



**COPPE/UFRJ**

## CONTROLE DE CAOS EM SISTEMAS MECÂNICOS

Aline Souza de Paula

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Rio de Janeiro

Abril de 2010

# CONTROLE DE CAOS EM SISTEMAS MECÂNICOS

Aline Souza de Paula

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Marcelo Amorim Savi, D.Sc

---

Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto, Dr. Ing.

---

Prof. Fernando Pereira Duda – D. Sc

---

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D. Sc.

---

Prof. Wallace Moreira Bessa, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2010

Paula, Aline Souza de

Controle de Caos em Sistemas Mecânicos/ Aline  
Souza de Paula. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XIX, 149 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de  
Engenharia Mecânica, 2010.

Referencias Bibliográficas: p. 135-149.

1. Dinâmica Não-linear. 2. Sistemas Mecânicos. 3.  
Controle de Caos. I. Savi, Marcelo Amorim. II.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Ao meu marido, Heitor.*

## **Agradecimentos**

Menos de 3 anos depois, esse agradecimento não tem como ser muito diferente do agradecimento do mestrado. Quero aproveitar esse espaço para reforçar a importância de algumas pessoas ao longo dessa jornada e também agradecer algumas pessoas que conheci nesses últimos anos.

Agradeço a todos que me incentivaram e me apoiaram ao longo da realização desta tese: amigos, professores, colegas de curso.

Não posso deixar de agradecer mais uma vez aos meus familiares, em especial à minha mãe, ao meu pai, à Miriam, ao Jorge, às minhas avós Eny e Letícia, e aos meus irmãos Bruno e Marina, que sempre me incentivaram e possibilitaram com que eu chegasse até aqui.

Ao pessoal do Laboratório de Acústica e Vibrações que contribuíram para que esta tese chegasse ao fim e, em especial, à família FENÃO pelo apoio e incentivo sempre. Mais em especial ainda, agradeço: à Susana e ao Jefferson pela amizade e torcida; ao Sergio, pela amizade, companheirismo e caronas; ao Flávio, pela amizade, apoio e por resolver minhas “pendências” no Rio quando eu estava em Brasília; à Bianca, pela amizade e por trazer mais alegria, descontração e risadas para o laboratório. Ao Alberto, pelo apoio, torcida e por estar sempre pronto para levantar a auto-estima. Agradeço a essas pessoas também pelos ótimos momentos que passamos: pelas idas ao verdinho; pelos almoços no incuba gula, no árabe; por andarmos devagar quando o Sérgio estava com pressa (sempre); Como eu vou sentir falta do convívio diário com essa maravilhosa família FENÃO...

Ao Professor Marian Wiercigroch que, junto com o professor Marcelo Savi, tornou possível que eu passasse 2 meses do meu doutorado na Universidade de Aberdeen e por ter me recebido de “braços abertos”. O trabalho realizado nesse período se tornou um capítulo da minha tese. À Katya Pavlovskaja, pela ajuda no fechamento do trabalho realizado na Escócia.

Chegando ao fim, tenho os agradecimentos mais difíceis... Impossível conseguir agradecer essas pessoas como eu gostaria.

Ao professor, orientador, amigo Marcelo Savi pelos incontáveis aconselhamentos não só acadêmicos, mas pessoais e profissionais; pelo incentivo, apoio, e por acreditar em mim; pela enorme ajuda que contribuiu MUITO para que hoje eu esteja na UnB; pela imensa generosidade, me abrindo portas e me proporcionando

uma “barrinha” menor do que a merecida; e, mais uma vez, pela orientação impecável ao longo desses mais de 6 anos, desde a graduação até o doutorado.

Ao meu marido Heitor por estar sempre ao meu lado, por me escutar, pelo apoio, incentivo e confiança, pelo carinho, pela compreensão... e por tantas outras coisas. OBRIGADA por tudo!

Ao CNPq e à FAPERJ pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## CONTROLE DE CAOS EM SISTEMAS MECÂNICOS

Aline Souza de Paula

Abril/2010

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Programa: Engenharia Mecânica

O controle de caos se baseia na riqueza de padrões periódicos existentes no comportamento caótico e pode ser entendido como a utilização de pequenas perturbações no sistema para estabilizar uma trajetória dentro desses comportamentos periódicos. Neste trabalho avalia-se a capacidade de diferentes métodos de controle de caos em estabilizar órbitas periódicas instáveis (OPIs) de um sistema em regime caótico, visando aplicações em sistemas mecânicos. Seis métodos são avaliados: Os métodos discretos OGY e um semi-contínuo baseado no OGY; dois métodos discretos propostos neste trabalho e inéditos na literatura, semi-contínuo multiparâmetros e OGY multiparâmetros; e dois métodos contínuos por realimentação, com estados defasados e com estados defasados estendidos. Os seis métodos apresentados são aplicados a um pêndulo não-linear, objetivando-se estabilizar OPIs do sistema em regime caótico. Realiza-se uma análise comparativa desses métodos a partir do emprego de regras de controle considerando-se ausência e presença de ruídos externos, assim como imprecisões na modelagem do sistema. Por último, as estratégias de controle de caos contínuas são empregadas para controlar bifurcações no contexto de colheita de energia, processo pelo qual a energia é extraída de fontes externas, capturada e armazenada. A ideia se baseia na conversão de oscilações verticais em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado parametricamente. Este movimento rotativo é utilizado para alimentar um gerador elétrico. Com isso, torna-se interessante estabilizar comportamentos rotativos do pêndulo, incluindo o controle de bifurcações que desestabilizem essas soluções rotativas. Os resultados obtidos nesse trabalho mostram que os métodos discretos conferem mais flexibilidade ao sistema do que os contínuos, enquanto os métodos contínuos conferem maior robustez ao sistema. Além disso, tem-se que o emprego dos métodos por realimentação é eficaz para evitar bifurcações com duplicação de período assim como bifurcações para o caos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## CHAOS CONTROL METHOD APPLIED TO MECHANICAL SYSTEMS

Aline Souza de Paula

April/2010

Advisor: Marcelo Amorim Savi

Department: Mechanical Engineering

Chaos control is based on the richness of chaotic behavior and may be understood as the use of tiny perturbations for the stabilization of unstable periodic orbits (UPOs) embedded in a chaotic attractor. In this work, it is analyzed the capability of different chaos control method on stabilizing UPOs of a system exhibiting chaotic behavior, with application to mechanical systems. Six methods are of concern: the discrete methods OGY and a semi-continuous based on OGY approach; two discrete methods proposed in this work, OGY multiparameter and semi-continuous multiparameter; and two continuous methods, Time-Delayed Feedback (TDF) and Extended Time-Delayed Feedback (ETDF). All these methods are applied to a nonlinear pendulum in order to stabilize UPOs of the system exhibiting chaotic response. A comparative analysis is carried out by considering control rules with and without noise, as well as with and without system modeling uncertainties. Finally, continuous chaos control methods are employed in order to control bifurcations in the context of energy harvesting, which is the process by which energy is derived from external sources, captured, and stored. The idea is based on the conversion of vertical oscillations to rotational motion by means of a parametrically excited pendulum. This rotational motion is, then, used to provide the driving torque for an electrical generator. Therefore, it is interesting to stabilize pendulum rotational motion, including the control of bifurcations that destabilize these rotational solutions. The obtained results show that discrete chaos control methods give more flexibility to the system when compared to continuous methods, while continuous chaos control methods are more robust. Moreover, it is shown that feedback methods are effective in order to avoid period doubling bifurcations as well as bifurcations to chaos.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>XVIII</b>
<b>LISTA DE SIGLAS.....</b>	<b>XIX</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 Organização do Trabalho.....	4
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>6</b>
2.1 Caos em Sistemas Mecânicos.....	7
2.2 Controle de Caos .....	10
<b>3 MÉTODOS DE CONTROLE DE CAOS.....</b>	<b>20</b>
3.1 Identificação de Órbitas Periódicas Instáveis.....	21
3.2 Método OGY .....	22
3.3 Método Semi-Contínuo (SC).....	26
3.4 Método SC multiparâmetros.....	29
3.4.1 Abordagem Desacoplada .....	35
3.5 Método OGY multiparâmetros.....	37
3.5.1 Abordagem Acoplada .....	37
3.5.2 Abordagem Desacoplada .....	38
3.6 Método por realimentação com estados defasados.....	39
3.7 Método por realimentação com estados defasados estendidos.....	40
3.7.1 Expoente de Lyapunov de uma OPI .....	42
<b>4 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE DE CAOS A UM PÊNDULO NÃO-LINEAR.....</b>	<b>45</b>
4.1 Pêndulo Não-Linear.....	45
4.2 Métodos Discretos e Semi-contínuos .....	54
4.2.1 Método OGY.....	56
4.2.2 Método SC .....	57
4.2.3 Método SC Multiparâmetros Acoplado .....	60

4.2.4	Método SC Multiparâmetros Desacoplado .....	63
4.2.5	Método OGY Multiparâmetros .....	65
4.3	Métodos Contínuos .....	67
4.3.1	Representação do sistema para o cálculo do Expoente de Lyapunov .....	69
4.3.2	Métodos por realimentação .....	70
<b>5</b>	<b>ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE CONTROLE.....</b>	<b>77</b>
5.1	Análise da Estabilização do Sistema na Ausência de Ruído .....	78
5.2	Análise da Estabilização do Sistema na Presença de Ruído.....	87
5.3	Análise da Estabilização do Sistema com Imprecisão na Modelagem.....	107
<b>6</b>	<b>CONTROLE DE CAOS PARA COLHEITA DE ENERGIA .....</b>	<b>112</b>
6.1	Sistema Pêndulo-Shaker .....	113
6.2	Controle do sistema Pendulo-Shaker.....	117
6.2.1	Controle de Caos .....	118
6.2.2	Evitando bifurcação com duplicação de período .....	119
6.2.3	Evitando bifurcação para o caos .....	120
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>125</b>
	<b>APÊNDICE - CONTROLE DE CAOS EM MAPAS UTILIZANDO O MÉTODO</b>	
	<b>OGY MULTIPARÂMETROS DESACOPLADO .....</b>	<b>129</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>135</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Classificação dos métodos de controle de caos. ....	11
Figura 3.1: (a) Representação esquemática do método OGY, Savi (2006); (b) $\xi^n$ na vizinhança do controle; (c) $\xi^{n+1}$ posicionado sobre a direção estável na iteração $n+1$ devido à perturbação adequada $\delta p$ em $n$ . ....	23
Figura 3.2: Representação geométrica esquemática. ....	24
Figura 3.3: Seções de controle intermediárias utilizadas no Método SC. ....	27
Figura 3.4: Soma vetorial das perturbações dos parâmetros. ....	34
Figura 3.5: Combinação linear das perturbações dos parâmetros. ....	34
Figura 4.1: Pêndulo não-linear e acessórios: (1) Disco metálico, (2) Dispositivo de amortecimento, (3) Massa excêntrica, (4) Sensor de rotação, (5) Fonte de energia, (6) motor elétrico, (7) Dispositivo de aquisição de dados e (8) Molas e fios. ....	46
Figura 4.2 : Pêndulo não-linear: (a) Modelo físico: 1-Disco metálico, 2-Massa excêntrica, 3-Dispositivo de amortecimento, 4-Sensor de rotação, 5-Conjunto fio-mola e 6-Motor elétrico; (b) Disco metálico: geometria e forças atuantes; e (c) Sistema de excitação: geometria. ....	46
Figura 4.3: Resposta livre do pêndulo. ....	50
Figura 4.4: Diagrama de Bifurcação. ....	51
Figura 4.5: Seções de Poincaré em $0$ e $\pi$ rad para $\omega = 5.61$ rad/s. Lado esquerdo: resultados experimentais; lado direito: resultados numéricos. ....	51
Figura 4.6: Parâmetros de controle. ....	52
Figura 4.7: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 empregando-se o método OGY utilizando o 1º parâmetro de controle: (a) $\phi(t)$ ; e (b) $\Delta l_1(t)$ . ....	57

Figura 4.8: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 empregando-se o método OGY utilizando o 2º parâmetro de controle: (a) $\phi(t)$ ; e (b) $\Delta l_2(t)$ .....	57
Figura 4.9: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC utilizando o 1º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_1(t)$ .....	58
Figura 4.10: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC utilizando o 1º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_1(t)$ .....	58
Figura 4.11: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC utilizando o 2º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_2(t)$ .....	59
Figura 4.12: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC utilizando o 2º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_2(t)$ .....	59
Figura 4.13: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC multiparâmetros acoplado: .....	62
Figura 4.14: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC multiparâmetros acoplado: .....	62
Figura 4.15: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC multiparâmetros desacoplado: .....	65
Figura 4.16: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC multiparâmetros desacoplado: .....	65
Figura 4.17: Estabilização da OPI de período 1 pelo método OGY multiparâmetros acoplado: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_1(t)$ e $\Delta l_2(t)$ .....	66
Figura 4.18: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 pelo método OGY multiparâmetros desacoplado: (a) Espaço de fase; (b) $\phi(t)$ ; e (c) $\Delta l_1(t)$ e $\Delta l_2(t)$ .....	67
Figura 4.19: OPI de período 1: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador. ....	71
Figura 4.20: OPI de período 1 estabilizada com $R = 0$ e $K = 2.1$ : .....	72

