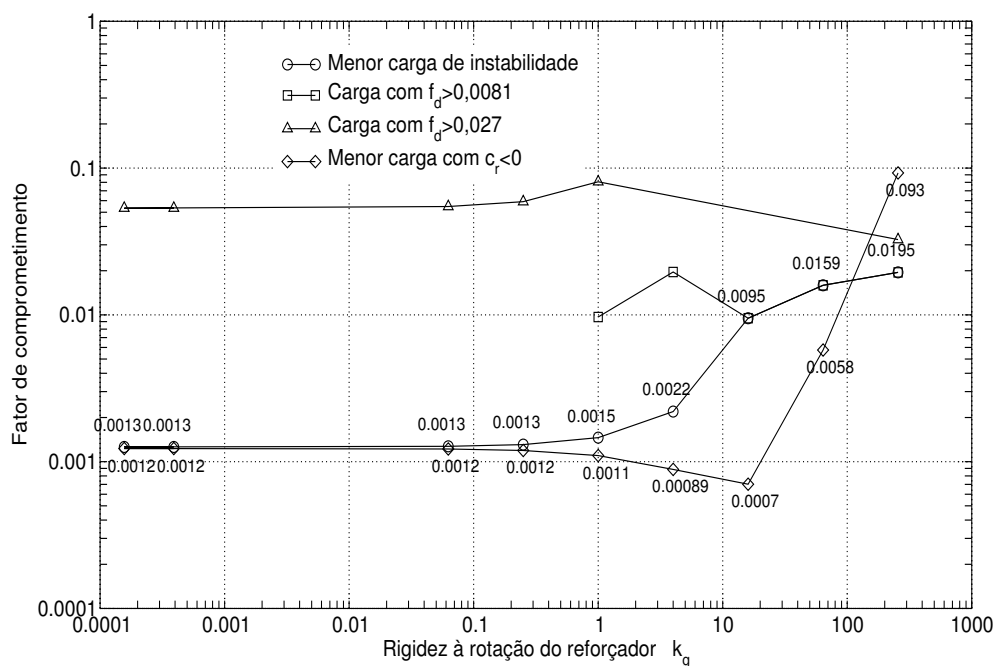


Figura 4.25: Variação do fator de comprometimento f_d para carga mínima de instabilidade em vários casos de rigidez à torção k_g (amostra 11).

4.4.5 Influência do comprimento da amostra

Um bom estudo do comprimento de amostra é, em geral, subsídio ao planejamento de ensaios mecânicos. Na análise feita usando condições de extremidade diferentes, CUSTÓDIO[19] chegou à conclusão de uma estabilização da carga de bifurcação após cinco ou seis passos de comprimento da armadura. Esse resultado é mostrado na figura 4.26. Do ponto de vista analítico, considerando a formulário que foi construído, desde que a relação n/n_ℓ se mantenha, não é esperado que os resultados variem. Logo a um modo de instabilidade n para um duto de comprimento ℓ_c haverá também um modo de instabilidade $2n$ para um comprimento $2\ell_c$ e assim por diante.

No entanto, há o complicador de que n precisa ser um número inteiro e positivo, logo a razão n/n_ℓ não pode se adaptar para *qualquer* variação de comprimento do duto. Há, por causa disso, um fenômeno interessante de “aglutinação de modos”: quando há um comprimento grande, os pontos de bifurcação são melhor distribuídos pelos modos; quando reduz-se o comprimento até um ou dois passos, eles se aglutinam em modos próximos. Desde que para um mesmo valor de n , pode haver no máximo 4 raízes da equação (3.45), não é possível manter todos os modos na solução. Então, a carga correspondente a bifurcação flutua, conforme se aproxima ou afasta de valores “especiais” de n/n_ℓ – que são os valores que satisfazem a condição (3.45).

No exercício numérico, foram considerados os casos mencionados na tabela 4.19. Há neles dois conjunto de comprimentos múltiplos (1, 2, 4, 6 e 12 metros; também 3,4 e 6,8 metros) que servem para examinar o comportamento explicado no primeiro parágrafo. O gráfico da figura 4.27 ilustra a resposta. O comprimento de 12 metros permite uma instabilidade cuja menor carga tem modo $n = 45$. Ao reduzir o comprimento pela metade, o valor de n deveria acompanhar para manter a mesma solução, no entanto 45 é um número ímpar, por isso exatamente a mesma configuração não é capaz de se manter. Entretanto, a solução com $n = 23$ para um comprimento de 6,0 metros possui todos os parâmetros muito semelhantes à primeira. Na medida que reduz-se o comprimento, o fenômeno de aglutinação causa a perturbação da solução e, em geral, cargas maiores são obtidas.

Tabela 4.19: Casos de variação do comprimento da amostra (amostra 11).

Caso	$\overset{\times}{\ell}_c$ [m]	$n_\ell^{(5)}$
7.A	1,0	1,609
7.B	1,1	1,770
7.C	1,2	1,931
7.D	1,3	2,092
7.E	1,4	2,253
7.F	1,5	2,414
7.G	1,75	2,817
7.H	2,0	3,219
7.I	2,3	3,702
7.J	2,7	4,346
7.K	3,4	5,472
7.L	4,0	6,438
7.M	5,0	8,047
7.N	6,0	9,657
7.O	6,8	10,94
7.P	12,0	19,31

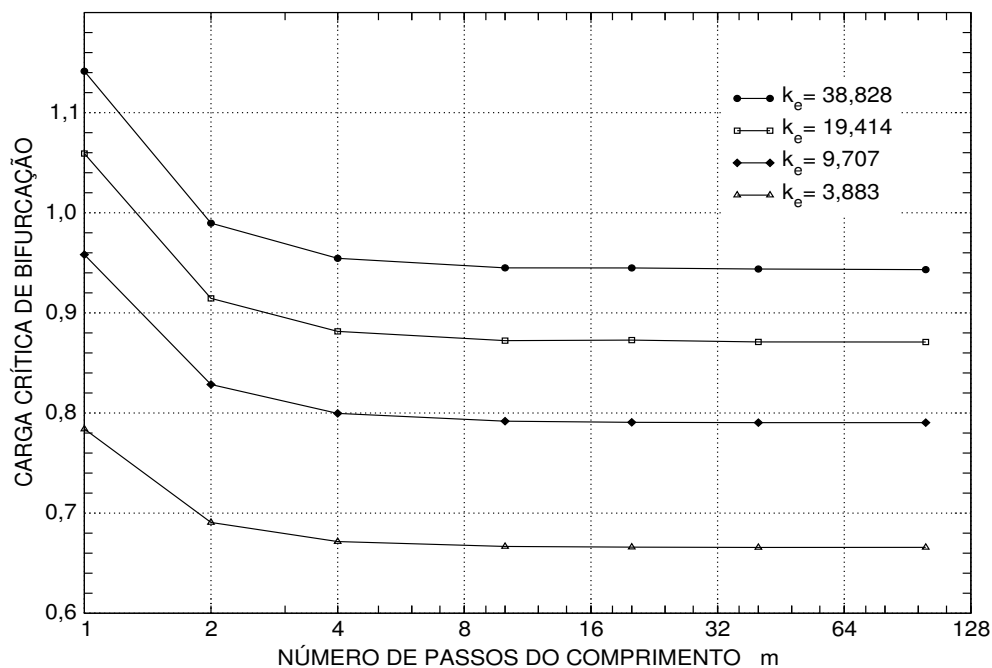


Figura 4.26: Variação da carga de bifurcação como resposta à mudança do comprimento do reforçador, para quatro casos de rigidez k_e . Fonte: [19].

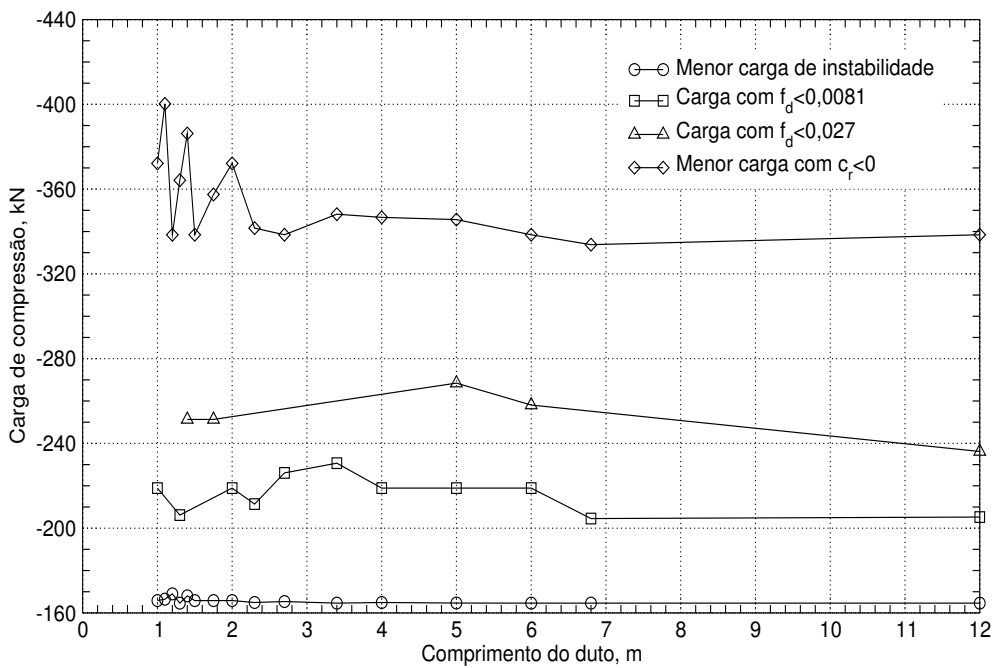


Figura 4.27: Resposta da carga para casos de variação do comprimento (amostra 11).

Capítulo 5

Conclusões

A predição da instabilidade das armaduras é um formidável desafio, que não se inicia nem se encerra nessa obra, mas simplesmente avança alguns passos. Até agora, o assunto se mostra uma fronteira tecnológica bastante árida, pois conjugam-se pouca informação teórica, poucos resultados experimentais e alguns conceitos que, nesse vazio, estabeleceram-se e que, de fato, simplificam o problema, mas afastam-no de uma modelagem correta. O trabalho experimental pioneiro de BRAGA[3, 5] foi um enorme avanço adentro desse tema inexplorado, mas não se articulou com um subsídio teórico essencial. Alguns conceitos – como o de que a instabilidade somente se manifestava nas formas radial ou lateral ou de que a instabilidade implicava necessariamente em uma falha súbita – tiveram de ser desconstruídos durante a formulação. Muitos pontos aqui apresentados representam inovação, alguns são criticáveis – sempre os há em modelos analíticos –, mas há certamente algum avanço no estado da arte.

O princípio para a formação de um modelo de solução se baseou em sete ações fundamentais:

- a formulação do problema considerando que o caminho primário é uma solução sempre possível onde as componentes de força e deformação independem do parâmetro de comprimento de arco.
- a proposição de um parâmetro ϱ associado aos ângulos de Euler e à taxa de variação do raio de assentamento.
- a formulação do equilíbrio em um sistema de coordenadas cilíndricas.

- a linearização da reação de outras camadas por meio de valores de rigidez k_{et} , k_g e termos de acoplamento k_{11} , k_{12} , k_{21} e k_{22} computados e atualizados em cada ponto do caminho primário.
- o emprego da técnica da perturbação de Poincaré.
- o isolamento de três parâmetros cinemáticos que definem o modo de bifurcação e a constituição de um sistema mínimo de equações diferenciais baseadas somente em tais parâmetros.
- o emprego da condição de compatibilidade com os deslocamentos de outras camadas como condição de extremidade para o PVE.

Em alguns pontos do trabalho, encontraram-se dificuldades analíticas que solicitaram a tomada de decisões, o estabelecimento de suposições e conceitos. Algumas delas pode-se destacar:

- Quando o desenvolvimento das formulações de equilíbrio usando as componentes de atrito que causam cargas q_θ e q_z se revelou extremamente intrincado, pois sua direção é oposta aos deslocamentos no plano θz e sua intensidade é limitada a uma fração da força distribuída radial, concluiu-se que seu efeito era pequeno nos dutos flexíveis mais modernos, onde o fator de atrito entre as armaduras é mínimo, e podia ser ignorado em pró da superação de outras dificuldades.
- A bilinearidade da fundação elástica sob a armadura torna a resolução analítica do sistema de equações diferenciais muito difícil. Para galgar essa dificuldade, um valor k_{et} determinado por equivalência de energia de deformação é usado como rigidez radial. Todavia, depois de superada a etapa de resolução do sistema de equações diferenciais, já durante o cálculo dos coeficientes relacionados à resposta em pós-instabilidade, a manutenção dessa simplificação da bilinearidade provoca problemas, pois supõe que o reforçador experimenta uma expansão radial média, proporcional ao coeficiente c_r , com a mesma oposição que o deslocamento no sentido oposto. Não foi proposto claramente nessa tese um procedimento para tratar esse problema, mas há algumas evidências de que simplesmente tratar a expressão da energia potencial de forças externas para que esta represente mais corretamente a bilinearidade possa ser efetivo – pontos ditos instáveis pela formulação atual, que usa k_{et} , podem ser realmente estáveis.

- A rigidez ao giro k_g do reforçador ao redor de seu próprio eixo foi considerada diretamente proporcional à rigidez radial equivalente k_{et} calculada como apresentado no item anterior.
- A necessidade de estabelecer condições de extremidade para o PVE esbarrou na dificuldade de não criar paradoxo com o Postulado 1 e a saída encontrada - impor a orientação dos vetores diretores e a compatibilidade com outras camadas - se mostrou sustentável, em lugar da fixação de raio e ângulo de assentamento conforme havia sido proposto pelo autor em trabalho anterior[19] - que conflitava com a condição de compatibilidade na extremidade.
- A imposição da condição de compatibilidade em distensão e giro com outras camadas através da matriz de acoplamento representada pelos coeficientes k_{11} , k_{12} , k_{21} e k_{22} , atualizada a cada passo de carregamento, foi uma solução baseada nos primeiros modelos para determinar a resposta de cabos elétricos armados (como KNAPP[25], etc). Apesar de sua implementação ter sido difícil, ela felizmente foi bem sucedida.

A solução analítica para a instabilidade de armaduras apresenta apenas termos periódicos, diverso da morfologia de falha notada nos experimentos. Durante a investigação, arrolaram-se alguns elementos capazes de gerar esse aspecto de falha¹:

- Localização e outras formas de solução não-periódica: soluções com a característica que chama-se convencionalmente de localização são obtidas no problema de uma viga elástica em fundação elástica não-linear como mostrado em HUNT *et al.*[26]. O modelo, porque lineariza a resposta da fundação elástica (usando a rigidez radial k_{et}) em torno de um ponto do caminho primário, não é capaz de tratar esse fenômeno. Soluções ditas “moduladas”, no qual termos periódicos e exponenciais são superpostos não são compatíveis com dutos infinitamente longos. Entretanto, há elementos matematicamente possíveis da solução que não foram ensaiados neste estudo, como, por exemplo, a possibilidade de duas raízes iguais de ω na equação (3.45).
- Progressão e resistência residual de outras camadas: além de lidar apenas com a primeira perturbação, a linearização aplicada sobre a reação de todas as outras camadas tem uma região de validade muito pequena, pois os próprios valores de

¹Alguns mesmo foram ensaiados, mas foram inconclusivos e, portanto, não há interesse de documentá-los aqui.

rigidez k_{et} , k_g , k_{11} , k_{12} , k_{21} e k_{22} são rigorosamente afetados pela alteração da estrutura compósita que a instabilidade causa. Na progressão da falha, algumas camadas reagem com maior enrijecimento; em outras, o contrário. A combinação de tais mecanismos é difícil de tratar.

- Superposição de modos de instabilidade: muitas vezes, há soluções com modos bastante próximos, alguns com fator de comprometimento baixo o suficiente para que a estrutura sustente um carregamento adicional sem obter grandes deformações. Se a modificação da configuração é muito pequena, de modo que ela funciona apenas como uma imperfeição inicial, uma carga suplementar pode levar até um outro modo de instabilidade próximo, que se superporá àquele iniciador. Essa superposição está além do escopo desse trabalho, mas ela pode ter resultados interessantes².

A pesquisa teve a preocupação de criar uma ferramenta computacional para aplicação do modelo. Nessa faina experimentou-se os problemas naturais à programação de algoritmos intrincados. A implementação atual se baseia na avaliação de parâmetros do caminho primário. **Essa estratégia não é conveniente muito depois que um ponto de instabilidade é ultrapassado.** A configuração de equilíbrio ligeiramente acima dos pontos de instabilidade com fator de comprometimento muito baixo pode ser compreendida como aquela relacionada ao caminho primário somada de uma imperfeição inicial tão pequena quanto o fator de comprometimento e a distância até o ponto de instabilidade. Tendo essa compreensão, continuar a procura de pontos de instabilidade mais detrimen-tais ao longo do caminho primário tem sentido, mas é necessária a consciência de que isso representa uma aproximação. Na medida que distancia-se do ponto de bifurcação, o caminho secundário pode também distanciar-se do caminho primário e seus parâmetros divergem dos providos por aquela solução.

O ensaio numérico e a comparação com as estimativas numérico-analíticas consolidou algumas conclusões:

- há muitas incertezas no problema – algumas nos ensaios, mas a maioria nos dados de entrada para a construção do modelo numérico – e elas claramente se propagam até os resultados.
- as armaduras internas são mais susceptíveis às falhas, por causa da formação de vazios (*gaps*) na estrutura compósita.

²Essa superposição lembra o fenômeno de batimento de ondas.

- há a passagem por vários pontos de bifurcação. Quando existe fundação elástica com rigidez suficiente, os primeiros pontos de bifurcação são estáveis e os primeiros pontos de instabilidade foram pouco detrimentais para as amostras ensaiadas numericamente.
- a estimativa usando a rigidez da fundação elástica equivalente k_{et} estima pontos de bifurcação aparentemente corretos, porém a avaliação de estabilidade ou não de tais pontos não foi corretamente feita pela formulação proposta. O principal efeito é que pontos que se estimara instáveis não mostraram instabilidade nos testes mecânicos. A filtragem para aceitar a instabilidade apenas em pontos onde $c_r < 0$ na armadura interna melhorou a correlação, mas ainda assim essa predição não foi boa.
- é difícil arbitrar qual o ponto onde há iniciação de falha nos testes.
- a predição da deformação axial onde a falha ocorreria foi melhor que a predição da carga.
- além da própria instabilidade, é preciso preocupar-se com outros fatores durante o projeto do duto: a perda de rigidez da camada de bandagem, o espaçamento excessivo entre os reforçadores de uma mesma camada, etc.

Sobre o 4º item da lista acima, ele sugere que a formulação analítica para a energia de potencial de forças externas que foi enxertada no programa instab não é aplicável para a natureza do problema, pois desconsidera a bilinearidade da rigidez radial sobre cada reforçador. Alguns comentários adicionais são necessários sobre esse tema.

O processo para determinação de pontos de bifurcação se baseia apenas em incógnitas da família $\mathbb{F}_1$, que tem comportamento periódico e ordem de grandeza muito pequena. Com exceção de $m_{3(1)}$, esses termos são pouco afetados pela bilinearidade desde que a rigidez radial considerada esteja próxima daquela menor entre k_i e k_s . As expressões de c_r , c_{ϑ_1} e todas as incógnitas da família $\mathbb{F}_2$ possuem termos periódicos (usualmente relacionados a integrais de incógnitas da família $\mathbb{F}_1$) e termos constantes (de integração). Essas constantes em geral possuem maior intensidade e implicam em grande parcela dos deslocamentos calculados para o regime de pós-instabilidade inicial. A bilinearidade afeta significativamente os valores de $q_{r(1)}$ e ligeiramente os valores de $m_{3(1)}$, pois a diferença entre k_{et} e k_s é tão grande como 7,8 e 208 respectivamente³. Na expressão da 2ª variação $\delta^2\Pi$ da energia, o termo $-1/2 \cdot q_{r(1)} R_{(1)}$ tem um papel relevante,

³Esses valores se referem ao caso do primeiro ponto de instabilidade da amostra 11.

pois desequilibra o valor da equação, sendo sempre positivo. Assim, é natural que um aumento substancial da rigidez radial desloque⁴ o valor desse termo na equação da energia na direção positiva e portanto implique em um sistema mais estável que o que a formulação atual está prevendo.

Esse erro é muito menor quando o c_r é negativo, pois o deslocamento médio da armadura na direção da menor rigidez radial k_i faz que o valor de $q_{r(1)}$ estimado seja próximo do valor real.

A correção desse problema não é fácil; ela solicita a revisão de vários pontos do modelo para evitar inconsistência e provavelmente torna necessário o cálculo de alguns parâmetros por métodos numéricos ao invés do cálculo analítico.

A formação de vazios na estrutura tem um papel importante, em especial na interface imediatamente abaixo da armadura interna. O efeito do alagamento do espaço anular, onde a pressão externa é aplicada sobre uma camada homogênea interna, potencializa a abertura de tais vazios, logo funciona como um mecanismo que favorece a instabilidade daquela armadura. Há algumas evidências de que, na realidade, os vazios não se estabelecem regularmente ao longo do comprimento, ou seja, eles não se formam como os modelos teóricos predizem. Lembre-se que é também efeito de vazios a menor rigidez à torção em um dos sentidos de rotação do flexível e, por força da diferença entre modelo numérico e resposta de protótipo nessa questão, a rigidez à torção experimentalmente medida nunca tem boa correlação com a estimativa analítica, especialmente para o sentido de giro em que há abertura de maiores vazios.

Em relação ao potencial para otimização da estrutura dos dutos flexíveis analisados, os resultados da análise de sensibilidade indicaram que, salvo quando ela possui vícios de projeto que a incapacita ao serviço, infelizmente há pouco espaço para um projeto obter ganhos consideráveis de resistência à compressão por meio de variação de alguns parâmetros.

Por outro lado, esses resultados sugerem que um duto flexível intacto, com bandagens semelhantes àsquelas encontradas nas amostras 10 e 11, possui boa resistência residual, porém ela desaparece sob efeito de qualquer deterioração daquela camada. Outras conclusões como essa procedem da análise de sensibilidade. De fato, uma das principais

⁴Durante a dedução da expressão de k_{et} , supôs-se que, quando há uma condição de bilinearidade, o reforçador se acomodaria em um ponto mais confortável, movendo-se acima ou abaixo, até encontrar uma posição de equilíbrio entre os trechos expostos a uma rigidez maior e uma rigidez menor. Entretanto, no problema real, essa “acomodação” do tendão está submetido a um equilíbrio muito mais sofisticado, que é o que determina o valor de c_r . Portanto, o procedimento para o cálculo de k_{et} também precisa de revisão.

vantagens de dispor de um modelo analítico implementado computacionalmente é a possibilidade de realizar estudos como esse.

Há vários pontos que merecem trabalho adicional de pesquisa. Os principais são:

- O modelo de bandagem precisa de revisão para que se aproxime da resposta real. Suas propriedades são importantes demais para serem tratadas de maneira simplória.
- A questão da bilinearidade da fundação elástica é também fundamental. As evidências experimentais e algumas das idéias colocadas ao longo do texto sugerem que, depois de obtida a solução dos pontos de bifurcação, os termos do início do caminho secundário e as expressões de energia não devem mais usar a rigidez radial equivalente k_{et} , mas sim voltar a considerar a bilinearidade.
- A despeito dos resultados de análise de sensibilidade indicarem um efeito pequeno da rigidez à rotação k_g da seção do reforçador, uma revisão da maneira simplificada como se propôs a rigidez ao giro k_g diretamente proporcional à rigidez radial k_{et} é recomendável – em especial, à luz da questão de bilinearidade.
- Algumas singularidades possíveis merecem um estudo adicional, como: a possibilidade de um ponto do caminho primário representar duas raízes do(s) determinante(s) de um ou mais modos de instabilidade simultaneamente, uma solução especial do sistema de equações (3.43) onde $\beta_2 = 0$ (vide prova A.3.7, na página 150).
- Há necessidade de outros ensaios mecânicos de compressão até a falha com o registro de parâmetros importantes como a expansão radial e o giro das amostras (que foram medidos sem muita precisão em [3]). Se possível, deve-se selecionar amostras de dutos cuja falha aconteça abaixo do “escoamento” do material da bandagem, evitando assim a superposição de efeitos de instabilidade e não-linearidade de material. Ademais, deve-se pensar em maneiras para determinar o comportamento real dos vazios na estrutura de multicamadas e, em etapa futura, tentar incorporá-lo em modelos híbridos, analíticos e experimentais.

Como comentário final, apesar de algum avanço representado por essa pesquisa, seus resultados não são suficientes para eliminar os onerosos testes de qualificação de dutos no mar (*DIP tests*). Ainda há passos a cumprir antes que seja possível eliminá-los.

Bibliografia

- [1] FÉRET, J., BOURNAZEL, H. “Calculation of stresses and slip in structural layers of unbounded flexible pipes”. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 109, pp. 263–269, 1987.
- [2] AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. “Recommended Practice 17B - Flexible pipe”. American Petroleum Institute. Washington, March 2002.
- [3] BRAGA, M. *Instabilidade de Armaduras de Tração de Linhas Flexíveis*. Tese (D.Sc.), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.
- [4] CUSTÓDIO, A. *Modelagem Numérica do Comportamento Axissimétrico de Umbilicais Submarinos*. Dissertação (M.Sc.), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.
- [5] BRAGA, M. *Instabilidade de armaduras de tração de linhas flexíveis*. Rel. Tec., Petrobras/CENPES/PDP/TMEC. Rio de Janeiro, março 2003.
- [6] RAMOS JR, R. *Modelos Analíticos no Estudo do Comportamento Estrutural de Tubos Flexíveis e Cabos Umbilicais*. Tese (D.Sc.), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- [7] KIRCHHOFF, G. “Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes”. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 56, pp. 285–313, 1859.
- [8] LOVE, A. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. New York: Cambridge University Press, 1927.
- [9] TIMOSHENKO, S. *Strength of Materials - Advanced Theory and Problems*. 3rd ed. New Jersey: D Van Nostrand Co. Inc., 1956.
- [10] ANTMAN, S. *The theory of rods*. In: *Handbuch der Physik*. [S.l.]: Springer, 1972. v. 6.

- [11] HETENYI, M. *Beams on Elastic Foundation*. [S.l.]: The University of Michigan Press, 1946.
- [12] LEE, S., WAAS, A. “Initial post-buckling behavior of a finite beam on an elastic foundation”. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, v. 31, n. 3, pp. 313–328, 1996.
- [13] COSTELLO, G. *Theory of Wire Rope*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [14] CONWAY, T., COSTELLO, G. “Birdcaging in wire rope”. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 116, pp. 822–831, 1990.
- [15] STUMP, D., HEIDJEN, G. van der. “Birdcaging and the collapse of rods and cables in fixed-grip compression”. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, pp. 4265–4278, 2001.
- [16] RIEWALD, P. “Performance analysis of an aramid mooring line”. In: *Proceedings of the 18th Offshore Technology Conference*. [S.l.: s.n.], 1986. pp. 305–316.
- [17] TROINA, L. *et al.* “Birdcaging in flexible pipes”. In: *Proceedings of the Third Workshop in Subsea Pipelines*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2002.
- [18] SOUSA, J. *Análise Local de Linhas Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese (D.Sc.), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.
- [19] CUSTÓDIO, A. “Subsídios a um modelo de instabilidade em armaduras”. III Exame de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Junho 2003.
- [20] CUSTÓDIO, A. “Revisão de modelos para análise local de estruturas com reforçadores helicoidais sob tração e torque”. II Exame de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Junho 2003.
- [21] POINCARÉ, H. *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892.
- [22] NAYFEH, A. *Introduction to Perturbation Techniques*. 1st ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1981.
- [23] CRUZ, F. *Análise Estrutural de Risers Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (M.Sc.), Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

- [24] AUTOMATION CREATIONS, INC. “MatWeb”. Automation Creations, Inc. url: <http://www.matweb.com>, 2005.
- [25] KNAPP, R. “Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion”. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 515–529, 1979.
- [26] HUNT, G., WADEE, M., SHIACOLAS, N. “Localized elasticæfor the strut on the linear foundation”. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, pp. 1033–1038, December 1993.
- [27] CUSTÓDIO, A. “Revisão de modelos para cinemática e equilíbrio estático de estruturas unidimensionais sem empenamento e de material hiperelástico”. I Exame de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Setembro 2001.
- [28] WITZ, J. “A case study in the cross-section analysis of flexible risers”. *Marine Structures*, v. 9, pp. 885–904, 1996.

Apêndice A

Provas

Provas do Capítulo 2

A.2.1 Equilíbrio de um cilindro espesso sob pressão interna, externa, tração e torque sob pequenas deformações

A distribuição das tensões no contínuo das paredes de um cilindro espesso é dado pela função potencial elástica de tensões

$$\Phi_{ch} = c_1 z \ln \check{R} + c_2 \left(\check{R} \right)^4 + c_3 z \left(\check{R} \right)^2 + c_4 z^3 \quad (1)$$

Supondo que as deformações circunferenciais são moderadas, então os coeficientes da função Φ_{ch} são ajustados para satisfazer as condições de contorno e portanto obtém-se:

$$\check{\sigma}_{zz}^{(i)} = \frac{\check{T}^{(i)}}{\check{S}^{(i)}} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{rr}^{(i)}|_R = & -\check{p}_{int}^{(i)} \left\{ \left(\frac{\check{R}_{int}^{(i)}}{\check{R}} \right)^2 \left[\frac{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R} \right)^2}{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2} \right] \right\} - \\ & -\check{p}_{ext}^{(i)} \left\{ \left(\frac{\check{R}_{ext}^{(i)}}{\check{R}} \right)^2 \left[\frac{\left(\check{R} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2}{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} \Big|_R = & \dot{p}_{int}^{(i)} \left\{ \left(\frac{\check{R}_{int}^{(i)}}{\check{R}} \right)^2 \left[\frac{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 + \left(\check{R} \right)^2}{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2} \right] \right\} - \\ & - \dot{p}_{ext}^{(i)} \left\{ \left(\frac{\check{R}_{ext}^{(i)}}{\check{R}} \right)^2 \left[\frac{\left(\check{R} \right)^2 + \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2}{\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2c)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta z}^{(i)} \Big|_R = \frac{\check{Q}^{(i)} \check{R}}{\check{J}^{(i)}} \quad (2d)$$

... onde:

$$\check{S}^{(i)} = \pi \left[\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right], \quad \check{J}^{(i)} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^4 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^4 \right]$$

É útil notar que a soma $\left(\dot{\sigma}_{rr}^{(i)} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} \right) \Big|_R$ é dada por:

$$\left(\dot{\sigma}_{rr}^{(i)} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} \right) \Big|_R = 2 \frac{\left[\dot{p}_{int}^{(i)} \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2 - \dot{p}_{ext}^{(i)} \left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 \right]}{\left[\left(\check{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\check{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} \quad (3)$$