Figura 4.21: OPI de período 1 estabilizada com $R = 0.2$ e $K = 2.4$ :.....	72
Figura 4.22: OPI de período 2: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador. ....	72
Figura 4.23: OPI de período 2 estabilizada com $R = 0.2$ e $K = 1.1$ :.....	73
Figura 4.24: OPI de período 3: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador. ....	73
Figura 4.25: OPI de período 3 estabilizada com $R = 0.2$ e $K = 0.7$ :.....	74
Figura 4.26: OPI de período 6: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador. ....	74
Figura 4.27: Espaço de fase do sistema em regime permanente para $R=0.8$ e diferentes valores de $K$ . ....	75
Figura 4.28: Espaço de fase do sistema em regime permanente para $R=0.8$ e $K=3.0$ . ....	76
Figura 4.29: OPIs identificadas e estabilizadas: (a) Período 3; e (b) Período 6. ....	76
Figura 5.1: OPIs da regra de controle. a) S1 ; b) S2; c) S3 ; d) S4.....	78
Figura 5.2: Espaço de fase das OPIs a serem estabilizadas.....	79
Figura 5.3: Sistema controlado a partir do Método SC com o 1º parâmetro de controle: .....	79
Figura 5.4: Sistema controlado a partir do Método SC com o 2º parâmetro de controle: .....	80
Figura 5.5: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Acoplado:.....	81
Figura 5.6: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Acoplado:.....	81
Figura 5.7: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Desacoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.....	82
Figura 5.8: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Desacoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S2; e (b) Perturbação na S2.....	82

Figura 5.9: Sistema controlado a partir do método ETDF: .....	83
Figura 5.10: Sistema controlado a partir do método ETDF: .....	83
Figura 5.11: OPI's de período 3: (a) Estabilizada pelo ETDF; e (b) Da regra de controle. .....	84
Figura 5.12: Expoentes de Lyapunov máximos para valores de $R$ e $K$ : .....	84
Figura 5.13: Expoentes de Lyapunov máximos para valores de $R$ e $K$ : .....	85
Figura 5.14: Atrator caótico: (a) Sem ruído; (b) $\eta = 1.0\%$ ; (c) $\eta = 2.0\%$ ; (d) $\eta = 5.0\%$ . .....	89
Figura 5.15: OPIs da regra de controle. a) S1 ; b) S2; c) S3; d) S4.....	90
Figura 5.16: Espaço de fase das OPIs da segunda regra de controle. ....	90
Figura 5.17: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 0\%$ : .....	91
Figura 5.18: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 0\%$ : .....	91
Figura 5.19: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 0\%$ empregando-se o ETDF. ....	92
Figura 5.20: OPI de período 6 estabilizada pelo ETDF (esquerda) e OPI identificada (direita). ....	92
Figura 5.21: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 1\%$ : .....	93
Figura 5.22: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 1\%$ : .....	93
Figura 5.23: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 1\%$ empregando-se o ETDF. ....	94
Figura 5.24: OPIs estabilizadas pelo método SC utilizando o 1º parâmetro com $\eta = 1\%$ . .....	95
Figura 5.25: OPIs estabilizadas pelo método SC utilizando o 2º parâmetro com $\eta = 1\%$ . .....	96

Figura 5.26: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros acoplado com $\eta = 1\%$ .	97
.....	
Figura 5.27: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros desacoplado com $\eta = 1\%$ .....	98
Figura 5.28: OPIs estabilizadas pelo método ETDF com $\eta = 1\%$ .....	99
Figura 5.29: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 2\%$ : .....	100
Figura 5.30: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 2\%$ : .....	100
Figura 5.31: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 2\%$ empregando-se o ETDF. ....	101
Figura 5.32: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros desacoplado com $\eta = 2\%$ . Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo. ....	102
Figura 5.33: OPIs estabilizadas pelo método ETDF com $\eta = 2\%$ . ....	103
Figura 5.34: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 1\%$ empregando-se o SC com o 1º parâmetro: (a) 4 seções de controle; e (b) 6 seções de controle .....	104
Figura 5.35: Posições do sistema e desejada na S1 com $\eta = 2\%$ empregando-se o SC com o 1º parâmetro: (a) 4 seções de controle; e (b) 6 seções de controle .....	104
Figura 5.36: Espaço de fase das OPIs estabilizadas pelo método ETDF com $\eta = 5\%$ .	105
.....	
Figura 5.37: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros: (a) $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$ e $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$ ; .....	108
Figura 5.38: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros com $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$ e $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ . ....	109

Figura 5.39: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros: (a) $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$ e $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$ ;	110
Figura 5.40: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros com $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$ e $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ .	110
Figura 6.1: Princípio de funcionamento de um pêndulo excitado parametricamente.	112
Figura 6.2: Pêndulo (na esquerda) pivotado montado sob uma base fixada ao shaker eletro-dinâmico (na direita).	114
Figura 6.3: Modelo físico do sistema pêndulo-shaker com os componentes mecânico e elétrico.	114
Figura 6.4: Diagrama de bifurcação construído com $\Omega=9\text{rad/s}$ e seção de Poncaré com $\Omega=9\text{rad/s}$ e $E_0=115\text{V}$ .	116
Figura 6.5: Diagrama de bifurcação com $E_0=85\text{V}$ aumentando-se e diminuindo-se a frequência de forçamento.	117
Figura 6.6: OPI de period-1 e seu expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.	118
Figura 6.7: OPI de período-1 estabilizada para $R = 0$ , $K = 1.2$ e $x_0 = \{-3, 0, \dots, 0\}$ ;	119
Figura 6.8: Espaço de fase do pêndulo com ação do controle para $R=0$ , $K=1.2$ e $x_0 = \{-3, 0, \dots, 0\}$ com estado permanente ressaltado em rosa.	119
Figura 6.9: (a) Órbita de período-1 da resposta do pêndulo para $E_0=95.5\text{V}$ e (b) expoente de Lyapunov máximo da órbita para $E_0=96 \text{ V}$ e diferentes parâmetros de controle.	120

Figura 6.10: Diagrama de bifurcação para $\Omega=9\text{rad/s}$ sem ação de controle (preto) e com controle (rosa): (a) $R=$ , $K=0.6$ e (b) $R=0$ , $K=1$ . .....	120
Figura 6.11: Espaço de fase dos atratores coexistentes: (a) Três periódicos em $E_0=85\text{V}$ e $\Omega=12.2\text{rad/s}$ ; e (b) Um periódico e dois quasi-periódicos, junto com suas seções de Poincaré, em $E_0=85\text{V}$ e $\Omega=10.25\text{rad/s}$ . .....	121
Figura 6.12: Expoente de Lyapunov máximo da órbita periódica de período-1 em $E_0=85\text{V}$ e $\Omega=10.33\text{rad/s}$ para diferentes parâmetros de controle. ....	122
Figura 6.13: Diagrama de bifurcação em $E_0=85\text{V}$ com e sem ação de controle. ....	122
Figura 6.14: Resposta em regime permanente para o sistema com controle para $E_0=85\text{V}$ . .....	123

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Grandezas físicas e geométricas do pêndulo.....	48
Tabela 4.2: Parâmetros de atrito.....	50
Tabela 4.3: OPIs identificadas.....	53
Tabela 4.4: Quantidade de OPIs estabilizadas para diferentes valores de $\beta_a$ e $\beta_p$ . ....	61
Tabela 6.1: Parâmetros do sistema pêndulo-shaker identificados experimentalmente (Xu <i>et al.</i> , 2007).....	116

## LISTA DE SIGLAS

- DDE: Equação diferencial com defasagem temporal (*Delayed Differential Equation*)
- ETDF: Realimentação com estados defasados estendidos (*Extended Time-Delayed Feedback*)
- ODE: Equação diferencial ordinária (*Ordinary Differential Equation*)
- OGY: Ott-Grebogy-York
- OPI: Órbita Periódica Instável
- S1: 1ª Seção de Controle
- S2: 2ª Seção de Controle
- S3: 3ª Seção de Controle
- S4: 4ª Seção de Controle
- SC: Semi-Contínuo
- TDF: Realimentação com estados defasados (*Time-Delayed Feedback*)

# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o termo caos é utilizado para designar um tipo de resposta apresentado por sistemas dinâmicos determinísticos que tem como característica marcante a dependência em relação às condições iniciais. A sensibilidade às condições iniciais é tal que sempre existe uma incerteza na determinação do estado futuro do sistema, independente de quão preciso é o conhecimento das condições iniciais. Além disso, no seu comportamento aparentemente aleatório e imprevisível, estão imersas infinitas órbitas periódicas instáveis (OPIs). Essa ordem escondida torna o comportamento muito mais compreensível e confere grande flexibilidade ao sistema (LINDNER *et al.*, 1995).

No decorrer das últimas décadas, pode-se perceber uma evolução no estudo do comportamento caótico. Inicialmente, os trabalhos buscavam a caracterização da dinâmica sem que se houvesse um interesse em como este comportamento pudesse ser explorado em aplicações práticas. Nas pesquisas mais recentes, pesquisadores abordam uma vasta gama de situações reais em que o comportamento caótico ocorre. Além disso, em diversos casos torna-se importante intervir sobre o sistema, controlando o caos quando necessário. Este controle, no entanto, não significa somente suprimir a resposta caótica, mas também explorar o grande potencial imerso neste tipo de comportamento.

A possibilidade para a ampla aplicação da teoria do caos se dá devido ao comportamento caótico estar vinculado às não-linearidades existentes nos sistemas de interesse. Atualmente, têm-se evidências que sistemas dinâmicos de diversas áreas da ciência moderna possuem equações de governo não-lineares que apresentam um comportamento caótico, incluindo engenharia, medicina, ecologia, biologia, comunicação, química, astronomia, economia. Além disso, esse tipo de comportamento pode ser desejável ou não.

Existem diversas situações reais em que o comportamento caótico não é desejável, podendo ser nocivo ao sistema. Nestes casos torna-se importante identificar e controlar ou suprimir este tipo de comportamento. Como exemplos, têm-se a necessidade de eliminar arritmias cardíacas, de evitar o colapso de sistemas de potência, de regular a resposta dinâmica de equipamentos mecânicos e elétricos.

Em outros casos, no entanto, o comportamento caótico pode ser útil e desejável. A mistura de dois ou mais fluidos, por exemplo, pode ser obtida com maior eficácia a

partir de um comportamento caótico. No caso da exploração de áreas por robôs autônomos, trajetórias caóticas são mais eficientes que trajetórias aleatórias. Além disso, há casos em que a riqueza de trajetórias presente no comportamento caótico e a possibilidade de levar o sistema para uma dessas trajetórias, com baixo gasto de energia, tornam interessante este tipo de resposta. Na navegação espacial interplanetária essa característica é bastante utilizada e a exploração de satélites é realizada com baixo gasto de combustível a partir do emprego de técnicas de controle de caos. Recentemente foi demonstrado que o tráfego de dados na Internet pode ser caótico (CHEN & YU, 2003). O emprego de estratégias de controle de caos pode ajudar no controle do congestionamento de dados de forma mais eficiente. Este controle pode fornecer condições para a expansão da Internet, o que seria bastante interessante tendo em vista a demanda crescente deste serviço.

O controle de caos se baseia na riqueza de padrões periódicos existentes no comportamento caótico e pode ser entendido como a utilização de pequenas perturbações no sistema para estabilizar uma trajetória dentro desses comportamentos periódicos. A capacidade de estabilizar, a princípio, qualquer órbita dentro das infinitas órbitas periódicas instáveis presentes no comportamento caótico confere ao sistema uma grande flexibilidade que pode ser explorada em diversas aplicações. No campo da engenharia, esta capacidade é bem interessante possibilitando o desenvolvimento de sistemas bastante flexíveis, uma vez que em cada situação é possível estabilizar uma órbita periódica instável mais adequada com pequenos gastos de energia.

Neste trabalho avalia-se a capacidade de diferentes métodos de controle de caos em estabilizar órbitas periódicas instáveis de um sistema em regime caótico, visando a aplicação em sistemas mecânicos. São seis os métodos analisados e, como principal objetivo, tem-se a comparação do desempenho das estratégias de controle. Nesta análise comparativa avalia-se também robustez dos métodos de controle quando o sistema está sujeito a ruídos externos e quando existem incertezas em sua modelagem.

Inicialmente, apresentam-se dois métodos de controle de caos bastante abordados na literatura, o método discreto OGY e um método semi-contínuo baseado no OGY. Em seguida, propõe-se um novo método de controle de caos. Esta estratégia de controle representa uma extensão do método semi-contínuo de forma a permitir que as perturbações sejam realizadas em mais de um parâmetro do sistema, denominado método semi-contínuo multiparâmetros. A mesma extensão é realizada para o OGY, denominado método OGY multiparâmetros, também inédito na literatura. Os métodos

multiparâmetros possuem duas abordagens, considerando-se ou não o acoplamento entre os parâmetros de controle. Por último, apresentam-se dois métodos de controle de caos contínuos, o método por realimentação com estados defasados (*Time-Delayed Feedback* - TDF) e o método por realimentação com estados defasados estendidos (*Extended Time-Delayed Feedback* - ETDF).