Através das relações entre tensão e deformação conhecidas como **relações constitutivas**, é possível evoluir na dedução:

$$\check{\epsilon}_{rr}^{(i)} = \frac{\dot{\sigma}_{rr}^{(i)}}{E_s^{(i)}} - \frac{\nu_s^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left(\dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} + \dot{\sigma}_{zz}^{(i)} \right) \quad (4a)$$

$$\check{\epsilon}_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{\dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)}}{E_s^{(i)}} - \frac{\nu_s^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left(\dot{\sigma}_{rr}^{(i)} + \dot{\sigma}_{zz}^{(i)} \right) \quad (4b)$$

$$\check{\epsilon}_{zz}^{(i)} = \frac{\dot{\sigma}_{zz}^{(i)}}{E_s^{(i)}} - \frac{\nu_s^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left(\dot{\sigma}_{rr}^{(i)} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} \right) \quad (4c)$$

$$\check{\epsilon}_{\theta z}^{(i)} = \frac{2 \left(1 + \nu_s^{(i)} \right)}{E_s^{(i)}} \dot{\sigma}_{\theta z}^{(i)} \quad (4d)$$

Por outro lado, as deformações $\check{\epsilon}_{rr}$, $\check{\epsilon}_{\theta\theta}$, $\check{\epsilon}_{zz}$ e $\check{\epsilon}_{\theta z}$ se escrevem em função da distensão $\check{\epsilon}$, giro por comprimento $\check{\gamma}$ e raio da camada $\check{R}^{(i)}$ mediante as seguintes **relações**

cinemáticas:

$$\dot{\epsilon}_{rr}|_R = \frac{d\dot{R}}{d\dot{R}}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta}|_R = \frac{\dot{R}}{\dot{R}} - 1, \quad (5a)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} \approx \dot{\epsilon}, \quad \epsilon_{\theta z}|_R = \dot{\gamma} \dot{R} \quad (5b)$$

Conjugando as expressões das tensões, as relações cinemáticas e constitutivas:

$$\dot{\epsilon} \approx \frac{\dot{T}^{(i)}}{E_s^{(i)} \dot{S}^{(i)}} - \frac{2\nu_s^{(i)}}{E_s^{(i)}} \frac{\left[\dot{p}_{int}^{(i)} \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 - \dot{p}_{ext}^{(i)} \left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 \right]}{\left[\left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} \quad (6a)$$

... logo:

$$\dot{T}^{(i)} = \dot{S}^{(i)} \left\{ E_s^{(i)} \dot{\epsilon} + 2\nu_s^{(i)} \frac{\left[\dot{p}_{int}^{(i)} \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 - \dot{p}_{ext}^{(i)} \left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 \right]}{\left[\left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} \right\} \quad (6b)$$

As expressões das variações de raio tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}_{ext}^{(i)}}{\dot{R}_{ext}^{(i)}} &= 1 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}|_{R_{ext}^{(i)}} = \\ &= 1 + 2 \frac{\dot{p}_{int}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \frac{\left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2}{\left[\left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} - \\ &\quad - \frac{\dot{p}_{ext}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left\{ \frac{\left[\left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 + \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]}{\left[\left(\dot{R}_{ext}^{(i)} \right)^2 - \left(\dot{R}_{int}^{(i)} \right)^2 \right]} + \nu_s^{(i)} \right\} - \nu_s^{(i)} \frac{\dot{T}^{(i)}}{E_s^{(i)} \dot{S}^{(i)}} \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overset{+}{R}_{int}^{(i)}}{\overset{\times}{R}_{int}^{(i)}} &= 1 + \overset{+}{\epsilon}_{\theta\theta}|_{R_{ext}^{(i)}} = \\
&= 1 - 2 \frac{\overset{+}{p}_{ext}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \frac{\left(\overset{\times}{R}_{ext}^{(i)}\right)^2}{\left[\left(\overset{\times}{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\overset{\times}{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} + \\
&\quad + \frac{\overset{+}{p}_{int}^{(i)}}{E_s^{(i)}} \left\{ \frac{\left[\left(\overset{\times}{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 + \left(\overset{\times}{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]}{\left[\left(\overset{\times}{R}_{ext}^{(i)}\right)^2 - \left(\overset{\times}{R}_{int}^{(i)}\right)^2\right]} - \nu_s^{(i)} \right\} - \nu_s^{(i)} \frac{\overset{+}{T}^{(i)}}{E_s^{(i)} \overset{\times}{S}^{(i)}}
\end{aligned} \tag{7b}$$

É interessante notar que as expressões da deformação axial (6a) e deformação circunferencial (variação de raio) presentes nas equações (7a) e (7b) podem ser escritas na forma:

$$\begin{bmatrix} \overset{+}{\epsilon}_{zz} \\ \overset{+}{\epsilon}_{\theta\theta}|_{R_{ext}^{(i)}} \\ \overset{+}{\epsilon}_{\theta\theta}|_{R_{int}^{(i)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{+}{T}^{(i)} \\ \overset{+}{p}_{ext}^{(i)} \\ \overset{+}{p}_{int}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

A matriz 3×3 que aparece na expressão acima tem a propriedade de indicar a complacência da camada homogênea ao carregamento combinado. Sua inversa é uma matriz de rigidez, que permite determinar as derivadas parciais de cada uma das componentes de força (tração, pressão externa e interna) em cada uma das componentes de deslocamento.

A.2.2 Expansão da distensão do reforçador

A distensão ϵ_{33} da linha central do reforçador é a medida da variação da norma de $\mathbf{r}$ desde a configuração referencial até a configuração primária (ou qualquer outra):

$$\|\overset{+}{\mathbf{r}}\| = (1 + \epsilon_{33}) \|\overset{\times}{\mathbf{r}}\| \tag{1}$$

Desde que o raio é constante nas configurações referencial e primária, o comprimento de arco é igual à soma vetorial da distância entre a origem e a posição $\overset{+}{z}$ na direção $\mathbf{i}_z$ e da distância medida ao longo da direção $\mathbf{i}_\theta$ pela curva $\overset{+}{\mathbb{C}}$:

$$\|\overset{+}{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\overset{+}{z}^2 + \overset{+}{R}^2 \left(\overset{+}{\theta} - \theta_o\right)^2} \tag{2a}$$

... então:

$$(1 + \epsilon_{33}) \|\check{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\check{z}^2 + \check{R}^2 (\check{\theta} - \theta_o)^2} \quad (2b)$$

... e:

$$(1 + \epsilon_{33})^2 = \left[\check{z}^2 + \check{R}^2 (\check{\theta} - \theta_o)^2 \right] \|\check{\mathbf{r}}\|^{-2} \quad (3)$$

Os termos $\check{z}$, $\check{R}$ e $\check{\theta}$ se relacionam com $\check{z}$, $\check{R}$ e $\check{\theta}$ por meio de:

$$\check{z} = (1 + \check{\epsilon}) \check{z}, \quad \check{R} = \left(1 + \frac{\Delta R}{\check{R}} \right) \check{R}, \quad \check{\theta} = \check{\gamma} \check{z} + \check{\theta} \quad (4)$$

Então, são válidas as relações:

$$\frac{\check{z}}{\|\check{\mathbf{r}}\|} = (1 + \check{\epsilon}) \cos \check{\vartheta}_1 \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\check{R} (\check{\theta} - \theta_o)}{\|\check{\mathbf{r}}\|} &= \left[1 + \frac{\check{\gamma} \check{z}}{(\check{\theta} - \theta_o)} \right] \left(1 + \frac{\Delta R}{\check{R}} \right) \sin \check{\vartheta}_1 \\ &= \left[1 + \frac{\check{\gamma} \check{R}}{\tan \check{\vartheta}_1} \right] \left(1 + \frac{\Delta R}{\check{R}} \right) \sin \check{\vartheta}_1 \end{aligned} \quad (5b)$$

Substituindo as últimas expressões na equação (3) e supondo que, dentro das condições de carregamento moderado, $\epsilon_{33} \ll 1$, $\check{\epsilon} \ll 1$, $\check{\gamma} \check{R} \ll 1$ e $\Delta R / \check{R} \ll 1$, chega-se até:

$$(1 + 2 \epsilon_{33}) \approx (1 + 2 \check{\epsilon}) \cos^2 \check{\vartheta}_1 + \sin^2 \check{\vartheta}_1 \left(1 + 2 \frac{\check{\gamma} \check{R}}{\tan \check{\vartheta}_1} + 2 \frac{\Delta R}{\check{R}} \right) \quad (6)$$

... logo:

$$\epsilon_{33} \approx \check{\epsilon} \cos^2 \check{\vartheta}_1 + \check{\gamma} \check{R} \sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1 + \frac{\Delta R}{\check{R}} \sin^2 \check{\vartheta}_1 \quad (7)$$

Também a mudança do ângulo de assentamento pode ser facilmente expressa em termos

das deformações globais:

$$\begin{aligned}
 \tan \overset{\dagger}{\vartheta}_1 &= \frac{\overset{\dagger}{R} \left(\overset{\dagger}{\theta} - \theta_o \right)}{\overset{\dagger}{z}} \\
 &= \frac{\overset{\times}{R} \left(\overset{\times}{\theta} - \theta_o + \overset{\gamma}{\gamma} \overset{\times}{z} \right)}{\overset{\times}{z} (1 + \overset{\epsilon}{\epsilon})} \frac{\overset{\dagger}{R}}{\overset{\times}{R}} \\
 &= \tan \overset{\times}{\vartheta}_1 \frac{\left[1 + \overset{\gamma}{\gamma} \overset{\times}{z} / \left(\overset{\times}{\theta} - \theta_o \right) \right]}{(1 + \overset{\epsilon}{\epsilon})} \frac{\overset{\dagger}{R}}{\overset{\times}{R}} \\
 &= \tan \overset{\times}{\vartheta}_1 \frac{\left(1 + \overset{\gamma}{\gamma} \overset{\times}{R} / \tan \overset{\times}{\vartheta}_1 \right)}{(1 + \overset{\epsilon}{\epsilon})} \frac{\overset{\dagger}{R}}{\overset{\times}{R}} \\
 &= \frac{\left(\tan \overset{\times}{\vartheta}_1 + \overset{\gamma}{\gamma} \overset{\times}{R} \right)}{(1 + \overset{\epsilon}{\epsilon})} \frac{\overset{\dagger}{R}}{\overset{\times}{R}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

A.2.3 Dedução de derivadas de vetores-base do sistema de coordenadas cilíndricas

Considere a relação entre a base do sistema de coordenadas cartesiano e a base do sistema de coordenadas cilíndrico. Derivando-as, obtém-se:

$$\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2 \longrightarrow \mathbf{i}'_r = \theta' (-\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2) \tag{1a}$$

$$\mathbf{i}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2 \longrightarrow \mathbf{i}'_\theta = \theta' (-\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2) \tag{1b}$$

$$\mathbf{i}_z \equiv \mathbf{i}_3 \longrightarrow \mathbf{i}'_z = 0 \tag{1c}$$

... logo:

$$\mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{i}_r = 0, \quad \mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{i}_\theta = \theta', \quad \mathbf{i}'_\theta \cdot \mathbf{i}_r = -\theta', \quad \mathbf{i}'_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta = 0 \tag{2}$$

Seja agora uma curva $\overset{\times}{\mathbb{C}} : \xi \rightarrow \mathbf{r}(\xi)$ cuja equação é parametrizada da seguinte forma:

$$\overset{\times}{\mathbf{r}} = R \mathbf{i}_r + z \mathbf{i}_z$$

... o vetor tangente $\mathbf{d}_3$ será dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_3 &= \overset{\times}{\mathbb{C}}' = (R' \mathbf{i}_r + R \mathbf{i}'_r) + z' \mathbf{i}_z \\
 &= R' \mathbf{i}_r + R \theta' \mathbf{i}_\theta + z' \mathbf{i}_z
 \end{aligned} \tag{3}$$

A.2.4 Equações de equilíbrio na configuração $\mathbb{E}$

Quando emprega-se um sistema local de coordenadas com base $\mathbf{d}_{1\dots 3}$, as equações (2.19) tomam a forma das equações de Clebsch-Kirchhoff, onde os coeficientes das componentes são as curvaturas:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1' + \dot{\kappa}_2 \dot{N}_3 - \dot{\kappa}_3 \dot{N}_2 + \dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{N}_2' + \dot{\kappa}_3 \dot{N}_1 - \dot{\kappa}_1 \dot{N}_3 + \dot{q}_2 &= 0 \\ \dot{N}_3' + \dot{\kappa}_1 \dot{N}_2 - \dot{\kappa}_2 \dot{N}_1 + \dot{q}_3 &= 0\end{aligned}\tag{1a}$$

$$\begin{aligned}\dot{M}_1' + \dot{\kappa}_2 \dot{M}_3 - \dot{\kappa}_3 \dot{M}_2 - \dot{N}_2 + \dot{m}_1 &= 0 \\ \dot{M}_2' + \dot{\kappa}_3 \dot{M}_1 - \dot{\kappa}_1 \dot{M}_3 + \dot{N}_1 + \dot{m}_2 &= 0 \\ \dot{M}_3' + \dot{\kappa}_1 \dot{M}_2 - \dot{\kappa}_2 \dot{M}_1 + \dot{m}_3 &= 0\end{aligned}\tag{1b}$$

Vários termos no sistema de equações diferenciais acima são nulos por força das condições de existência da configuração $\mathbb{E}$ e das hipóteses empregadas:

(a) a curvatura constante (independente da posição) para um carregamento:

$$\dot{\kappa}_1' = \ddot{\kappa}_1' = 0, \quad \dot{\kappa}_2' = \ddot{\kappa}_2' = 0, \quad \dot{\kappa}_3' = \ddot{\kappa}_3' = 0$$

(b) a transferência de esforços entre camadas somente acontece nos extremos ou na direção radial:

$$q_\theta = q_z = 0, \quad m_r = 0 \quad \therefore \quad q_2 = q_3 = 0, \quad m_1 = 0$$

(c) a manutenção da direção principal $\mathbf{d}_1$ alinhada à direção radial $\mathbf{i}_r$:

$$\mathbf{d}_1 = -\mathbf{i}_r \quad \therefore \quad \dot{\vartheta}_3 = \ddot{\vartheta}_3 = \frac{\pi}{2}$$

(d) a curvatura $\dot{\kappa}_1$, consoante à definição (2.17), é nula:

$$\dot{\kappa}_1 = \ddot{\kappa}_1 = 0$$

Desde que as relações constitutivas para as componentes de momentos $M_{1\dots 3}$ são:

$$\dot{M}_1 = A_1 (\dot{\kappa}_1 - \ddot{\kappa}_1) = 0, \quad \dot{M}_2 = A_2 (\dot{\kappa}_2 - \ddot{\kappa}_2), \quad \dot{M}_3 = A_3 (\dot{\kappa}_3 - \ddot{\kappa}_3) \tag{2}$$

... logo, por consequência de (a) e (d):

$$\dot{M}_1' = \dot{M}_2' = \dot{M}_3' = 0 \quad (3)$$

Em consequência das relações apresentadas, o sistema de equações é reduzido para:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1' + \dot{\kappa}_2 \dot{N}_3 - \dot{\kappa}_3 \dot{N}_2 + \dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{N}_2' + \dot{\kappa}_3 \dot{N}_1 &= 0 \\ \dot{N}_3' - \dot{\kappa}_2 \dot{N}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2 \dot{M}_3 - \dot{\kappa}_3 \dot{M}_2 - \dot{N}_2 &= 0 \\ \dot{N}_1 + \dot{m}_2 &= 0 \\ \dot{m}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

As duas última igualdades denunciam que a hipótese de substituição das forças distribuídas de contato por uma pressão homogênea, anulando qualquer momento de desbalanceamento $\dot{m}_2$ ou $\dot{m}_3$ existente, não é um capricho de simplificação: ela leva até uma solução onde

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_3 = 0 \quad \therefore \quad \dot{N}_1 = 0 \quad \therefore \quad \dot{N}_2' = \dot{N}_3' = 0$$

... e portanto todas as componentes de força interna se tornam constantes (independentes da posição) para um ponto de equilíbrio.

Expurgando os termos nulos mencionados acima e escrevendo as curvaturas em função dos parâmetros $\dot{\vartheta}_1$ e $\dot{R}$, então o sistema se reduz novamente para:

$$\begin{aligned} \sin \dot{\vartheta}_1 \left(\sin \dot{\vartheta}_1 \dot{N}_3 - \cos \dot{\vartheta}_1 \dot{N}_2 \right) - \dot{R} \dot{q}_r &= 0 \\ \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0, \quad \dot{N}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \sin \dot{\vartheta}_1 \left(\sin \dot{\vartheta}_1 \dot{M}_3 - \cos \dot{\vartheta}_1 \dot{M}_2 \right) - \dot{N}_2 &= 0 \\ \dot{M}_1 = 0, \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

Na configuração de equilíbrio $\mathbb{E}$, valem as relações:

$$\mathbf{d}_2 = -\cos \dot{\vartheta}_1 \mathbf{i}_\theta + \sin \dot{\vartheta}_1 \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{i}_\theta = -\cos \dot{\vartheta}_1 \mathbf{d}_2 + \sin \dot{\vartheta}_1 \mathbf{d}_3 \quad (6)$$

... logo, o sistema de equações (não mais diferenciais) de equilíbrio torna-se:

$$\sin \vartheta_1^+ \dot{N}_\theta = \dot{R} \dot{q}_r \quad (7a)$$

$$\sin \vartheta_1^+ \dot{M}_\theta = \sin \vartheta_1^+ \dot{N}_z - \cos \vartheta_1^+ \dot{N}_\theta \quad (7b)$$

A.2.5 Relações constitutivas para componentes cilíndricas do momento $\dot{\mathbf{M}}$

As componentes do momento $\dot{\mathbf{M}}$ no sistema de coordenadas cilíndricas e no sistema local - onde as componentes estão alinhadas às direções principais que são dadas pela relação (2.14) - se acham relacionadas por meio de:

$$\dot{M}_r = -\dot{M}_1 \quad (1a)$$

$$\dot{M}_\theta = -\cos \vartheta_1^+ \dot{M}_2 + \sin \vartheta_1^+ \dot{M}_3 \quad (1b)$$

$$\dot{M}_z = \sin \vartheta_1^+ \dot{M}_2 + \cos \vartheta_1^+ \dot{M}_3 \quad (1c)$$

As relações constitutivas das componentes de momento no sistema de coordenadas local são conhecidas:

$$\dot{M}_1 = A_1 (\dot{\kappa}_1 - \check{\kappa}_1) \quad (2a)$$

$$\dot{M}_2 = A_2 (\dot{\kappa}_2 - \check{\kappa}_2) \quad (2b)$$

$$\dot{M}_3 = A_3 (\dot{\kappa}_3 - \check{\kappa}_3) \quad (2c)$$

As curvaturas finais e iniciais são relacionadas aos ângulos ϑ_1^+ e $\vartheta_1^\times$ e aos raios $\dot{R}$ e $\check{R}$ por meio das equações (2.17). Substituindo-as nas relações constitutivas acima, obtém-se:

$$\dot{M}_1 = 0 \quad (3a)$$

$$\dot{M}_2 = A_2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1^+}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \vartheta_1^\times}{\check{R}} \right) \quad (3b)$$

$$\dot{M}_3 = A_3 \left(\frac{\sin \vartheta_1^+ \cos \vartheta_1^+}{\dot{R}} - \frac{\sin \vartheta_1^\times \sin \vartheta_1^\times}{\check{R}} \right) \quad (3c)$$

Finalmente, enxertando as igualdades acima nas relações (1), deduz-se que:

$$\dot{M}_r = 0 \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_\theta = & -\cos \dot{\vartheta}_1 A_2 \left(\frac{\sin^2 \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \ddot{\vartheta}_1}{\ddot{R}} \right) + \\ & + \sin \dot{\vartheta}_1 A_3 \left(\frac{\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin \ddot{\vartheta}_1 \cos \ddot{\vartheta}_1}{\ddot{R}} \right) \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_z = & \sin \dot{\vartheta}_1 A_2 \left(\frac{\sin^2 \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \ddot{\vartheta}_1}{\ddot{R}} \right) + \\ & + \cos \dot{\vartheta}_1 A_3 \left(\frac{\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin \ddot{\vartheta}_1 \cos \ddot{\vartheta}_1}{\ddot{R}} \right) \end{aligned} \quad (4c)$$

A.2.6 Casca ortotrópica representando as bandagens

No sistema de coordenadas local, a relação constitutiva do tecido é dada pela igualdade matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Admitindo um estado plano de deformações, tem-se que

$$\epsilon_{11} = 0, \quad \epsilon_{12} = 0, \quad \epsilon_{31} = 0$$

... e portanto

$$\sigma_{11} = \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \nu_{21} \sigma_{22} + \left(\frac{E_1}{E_3} \right) \nu_{31} \sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{31} = 0 \quad (2)$$

... de modo que o sistema (1) se reduz a

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (3)$$

... onde

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{E_2} (1 - \nu_{12}\nu_{21}), & c_{12} &= \frac{1}{E_3} (-\nu_{12}\nu_{31} - \nu_{32}), \\ c_{21} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{13}\nu_{21} - \nu_{23}), & c_{22} &= \frac{1}{E_3} (1 - \nu_{13}\nu_{31}), \\ & & c_{33} &= \frac{1}{2G_{32}} \end{aligned} \quad (4)$$

Sob estado plano de deformações, os produtos $\nu_{12}\nu_{31}$, $\nu_{12}\nu_{21}$, $\nu_{21}\nu_{23}$ e $\nu_{13}\nu_{31}$ são desprezíveis, logo o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 \\ -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2G_{32}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

... ou, escrevendo de maneira condensada¹:

$$[\epsilon]_{[l]} = [\mathbf{C}_a]_{[l]} \cdot [\sigma]_{[l]} \quad (5b)$$

... onde $[\mathbf{C}_a]_{[l]}$ = matriz de complacência no sistema de coordenadas local.

A passagem de componentes de deformação do sistema local para o sistema global cilíndrico é feita pela equação:

$$[\epsilon]_{[c]} = [\mathbf{T}_{lc}] \cdot [\epsilon]_{[l]}, \quad [\sigma]_{[c]} = [\mathbf{T}_{lc}] \cdot [\sigma]_{[l]} \quad (6)$$

¹Os colchetes são mantidos na formulação para tornar evidente a base (local ou global cilíndrica) a que se refere a igualdade matricial.

A matriz de transformação $[\mathbf{T}_{lc}]$ é calculada para operar a regra

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij} &= \sum_{k=2}^3 \sum_{l=2}^3 \cos(\mathbf{i}_i, \mathbf{d}_k) \cos(\mathbf{i}_j, \mathbf{d}_l) \epsilon_{kl}, & i, j = \theta \cdots z \\ \sigma_{ij} &= \sum_{k=2}^3 \sum_{l=2}^3 \cos(\mathbf{i}_i, \mathbf{d}_k) \cos(\mathbf{i}_j, \mathbf{d}_l) \sigma_{kl}, & i, j = \theta \cdots z\end{aligned}\quad (7)$$

... logo a composição de $[\mathbf{T}_{lc}]$ é:

$$[\mathbf{T}_{lc}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta_1 & \sin^2 \vartheta_1 & -2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \\ \sin^2 \vartheta_1 & \cos^2 \vartheta_1 & 2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 & \sin^2 \vartheta_1 - \cos^2 \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Uma característica interessante dessa matriz $[\mathbf{T}_{lc}]$ é que ela é inversa de si mesma.

Retomando nesse momento à igualdade $[\epsilon]_{[l]} = [\mathbf{C}_a]_{[l]} \cdot [\sigma]_{[l]}$ e substituindo $[\epsilon]_{[l]}$ e $[\sigma]_{[l]}$ pelas correspondentes expressões dependentes de $[\epsilon]_{[c]}$ e $[\sigma]_{[c]}$, chega-se a:

$$[\epsilon]_{[c]} = [\mathbf{T}_{lc}]^{-1} \cdot [\mathbf{C}_a]_{[l]} \cdot [\mathbf{T}_{lc}] \cdot [\sigma]_{[c]} = [\mathbf{C}_a]_{[c]} \cdot [\sigma]_{[c]} \quad (9)$$

... onde $[\mathbf{C}_a]_{[c]}$ = matriz de complacência para sistema cilíndrico de coordenadas, naturalmente de expressão bastante complexa, cujos elementos são:

$$\begin{aligned}C_{a11} &= \frac{\cos^2 \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 E_3 - \nu_{32} E_2 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} - \\ &\quad - \frac{\sin^2 \vartheta_1 (\nu_{32} \cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} + \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1}{G_{23}} \\ C_{a12} &= - \frac{\cos^2 \vartheta_1 (\nu_{32} E_2 \cos^2 \vartheta_1 - E_3 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 - \nu_{32} \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} - \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1}{G_{23}} \\ C_{a13} &= - 2 \frac{\cos^3 \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (E_3 + \nu_{32} E_2)}{E_2 E_3} + 2 \frac{\sin^3 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 (\nu_{32} + 1)}{E_3} + \\ &\quad + \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (2 \cos^2 \vartheta_1 - 1)}{G_{23}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{a21} &= \frac{\sin^2 \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 E_3 - \nu_{32} E_2 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} - \\
&\quad - \frac{\cos^2 \vartheta_1 (\nu_{32} \cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} - \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1}{G_{23}} \\
C_{a22} &= - \frac{\sin^2 \vartheta_1 (\nu_{32} E_2 \cos^2 \vartheta_1 - E_3 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} + \\
&\quad + \frac{\cos^2 \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 - \nu_{32} \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} + \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1}{G_{23}} \\
C_{a23} &= - 2 \frac{\sin^3 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 (E_3 + \nu_{32} E_2)}{E_2 E_3} + 2 \frac{\cos^3 \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (\nu_{32} + 1)}{E_3} - \\
&\quad - \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (2 \cos^2 \vartheta_1 - 1)}{G_{23}} \\
C_{a31} &= - \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 E_3 - \nu_{32} E_2 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} - \\
&\quad - \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (\nu_{32} \cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} + \\
&\quad + \frac{(\cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1) \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1}{2 G_{23}} \\
C_{a32} &= \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (\nu_{32} E_2 \cos^2 \vartheta_1 - E_3 \sin^2 \vartheta_1)}{E_2 E_3} + \\
&\quad + \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 (\cos^2 \vartheta_1 - \nu_{32} \sin^2 \vartheta_1)}{E_3} - \\
&\quad - \frac{(\cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1) \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1}{2 G_{23}} \\
C_{a33} &= 2 \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1 (E_3 + \nu_{32} E_2)}{E_2 E_3} + \\
&\quad + 2 \frac{\cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1 (\nu_{32} + 1)}{E_3} + \\
&\quad + \frac{(\cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_1) (2 \cos^2 \vartheta_1 - 1)}{2 G_{23}}
\end{aligned}$$

Provas do Capítulo 3

A.3.1 Ângulos de Euler

Seja uma base de vetores $\mathbf{i}_{1\dots 3}$ no sistema de coordenadas globais e uma base de vetores $\mathbf{d}_{1\dots 3}$ em um sistema de coordenadas solidário a uma curva $\mathbb{C}$ construído de maneira que o vetor $\mathbf{d}_3$ se alinhe à tangente da curva em todos os pontos.

Três ângulos de Euler $\vartheta_{1\dots 3}$ são definidos como ilustrado na figura 3.1, pág.41. A mudança de base de $\mathbf{i}_{1\dots 3}$ para $\mathbf{d}_{1\dots 3}$ é feita através de três operações sucessivas de rotação (a operação reversa é realizada por processo similar) :

- Em primeiro lugar, gira-se a tríade $\mathbf{i}_{1\dots 3}$ de um valor ϑ_2 em torno do eixo global $\mathbf{i}_3$, obtendo um sistema $[\eta_1, \eta_2, \mathbf{i}_3]$;
- Em seguida, gira-se esta tríade em torno do eixo η_2 de um ângulo ϑ_1 , obtendo um sistema $[\varphi_1, \eta_2, \mathbf{d}_3]$;
- Finalmente faz-se outra rotação de um valor ϑ_3 em torno do eixo $\mathbf{d}_3$, obtendo a tríade $\mathbf{d}_{1\dots 3}$.

Seja, por exemplo, uma grandeza vetorial A :

$$A = a_1 \mathbf{d}_1 + a_2 \mathbf{d}_2 + a_3 \mathbf{d}_3 = \tilde{a}_1 \mathbf{i}_1 + \tilde{a}_2 \mathbf{i}_2 + \tilde{a}_3 \mathbf{i}_3 \quad (1)$$

A mudança de base é feita pelas seguintes operações:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}]_{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_3 & 0 \\ -\sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & 0 & -\sin \vartheta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_1 & 0 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 & 0 \\ -\sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} c\vartheta_3 c\vartheta_1 c\vartheta_2 - s\vartheta_3 s\vartheta_2 & c\vartheta_3 c\vartheta_1 s\vartheta_2 + s\vartheta_3 c\vartheta_2 & -\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \\ -s\vartheta_3 c\vartheta_1 c\vartheta_2 - c\vartheta_3 s\vartheta_2 & -s\vartheta_3 c\vartheta_1 s\vartheta_2 + c\vartheta_3 c\vartheta_2 & \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

Deve-se notar que, desde que a matriz $\mathbf{B}$ é ortogonal, sua inversa é igual à transposta.

A.3.2 Introdução do parâmetro ϱ

Considere um estado deformado $\mathbb{E}$ que pode corresponder ao helicóide deformado inclusive pela perda de estabilidade. Aproveitando as mesmas definições de ângulos de Euler usadas em CUSTÓDIO[27], os vetores diretores $\mathbf{d}_{1\dots 2}$ e o vetor tangente $\mathbf{d}_3$ são expressos em termos das componentes cartesianas globais na seguinte forma²:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 = & (\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_2) \mathbf{i}_1 + \\ & + (\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2) \mathbf{i}_2 + \\ & + (-\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1) \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (1a)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2 = & (-\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2) \mathbf{i}_1 + \\ & + (-\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_2) \mathbf{i}_2 + \\ & + (\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1) \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (1b)$$

$$\mathbf{d}_3 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta_1 \mathbf{i}_3 \quad (1c)$$

Sejam os vetores unitários nas direções radial $\mathbf{i}_r$, circunferencial $\mathbf{i}_\theta$ e longitudinal $\mathbf{i}_z$ expressos por:

$$\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_3 \quad (2)$$

Como consequência de (1) e (2), os vetores diretores $\mathbf{d}_{1\dots 2}$ e o vetor tangente $\mathbf{d}_3$ são expressos em termos das componentes cilíndricas globais na seguinte forma³:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \sin \vartheta_3 \\ \cos(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \sin \vartheta_3 \\ -\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \cos \vartheta_3 \\ -\cos(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin(\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

²Vide prova A.3.1, pág.140.

³A notação de matriz será usada preferencialmente, de agora em diante, para representar grandezas vetoriais com componentes nas direções $\mathbf{i}_r, \dots, \mathbf{i}_z$.