Os seis métodos apresentados são aplicados a um pêndulo não-linear, previamente estudado por Blackburn e Baker (1998), Franca & Savi (2001), DeSerio (2003), Pinto & Savi (2003), Pereira-Pinto (2004) e De Paula (2005) e De Paula *et al.* (2006), objetivando-se estabilizar OPIs do sistema em regime caótico. Em seguida, os métodos que apresentam bom desempenho nesta primeira análise têm seus desempenhos comparados. A análise comparativa é realizada a partir do emprego de regras de controle considerando-se ausência e presença de ruídos externos, assim como imprecisões na modelagem do sistema.

Finalmente, as estratégias de controle de caos contínuas são empregadas para controlar bifurcações no contexto de colheita ou *energy harvesting*. Colheita de energia é o processo pelo qual a energia é extraída de fontes externas (solar, eólica, térmica, cinética), capturada e armazenada. Além disso, geralmente essa energia capturada é considerada do “ambiente”. O conceito de colheita de energia tem estado presente nos últimos séculos na forma de moinhos de vento, moinhos de água e sistemas de energia solar passivos. Nas décadas mais recentes, tecnologias como turbinas eólicas, geradores hidroelétricos e painéis solares têm contribuído pouco, mas de forma crescente para atender às necessidades de energia do planeta. Essa tecnologia oferece duas vantagens significativas sobre as soluções tradicionais: fonte teoricamente inesgotável e reduzido impacto ambiental.

Neste contexto, Wiercigroch (2005) propõe um novo conceito de extrair energia a partir de ondas do mar. A ideia se baseia na conversão de oscilações verticais em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado parametricamente. Este movimento rotativo é, então, utilizado para alimentar um gerador elétrico. Desta forma, torna-se interessante estabilizar comportamentos rotativos do pêndulo, incluindo o controle de bifurcações que desestabilizem essas soluções rotativas. Com esse objetivo, a última análise apresentada nesse trabalho consiste no emprego dos métodos com realimentação a um sistema pêndulo-shaker de forma a estabilizar OPI rotativas do pêndulo.

Como contribuições mais importantes dessa tese de doutorado, relacionadas a publicações completas em periódicos internacionais, têm-se: Generalização do método

de controle de caos semi-contínuo para utilização de mais de um parâmetro de controle, método multiparâmetros semi-contínuo, cujo desempenho é avaliado considerando-se um pêndulo não-linear em regime caótico (De Paula & Savi, 2009c); generalização semelhante para o método OGY, método multiparâmetros OGY, cujo desempenho é avaliado utilizando-se mapas (De Paula & Savi, 2008), apresentado no apêndice; implementação dos métodos de controle de caos contínuos (TDF e ETDF) em um pêndulo não-linear (De Paula & Savi, 2009a). Neste trabalho apresenta-se uma forma de determinar os parâmetros do controlador a partir do cálculo do expoente de Lyapunov de uma OPI. Em diversos trabalhos disponíveis na literatura, os autores determinam esses parâmetros por tentativa e erro.

Além disso, embora diversos autores forneçam revisões sobre os métodos de controle de caos e suas aplicações, não existem trabalhos que reportem uma análise comparativa dessas técnicas de controle. A análise comparativa apresentada nesta tese discute de forma crítica o emprego de diferentes métodos de controle de caos a um mesmo sistema, sendo uma contribuição relevante (De Paula & Savi, 2009b).

Outra contribuição também relevante está relacionada ao emprego de métodos de controle de caos para evitar bifurcações. As estratégias de controle, específicas para controle de caos, são empregadas com sucesso em situações em que o sistema não apresenta comportamento caótico. Este resultado representa uma extensão do uso dos métodos de controle de caos e pode ter várias aplicações. Além disso, o controle de bifurcações é importante para diversas aplicações como, por exemplo, no caso de flambagem de colunas ou saltos dinâmicos em treliças (Savi *et al.*, 2002b).

## **1.1 Organização do Trabalho**

Esta tese é dividida em 7 capítulos. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução ao trabalho, abordando suas motivações, objetivos e organização. No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão da literatura acerca dos estudos desenvolvidos sobre a presença do comportamento caótico em sistemas mecânicos e sobre o controle deste comportamento.

No Capítulo 3 são apresentados os 6 métodos de controle de caos abordados neste trabalho. Dentre eles, dois são discretos – método OGY e método OGY multiparâmetros – dois são semi-contínuos – método semi-contínuo (SC) e método

semi-contínuo multiparâmetros – e dois são contínuos – métodos por realimentação (TDF e ETDF).

No Capítulo 4, inicialmente apresenta-se o pêndulo não-linear utilizado na análise. Em seguida, avalia-se a capacidade de estabilização do sistema em algumas de suas órbitas periódicas instáveis a partir do emprego dos controladores apresentados. Além disso, no caso dos métodos multiparâmetros são considerados dois atuadores diferentes.

No Capítulo 5 apresenta-se uma análise comparativa de 3 dos métodos apresentados: o semi-contínuo, o semi-contínuo multiparâmetros e o ETDF. Esses são os métodos que apresentam melhores resultados na primeira análise. Inicialmente, estes métodos são avaliados de forma comparativa na ausência de ruídos a partir do emprego de uma regra de controle. Posteriormente, a partir do emprego de uma segunda regra de controle, a robustez dos métodos é avaliada considerando-se a presença de ruídos externos e imprecisões na modelagem do sistema.

O Capítulo 6 apresenta a análise de um sistema pêndulo-shaker motivado pelo conceito de colheita de energia. Inicialmente, realiza-se uma análise preliminar do seu comportamento dinâmico. Em seguida, os métodos de controle de caos contínuos são empregados de forma a manter um movimento rotativo desse pêndulo em três etapas distintas, visando: Estabilizar uma OPI rotativa quando o sistema encontra-se em regime caótico; evitar a duplicação de período e manter uma órbita rotativa de período-1; e, finalmente, evitar a bifurcação para o caos e conservar novamente uma órbita periódica de período-1 rotativa

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões referentes ao trabalho.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

No final do século XIX, Henri Poincaré observou que os movimentos associados a sistemas de três corpos sob o efeito da gravidade podem ser extremamente complicados. Esta descoberta consistiu na primeira evidência matemática do comportamento caótico. Durante muitos anos o caos apresentado na resposta de sistemas dinâmicos não-lineares foi evitado devido à sua complexidade. Este tipo de comportamento era geralmente ignorado, sendo considerado completamente imprevisível (OTANI e JONES, 1997).

Este quadro mudou inteiramente com os computadores modernos da década de 1950. O computador permitiu a realização de simulações antes impossíveis utilizando-se equações de governo. A partir dessas simulações, em 1963 Lorenz apresentou evidências da imprevisibilidade de modelos determinísticos de fenômenos meteorológicos (LORENZ, 1963). Este fato teve grande impacto na década de 1970 quando diversos pesquisadores e cientistas verificaram este tipo de comportamento em diversas áreas de conhecimento. Ruelle e Takens (1971) propuseram uma nova teoria a partir da verificação do comportamento caótico na turbulência de fluidos. Alguns anos depois, May (1976) apresentou exemplos de ocorrência de caos em mapas logísticos. Uma das descobertas mais surpreendentes desta década foi feita pelo físico Feigenbaum (1978 e 1979) que apontou que algumas leis universais governam a transição do comportamento regular para o caótico, em outras palavras, sistemas completamente diferentes podem apresentar uma regularidade inesperada na cascata de duplicações de período no diagrama de bifurcação, culminando em uma resposta caótica. Ainda nesta década Mandelbrot apresentou diversos trabalhos sobre fractais, apontando sua utilização para diversas áreas do conhecimento (MANDELBROT, 1982). Na área biológica, Winfree aplicou métodos geométricos às oscilações biológicas, especialmente à ritmos cardíaco e circadiano (1980). Experimentalmente, a presença do comportamento caótico foi verificada em fluidos (SWINNEY e GOLLUB, 1978), em reações químicas (ROUX *et al.*, 1983), em circuitos elétricos (LINSAY, 1981), em osciladores mecânicos (MOON e HOLMES, 1979), dentre outros.

A partir desta época, uma grande variedade de trabalhos verifica que modelos dinâmicos simples podem apresentar respostas caóticas, impulsionando a aplicação da teoria do caos em diversas áreas do conhecimento científico. Atualmente, sabe-se que

diversas áreas da ciência moderna possuem características não-lineares que apresentam um comportamento caótico, incluindo medicina (FREEMAN, 1991; BABLOYANTZ e DESTEXHE, 1988), ecologia (SCHAFFER, 1985), biologia (HASSELL *et al.*, 1991), economia (WIELAND e WESTERHOFF, 2005), comunicação (HAYES *et al.*, 1993).

A seguir, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o estudo do comportamento caótico em sistemas mecânicos e, em seguida, sobre o controle de caos.

## 2.1 Caos em Sistemas Mecânicos

O estudo do caos na engenharia recebeu um grande impulso após a observação de que sistemas mecânicos e elétricos não-lineares de baixa ordem podem se comportar caoticamente sob determinadas condições de operações (MOON, 1987). A seguir são citados alguns dos trabalhos dedicados a estudar o caos em sistemas mecânicos.

Pesquisas mostram que muitos mecanismos podem apresentar uma resposta caótica devido à natureza imperfeita de sua montagem, assim como ao desgaste de seus componentes, quando aparecem folgas, atrito, propagação de trincas, fadiga. Neste contexto, Moon (1987) cita a presença de comportamento caótico em sistemas mecânicos não-lineares com folgas ou atrito, submetidos a forçamento harmônico, e também em atuadores magneto-mecânicos. Lin e Ewins (1993) apresentam um estudo numérico e experimental sobre o comportamento dinâmico caótico de um sistema mecânico não-linear com folgas. Galvanetto (1998) investiga em seu trabalho a dinâmica caótica de um sistema mecânico com três graus de liberdade e com forças de atrito não-lineares. Foong *et al.* (2003) verificam a partir de um aparato experimental de teste de fadiga que a propagação de trincas pode ocasionar resposta caótica. Gu *et al.* (1998) propõem uma abordagem para estimar a falha por fadiga e a taxa de carga dinâmica a que estão submetidos os mecanismos com resposta caótica.

Vários trabalhos verificam o comportamento caótico em diferentes tipos de vigas sujeitas a diversas condições de carregamento. Por exemplo, Moon e Shaw (1983) mostram que uma viga elástica sujeita a vibrações forçadas e condições de contorno não-lineares são caóticas para uma força de excitação senoidal. Battelli e Feckan (2005) apresentam soluções caóticas para uma viga elástica com amortecimento linear apoiada em mancais sujeita a perturbação periódica.

Recentemente, sistemas não-suaves, devido à presença de impacto ou de atrito, têm sido amplamente estudados. Estes sistemas podem apresentar comportamento

caótico como verificado experimentalmente por Savi *et al.* (2007) e Divenyi *et al.* (2008), onde a descontinuidade é dada pela presença de impacto. Peterka e Vacík (1992) fazem uma breve explicação das leis que regem sistemas mecânicos simples com impacto com o objetivo de elucidar a transição do regime caótico para o periódico (e vice-versa) nesses sistemas.

Alguns autores relatam também a presença de caos em sistemas mecânicos com histerese, como em osciladores com memória de forma e pseudo-elasticidade (MACHADO *et al.*, 2003; SAVI *et al.*, 2002; SAVI e PACHECO, 2002).

Em problemas referentes à usinagem de metais, diversos trabalhos numéricos e experimentais verificam que a dinâmica da interação ferramenta-metal em um processo de corte pode apresentar comportamento caótico (GRABEC, 1988; WIERCIGROCH e CHENG, 1997; LITAK, 2002; LITAK *et al.*, 2007a; LITAK *et al.*, 2008a). Neste caso, o comportamento caótico é altamente prejudicial comprometendo o acabamento da peça cortada, devendo ser evitado.

A dinâmica de rotores também é uma área que possui diversos trabalhos que verificam a presença de resposta caótica. Muszynska e Goldman (1995) apresentam resultados numéricos e experimentais sobre o comportamento dinâmico de um rotor desbalanceado e com um dos seus pedestais solto ou com atrito ocasional entre o rotor e o estator. O rotor operando nestas condições exibe vibrações caóticas. Karpenko *et al.* (2006) verificam experimentalmente o comportamento caótico de um tipo de rotor sujeito a um pré-carregamento transversal, de acordo com a frequência de rotação.

Wendeker *et al.* (2003) estudam o processo de combustão de um motor de combustão interna por centelha por meio de dados experimentais e mostram que a variabilidade da combustão pode se comportar caoticamente pela análise da série temporal da pressão no interior do cilindro.

No campo da robótica, Nakamura & Sekiguchi (2001) mostram que veículos autônomos não-tripulados utilizados em varreduras de áreas são mais eficientes quando seguem uma trajetória caótica do que uma trajetória aleatória. Martins-Filho & Macau (2007) apresentam duas leis de controle, sendo uma discreta e outra contínua, que impõe uma trajetória caótica para um robô autônomo, e mostram que o sistema realiza uma varredura eficiente do terreno com este tipo de comportamento. Islam e Murase (2005) verificaram experimentalmente o comportamento caótico em um robô autônomo.

Litak *et al.* (2008b) verificam a presença de comportamento caótico em um veículo em locomoção como consequência da excitação devido à irregularidade da

superfície da estrada. Estas vibrações, no entanto, são indesejáveis por apresentarem desconforto ao motorista e aos passageiros.