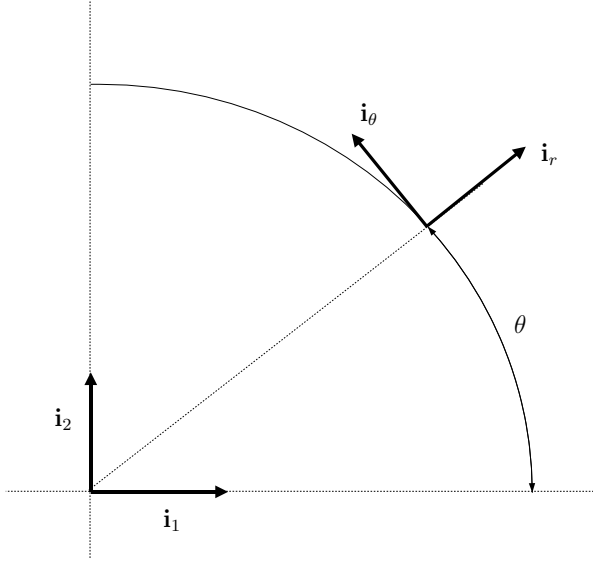


Figura A.1: Relação entre sistemas de coordenadas global cartesiano e cilíndrico.

$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} \sin \vartheta_1 \sin (\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \\ \sin \vartheta_1 \cos (\theta - \vartheta_2 + \pi/2) \\ \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

Introduza-se, nesse momento, o parâmetro ϱ :

$$\varrho = \theta - \vartheta_2 + \pi/2 \quad (4)$$

... que providencia:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \sin \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \sin \vartheta_3 \\ \cos \varrho \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \sin \vartheta_3 \\ -\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \varrho \cos \vartheta_3 \\ -\cos \varrho \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \sin \varrho \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \end{bmatrix}, \quad (5b)$$

$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} \sin \vartheta_1 \sin \varrho \\ \sin \vartheta_1 \cos \varrho \\ \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (5c)$$

A.3.3 Generalização de curvaturas do reforçador

A definição formal das curvaturas é dada na relação (2.16):

$$\kappa_1 = \mathbf{d}_2' \cdot \mathbf{d}_3, \quad \kappa_2 = \mathbf{d}_3' \cdot \mathbf{d}_1, \quad \kappa_3 = \mathbf{d}_1' \cdot \mathbf{d}_2 \quad (1)$$

Para a avaliação das curvaturas, é mais fácil as expressões dos vetores diretores no sistema global de coordenadas cilíndricas, pois a base $\mathbf{i}_{1\dots 3}$ é independente do parâmetro de comprimento de arco ξ , ao contrário da base do sistema de coordenadas cilíndricas $\mathbf{i}_{r\dots z}$. Aplicando a definição das curvaturas de acordo com (1), obtém-se:

$$\kappa_1 = \vartheta_1' \sin \vartheta_3 - \vartheta_2' \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \quad (2a)$$

$$\kappa_2 = \vartheta_1' \cos \vartheta_3 + \vartheta_2' \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \quad (2b)$$

$$\kappa_3 = \vartheta_2' \cos \vartheta_1 + \vartheta_3' \quad (2c)$$

Desde que, de acordo com a definição (3.2):

$$\varrho = \theta - \vartheta_2 + \pi/2 \quad \therefore \quad \vartheta_2 = \theta - \varrho + \pi/2 \quad \therefore \quad \vartheta_2' = \theta' - \varrho' \quad (3)$$

... e, de acordo com a (3.6):

$$R \theta' = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{i}_\theta = \sin \vartheta^1 \cos \varrho \quad \therefore \quad \theta' = \frac{\sin \vartheta^1 \cos \varrho}{R} \quad (4)$$

... então:

$$\vartheta_2' = \frac{\sin \vartheta^1 \cos \varrho}{R} - \varrho' \quad (5)$$

Finalmente, enxertando essas últimas igualdades em (2), obtém-se:

$$\kappa_1 = \vartheta_1' \sin \vartheta_3 - \left(\frac{\sin \vartheta^1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \quad (6a)$$

$$\kappa_2 = \vartheta_1' \cos \vartheta_3 + \left(\frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \quad (6b)$$

$$\kappa_3 = \vartheta_3' + \left(\frac{\sin \vartheta_1}{R} \cos \varrho - \varrho' \right) \cos \vartheta_1 \quad (6c)$$

A.3.4 Semelhança de trabalho para determinação de rigidez k_{et} equivalente

Seja uma perturbação δR de deslocamento radial. Ela é causada por uma carga distribuída δq_r atuando sobre uma fundação elástica. Por sua vez, a rigidez dessa fundação elástica tem uma descontinuidade em $\delta R = 0$. A perturbação δR é dada por:

$$\delta R = R_0 (\alpha + \cos \theta) \quad (1)$$

A rigidez k_a da fundação elástica é dada por:

$$k_a = \begin{cases} k_s, & \text{se } \delta R > 0 \\ k_i, & \text{se } \delta R \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

... onde k_s = rigidez da camada superior; k_i = rigidez da camada inferior.

Procura-se uma rigidez equivalente k_{et} que produza o mesmo trabalho que a fundação elástica não-linear.

Se a rigidez k_s é nula, o ponto médio do cossenóide δR desloca-se até R_0 . Por outro lado, se a rigidez k_i é nula, o ponto médio desloca-se até $-R_0$. Portanto, pode-se aproximar o valor de α por:

$$\alpha = \frac{k_i - k_s}{k_s + k_i} \quad (3)$$

O trabalho na fundação elástica em um ciclo é dado pela integral:

$$W_a = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} k_a (\delta R)^2 d\theta = \frac{R_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} k_a (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta \quad (4a)$$

Essa integração deve ser feita por partes, pois há descontinuidade do integrando no domínio de integração:

$$W_a = \frac{R_0^2}{2} \left[k_i \int_{-\pi}^{-\theta_1} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta + k_s \int_{-\theta_1}^{\theta_1} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta + k_i \int_{\theta_1}^{\pi} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta \right] \quad (4b)$$

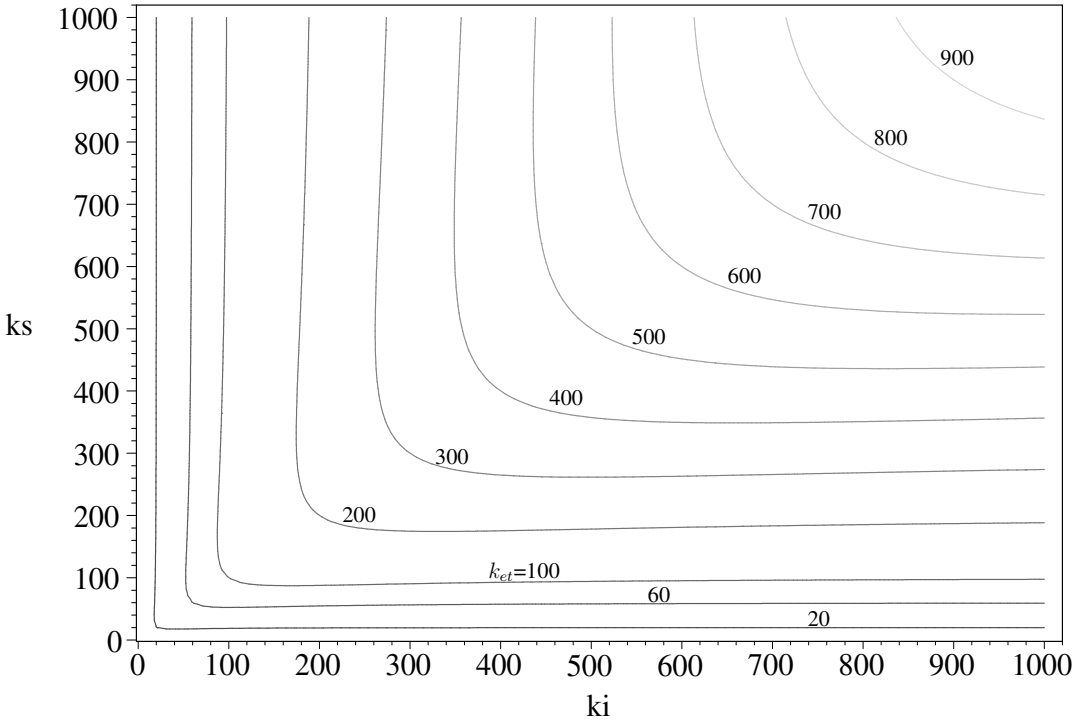


Figura A.2: Comportamento de k_{et} frente à variação de k_s e k_i .

O ângulo θ_1 corresponde à transição entre δR positivo e negativo⁴:

$$(\alpha + \cos \theta_1) = 0 \quad \therefore \quad \theta_1 = \arccos(-\alpha) \quad (5)$$

A função $g(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta$ condensa a integral e é definida por:

$$g(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta = (t_2 - t_1) \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) + 2\alpha (\sin t_2 - \sin t_1) + \frac{1}{2} (\sin t_2 \cos t_2 - \sin t_1 \cos t_1) \quad (6)$$

Retornando à expressão da energia W_a :

$$W_a = \frac{R_0^2}{2} [2k_i g(\theta_1, \pi) + k_s g(-\theta_1, \theta_1)] \quad (7)$$

⁴Deve conservar cuidado na implementação pois a função $\arccos$ precisa retornar valor entre 0 e π .

O trabalho na fundação elástica equivalente em um ciclo é dado por:

$$W_{et} = \frac{k_{et} R_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha + \cos \theta)^2 d\theta = \pi k_{et} R_0^2 \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

... logo, para semelhança em energia:

$$W_a = W_{eq} \quad \therefore \quad k_{et} = \frac{[2 k_i g(\theta_1, \pi) + k_s g(-\theta_1, \theta_1)]}{2 \pi \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \right)} \quad (9)$$

O comportamento da rigidez equivalente k_{et} é ilustrado pela figura A.2.

A.3.5 Expansão das incógnitas

As componentes de força e deformação são expandidas da forma a seguir:

$$R = \overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \longrightarrow R' = \varepsilon R_{(1)}' \quad (1a)$$

$$\vartheta_1 = \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \longrightarrow \begin{cases} \vartheta_1' = \varepsilon \vartheta_{1(1)}' \\ \sin \vartheta_1 = \sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \\ \cos \vartheta_1 = \cos \overset{+}{\vartheta}_1 - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \overset{+}{\vartheta}_1 \end{cases} \quad (1b)$$

$$\vartheta_3 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \vartheta_{3(1)} \longrightarrow \begin{cases} \vartheta_3' = \varepsilon \vartheta_{3(1)}' \\ \sin \vartheta_3 = 1 \\ \cos \vartheta_3 = -\varepsilon \vartheta_{3(1)} \end{cases} \quad (1c)$$

$$\varrho = \varepsilon \varrho_{(1)} \longrightarrow \begin{cases} \varrho' = \varepsilon \varrho_{(1)}' \\ \sin \varrho = \varepsilon \varrho_{(1)} \\ \cos \varrho = 1 \end{cases} \quad (1d)$$

$$N_r = \varepsilon N_{r(1)} \longrightarrow N_r' = \varepsilon N_{r(1)}' \quad (1e)$$

$$N_\theta = \overset{+}{N}_\theta + \varepsilon N_{\theta(1)} \longrightarrow N_\theta' = \varepsilon N_{\theta(1)}' \quad (1f)$$

$$N_z = \overset{+}{N}_z + \varepsilon N_{z(1)} \longrightarrow N_z' = 0 \quad (1g)$$

$$M_r = \varepsilon M_{r(1)} \longrightarrow M_r' = \varepsilon M_{r(1)}' \quad (1h)$$

$$M_\theta = \overset{+}{M}_\theta + \varepsilon M_{\theta(1)} \longrightarrow M_\theta' = \varepsilon M_{\theta(1)}' \quad (1i)$$

$$M_z = \overset{+}{M}_z + \varepsilon M_{z(1)} \longrightarrow M_z' = \varepsilon M_{z(1)}' \quad (1j)$$

$$M_1 = \varepsilon M_{1(1)} \longrightarrow M'_1 = \varepsilon M'_{1(1)} \quad (1k)$$

$$M_2 = \overset{+}{M}_2 + \varepsilon M_{2(1)} \longrightarrow M'_2 = \varepsilon M'_{2(1)} \quad (1l)$$

$$M_3 = \overset{+}{M}_3 + \varepsilon M_{3(1)} \longrightarrow M'_3 = \varepsilon M'_{3(1)} \quad (1m)$$

$$m_r = \varepsilon m_{r(1)} \longrightarrow m'_r = \varepsilon m'_{r(1)} \quad (1n)$$

$$m_\theta = \varepsilon m_{\theta(1)} \longrightarrow m'_\theta = \varepsilon m'_{\theta(1)} \quad (1o)$$

$$m_z = \varepsilon m_{z(1)} \longrightarrow m'_z = \varepsilon m'_{z(1)} \quad (1p)$$

$$m_3 = \varepsilon m_{3(1)} \longrightarrow m'_3 = \varepsilon m'_{3(1)} \quad (1q)$$

A.3.6 Expansão das relações cinemáticas e constitutivas

Tomando a equação (3.4) e expandindo como (1), chega-se a:

$$\varepsilon R'_{(1)} = \varepsilon \varrho_{(1)} \left(\sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \right) \quad (1)$$

... e portanto:

$$R'_{(1)} = \varrho_{(1)} \sin \overset{+}{\vartheta}_1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{1(1)} \overset{+}{R} = & \varepsilon \vartheta'_{1(1)} \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) - \left[\left(\sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \varrho'_{(1)} \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \right] \left(\sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \right) (-\varepsilon \vartheta_{3(1)}) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 R = & \left[\left(\sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \right) - \varepsilon \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \varrho'_{(1)} \right] \left(\sin \overset{+}{\vartheta}_1 + \right. \\ & \left. + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \overset{+}{\vartheta}_1 \right) - \varepsilon^2 \vartheta'_{1(1)} \vartheta_{3(1)} \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_3 R = & \varepsilon \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \vartheta'_{3(1)} + \left[\sin \overset{+}{\vartheta}_1 \cos \overset{+}{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \left(\cos^2 \overset{+}{\vartheta}_1 - \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right) \right] - \\ & - \left(\varepsilon \varrho'_{(1)} \right) \left(\overset{+}{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \left(\cos \overset{+}{\vartheta}_1 - \varepsilon \sin \overset{+}{\vartheta}_1 \right) \end{aligned} \quad (3c)$$

Substituindo as componentes expandidas na equação constitutiva do termo $q_r R$, obtém-se:

$$k_e R (R - 1) = k_e (R_0 + \varepsilon R_{(1)}) (R_0 + \varepsilon R_1 - 1) \quad (4)$$

... e as componentes de momento distribuído se tornam:

$$\varepsilon m_{r(1)} = \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) (\varepsilon \varrho_{(1)}) (-k_g \varepsilon \vartheta_{3(1)}) \quad (5a)$$

$$\varepsilon m_{\theta(1)} = \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) (-k_g \varepsilon \vartheta_{3(1)}) \quad (5b)$$

$$\varepsilon m_{z(1)} = \left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \sin \vartheta_1^\dagger \right) (-k_g \varepsilon \vartheta_{3(1)}) \quad (5c)$$

... que implica em:

$$m_{r(1)} = 0 \quad (6a)$$

$$m_{\theta 1} = -k_g \vartheta_{3(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \quad (6b)$$

$$m_{z(1)} = -k_g \vartheta_{3(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \quad (6c)$$