Diversas outras áreas em sistemas mecânicos podem ainda apresentar comportamento caótico. Em elementos de máquinas tem-se o comportamento de rolamentos de esferas (MEVEL e GUYADER, 1993), o comportamento de trens de engrenagens (PFEIFFER, 1988; LITAK e FRISWELL, 2003); em problemas de aeroelasticidade não-linear têm-se a resposta de aerofólios (ZHAO e YANG, 1990; KIM e LEE, 1996; PRICE e KELERIS, 1996).

Um dos dispositivos mecânicos mais explorados na literatura não-linear é o pêndulo. Apesar de ser um dispositivo simples em termos de implementação experimental e equação de governo, apresentam fenômenos dinâmicos complexos tais como bifurcações e caos (MOON, 1987). O pêndulo não-linear é um dispositivo mecânico utilizado tanto em estudos tecnológicos como em investigações científicas, sendo associado à medição de tempo, a dispositivos de estabilização, assim como a aplicações balísticas. De fato, o interesse no estudo do movimento pendular é antigo. Galileo (1564-1642) dedicou muitos esforços na análise do pêndulo, sendo marcante a sua utilização para medição do tempo. Foucault (1819-1868) apresentou a primeira evidência de que a terra gira em torno de seu próprio eixo pela observação do movimento de um pêndulo, fixado por um longo arame à cúpula do Pantheon, em Paris. No transcorrer da história, diversos estudos foram realizados analisando a dinâmica do pêndulo e, certamente, o pêndulo se tornou um dos paradigmas no estudo da física e de fenômenos naturais (Trueba *et al.*, 2003).

Trueba *et al.* (2003) fazem uma integração de alguns tipos particulares de pêndulos (pêndulo forçado, pêndulo forçado harmonicamente e pêndulo verticalmente forçado) em um único modelo. Este modelo generalizado é denominado pêndulo perturbado generalizado e as condições para o aparecimento de caos são determinadas pelo método de Melnikov.

De Paula *et al.* (2006) apresentam uma análise numérica e experimental de um pêndulo não-linear. Neste trabalho, propõe-se um método para identificação do amortecimento presente no sistema quando este é composto por um amortecimento viscoso linear e um atrito seco. Considerando-se respostas do sistema livre e sujeito a um forçamento harmônico verifica-se uma riqueza no seu comportamento, englobando respostas periódica, caótica e caos transiente. A partir da comparação entre respostas numéricas e experimentais, obtém-se uma boa concordância entre os resultados,

validando o modelo matemático proposto. Franca e Savi (2001a) apresentam uma discussão acerca da análise experimental do mesmo pêndulo em regime caótico. Neste trabalho, considera-se a reconstrução do espaço de estado a partir do sinal de posição, a análise no domínio da frequência e a determinação dos expoentes de Lyapunov e da dimensão do atrator. Franca e Savi (2001b) investigam a determinação das dimensões de correlação e generalizada a partir de séries temporais escalares obtidas da integração de um modelo matemático de um pêndulo não-linear. Em um estudo posterior, Franca e Savi (2003) avaliam a determinação dos expoentes de Lyapunov em séries temporais contaminadas por ruídos e oriundas de um modelo matemático de pêndulo não-linear. Pinto e Savi (2003) estudam as principais técnicas de predição não-linear em séries temporais caóticas em um pêndulo não-linear experimental. Pereira-Pinto *et al.* (2004b e 2005) e Savi *et al.* (2006) tratam do controle de caos em um pêndulo não-linear utilizando um método de controle semi-contínuo baseado no controle OGY, OGY-SC. De Paula e Savi (2009c) tratam do controle deste mesmo pêndulo a partir do emprego do método OGY-SC com múltiplos parâmetros de controle.

Diversos trabalhos verificam e analisam o comportamento caótico em pêndulos. São abordados pêndulos com e sem atrito, sujeitos a diferentes tipos de forçamentos, com e sem impacto, entre outros.

## **2.2 Controle de Caos**

Os métodos de controle de caos possuem algumas propriedades características que os distingue das abordagens de controle convencional. Essencialmente, o controlador explora a sensibilidade a pequenas perturbações e o conjunto denso de órbitas periódicas instáveis que os sistemas caóticos possuem. Essas propriedades não são encontradas em sistemas lineares ou não-caóticos. Neste contexto, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável de período qualquer e, conjuntamente, permitir que o sistema possa transitar dentre as diversas órbitas conforme a necessidade do usuário, conferindo grande flexibilidade ao sistema. Além disso, na concepção inicial das técnicas de controle de caos, o projeto do controlador não é baseado no modelo matemático do sistema e sim nas propriedades geométricas do atrator. Portanto, pode-se estimar os parâmetros do controlador a partir de séries temporais caóticas provenientes de sistemas físicos reais, não sendo necessário o conhecimento das equações de governo do sistema. Finalmente, tem-se que a

abordagem do problema é no espaço de estado e utilizam-se ferramentas da análise de sistemas não-lineares, como por exemplo: seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov e reconstrução do espaço de estado. Estas são algumas das propriedades enumeradas por Chen (2001).

Os métodos de controle de caos podem ser divididos em contínuos e discretos. A Figura 2.1 apresenta um diagrama com a classificação das estratégias de controle de caos, assim como as técnicas abordadas nesse trabalho. Dentre os métodos de controle de caos contínuos, os de maior importância na literatura são os métodos por realimentação com estados defasados e com estados defasados estendidos, analisados neste trabalho. Dentre os métodos de controle de caos discretos, além dos já consagrados OGY e semi-contínuo, são abordados dois métodos propostos em De Paula & Savi (2009c e 2008), respectivamente, semi-contínuo multiparâmetros e OGY multiparâmetros.

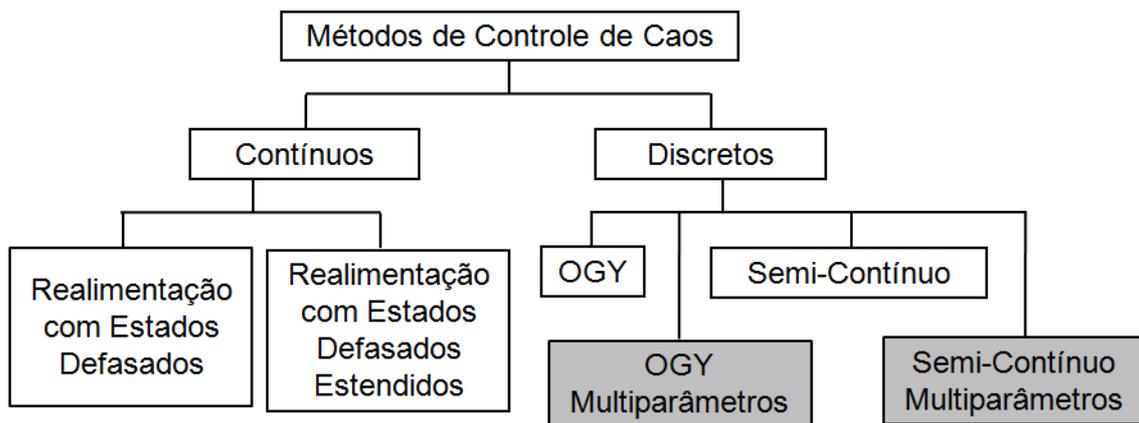


Figura 2.1: Classificação dos métodos de controle de caos.

No início da década de 90, Ott *et al.* (1990) propuseram o método de controle denominado OGY, em homenagem aos autores do trabalho Ott-Grebogi-Yorke. Este trabalho pode ser considerado o marco inicial de uma série de trabalhos e pesquisas na área de controle de caos. Dentre as suas características principais está a independência do modelo matemático do sistema, o que facilita a sua implementação experimental.

O método OGY baseia-se na propriedade de que as iterações de um mapa caótico na vizinhança de um ponto fixo, de um modo geral, possuem uma direção instável e outra estável. Estas direções podem ser aproximadas localmente pela análise dos autovetores e autovalores da matriz Jacobiana decorrente da linearização do sistema na vizinhança do ponto. A partir daí, este método considera pequenas perturbações em um

parâmetro acessível do sistema quando a sua trajetória está na vizinhança de um ponto fixo. Esta atuação tem como objetivo a estabilização do sistema em uma órbita periódica instável ao forçar a iteração seguinte a recair sobre a direção estável do ponto fixo.

Uma implementação experimental do método OGY foi reportada pela primeira vez por Ditto *et al.* (1990) no controle de vigas magneto-elásticas. Posteriormente, outros autores apresentaram resultados experimentais utilizando a mesma técnica (SPANNO *et al.*, 1991; STARRET e TAGG, 1995; YAGASAKI e UOZUMI, 1997).

Diversos autores publicaram trabalhos propondo métodos e aplicações baseados na filosofia do método OGY que acabaram por aprimorar o seu emprego. A seguir, alguns desses trabalhos são citados.

Visando o controle de caos de sistemas de dimensões maiores, Romeiras *et al.* (1992) estendem o trabalho de Ott *et al.* (1990) abordando-o como um método de alocação de pólos, permitindo assim uma flexibilidade na escolha da matriz ganho e a generalização do método para elevadas dimensões. Gluckman *et al.* (1997) também abordam o problema de controle de sistemas de elevadas dimensões e desenvolvem um método de controle de caos adaptativo considerando-se um sistema não-estacionário e realizam sua aplicação experimental. Este controle também é baseado nas ideias do método OGY.

Para a implementação do método OGY considera-se que as séries temporais de todas as variáveis de estado são disponíveis, no entanto, comumente tem-se disponível a série temporal de apenas uma das variáveis de estado. Neste contexto, Nitsche e Dressler (1992) analisam o método OGY quando o atrator é reconstruído pelo método das coordenadas defasadas. Os autores modificam a formulação do método pela constatação de que o mapa na seção de Poincaré depende também das perturbações anteriores no parâmetro de controle. So e Ott (1995) estendem o trabalho de Romeiras *et al.* (1992) considerando também o uso do método de coordenadas defasadas para a reconstrução do espaço de estado.

Lai e Grebogi (1993) consideram a aplicação do método OGY no problema de sincronização de dois sistemas caóticos idênticos, aonde a trajetória de um sistema é estabilizada na trajetória do sistema diretor ao invés de ser estabilizada em uma órbita periódica instável. O tema sincronização é outro tópico amplamente abordado na atualidade, com vasta literatura associada.

Bayly e Virgin (1994) fazem uma análise acerca da aplicabilidade do método OGY e de que algumas propriedades ou elementos externos, tais como, fortes não-linearidades, elevada instabilidade, erros na estimação de parâmetros, contaminação do sistema por ruídos e o tempo para que a trajetória do sistema visite a órbita a ser controlada. Esses fatores podem ser cruciais para que o método OGY seja efetivo.

Uma das limitações do método OGY consiste na dificuldade de estabilização de sistemas com alta instabilidade, assim como de órbitas periódicas instáveis de elevada periodicidade. De forma a contornar estas limitações, Hubinger *et al.* (1994) propõem que o parâmetro de controle seja ajustado de modo semi-contínuo, não necessitando esperar que o sistema retorne à seção de Poincaré para se efetuar uma nova perturbação no sistema conforme preconizado pelo método OGY. Este método semi-contínuo é denominado método de controle local e é desenvolvido considerando-se a inserção de seções de Poincaré em fases intermediárias, igualmente distribuídas, entre duas seções de Poincaré. Com isso, o número de intervenções sobre o sistema é maior. Posteriormente, Korte *et al.* (1995) utilizam a mesma concepção de controle semi-contínuo para sistemas onde o espaço de estado é reconstruído pelo método das coordenadas defasadas e passam a denominá-lo de método SC (Semi-Contínuo). Christini *et al.* (1996) propõem uma extensão do método SC para tratar problemas de elevadas dimensões e a aplica experimentalmente em um pêndulo duplo. Ritz *et al.* (1997) aprimoram a distribuição destas seções intermediárias de controle de modo a equalizar as taxas de expansão do fluxo de uma seção para a outra.

Galias e Ogorzaleck (1995), utilizando uma estratégia bang-bang, modificam o método OGY para o caso de o parâmetro de controle assumir somente dois valores possíveis.

Visando a utilização de mais de um parâmetro de controle, Barreto e Grebogi (1995) estendem o trabalho de Ott *et al.* (1990) abordando-o como um método de alocação de pólos. Considera-se que todos os parâmetros podem atuar simultaneamente em todas as seções de controle. Experimentalmente, o controle é aplicado utilizando-se 2 parâmetros de controle. Em comparação com o método OGY, este controlador apresenta menor tempo de espera para início do controle e melhor desempenho para um nível maior de ruído. De Paula e Savi (2009c) propõem uma modificação no método semi-contínuo, baseado no método OGY, objetivando-se a utilização múltiplos parâmetros de controle e mostram que a abordagem com multiparâmetros é capaz de estabilizar mais OPIs que o método semi-contínuo original.

O controle de sistemas caóticos não-estacionários é abordado por Carrol *et al.* (1992), In *et al.* (1995), Gluckman *et al.* (1997) e Mondragón e Arrowsmith (1997), onde a órbita periódica instável se desloca conforme os parâmetros do sistema evoluem no tempo e, portanto, o controlador deve ser atualizado em face destas variações no sistema.

Christini *et al.* (1997) propõem um método de controle discreto onde não há a necessidade de uma fase de aprendizagem pré-controle, ou seja, o método é em tempo real, adaptativo e independente do modelo matemático do sistema. O método proposto é aplicado experimentalmente em uma viga magneto-elástica.