Ao substituir as expansões das incógnitas nas relações entre sistemas de coordenadas para os momentos $M_{r\dots z}$, três igualdades são obtidas:

$$\begin{aligned} \varepsilon M_{r(1)} = \varepsilon M_{1(1)} & \left[-\varepsilon^2 \varrho_{(1)} \vartheta_{3(1)} \left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \right) - 1 \right] + \\ & + (M_{2(0)} + \varepsilon M_{2(1)}) \left[-\varepsilon \varrho_{(1)} \left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \right) + \varepsilon \vartheta_{3(1)} \right] + \\ & + (M_{3(0)} + \varepsilon M_{3(1)}) \left[\varepsilon \varrho_{(1)} \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) \right] \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon M_{\theta} + \varepsilon M_{\theta(1)} = \varepsilon M_{1(1)} & \left[-\varepsilon \vartheta_{3(1)} \left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \right) + \varepsilon \varrho_{(1)} \right] + \\ & + (M_{2(0)} + \varepsilon M_{2(1)}) \left[-\left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \right) - \varepsilon^2 \varrho_{(1)} \vartheta_{3(1)} \right] + \\ & + (M_{3(0)} + \varepsilon M_{3(1)}) \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} M_{z(0)} + \varepsilon M_{z(1)} = \varepsilon M_{1(1)} & \left[\varepsilon \vartheta_{3(1)} \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) \right] + \\ & + (M_{2(0)} + \varepsilon M_{2(1)}) \left(\sin \vartheta_1^\dagger + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) + \\ & + (M_{3(0)} + \varepsilon M_{3(1)}) \left(\cos \vartheta_1^\dagger - \varepsilon \vartheta_{1(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \right) \end{aligned} \quad (7c)$$

... onde os termos em ε^0 e em ε^1 provêm:

$$M_{r(1)} = -M_{1(1)} + M_{2(0)} \left(\vartheta_{3(1)} - \varrho_{(1)} \cos \vartheta_1^\dagger \right) - M_{3(0)} \varrho_{(1)} \sin \vartheta_1^\dagger \quad (8a)$$

$$\dot{M}_\theta = -M_{2(0)} \cos \dot{\vartheta}_1 + M_{3(0)} \sin \dot{\vartheta}_1 \quad (8b)$$

$$M_{\theta(1)} = \vartheta_{1(1)} M_{z(0)} - M_{2(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 + M_{3(1)} \sin \dot{\vartheta}_1 \quad (8c)$$

$$M_{z(0)} = M_{2(0)} \sin \dot{\vartheta}_1 + M_{3(0)} \cos \dot{\vartheta}_1 \quad (8d)$$

$$M_{z(1)} = -\vartheta_{1(1)} M_{\theta(0)} + M_{2(1)} \sin \dot{\vartheta}_1 + M_{3(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 \quad (8e)$$

Por sua vez, as relações constitutivas também podem ser expandidas nas formulações (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon M_{11} \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) = & \varepsilon A_1 \vartheta'_{1(1)} \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) + \\ & + \varepsilon A_1 \vartheta_{3(1)} \left[\left(\sin \dot{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \varrho'_{(1)} \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \right] \left(\sin \dot{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 \right) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} (M_{20} + \varepsilon M_{21}) \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) = & A_2 \left\{ \left[\left(\sin \dot{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 \right) - \right. \right. \\ & - \varepsilon \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \varrho'_{(1)} \left. \right] \left(\sin \dot{\vartheta}_1 + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \cos \dot{\vartheta}_1 \right) - \\ & \left. - \varepsilon^2 \vartheta'_{1(1)} \vartheta^3 \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) - \kappa_2 \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} (M_{30} + \varepsilon M_{31}) \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) = & A_3 \left\{ \varepsilon \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \vartheta'_{3(1)} + \left[\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 + \right. \right. \\ & + \varepsilon \vartheta_{1(1)} \left(\cos^2 \dot{\vartheta}_1 - \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \right) \left. \right] - \left(\varepsilon \varrho'_{(1)} \right) \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \left(\cos \dot{\vartheta}_1 - \varepsilon \sin \dot{\vartheta}_1 \right) - \\ & \left. - \kappa_3 \left(\dot{R} + \varepsilon R_{(1)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9c)$$

... de onde, isolando os termos em ε^0 e ε^1 , obtém-se:

$$M_{11} = A_1 \left(\vartheta'_{1(1)} + \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \vartheta_{3(1)} \right) \quad (10a)$$

$$M_{20} = A_2 \left(\sin^2 \dot{\vartheta}_1 / \dot{R} - \kappa_2 \right) \quad (10b)$$

$$M_{21} \dot{R} + M_{20} R_{(1)} = A_2 \left(2 \vartheta_{1(1)} \sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 - \varrho'_{(1)} \dot{R} \sin \dot{\vartheta}_1 - \kappa_2 R_{(1)} \right) \quad (10c)$$

$$M_{30} = A_3 \left(\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1 / \dot{R} - \kappa_3 \right) \quad (10d)$$

$$\begin{aligned} M_{31} \dot{R} + M_{30} R_{(1)} = & A_3 \left[\vartheta_{1(1)} \left(1 - 2 \sin^2 \dot{\vartheta}_1 \right) + \right. \\ & \left. + \dot{R} \vartheta'_{3(1)} - \varrho'_{(1)} \dot{R} \cos \dot{\vartheta}_1 - \kappa_3 R_{(1)} \right] \end{aligned} \quad (10e)$$

Assim, a partir de (10a), (10c) e (10e), é possível escrever as primeiras variações das componentes de momentos nas direções radial, circunferencial e longitudinal como:

$$M_{r1} = a_{ra} \vartheta'_{1(1)} + a_{rb} \varrho_{(1)} + a_{rc} \vartheta_{3(1)} \quad (11a)$$

$$M_{\theta(1)} = a_{\theta a} \frac{\sin \overset{+}{\vartheta}_1}{\overset{+}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{+}{R}} \right) + a_{\theta a} \varrho'_{(1)} + a_{\theta b} \vartheta_{1(1)} + a_{\theta c} \vartheta'_{3(1)} \quad (11b)$$

$$M_{z1} = a_{za} \frac{\sin \overset{+}{\vartheta}_1}{\overset{+}{R}} \left(\frac{R_{(1)}}{\overset{+}{R}} \right) + a_{za} \varrho'_{(1)} + a_{zb} \vartheta_{1(1)} + a_{zc} \vartheta'_{3(1)} \quad (11c)$$

... onde:

$$a_{ra} = -A_1, \quad a_{rb} = \overset{+}{M}_\theta, \quad a_{rc} = \left(M_{20} - A_1 / \overset{+}{R} \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right)$$

$$a_{\theta a} = (A_2 - A_3) \sin \overset{+}{\vartheta}_1 \cos \overset{+}{\vartheta}_1$$

$$a_{\theta b} = M_{z0} + \left[A_3 \left(1 - 2 \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right) - 2 A_2 \cos^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right] \frac{\sin \overset{+}{\vartheta}_1}{\overset{+}{R}}$$

$$a_{\theta c} = A_3 \sin \overset{+}{\vartheta}_1$$

$$a_{za} = - \left(A_2 \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 + A_3 \cos^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right)$$

$$a_{zb} = -\overset{+}{M}_\theta + \left[A_3 \left(1 - 2 \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right) + 2 A_2 \sin^2 \overset{+}{\vartheta}_1 \right] \frac{\cos \overset{+}{\vartheta}_1}{\overset{+}{R}}$$

$$a_{zc} = A_3 \cos \overset{+}{\vartheta}_1$$

A.3.7 Substituição da solução para raízes complexas e diferentes nas condições de extremidade

As condições de extremidade, conforme as equações (3.41), são:

$$\varrho_{(1)} = 0 \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (1a)$$

$$\vartheta_{3(1)} = 0 \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (1b)$$

$$\vartheta'_{1(1)} = 0 \quad \text{em } \xi = \pm \ell_s / 2 \quad (1c)$$

$$\vartheta_{1(1)}|_{-\ell_s/2} = \vartheta_{1(1)}|_{\ell_s/2} \quad \therefore \quad \int_{-\ell_s/2}^{\ell_s/2} \vartheta'_{1(1)} d\xi = 0 \quad (1d)$$

As equações (3.38), (3.39) e (3.40) formam um sistema de equações diferenciais homo-

gêneas e com coeficientes constantes em cada ponto de equilíbrio. A forma da solução⁵ de tal tipo de sistema é dada em (3.42):

$$\varrho_{(1)} = \beta_1 \exp(\omega \xi), \quad \vartheta'_{1(1)} = \beta_2 \exp(\omega \xi), \quad \vartheta_{3(1)} = \beta_3 \exp(\omega \xi) \quad (2)$$

... onde: $\beta_{1...3}$ = coeficientes⁶ associados à contribuição de cada variável cinemática ao “modo” de iniciação da instabilidade; ω = coeficiente complexo da posição no expoente do número e , podendo escrever-se como:

$$\omega = \omega_r + i \omega_i \quad (3)$$

... onde: ω_r = parte real; ω_i = parte imaginária.

A substituição de tais definições sobre (1) providencia:

$$\begin{cases} (\beta_{1r} + i \beta_{1i}) \exp\left(\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \\ (\beta_{1r} + i \beta_{1i}) \exp\left(-\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} (\beta_{2r} + i \beta_{2i}) \exp\left(\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \\ (\beta_{2r} + i \beta_{2i}) \exp\left(-\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} (\beta_{3r} + i \beta_{3i}) \exp\left(\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \\ (\beta_{3r} + i \beta_{3i}) \exp\left(-\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} & [(\beta_{2r} \omega_r - \beta_{2i} \omega_i) + i (\beta_{2i} \omega_r + \beta_{2r} \omega_i)] \sin\left(\omega_i \frac{\ell_s}{2}\right) \cosh\left(\omega_r \frac{\ell_s}{2}\right) - \\ & - [(\beta_{2r} \omega_i + \beta_{2i} \omega_r) + i (\beta_{2i} \omega_i - \beta_{2r} \omega_r)] \cos\left(\omega_i \frac{\ell_s}{2}\right) \sinh\left(\omega_r \frac{\ell_s}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4d)$$

⁵A solução apresentada supõe que as raízes $\omega_{(1...8)}$ do sistema são diferentes entre si. O caso de raízes iguais e não nulas é um evento raro que talvez mereça no futuro um melhor estudo.

⁶Na forma geral, os coeficientes $\beta_{1...3}$ são complexos, ou seja: $\beta_1 \equiv \beta_{1r} + i \beta_{1i}$ et cætera.

Desde que o termo exponencial nunca é nulo, as três primeiras igualdades resultam em:

$$\beta_{1r} \sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = \beta_{2r} \sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = \beta_{3r} \sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (5a)$$

$$\beta_{1i} \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = \beta_{2i} \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = \beta_{3i} \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (5b)$$

Nas igualdades anteriores, as funções $\sin$ e $\cos$ não são simultaneamente nulas; além disso, deseja-se uma solução não-trivial. Assim, sem fazer qualquer julgamento usando a equação (4d), há somente duas alternativas para que (5) seja satisfeita:

$$(a) \quad \beta_{1r} = \beta_{2r} = \beta_{3r} = 0 \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (6a)$$

$$(b) \quad \beta_{1i} = \beta_{2i} = \beta_{3i} = 0 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (6b)$$

Substituindo a alternativa (a) na equação (4d), obtem-se:

$$\beta_{2i} (-\omega_i + i \omega_r) \sin\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \cosh\left(\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (7)$$

Essa igualdade não é satisfeita para $\beta_{2i} \neq 0$ porque:

- $\cosh(\omega_r \ell_s/2)$ nunca é nulo.
- $\sin(\omega_i \ell_s/2)$ não é nulo quando $\cos(\omega_i \ell_s/2)$ o é.

O caso $\beta_{2r} = \beta_{2i} = 0$ satisfaz as condições de extremidade, no entanto ele raramente se formará no autovetor das soluções. Apesar disso, ele merece um estudo futuro mais detalhado. Portanto, salvo nessa condição muito especial, a alternativa (a) não se forma.

Utilizando agora a alternativa (b) na equação (4d), obtem-se:

$$\beta_{2r} (\omega_i - i \omega_r) \cos\left(\frac{\omega_i \ell_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{\omega_r \ell_s}{2}\right) = 0 \quad (8)$$

Essa igualdade é satisfeita para qualquer β_{2r} desde que w_r seja nulo. Em paralelo, a condição (6b) implica em:

$$\frac{\omega_i \ell_s}{2} = n \pi \quad \therefore \quad \omega_i = \frac{2 \pi n}{\ell_s} \quad (9)$$

Apêndice B

Código para estimativa da resposta

O problema de determinar o comportamento do duto flexível exposto a um carregamento axissimétrico encontrou, no capítulo 2, resposta em um modelo matemático, fundamentado na teoria da elasticidade, que usa um número grande de equações para explicar a relação entre as componentes de forças internas (equilíbrio) nas camadas, entre as componentes de deslocamento (cinemática) também nas camadas, entre estas e aquelas (relações constitutivas) e finalmente entre todas as camadas (condições de compatibilidade).

Aquelas equações, agrupadas, formam um sistema de equações cuja solução advém de métodos numéricos. Em uma formulação geral do problema, o número de equações e incógnitas é grande e variável; além disso, uma boa parte delas apresenta termos não-lineares. Por isso, métodos numéricos iterativos, baseados na minimização progressiva do resíduo (erro) nessas equações, são alternativa mais atraente para solução.

Uma característica marcante com que se precisa lidar é a mutabilidade do sistema de equações, porque seu arranjo e natureza são alterados sob força da:

- diversidade da composição da estrutura compósita do duto flexível, geralmente particularizada para um cenário de aplicação;
- diversidade de modelos constitutivos e de opções de modelo da camada;
- alteração (inclusive ao longo do caminho de carregamento) das condições de compatibilidade, tais como a abertura de “*gaps*” entre as camadas.
- necessidade de usar ora estratégia de controle de força, outrora de deslocamento.

Assim, a estimativa da resposta demandou o desenvolvimento de um algoritmo de montagem e solução do sistema de equações e sua implementação na forma de uma ferramenta computacional. Esta última nasceu de prolongada faina, que tomou alguns anos, de geração de um código, hoje com aproximadamente 5000 linhas, em linguagem C, capaz de determinar numericamente a configuração $\bar{E}$ de equilíbrio do duto flexível e dos parâmetros que, acompanhados cuidadosamente, podem apontar a perda de estabilidade de suas armaduras. Esse código é chamado pander.

O algoritmo de montagem e solução é apresentado na forma do fluxograma na figura 4.1. Coerente a sua natureza física, o duto flexível é separado em camadas empilhadas, que inicialmente não apresentam espaços entre si. As diversas alternativas de composição de estrutura compósitas são armazenadas em um repositório único de dados de juntas. O mesmo acontece com as camadas - cuja identidade provém de seu tipo e conjunto de propriedades, excluindo a posição (raio) na junta - e com os materiais. Diversas formas de representação de modelo constitutivo do material foram previstos: linear elástico, pontos da curva tensão-deformação (simétrica ou não), Tvergaard, Ramberg-Osgood, função de potência ajustada pelo valor de tensão de escoamento, tensão e deformação de ruptura, etc. O formato padrão dos arquivos que guardam as informações de materiais, camadas e juntas é ASCII, e uma pequena “linguagem” de comandos em inglês foi construída para facilitar a edição de tais arquivos. Os dados de uma certa junta, por exemplo, são especificados pelos seguintes comandos:

```
BEGIN JOINT
NAME = FLEX_PIPE_500
INDEX = 50070
TYPE = FLEXIBLE PIPE
INTERNAL BOUNDARY = FIXED PRESSURE
EXTERNAL DIAMETER = 158.60E-03
LIST OF LAYER NAMES = 7
  EXTERNAL SHEATH_9
  FABRIC TAPE_9
  OUTER ARMOUR -35DEG_9
  INNER ARMOUR 35DEG_9
  ZETA LAYER 6.2MM-THK
  PRESSURE SHEATH RILSAN_9
  CARCASS_9
END JOINT
```

... e os dados de uma armadura, por exemplo, são fornecidos pelas seguintes linhas:

```
BEGIN LAYER
NAME   = OUTER ARMOUR -35DEG 9
INDEX  = 0432
TYPE   = ARMOUR
NUMBER OF WIRES = 47
WIRE TYPE    = FLAT
WIRE ANGLE   = -35.00
WIRE DIMENSIONS = 2.5e-03 7.0e-3
MATERIAL NAME    = HIGH STRENGTH WIRE STEEL FOR ARMOUR
TIGHTNESS = no
END LAYER
```

Para completar, um exemplo de dados de material é dado a seguir:

```
BEGIN MATERIAL
NAME                = STAINLESS STEEL FOR CARCASS
INDEX              = 00003
ELASTIC PROPERTIES = 200.0E+09          0.290
PLASTICITY MODEL   = RAMBERG-OSGOOD
PLASTICITY DATA   = 545.0E+06          18.100
SPECIFIC MASS      = 7860.0
YIELD LIMIT        = 225.0E+06
ULTIMATE LIMIT     = 800.0E+06
ULTIMATE STRAIN    = 0.05
YIELD CRITERIUM    = MISES
END MATERIAL
```

Desde que a complexidade do algoritmo *per si* é fonte potencial de incertezas quanto ao sucesso da implementação, um programa formal de validação do código pander foi indispensável. Esse programa de validação consistiu da modelagem numérica de duas estruturas:

- Mola helicoidal.
- Duto flexível de $2\frac{1}{2}$ polegadas no estudo de caso apresentado em WITZ[28].