Outra característica importante do método OGY é o tempo de espera, relativo ao tempo em que a trajetória do sistema demora para entrar na vizinhança de um dos pontos de controle. Neste contexto, Aston e Bird (1997) propõem algumas técnicas para o aumento da bacia de atração em torno do ponto de controle, o que resulta em um tempo de espera menor para que o controlador comece a atuar no sistema em comparação com o método OGY tradicional. Yagasaki e Uozumi (1998) ao invés de aproximarem linearmente o mapa ao redor do ponto de controle, utilizam uma aproximação não-linear da sela reduzindo também o tempo de espera para o início do controle. Starret (2002) apresenta um método que, ao invés de conduzir qualquer condição inicial no interior da região controlável para o subespaço estável de uma órbita desejada, conduz diretamente para a órbita desejada.

Yu *et al.* (2001) estendem o método OGY para ser um método baseado na teoria das variedades invariantes (*invariant manifold theory*) e no conceito de controle por modo deslizante (*sliding mode control*). Os autores propõem a construção de variedades invariantes apropriadas de acordo com as propriedades dinâmicas desejadas, fazendo com que não haja mais a necessidade de cálculo dos autovalores e autovetores de matrizes Jacobianas.

Alasty e Salarieh (2005) obtêm um controlador com maior robustez ao utilizar um estimador fuzzy num controlador OGY, que é aplicado a um oscilador Bonhoeffer–Van der Pol.

Yagasaki (2007) propõe um novo método de controle de caos, baseado no método OGY, para estabilizar trajetórias instáveis. Neste caso, no entanto, a trajetória não precisa ser considerada periódica como comumente realizado nos métodos de controle de caos. O método proposto é ainda aplicado experimentalmente a dois pêndulos, um simples e outro acoplado.

O segundo método de grande impacto na literatura de controle de caos, depois do método OGY, foi o método de controle por realimentação com estados defasados (TDF) proposto por Pyragas (1992). Este foi o primeiro método de controle de caos contínuo. O método TDF se diferencia fundamentalmente do método OGY pelo fato do primeiro exercer uma atuação contínua e ininterrupta sobre o sistema, o que favorece o controle em sistemas contínuos muito instáveis, onde não é possível a estabilização atuando somente quando o sistema cruza uma seção de Poincaré. Pyragas (1992) observou que, em controladores baseados no método OGY, há uma permanente análise computacional dos estados do sistema. Além disso, como a atuação é discreta no tempo, existem dificuldades na estabilização de órbitas periódicas instáveis cujos expoentes de Lyapunov sejam elevados se comparados com o inverso do tempo decorrido entre estas perturbações. Pyragas (1992) ressalta também que um controlador discreto possui uma maior sensibilidade a ruídos externos se comparado com controladores contínuos. O controlador TDF também possui as propriedades de utilizar pequenas perturbações no sistema e de ser independente do modelo dinâmico do sistema, o que favorece a implementação experimental deste método. O método de controle TDF se baseia na realimentação da diferença entre estados atual e defasado do sistema. Para a implementação do método basta definir o tempo de defasagem e o ganho do controlador.

A primeira implementação experimental do método de controle TDF foi reportada por Pyragas & Tamasevicius (1993) no controle de um oscilador eletrônico caótico. Diversos autores apresentam resultados numéricos e experimentais da estabilização de diferentes sistemas dinâmicos utilizando essa mesma técnica de controle. A seguir alguns desses trabalhos são citados.

Hikihara & Kawagoshi (1996) utilizam o método para estabilizar órbitas periódicas instáveis em uma viga magneto-elástica em regime caótico. Ramesh e Narayanan (2001) aplicam o TDF no controle do comportamento caótico apresentado por um aerofólio bidimensional. Galvanetto (2002) aplica a técnica de controle em um sistema sujeito a atrito seco. Sugimoto & Osuka (2004) utilizam a técnica para estabilizar um robô bípede andando.

A dificuldade na implementação do método de controle TDF reside na determinação do tempo de defasagem e, principalmente, do ganho do controlador. Diversos trabalhos que implementam este método utilizam a periodicidade da órbita a ser estabilizada como tempo de defasagem, e o ganho do controlador é determinado por

tentativa e erro, principalmente nas implementações experimentais. Neste contexto, Pyragas (1992) determina o ganho do controlador analisando a estabilidade das órbitas a partir do expoente de Lyapunov utilizando-se as equações de movimento do sistema. Em Pyragas & Tamasevicius (1993) o controle experimental do sistema é realizado aumentando-se o ganho do controlador até que a estabilização da órbita seja alcançada. Kittel *et al.* (1995) e Herrmann (2001) apresentam algoritmos adaptativos baseados no método TDF que ajustam o tempo de defasagem automaticamente, enquanto Boccaletti & Arcchi (1995) apresentam um método de controle adaptativo para ajustar o ganho do controlador.

Socolar *et al.* (1994) propõem uma melhoria ao método TDF utilizando-se vários estados defasados do sistema, além disso, uma nova constante é considerada na lei de controle. Denominado método de controle por realimentação com estados defasados estendidos (ETDF), este método contorna a dificuldade do TDF em estabilizar órbitas periódicas instáveis de periodicidade elevada. Esta modificação do método TDF é apontada por Pyragas (2006) como a mais importante.

Alguns trabalhos discutem a estabilidade do método TDF, apesar da dificuldade desta análise para sistemas realimentados por funções que incorporam termos defasados no tempo. Mostra-se que o método TDF consegue estabilizar somente uma certa classe de órbitas periódicas instáveis caracterizadas por uma torção finita no espaço. Assim, órbitas periódicas instáveis com um número ímpar de multiplicadores de Floquet maior que um não podem ser estabilizados pelo método TDF. Esta afirmação foi provada primeiramente por Ushio (1996) para sistemas discretos e, posteriormente, por Just *et al.* (1997) e Nakajima (1997) para sistemas contínuos. Nakajima e Ueda (1998a) provam esta limitação também para o método ETDF.

De forma a contornar esta limitação, Nakajima & Ueda (1998b) propõe uma modificação ao método TDF, no entanto, o método é válido apenas para casos especiais de órbitas simétricas. Ushio e Yamamoto (1998; 1999) apresentam modificações no método TDF para o caso discreto, a fim de superar a limitação referente à estabilidade. Após alguns trabalhos tentarem contornar essa dificuldade de estabilizar órbitas periódicas instáveis que não são caracterizadas por uma torção finita no espaço sem obterem sucesso para todas as classes de órbitas, Pyragas (2001) propõe um controlador instável baseado no ETDF e elimina totalmente a limitação do método original. Pyragas & Just (2007) reportam uma aplicação experimental deste método em um circuito eletrônico.

Uma vasta literatura aborda a estabilização de sistemas com resposta caótica a partir do emprego dos métodos TDF, do ETDF e de seus aprimoramentos. A seguir são citados mais alguns desses trabalhos.

Chen & Yu (1999) apresentam algumas condições suficientes para determinar quais métodos estendidos a partir do ETDF podem apresentar resultados positivos na estabilização de sistemas caóticos a partir de argumentos de estabilidade de Lyapunov. Baseados nestas condições, Tian *et al.* (2007) propõe um novo método de controle considerando-se diferentes parâmetros de controle e sucessivos deslocamentos nas realimentações.

Sousa Vieira e Lichtenberg (1996) generalizam o método TDF ao substituírem algumas não-linearidades do sistema por uma dinâmica com defasagem no tempo, ao invés de usarem uma função linear com defasagem no tempo para o controle do sistema.

Tian e Yu (2000) utilizam princípios da teoria de controle ótimo para o projeto de um controlador TDF, ao definirem um índice que deve ser minimizado para permitir a estabilização de uma determinada órbita periódica instável.

Ultimamente, alguns autores tratam da utilização da teoria de controle convencional para a estabilização de sistemas não-lineares caóticos. Em geral, estes controladores fazem com que o sistema siga uma trajetória objetivo pré-estabelecida, ou então levam e mantêm o sistema em um zero de referência. Chen (1997) apresenta alguns princípios de projeto de controladores convencionais lineares e não-lineares para o controle de caos, com as condições matemáticas de controlabilidade desenvolvidas utilizando o método da função de Lyapunov. Abarbanel *et al.* (1997) utilizam técnicas de controle ótimo para direcionar um sistema não linear caótico para uma determinada órbita periódica instável e estabilizando-o nela por intermédio de um método de controle de passo único.

Chen (1994) sugere uma abordagem convencional da teoria de controle ótimo para controlar sistemas caóticos utilizando sequências de perturbações de modo a minimizar a energia total de controle.

Konishi *et al.* (1998) utiliza uma técnica de controle *bang-bang* por modo deslizante para a estabilização de uma classe de sistemas caóticos cujas não-linearidades tendem a zero sobre a superfície de deslizamento. Os autores demonstram a robustez do método para incertezas nos parâmetros do modelo.

O desenvolvimento de controladores não-lineares para sistemas caóticos utilizando observadores de estado não-lineares para estimar dinâmicas não-modeladas e

estados não-observados tem sido discutido por diversos autores (FEMAT *et al.*, 1997; LIAO, 1998; CAO, 2000; SOLAK *et al.*, 2001; BOWONG e KAKMENI, 2003).

Myneni *et al.* (1999) propõe um novo método de controle de caos muito simples para aplicação a sistemas rápidos e aplicam experimentalmente a dois circuitos elétricos. Neste método, o controlador realiza uma perturbação pré-determinada quando o sistema entra em uma janela de controle definida e volta a sua posição de referência quando a trajetória do sistema sai dessa janela. A partir da localização desta janela de controle, determinam-se órbitas periódicas instáveis a serem estabilizadas.

Controladores baseados no método direto de Lyapunov também foram apresentados em trabalhos recentes por Hsiao e Tung (2002) e Wang e Jing (2004). Uma vantagem deste método é que não é necessário esperar que a trajetória do sistema passe na vizinhança de um ponto fixo para a ativação do controle.

Tsai *et al.* (2002) propõem um controlador por modo deslizante com estrutura variável. Este tipo de controlador pode ser explorado de modo a melhorar a robustez e a velocidade de resposta no tempo. Nazzal e Natsheh (2007) desenvolvem um controlador não-linear baseado na teoria de modos deslizantes, aplicando-o a dois sistemas não-lineares que apresentam resposta caótica, de forma a eliminar este tipo de comportamento.

Bessa *et al.* (2009) propõem a utilização de uma estratégia de controle baseada em modos deslizantes e aprimorada por um algoritmo fuzzy adaptativo, de forma a lidar com as incertezas do modelo. O trabalho tem como aplicação um pêndulo não-linear em regime caótico e aborda a estabilização de órbitas periódicas instáveis naturais do sistema, assim como de órbitas genéricas.

Alguns trabalhos aplicam métodos de controle impulsivos para suprimir o comportamento caótico. Yang *et al.* (1997) controla o sistema de Rössler, enquanto Osipov *et al.* (1998) elimina o comportamento caótico no oscilador de Duffing. Recentemente, baseados nestes métodos impulsivos, Litak *et al.* (2007b) propõe um novo controlador para estabilizar órbitas periódicas instáveis do sistema.

Shinbrot *et al.* (1993), Ditto *et al.* (1995), Grebogi & Lai (1997) and Dubé & Després (1999) fornecem uma revisão dos conceitos envolvidos no controle de caos e de alguns métodos de controle baseados no método OGY. Pyragas (2006) apresenta uma revisão dos métodos contínuos para controle de caos desenvolvidos a partir do TDF citando implementações numéricas e experimentais. Ogorzalek (1994), Arecchi *et al.* (1998) and Fradkov & Evans (2002) apresentam artigos de revisão que fornecem

uma visão geral dos métodos de controle de caos, incluindo técnicas discretas e contínuas. Além desses métodos, Boccaletti *et al.* (2000) tratam o problema de rastreamento e de sincronização de sistemas caóticos, e mencionam diversas implementações experimentais. Andrievskii & Fradkov (2003) abordam diversos métodos para controlar sistemas com comportamento caótico, incluindo técnicas de controle de caos e métodos de controle baseados na teoria convencional, enquanto Andrievskii & Fradkov (2004) mencionam diferentes trabalhos que aplicam essas estratégias de controle a sistemas de diferentes áreas. Savi *et al.* (2006) apresentam uma discussão sobre a utilização de alguns métodos de controle de caos em sistemas mecânicos. Fradkov *et al.* (2006) apresentam uma revisão dos métodos de controle de caos – considerando-se 3 categorias: sem realimentação, com realimentação discretos e com realimentação contínuos – e suas aplicações em sistemas mecânicos.

### 3 MÉTODOS DE CONTROLE DE CAOS

Os métodos de controle de caos possuem algumas propriedades características que os distinguem da abordagem convencional da teoria de controle, linear ou não-linear. Essencialmente, o controlador explora a sensibilidade a pequenas perturbações e o conjunto denso de órbitas periódicas instáveis que os sistemas caóticos possuem. Essas propriedades não são encontradas em sistemas lineares ou não-caóticos. Neste contexto, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável de período qualquer e, conjuntamente, permitir que o sistema possa transitar dentre as diversas órbitas conforme a necessidade, conferindo grande flexibilidade ao sistema.