B.1 Modelo de mola helicoidal

Uma mola helicoidal tem particularidades que outras estruturas participantes dessa fase de validação não possuem. Em primeiro lugar, ela é constituída por apenas um reforçador helicoidal e, por isso, sua resposta pode acusar a deficiência ou robustez do algoritmo para lidar com as fontes de não-linearidades relacionadas aos reforçadores. Além disso, acima e abaixo desse reforçador a pressão é nula. Essa última característica é incompatível com modelos mais simples como de FÉRET e BOURNAZEL[1], que ignoram a existência de esforço cortante $\dot{N}_2$ nos reforçadores e, assim, exigem que a qualquer tração $\dot{N}_3$ na seção exista uma carga radial $\dot{q}_r$ associada. Finalmente, o problema teórico dos deslocamentos da mola é resolvido com relativa facilidade utilizando a Teoria de Elasticidade, provendo solução mais rigorosa para comparar.

A partir das equações de Clebsch-Kirchhoff para o equilíbrio de uma haste esbelta, obtém-se uma solução teórica para a mola helicoidal sob pequenas deformações. Esse desenvolvimento supõe que a distensão da linha central e o produto de deformações são desprezíveis. Então, a partir de equações como (2.20), fazendo $q_r = 0$, chega-se até:

$$T \equiv \dot{N}_z = \frac{\dot{M}_\theta}{\dot{R}} = -A_2 \left(\frac{\sin^2 \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \frac{\sin \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} + A_3 \left(\frac{\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \frac{\cos \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} \quad (1a)$$

$$Q \equiv \dot{M}_z = A_2 \left(\frac{\sin^2 \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin^2 \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \sin \check{\vartheta}_1 + A_3 \left(\frac{\sin \dot{\vartheta}_1 \cos \dot{\vartheta}_1}{\dot{R}} - \frac{\sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1}{\check{R}} \right) \cos \check{\vartheta}_1 \quad (1b)$$

As relações cinemáticas adequadas são fornecidas por:

$$\sin \dot{\vartheta}_1 = \frac{2\pi \check{R}}{(\ell_s/n_\ell)} \left[1 + \left(\frac{\Delta\theta}{2\pi n_\ell} \right) \right] (1 + \lambda_r) \approx \left(1 + \frac{\check{\gamma} \check{R}}{\tan \check{\vartheta}_1} + \lambda_r \right) \sin \check{\vartheta}_1 \quad (2a)$$

$$\cos \dot{\vartheta}_1 = \frac{P}{(\ell_s/n_\ell)} (1 + \epsilon) = \cos \check{\vartheta}_1 (1 + \epsilon) \quad (2b)$$

$$\epsilon \cos^2 \check{\vartheta}_1 + \lambda_r \sin^2 \check{\vartheta}_1 + \check{\gamma} \check{R} \sin \check{\vartheta}_1 \cos \check{\vartheta}_1 = \epsilon_{33} \approx 0 \quad (2c)$$

... onde (ℓ_s/n_ℓ) = comprimento retificado de um passo de helicóide; $(\Delta\theta/n_\ell)$ = giro

correspondente a um passo; $\lambda_r \equiv (\dot{\check{R}} - \ddot{\check{R}}) / \ddot{\check{R}} = \text{“deformação” radial}$.

Após substituir as relações cinemáticas nas relações de equilíbrio e isolar os termos $\check{\epsilon}$ e $\check{\gamma}$, obtém-se:

$$\check{\epsilon} = \frac{\ddot{\check{R}}}{A_2 A_3} \left[\frac{(A_2 \sin^2 \check{\vartheta}_1 + A_3 \cos^2 \check{\vartheta}_1)}{\cos \check{\vartheta}_1} \ddot{\check{R}} T + (A_2 - A_3) \sin \check{\vartheta}_1 Q \right] \quad (3a)$$

$$\check{\gamma} = \frac{\tan \check{\vartheta}_1}{A_2 A_3} \left[(A_2 - A_3) \ddot{\check{R}} \cos \check{\vartheta}_1 T + \frac{(A_2 \cos^2 \check{\vartheta}_1 + A_3 \sin^2 \check{\vartheta}_1)}{\sin \check{\vartheta}_1} Q \right] \quad (3b)$$

Para uma primeira comparação entre os resultados teóricos e a estimativa fornecida pelo programa pander, considere a mola helicoidal cujas propriedades são dadas pela tabela B.1. Ao substituir nas equações (3), as seguintes igualdades são obtidas:

$$\begin{aligned} \check{\epsilon} &= 146,13 \times 10^{-6} \underline{T} + 1,0843 \times 10^{-3} \underline{Q} \\ \check{\gamma} &= 1,0843 \times 10^{-3} \underline{T} + 1,2028 \underline{Q} \end{aligned}$$

Os resultados estimados pelo programa pander com os dados da tabela B.1, para uma carga muito pequena, são:

$$\begin{aligned} \text{para } Q = 0: \quad \frac{\check{\epsilon}}{\underline{T}} &= 146,20 \times 10^{-6} (\text{N})^{-1}, & \frac{\check{\gamma}}{\underline{T}} &= 1,1232 \times 10^{-3} (\text{Nm})^{-1}; \\ \text{para } T = 0: \quad \frac{\check{\gamma}}{\underline{Q}} &= 1,2025 (\text{N m}^2)^{-1}, & \frac{\check{\epsilon}}{\underline{Q}} &= 1,0844 \times 10^{-3} (\text{Nm})^{-1} \end{aligned}$$

Os resultados mostram excelente aderência da estimativa dada pelo pander aos resultados teóricos. De fato, variando o ângulo de assentamento de 10° até 80° , a boa correlação se mantém, como ilustra o gráfico B.1.

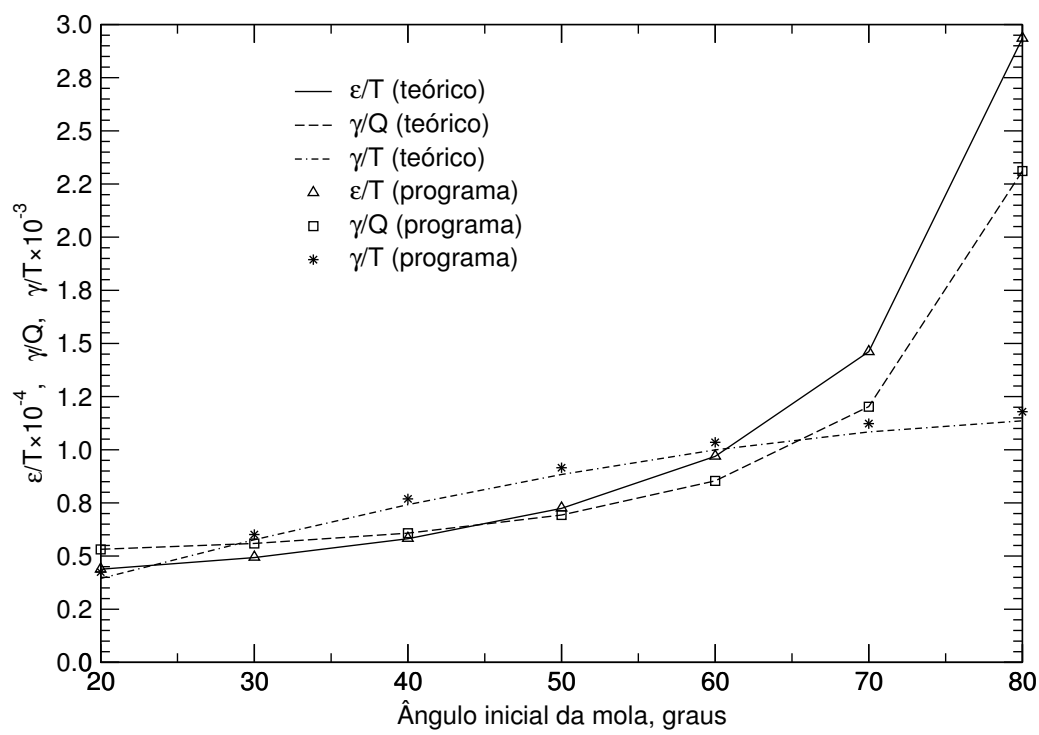


Figura B.1: Verificação do programa pander para o caso de mola helicoidal.

Ângulo de assentamento	70°
Raio médio de assentamento	10 mm
Diâmetro da seção transversal	4 mm
Módulo de elasticidade	200×10³ N/mm²

Tabela B.1: Propriedades da mola helicoidal.

B.2 Modelo de duto flexível de $2\frac{1}{2}$ polegadas

O estudo de caso apresentado em WITZ[28] compara estimativas fornecidas por vários programas e resultados de ensaios mecânicos de um duto flexível de $2\frac{1}{2}$ polegadas. As características do duto são dadas na tabela B.2.

Usando os dados padronizados oferecidos para todos os programas participantes do estudo de caso, foram estimadas os esforços internos e deformações para os pontos de carregamentos citados na tabela B.2. A tabela B.4 mostra que tais resultados tiveram boa aderência aos resultados de outros programas, mas não necessariamente aos valores coletados nos ensaios de amostra.

#	Camada e descrição	D_{ext} , mm
1	Capa externa de tecido enrolado Material: tecido (suposto $E=600$ MPa, $G=300$ MPa) Dados da fita: seção retangular de $75\times0,06$ mm, $\vartheta_1^{\times} = -84^{\circ}$ Massa por comprimento unitário: 0,14 kg/m	111,50
2	Armadura externa Material: aço AFNOR FI-41 ($E=205$ GPa, $\nu=0,29$) Dados dos tendões: 44 tendões chatos com 6×3 mm, $\vartheta_1^{\times} = 35^{\circ}$ Massa por comprimento unitário: 7,01 kg/m	110,50
3	Camada plástica anti-fricção em forma de fita Material: Rilsan (Nylon-11, $E=301$ MPa, $\nu=0,3$) Dados da fita: seção retangular de $30\times1,5$ mm, $\vartheta_1^{\times} = -84,7^{\circ}$ Massa por comprimento unitário: 0,5 kg/m	104,5
4	Armadura interna Material: aço AFNOR FI-41 ($E=205$ GPa, $\nu=0,29$) Dados dos tendões: 40 tendões chatos com 6×3 mm, $\vartheta_1^{\times} = -35^{\circ}$ Massa por comprimento unitário: 6,37 kg/m	101,5
5	Camada plástica anti-fricção Material: Rilsan (Nylon-11, $E=301$ MPa, $\nu=0,3$) Seção da fita: retangular com $30\times1,5$ mm, $\vartheta_1^{\times} = -84,2^{\circ}$ Massa por comprimento unitário: 0,46 kg/m	95,5
6	Espiral zeta de resistência a pressão Material: aço AFNOR FI-15 ($E=205$ GPa, $\nu=0,29$) Dados do perfil: seção de $9,25\times6,2$ mm, $\vartheta_1^{\times} = -85,5^{\circ}$, $\underline{S}_w = 51,5$ mm ² , $\underline{I}_1 = 100$ mm ⁴ , $\underline{I}_2 = 711$ mm ⁴ , $\underline{J} = 204,6$ mm ⁴ Massa por comprimento unitário: 11,21 kg/m	92,5
7	Camada plástica intermediária interna Material: Grilamida (Nylon-12, $E=284$ MPa, $\nu=0,3$) Massa por comprimento unitário: 1,25 kg/m	80,1
8	Carcaça intertravada Material: aço inoxidável AISI-304 ($E=205$ GPa, $\nu=0,29$) Dados do perfil: seção de $28\times0,7$ mm, $\vartheta_1^{\times} = -87,5^{\circ}$, $\underline{S}_w = 19,6$ mm ² , $\underline{I}_1 = 20$ mm ⁴ , $\underline{I}_2 = 556$ mm ⁴ , $\underline{J} = 6,5$ mm ⁴ Massa por comprimento unitário: 3,49 kg/m	70,2

Tabela B.2: Dados usados na análise de duto de $2\frac{1}{2}$ polegadas.

Tração	Torque	Distensão	Giro
$\underline{T}$, N	$\underline{Q}$, Nm	ϵ , m/m	γ , rad/m
5000	0	$3,87262 \times 10^{-5}$	$-9,60678 \times 10^{-5}$
0	50	$-5,48199 \times 10^{-5}$	$3,11044 \times 10^{-4}$
0	-50	$-3,70953 \times 10^{-4}$	$-1,12996 \times 10^{-2}$
5000	20,2506	$3,83360 \times 10^{-5}$	0
124,34	50	0	$2,34815 \times 10^{-4}$
1446,0	-50	0	$-6,29276 \times 10^{-4}$

Tabela B.3: Estimativas dadas pelo programa pander para resposta do duto flexível de WITZ[28].

Condição	Rigidez ou fator de acoplamento	Estimativa do pander	Estimativa média dos participantes	Resultados experimentais
$\underline{Q} = 0$	$\underline{T}/\epsilon$, MN	129,1	(129±21)	(90±6)
	$\underline{\gamma}/\epsilon$, rad/m	-2,4807	(-1,86±0,59)	n.i.
	$\underline{T}/\underline{\gamma}$, MNm	-52,047		
$\underline{\gamma} = 0$	$\underline{T}/\epsilon$, MN	130,4	(129±21)	(90±6)
	$\underline{Q}/\underline{T}$, m	$4,05 \times 10^{-3}$		
	$\underline{Q}/\epsilon$, kNm	528,2	(386±153)	n.i.
$\underline{T} = 0$	$\underline{Q}/\underline{\gamma}$, kNm ²	160,75	(174±31)	n.i.
$\underline{Q} > 0$	$\underline{\gamma}/\epsilon$, rad/m	-5,674	(-10,7±20)	n.i.
	$\underline{Q}/\epsilon$, MNm	-0,912		
$\underline{T} = 0$	$\underline{Q}/\underline{\gamma}$, kNm ²	4,425	(6,9±8,8)	n.i.
$\underline{Q} < 0$	$\underline{\gamma}/\epsilon$, rad/m	30,461	(37,7±74,1)	n.i.
	$\underline{Q}/\epsilon$, MNm	0,135		
$\epsilon = 0$	$\underline{Q}/\underline{\gamma}$, kNm ²	212,9	(203±52)	(104±14)
$\underline{Q} > 0$	$\underline{T}/\underline{\gamma}$, kNm	529,5	(597±521)	n.i.
	$\underline{Q}/\underline{T}$, m	0,4021		
$\epsilon = 0$	$\underline{Q}/\underline{\gamma}$, kNm ²	76,46	(85±9)	(41±8)
$\underline{Q} < 0$	$\underline{T}/\underline{\gamma}$, MNm	-2,298	(-1,77±1,14)	n.i.
	$\underline{Q}/\underline{T}$, m	$-3,458 \times 10^{-2}$		

Tabela B.4: Comparação entre código usado, outros programas participantes do estudo de caso de Witz e os resultados experimentais.