Neste capítulo apresentam-se seis métodos de controle de caos: dois são discretos – método OGY e método OGY multiparâmetros – dois são semi-contínuos – método semi-contínuo (SC) e método semi-contínuo multiparâmetros – e dois são contínuos – método por realimentação com estados defasados (TDF) e método por realimentação com estados defasados estendidos (ETDF). Além disso, no caso dos métodos multiparâmetros duas abordagens são apresentadas: acoplada e desacoplada, referindo-se ao acoplamento, ou não, dos parâmetros de controle.

Essencialmente, os métodos de controle de caos podem ser decompostos em duas fases: A fase de aprendizagem, onde identificam-se as OPIs e determinam-se os parâmetros do controlador; e a fase de controle propriamente dita, onde realizam-se as perturbações no(s) parâmetro(s) de controle de forma a estabilizar a trajetória do sistema em OPIs previamente selecionadas. Cabe ressaltar que os parâmetros do controlador são determinados para cada OPI de interesse.

Na fase de aprendizagem, a identificação das órbitas periódicas instáveis é um procedimento comum a todos os métodos de controle e consiste em uma etapa fundamental no emprego dos métodos de controle de caos. No caso dos métodos discretos e semi-contínuos, após a identificação das OPIs determina-se um conjunto de parâmetros de controle a partir da observação de uma série temporal com as variáveis de estado do sistema. No caso dos métodos contínuos, no entanto, têm-se outro conjunto de parâmetros de controle que são determinados a partir das equações de movimento do sistema.

Neste capítulo, primeiramente apresenta-se o método utilizado para identificação de órbitas periódicas instáveis. Continuando o capítulo, aborda-se o método OGY. Em

seguida, apresenta-se o método SC desenvolvido a partir do OGY. Posteriormente, os métodos multiparâmetros são apresentados, primeiramente o SC multiparâmetros e posteriormente o OGY multiparâmetros. Finalmente são abordados os métodos contínuos, TDF seguido do ETDF.

### 3.1 Identificação de Órbitas Periódicas Instáveis

A primeira etapa da fase de aprendizagem consiste em determinar as órbitas periódicas instáveis imersas no atrator do sistema. Existem diversos procedimentos para essa identificação e, neste trabalho, utiliza-se o método dos pontos recorrentes próximos (AUERBACH *et al.*, 1987), que deve ser implementado em uma seção de Poincaré a partir de séries temporais. Considerando-se um forçamento periódico sobre o sistema, a seção de Poincaré representa uma amostra estroboscópica onde os seus pontos são determinados sempre que o forçamento passa por uma fase determinada,  $\theta_{forc}$ . A busca de uma órbita  $k$ -periódica é realizada varrendo-se todos os pontos da série temporal contidos na seção de Poincaré,  $\xi_i$ , verificando-se quais os pares que satisfazem à condição:

$$\left| \xi_i - \xi_{i+k} \right|_{i=1}^{N_p-k} \leq r_1, \quad (3.1)$$

onde  $N_p$  é o número total de pontos na seção de Poincaré,  $r_1$  é a tolerância na qual distinguem-se os pontos recorrentes e  $k$  é o período máximo da órbita que se deseja encontrar. Quando essa condição é satisfeita, armazenam-se os pontos  $\{\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k-1}\}$  pertencentes à órbita  $k$ -periódica, localizada na seção de Poincaré referente à fase de forçamento escolhida. Durante essa busca, uma determinada órbita pode ser visitada mais de uma vez, sendo então necessário verificar dentre as órbitas de mesmo período, aquelas que podem ser consideradas idênticas a menos de uma permutação em seus pontos, ou de uma tolerância  $r_2$  que mede a distância entre duas órbitas. Se duas órbitas equivalentes forem encontradas para um dado período, faz-se a aproximação da órbita real pela sua média aritmética.

### 3.2 Método OGY

Ott *et al.* (1990) propuseram o método de controle de caos que hoje em dia é conhecido como método OGY (um tributo aos autores do trabalho – Ott-Grebogi-Yorke). Este método busca estabilizar órbitas periódicas instáveis a partir de pequenas perturbações não-contínuas realizadas em um parâmetro acessível do sistema. O desenvolvimento deste método é baseado em algumas considerações:

- Em regime caótico, o atrator do sistema possui uma infinidade de órbitas periódicas instáveis (OPIs). Além disso, considerando a ergodicidade do atrator caótico, em algum momento, uma vizinhança destas OPIs é visitada pela trajetória do sistema;
- A dinâmica não-linear de um sistema contínuo pode ser representada por um mapa em uma seção ou mapa de retorno, sob a forma  $\xi_{i+1} = F(\xi_i, p)$ , onde  $\xi_i$  é a iteração do sistema neste mapa e  $p$  é um parâmetro do sistema;
- Os pontos da OPI que se deseja estabilizar na seção escolhida são pontos do tipo sela hiperbólica, ou seja, possuem pelo menos uma direção estável que atrai a trajetória e outra direção instável que a repele; e
- Sistemas caóticos possuem grande sensibilidade a pequenas perturbações.

Explorando as características acima, o método OGY propõe a estabilização da trajetória do sistema nas OPIs a partir de pequenas perturbações em um parâmetro acessível  $p$ . Essas perturbações, realizadas em uma seção, buscam posicionar o sistema sobre a direção estável do ponto da OPI a ser estabilizada. Além disso, essas perturbações são realizadas apenas quando a trajetória do sistema visita a vizinhança deste ponto, onde a aproximação linear do mapa  $F$  pode ser considerada válida. A validade desta aproximação linear é conferida pelo teorema de Hartman-Grobman, que garante que a solução do problema linearizado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, localmente corresponde à solução do problema não-linear, desde que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico (SAVI, 2006).

A Figura 3.1 mostra de forma esquemática o que ocorre na vizinhança de um ponto de controle  $\xi_C$ , em um mapa de retorno, com a perturbação imposta pelo controlador OGY. A Figura 3.1 (b) mostra um ponto da OPI a ser estabilizada, e suas direções estável e instável, assim como o estado do sistema,  $\xi_n$ , que se encontra na

vizinhança do ponto de controle. O controlador OGY realiza uma perturbação  $\delta p$  de forma que a trajetória do sistema seja atraída em uma direção paralela à direção estável do ponto fixo  $\xi_C(p_0 + \delta p)$ . Desta forma, se  $\delta p$  for escolhido apropriadamente, a iteração seguinte à perturbação realizada,  $\xi_{n+1}$ , é posicionada sobre a direção do ponto de controle, Figura 3.1 (c).

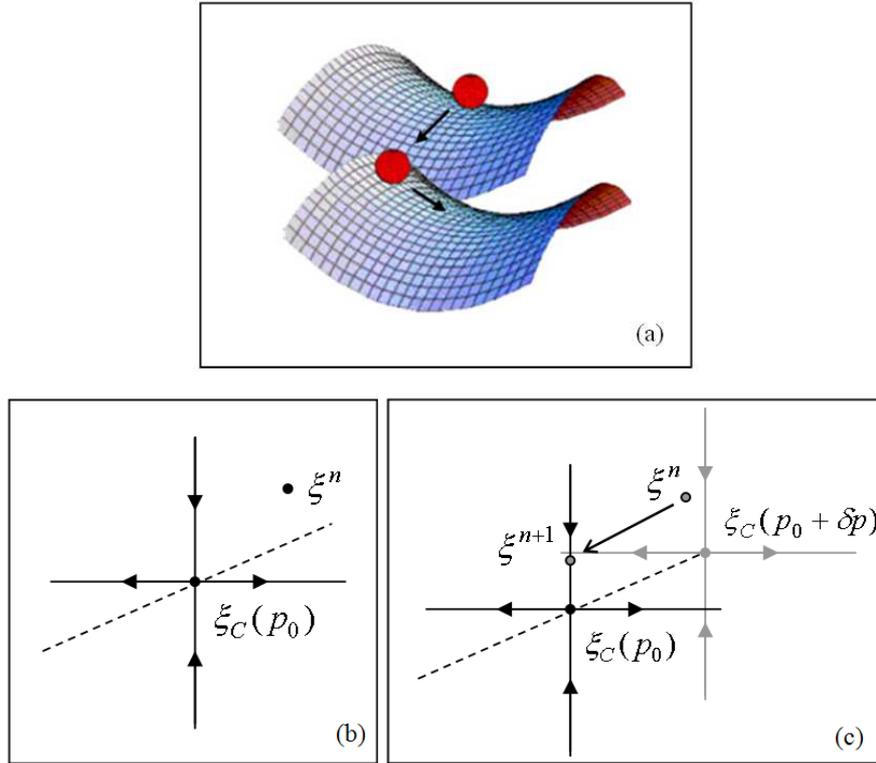


Figura 3.1: (a) Representação esquemática do método OGY, Savi (2006); (b)  $\xi^n$  na vizinhança do controle; (c)  $\xi^{n+1}$  posicionado sobre a direção estável na iteração  $n+1$  devido à perturbação adequada  $\delta p$  em  $n$ .

Sejam então  $\xi_C^i$  as interseções da órbita que se deseja estabilizar com a seção de controle,  $\Sigma$ , e  $F$  o mapa que relaciona duas interações consecutivas. Considera-se que a dinâmica do sistema possa ser representada por um mapa:

$$\xi_C^{i+1} = F(\xi_C^i, p) \quad (3.2)$$

onde  $p$  é um parâmetro acessível do sistema. Realiza-se, então, a aproximação linear do mapa  $F$  na superfície de seção, a partir da expansão de Taylor da equação (3.2) em torno do ponto fixo de controle,  $\xi_C$ , e da posição de referência do parâmetro,  $p_0$ :

$$\begin{aligned} \xi^{i+1}(p^i) - \xi_C^{i+1}(p_0) &\approx \left. \frac{\partial F(\xi, p)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_C, p=p_0} (\xi^i(p^{i-1}) - \xi_C^i(p_0)) + \\ &+ \left. \frac{\partial F(\xi, p)}{\partial p} \right|_{\xi=\xi_C, p=p_0} (p^i - p_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$\delta \xi^{i+1}(\delta p^i) \approx J \delta \xi^i(\delta p^{i-1}) + w \delta p^i \quad (3.4)$$

onde  $J = \left. \frac{\partial F(\xi, p)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_C, p=p_0}$  é a matriz Jacobiana, o vetor sensibilidade

$w = \left. \frac{\partial F(\xi, p)}{\partial p} \right|_{\xi=\xi_C, p=p_0}$  representa a direção do gradiente local do mapa em relação à

perturbação  $\delta p$ ,  $\delta \xi^{i+1}(\delta p^i) = \xi^{i+1}(p^i) - \xi_C^{i+1}(p_0)$ ,  $\delta \xi^i(\delta p^{i-1}) = \xi^i(p^{i-1}) - \xi_C^i(p_0)$  e  $\delta p^i = p^i - p_0$  para todo  $i \geq 1$ . Além disso,  $\xi_C^i$  é a interseção  $i$  da órbita periódica instável com a seção de controle  $\Sigma$ . Neste trabalho utiliza-se uma seção de Poincaré como seção de controle. Uma representação geométrica esquemática da equação (3.4) é apresentada na Figura 3.2.

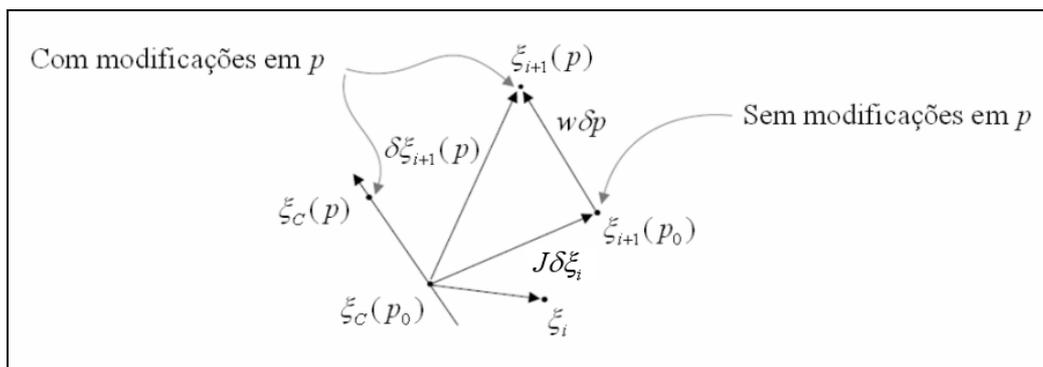


Figura 3.2: Representação geométrica esquemática.

A partir dos autovetores  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  da matriz jacobiana  $J$ , determina-se uma base dual  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ :

$$e_i \cdot f_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.5)$$

De modo a posicionar o vetor  $\delta \xi^{i+1}$  sobre a direção estável  $e_s$  da sela, considera-se a condição de restrição  $f_u \cdot \delta \xi^{i+1} = 0$ , sendo  $f_u$  o vetor da base dual associado à direção instável  $e_u$ . A partir desta restrição e utilizando-se a equação (3.4) chega-se à equação que fornece o valor da perturbação no parâmetro acessível:

$$\delta p^i = -\lambda_u \frac{f_u \cdot \delta \xi^{i+1} (\delta p^{i-1})}{f_u \cdot w}. \quad (3.6)$$

Neste trabalho a fase de aprendizagem é realizada a partir de séries temporais que contêm todas variáveis de estado. No entanto, considerando-se a dificuldade em se obter uma modelagem dinâmica fiel à maioria dos fenômenos físicos com comportamento complexo, Ott *et al.* (1990) mostram que é possível controlar o sistema quando se possui a série temporal de apenas uma variável de estado. No caso de séries temporais escalares, pode ser necessário reconstruir o espaço de estado do sistema, por exemplo, utilizando o método das coordenadas defasadas (TAKENS, 1981) ou alguma outra técnica. A partir desta reconstrução é, então, possível estimar todos os parâmetros do controlador.