Apêndice C

Documentação de estudos de caso

Esse apêndice documenta os resultados da modelagem numérica das amostras 10 e 11 mencionadas em BRAGA[3, 5], e que não foram incorporadas à seção 4.3 para manter a boa fluência do texto.

C.1 Amostra 10

A estimativa da resposta da amostra 10 é fornecida pelos gráficos citados a seguir:

- resposta de compressão contra deformação de contração: figura 4.4, pág. 80.
- resposta de compressão contra expansão radial: figura C.1, pág. 163.
- resposta de compressão contra giro: figura C.2, pág. 163.
- resposta de compressão contra tensões nas armaduras e bandagem: figura C.3, pág. 164.

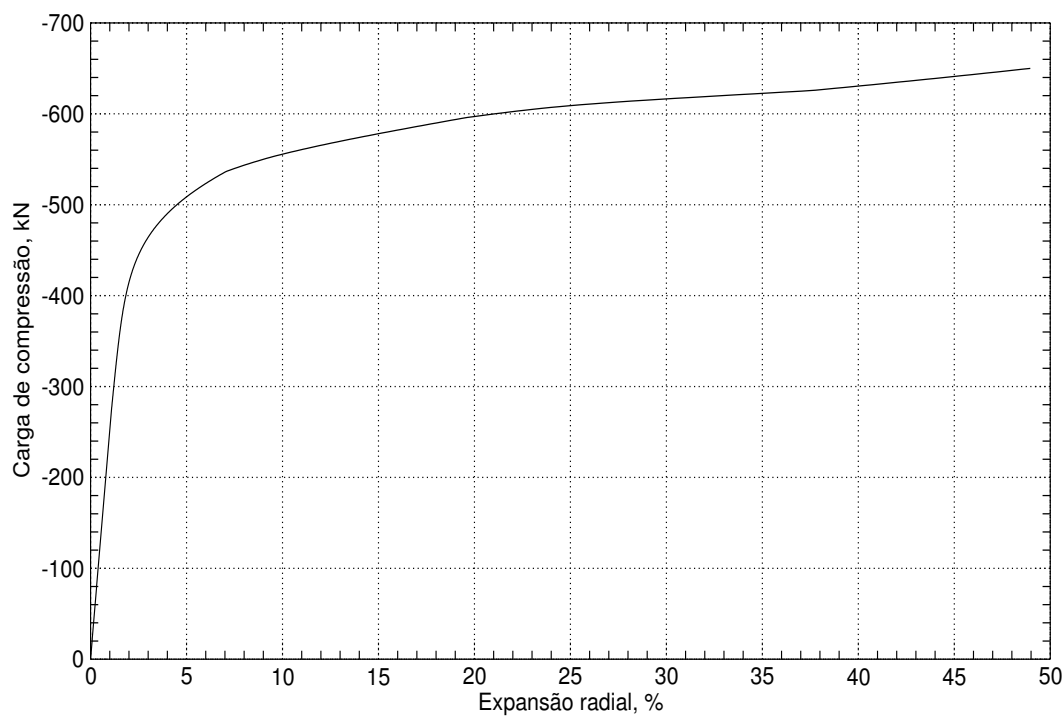


Figura C.1: Evolução da expansão radial contra compressão (amostra 10).

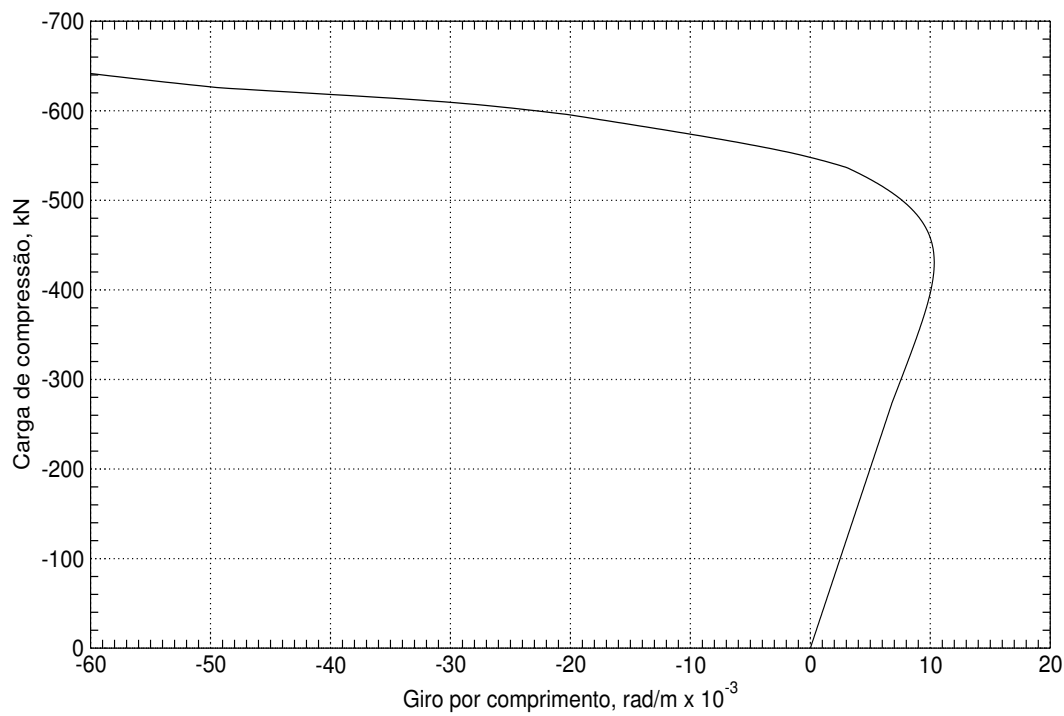


Figura C.2: Evolução da giro contra compressão (amostra 10).

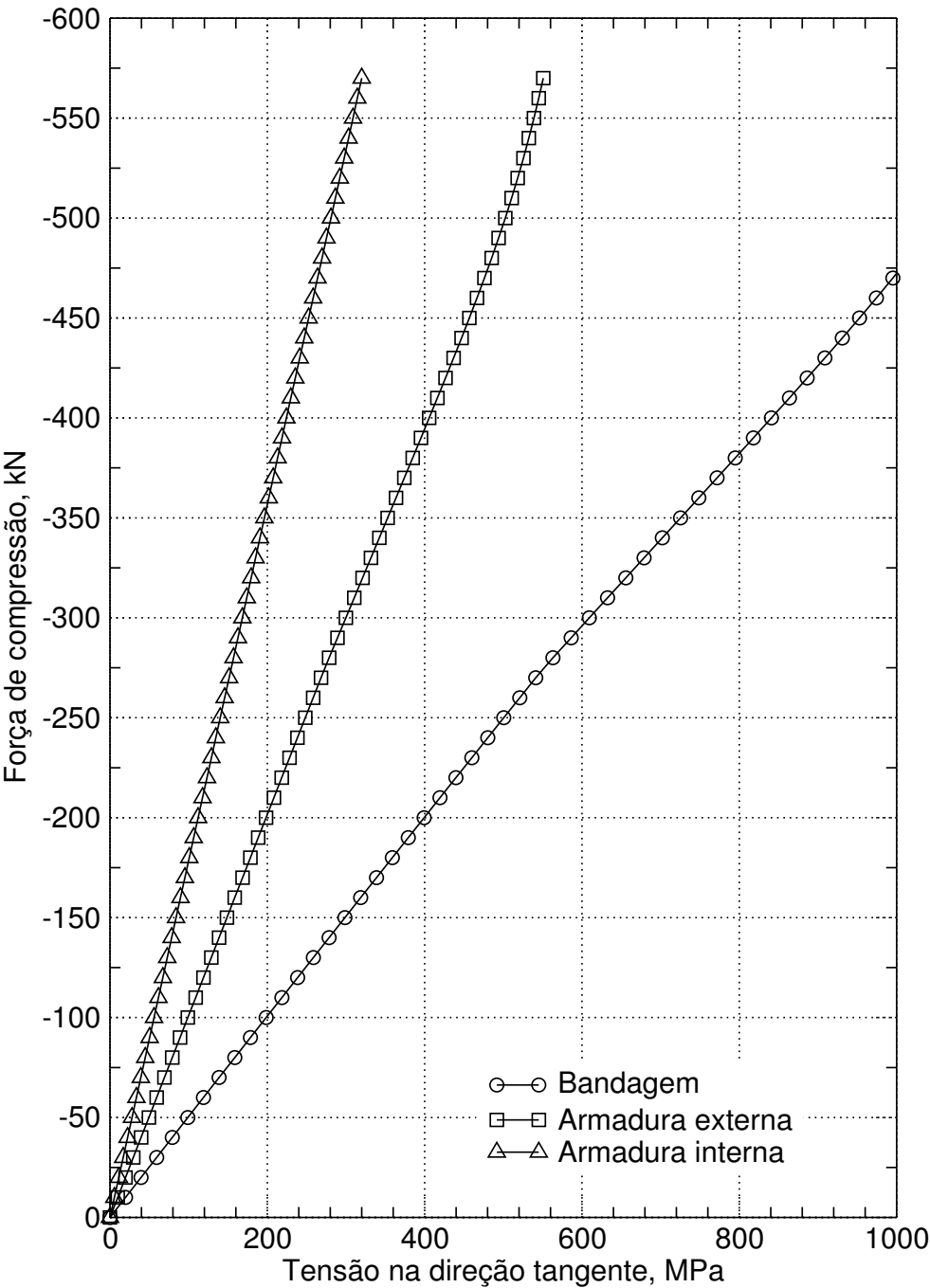


Figura C.3: Evolução das tensões em várias camadas da amostra 10 no caminho primário de equilíbrio.

Tabela C.1: Principais dados da amostra 10.

Diâmetro externo, mm	158,6
Comprimento útil da amostra, m	3206
Número de passos (arm. externa)	4,98
Número de passos (arm. interna)	5,16
Rigidez à tração, MN	167
Rigidez à compressão medida, MN	36,2

C.2 Amostra 11

A estimativa da resposta da amostra 11 é fornecida pelos gráficos citados a seguir:

- resposta de compressão contra deformação de contração: figura 4.6, pág. 89.
- resposta de compressão contra expansão radial: figura C.4, pág. 166.
- resposta de compressão contra giro: figura C.5. pág. 167.

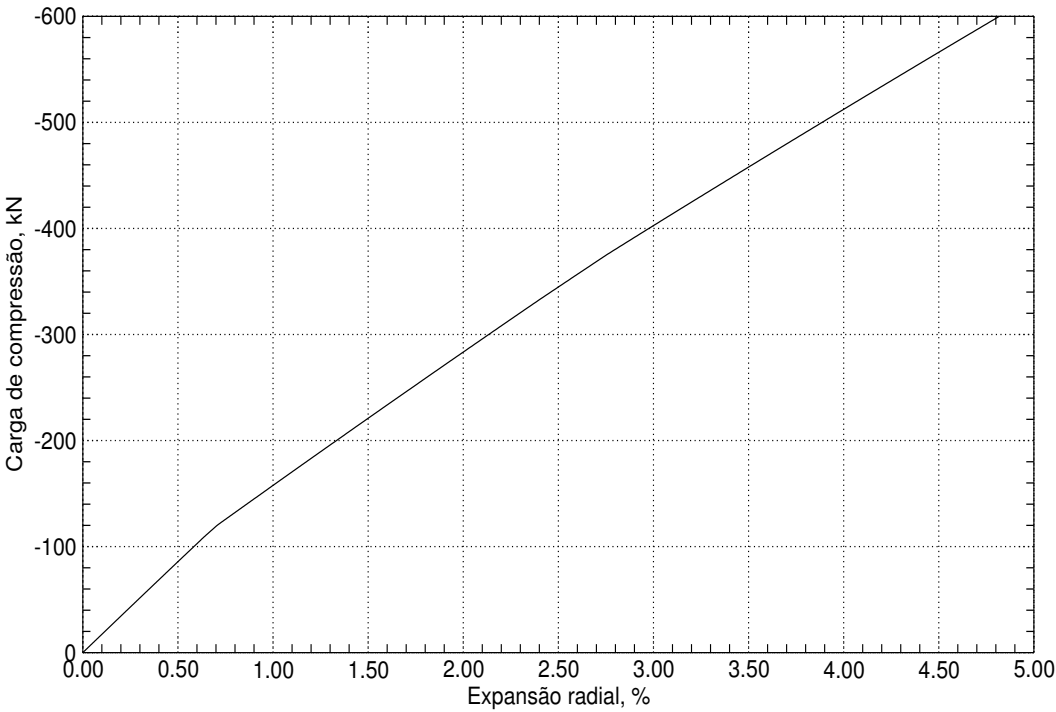


Figura C.4: Evolução da expansão radial contra compressão (amostra 11).

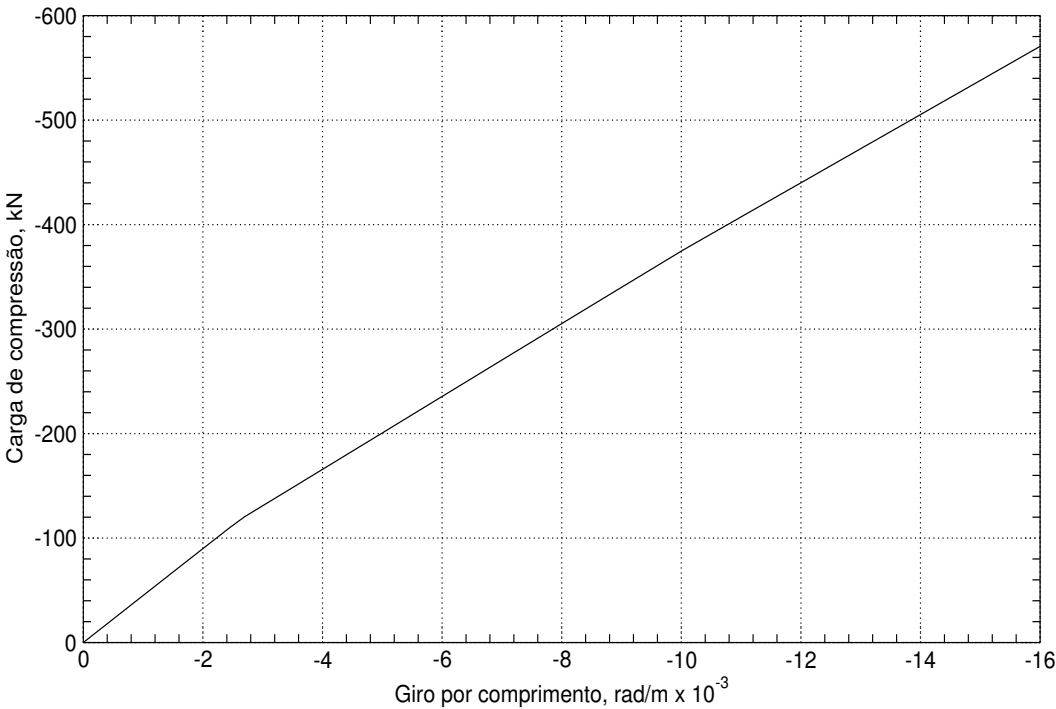


Figura C.5: Evolução da giro contra compressão (amostra 11).