Durante a fase de aprendizagem, após a identificação das órbitas periódicas instáveis, determinam-se seus respectivos pontos de controle,  $\xi_C$ . Além disso, estimam-se os parâmetros  $w$  e  $J$  do controlador a partir da análise de uma série temporal, assim como se determinam as direções estável e instável dos pontos de controle. Os procedimentos adotados na determinação de  $J$  e  $w$  são apresentados no próximo capítulo, quando o controle é aplicado ao pêndulo não-linear. Finalizada a fase de aprendizagem, dá-se início a fase de controle onde é necessário aguardar a passagem da trajetória nas proximidades de um ponto de controle para que esta possa ser capturada pelo controlador.

Otani e Jones (1997) apresentam em seu estudo algumas características positivas e outras negativas do método OGY. Como pontos positivos tem-se: o baixo custo computacional para o método ser implementado; a independência do controlador em relação às equações da dinâmica que governam o sistema; o uso de pequenas

perturbações de modo a não alterar a estrutura do sistema; o controlador possui alguma robustez em relação a estimativas pouco precisas de seus parâmetros; e, a exploração da flexibilidade inerente aos sistemas caóticos, possibilitando que o mesmo sistema seja estabilizado em diferentes órbitas com sinais de controle com ordens de grandeza semelhantes.

Como pontos negativos do método têm-se: a dificuldade na estabilização de órbitas de elevado período; o tempo de espera até que a trajetória do sistema entre em uma vizinhança de um ponto de controle pode ser demorado; somente as OPIs imersas no atrator podem ser estabilizadas com pequenas perturbações por serem inerentes à dinâmica do sistema; e a dificuldade no controle de sistemas com elevada instabilidade.

Assim, diversos métodos foram propostos a fim de contornar os aspectos negativos do método OGY, mantendo suas características positivas. Na seção seguinte apresenta-se um método de controle semi-contínuo desenvolvido para estabilizar sistemas com elevada instabilidade e órbitas de múltipla periodicidade baseado no método OGY.

### **3.3 Método Semi-Contínuo (SC)**

A ideia de se desenvolver um método de controle semi-contínuo (SC) surgiu devido à dificuldade do método OGY em estabilizar um sistema em regime caótico com elevada instabilidade. Nestes casos, a perturbação efetuada a cada período de forçamento completo, considerando como seção de controle uma seção de Poincaré estroboscópica de um sistema não-autônomo, não é suficiente para evitar que a trajetória se afaste da órbita desejada. Desta forma, Hubinger *et al.* (1994) propõem a introdução de tantas seções de controle, igualmente espaçadas, em diferentes fases do ciclo de forçamento, quantas forem necessárias para se obter a estabilização do sistema. Assim sendo, aumenta-se o número de intervenções no sistema por período de forçamento, impedindo que a trajetória divirja da órbita desejada. Posteriormente, Korte *et al.* (1995) desdobra esta técnica para ser utilizada em espaços de fase reconstruídos por coordenadas defasadas utilizando a abordagem de Nitsche e Dressler (1992) e propõem também uma nova abordagem para se calcular a intensidade da perturbação no parâmetro acessível. Este desdobramento da técnica OGY é denominado método SC. Tanto as abordagens de Hubinger *et al.* (1994), quanto a de Korte *et al.* (1995)

baseiam-se nos mapas de transição que relacionam as variáveis de estado do sistema em uma seção de controle com as variáveis de estado na seção subsequente.

Desta forma, conforme apresentado na Figura 3.3, considera-se a utilização de  $N_s$  seções de controle por período de forçamento  $T_f$  no desenvolvimento do método. Sendo assim, introduzem-se  $N_s$  seções de Poincaré,  $\Sigma_n, n = 1, \dots, N_s$ , equidistantes no tempo, todas contidas no intervalo de tempo  $T_f$ .

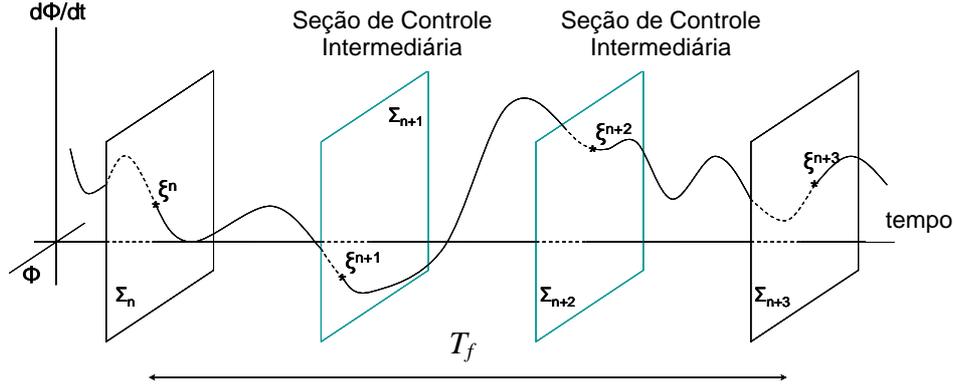


Figura 3.3: Seções de controle intermediárias utilizadas no Método SC.

Sejam então  $\xi_C^n \in \Sigma_n$  as interseções da órbita que se deseja estabilizar com  $\Sigma_n$ , e seja  $F$  o mapa que relaciona as interseções da trajetória do sistema com a seção de controle  $\Sigma_n$  com as interseções na próxima seção de controle,  $\Sigma_{n+1}$ .

Utilizando  $N_s$  seções de controle por período de forçamento e considerando a dependência do sistema em relação a um parâmetro acessível  $p$ , tem-se, analogamente à equação (3.2), o mapa  $F$  expresso por:

$$\xi_C^{n+1} = F(\xi_C^n, p^n). \quad (3.7)$$

Assim como no método OGY, utiliza-se a aproximação linear de  $F$  assumindo uma expansão por série de Taylor da equação (3.7) em torno dos pontos de controle  $\xi_C^n$  e do valor de referência  $p_0$  do parâmetro  $p$ , obtendo-se:

$$\delta \xi^{n+1} \cong J^n \delta \xi^n + w^n \delta p^n, \quad (3.8)$$

onde

$$\delta\xi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi_C^{n+1}, \quad \delta\xi^n = \xi^n - \xi_C^n, \quad \delta p^n = p^n - p_0,$$

$$J^n = D_{\xi^n} F^{(n,n+1)}(\{\xi^n\}, \delta p^n) \Big|_{\{\xi^n\}=\{\xi_C^n\}, \delta p^n=0}, \text{ e } w^n = D_{\delta p^n} F^{(n,n+1)}(\{\xi^n\}, \delta p^n) \Big|_{\{\xi^n\}=\{\xi_C^n\}, \delta p^n=0}.$$

Hubinger *et al.* (1994) cita a possibilidade de existência de autovalores complexos na matriz jacobiana  $J^n$  e propõem a determinação de direções instáveis e estáveis utilizando a decomposição da matriz  $J^n$  em valores singulares, utilizando o fato da transformação linear  $J^n$  deformar um círculo com centro  $\xi_C^n$  em uma elipse com centro  $\xi_C^{n+1}$ . Desta forma, a decomposição,

$$J^n = U^n W^n (V^n)^T = \begin{bmatrix} u_u^n & u_s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_u^n & 0 \\ 0 & \lambda_s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u^n & v_s^n \end{bmatrix}^T, \quad (3.9)$$

é empregada na determinação das direções  $v_u^n$  e  $v_s^n$ , na seção  $\Sigma_n$ , que são mapeadas nos semi-eixos maior,  $\lambda_u^n u_u^n$  (direção instável), e menor,  $\lambda_s^n u_s^n$  (direção estável), da elipse em  $\Sigma_{n+1}$ , sendo  $\lambda_u^n$  e  $\lambda_s^n$  valores singulares de  $J^n$ .

Korte *et al.* (1995) estabelecem que o objetivo do controlador SC é ajustar o parâmetro de controle  $p$  em uma quantidade  $\delta p^n$  em  $\Sigma_n$  de forma a alinhar o vetor  $\delta\xi^{n+1}$  em  $\Sigma_{n+1}$  na direção  $v_s^{n+1}$ , resultando assim na direção de máxima contração  $\lambda_s^{n+1} u_s^{n+1}$  em  $\Sigma_{n+2}$ . Ou seja, tem-se que a relação,

$$\delta\xi^{n+1} = \alpha v_s^{n+1}, \quad (3.10)$$

onde  $\alpha \in \mathfrak{R}$  deve ser satisfeita, resultando no sistema,

$$J^n \delta\xi^n + w^n \delta p^n = \alpha v_s^{n+1}. \quad (3.11)$$

As incógnitas da equação (3.11) são  $\delta p^n$  e  $\alpha$ , com isso, a equação pode ser reescrita na forma:

$$\begin{bmatrix} w^n & -v_s^{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta p^n \\ \alpha \end{Bmatrix} = J^n \delta \xi^n, \quad (3.12)$$

que ao ser resolvido fornece os valores dos escalares  $\alpha$  e  $\delta p^n$  necessários à estabilização do sistema.

No método SC, as fases de aprendizagem e controle são similares às realizadas no caso do método OGY. Na primeira fase, após realizada a identificação das órbitas periódicas instáveis, determinam-se seus respectivos pontos de controle,  $\xi_C$ . Em seguida, estimam-se os parâmetros  $w^n$  e  $J^n$  do controlador a partir da análise de uma série temporal, assim como determinam-se as direções estável e instável dos pontos de controle. Na fase de controle é necessário aguardar a passagem da trajetória nas proximidades de um ponto de controle para que esta possa ser capturada pelo controlador.

### 3.4 Método SC multiparâmetros

Nesta subseção o método SC é estendido para que a perturbação no sistema possa ser feita em mais de um parâmetro de controle como proposto por De Paula & Savi (2009c). A perturbação necessária passa a ser função do estado do sistema e da configuração de todos os parâmetros utilizados, dando origem à formulação geral do método SC multiparâmetros, que consiste na abordagem acoplada, apresentada a seguir. Posteriormente, o caso geral é particularizado para quando os parâmetros de controle encontram-se desacoplados.

O método SC multiparâmetros proposto considera  $n_p$  parâmetros de controle, no entanto, assume-se que em cada seção de controle somente um parâmetro é perturbado. Além disso, assume-se que para  $n_p$  parâmetros de controle, cada um atua a cada  $n_p$  seções. Desta forma, define-se uma ordem para a atuação dos parâmetros, que se repete ao longo de todo o controle.

Na formulação geral do método semi-contínuo multiparâmetros, denominada abordagem acoplada, os parâmetros de controle são tratados de forma acoplada. Desta forma, o mapa  $F$ , que relaciona uma seção de controle com a seguinte, depende das posições de todos os parâmetros na seção  $\Sigma_n$ , conforme apresentado na equação (3.13).

$$\xi^{n+1} = F(\xi^n, P^n) \quad (3.13)$$

onde  $P^n$  é um vetor que contém as posições de todos os parâmetros de controle.

Realizando-se uma aproximação de primeira ordem da expansão de Taylor da equação (3.13), na equação (3.14) obtém-se o comportamento linear do mapa  $F$  na vizinhança do ponto de controle  $\xi_C^n$  e em torno das posições de referência dos parâmetros de controle. A validade desta aproximação linear do comportamento local do sistema na vizinhança dos pontos fixos hiperbólicos é conferida pelo teorema de Hartman-Grobman (SAVI, 2006).

$$\delta\xi^{n+1} \cong J^n \delta\xi^n + W^n \delta P^n \quad (3.14)$$

onde  $J^n = D_{\xi^n} F(\{\xi^n\}, \{P^n\}) \Big|_{\{\xi^n\}=\{\xi_C^n\}, \{P^n\}=\{P_0\}}$ ,  $\delta\xi^n = \xi^n - \xi_C^n$ ,  $\delta\xi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi_C^{n+1}$  e

$W^n = D_{P^n} F(\xi^n, P^n) \Big|_{\xi^n=\xi_C^n, P^n=P_0}$ .  $W^n$  é denominada matriz sensibilidade, sua dimensão é

$[N_d \times n_p]$ , onde  $N_d$  é a dimensão do sistema e  $n_p$  é o número de parâmetros de controle.

Além disso, cada coluna desta matriz,  $W_i^n$ , está relacionada com um dos  $n_p$  parâmetros de controle,  $\delta p_i^n$ , onde  $i=1, \dots, n_p$ .

De forma semelhante ao método OGY, apresentado na Figura 3.2, tem-se que no método SC o vetor resultante de uma perturbação é dado por  $w^n \delta p^n$ . Para a construção da matriz sensibilidade considera-se que cada coluna,  $W_i^n$ , corresponde ao vetor sensibilidade associado ao parâmetro  $\delta p_i^n$  quando este é o único parâmetro de controle. Desta forma, tem-se que os vetores  $q_i = W_i^n \delta p_i^n = W_i^n (p_i^n - p_{i0})$  representam a resposta do sistema às atuações individuais de cada parâmetro. Além disso, estes vetores estão contidos nas seções de controle que, por serem seções de Poincaré, possuem dimensão  $N_d - 1$ .

No controle multiparâmetros acoplado assume-se que o vetor resultante das atuações dos parâmetros é dado por uma combinação linear de suas atuações individuais, sendo  $\beta$ 's os pesos da combinação linear. Desta forma, para escalares  $\beta_i$  adequados, e conhecendo-se  $W_i^n \delta p_i^n$ , tem-se que o vetor  $q$ , apresentado na equação

(3.15), corresponde à resposta do sistema à atuação do parâmetro  $i$  em  $\Sigma_n$  com os demais parâmetros em posições diferentes de suas posições de referência, e está contido nas seções de controle. Cabe ressaltar que os valores de  $\beta_i$  diferentes de zero realizam o acoplamento entre os parâmetros de controle.

$$q = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \dots + \beta_{n_p} q_{n_p} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) pode ser reescrita em função da atuação real,  $\delta p^n$ , conforme apresentado na equação (3.16).

$$q = \beta_1^n W_1^n \delta p_1^n + \beta_2^n W_2^n \delta p_2^n + \dots + \beta_{n_p}^n W_{n_p}^n \delta p_{n_p}^n = W^n B^n \delta p^n \quad (3.16)$$

onde  $B^n$  é uma matriz diagonal de dimensão  $[n_p \times n_p]$ . Além disso, os componentes não-nulos desta matriz,  $B_{ii}^n \equiv \beta_i^n$ , fornecem a contribuição do efeito de cada parâmetro  $n_p$  na resposta do sistema.

Uma alternativa é escrever o vetor  $q$  em função de  $\delta P^n$  a partir da equação (3.14), conforme apresentado na equação (3.17).

$$q = W^n \delta P^n = W_1^n \delta P_1^n + W_2^n \delta P_2^n + \dots + W_{n_p}^n \delta P_{n_p}^n \quad (3.17)$$

Com isso, pode-se relacionar o vetor  $\delta P^n$ , de dimensão  $[n_p \times 1]$ , com a atuação real,  $\delta p^n$ , a partir da equação (3.18).

$$\delta P^n = B^n \delta p^n \quad (3.18)$$

Além disso, na medida em que somente um parâmetro atua em cada seção de controle, a equação (3.14) pode ser reescrita conforme apresentado na equação (3.19).

$$\delta \xi^{n+1} = J^n \delta \xi^n + W^n \delta P_a^n + W^n \delta P_p^n \quad (3.19)$$

onde os sub-índices  $a$  e  $p$  correspondem, respectivamente, aos parâmetros ativos (que efetivamente atuam) e os passivos (que não atuam) em  $\Sigma_n$ . Desta forma, o vetor

$\delta P_a^n = B_a^n \delta p_a^n$  pode possuir apenas um de seus elementos diferente de zero, referente ao parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ , enquanto que no vetor  $\delta P_p^n = B_p^n \delta p_p^n$  apenas a componente relacionada a esta atuação deve ser nula e as demais contêm as posições dos parâmetros passivos. Além disso, tem-se que os elementos das matrizes diagonais valem  $B_{aii}^n = \beta_{ai}^n$  e  $B_{pii}^n = \beta_{pi}^n$ .

A implementação do método SC pressupõe alinhar a direção do vetor  $\delta \xi^{n+1}$ , em  $\Sigma_{n+1}$ , com a direção estável  $v_s^{n+1}$ , conforme mostrado na equação (3.20).

$$\delta \xi^{n+1} = \alpha v_s^{n+1} \quad (3.20)$$

onde  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , deve ser satisfeita, resultando no sistema apresentado na equação (3.21).

$$J^n \delta \xi^n + W^n \delta P_a^n + W^n \delta P_p^n = \alpha v_s^{n+1} \quad (3.21)$$

Desta forma, tem-se que as incógnitas da equação (3.21) são  $\alpha$  e o único elemento não nulo do vetor que contém a posição do parâmetro ativo,  $\delta P_{ai}^n$ . Com isso, a equação (3.21) pode ser reescrita conforme apresentada na equação (3.22),

$$[W_{ai}^n \quad -v_s^{n+1}] \begin{Bmatrix} \delta P_{ai}^n \\ \alpha \end{Bmatrix} = -[J^n \quad W^n] \begin{Bmatrix} \delta \xi^n \\ \delta P_p^n \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $W_{ai}^n$  corresponde a coluna da matriz sensibilidade relacionada ao parâmetro ativo. A resolução do sistema apresentado na equação (3.22) fornece os valores dos escalares  $\alpha$  e  $\delta p_{ai}^n$  necessários à estabilização do sistema, sendo que  $\delta p_{ai}^n$  está relacionado ao elemento não nulo do vetor  $\delta P_a^n$  correspondente ao parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ . O valor calculado para  $\delta P_{ai}^n$  pela equação (3.22) ainda não corresponde a atuação que deve ser realizada pelo atuador. Como  $\delta P_{ai}^n = \beta_{ai}^n \delta p_{ai}^n$ , a perturbação real,  $\delta p_{ai}^n = p_{ai}^n - p_{ai0}$ , necessária à estabilização da órbita de interesse é:

$$\delta p_{ai}^n = \gamma_{ai}^n \delta P_{ai}^n, \quad (3.23)$$

onde,

$$\gamma_{ai}^n = \frac{1}{\beta_{ai}^n}, \quad (3.24)$$

sendo  $0 < \gamma_{ai}^n \leq 1$  e  $\beta_{ai}^n \geq 1$ .

No controle multiparâmetros acoplado a inicialização do controle é feita de forma semelhante ao método SC com um único parâmetro de controle. Desta forma, espera-se a trajetória do sistema entrar na vizinhança do ponto de controle. Quando isso ocorre, de posse dos valores de  $\beta_i^n$ , calcula-se a perturbação necessária à estabilização através das equações (3.22) e (3.24). Cabe ressaltar que no cálculo da primeira atuação os elementos do vetor  $\delta \mathcal{P}_p^n$  são todos nulos. Na seção de controle seguinte, se a trajetória continuar na vizinhança do ponto de controle, a nova perturbação calculada considera o elemento passivo que atua seção anterior. E, desta forma, tem-se o controle inicializado.

De forma a visualizar a combinação linear entre os efeitos dos parâmetros consideram-se dois parâmetros atuando em uma seção de controle de dimensão 2. Desta forma, o vetor resultante às perturbações está contido no espaço  $\mathfrak{R}^2$ . Primeiramente considera-se a soma vetorial das perturbações realizadas, que consiste na combinação linear com  $B^n = I$ . Neste caso, tem-se a mesma contribuição para cada um dos dois parâmetros, com isso, para perturbações  $\delta \mathcal{P}_i^n = \delta p_i^n = p_i^n - p_{0i}$ , com  $i = 1, 2$ , tem-se que a posição final do sistema a partir do ponto  $p_C$  é  $\xi^{n+1} = p_C + W_1^n \delta p_1^n + W_2^n \delta p_2^n$ , como pode ser visualizado pelo desenho esquemático apresentado na Figura 3.4.

Em seguida, considera-se  $B^n \neq I$ , o que confere contribuições diferentes para cada parâmetro de controle. Novamente, o vetor resultante da combinação dos efeitos das perturbações está no espaço  $\mathfrak{R}^2$ . Com isso, considerando-se perturbações  $\delta \mathcal{L}_i^n = \gamma_i^n \delta p_i^n$ , com  $i = 1, 2$ , a partir do ponto  $p_C$ , tem-se que  $\xi^{n+1} = p_C + W_1^n \beta_1^n \delta \mathcal{L}_1^n + W_2^n \beta_2^n \delta \mathcal{L}_2^n = p_C + W_1^n \beta_1^n \gamma_1^n \delta p_1^n + W_2^n \beta_2^n \gamma_2^n \delta p_2^n$  é a posição final do sistema, e não simplesmente a soma vetorial  $\xi^{n+1} = p_C + W_1^n \delta \mathcal{L}_1^n + W_2^n \delta \mathcal{L}_2^n$ . Além disso, sabendo-se que  $\beta_i^n \gamma_i^n = 1$ , como apresentado na equação (3.24), tem-se que a

posição final do sistema é  $\xi^{n+1} = p_C + W_1^n \delta p_1^n + W_2^n \delta p_2^n$ , como apresentado no desenho esquemático da Figura 3.5.

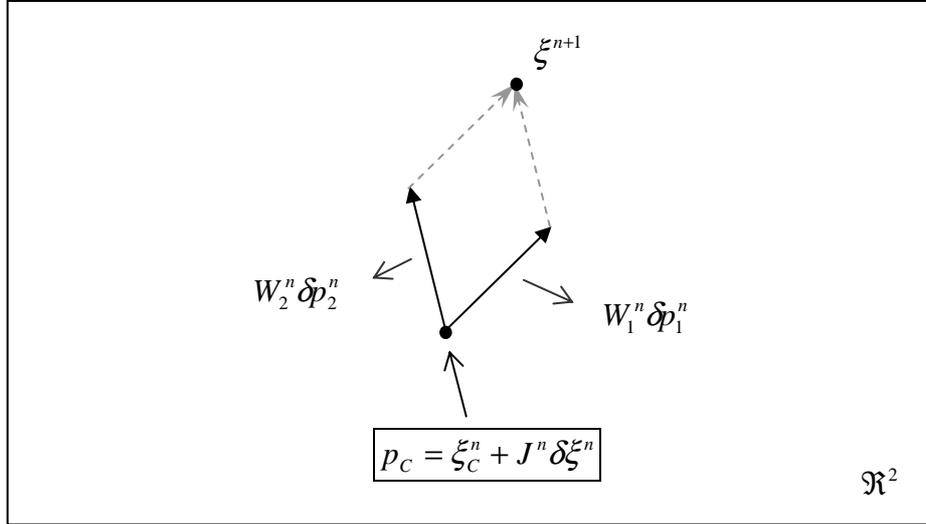


Figura 3.4: Soma vetorial das perturbações dos parâmetros.

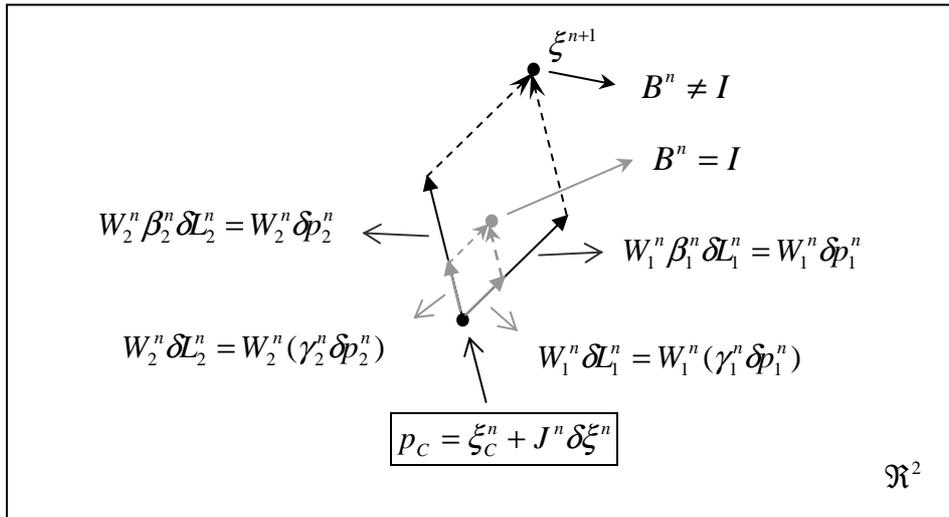


Figura 3.5: Combinação linear das perturbações dos parâmetros.

Como pode ser visualizado a partir dos desenhos esquemáticos apresentados nas Figura 3.4 e Figura 3.5, para alcançar um mesmo ponto  $\xi^{n+1}$ , pela soma vetorial são necessárias perturbações  $\delta p_i^n = \delta P_i^n$ , enquanto a partir da combinação linear das respostas, como proposto neste trabalho, são necessárias perturbações  $\delta p_i^n = \gamma_i^n \delta P_i^n$ . Além disso, como  $0 < \gamma_{ai} \leq 1$ , tem-se que  $\gamma_i^n \delta P_i^n \leq \delta P_i^n$ , ou seja, admitindo-se a combinação linear dos efeitos dos parâmetros são necessárias perturbações menores que

as necessárias pela consideração da soma vetorial destes efeitos para se alcançar um mesmo ponto.

A seguir, discute-se o caso particular do controle multiparâmetros quando os parâmetros são tratados de forma desacoplada.

### 3.4.1 Abordagem Desacoplada

Considerando-se ainda o método SC multiparâmetros, apresenta-se um caso particular da formulação geral. Nesta particularização, após a atuação de cada parâmetro em sua seção de controle correspondente, este retorna à posição de referência na seção seguinte, quando se torna passivo. A perturbação realizada em  $\Sigma_n$  pelo parâmetro ativo permanece apenas no intervalo entre duas seções e não mais até a próxima seção de controle correspondente à atuação deste parâmetro. Desta forma, no momento da atuação do parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ , o parâmetro ativo na seção anterior retorna à sua posição inicial e os demais parâmetros passivos se encontram em suas posições de referência. Com isso, não é mais considerada a influência dos parâmetros passivos, ou seja, não há mais o acoplamento entre os parâmetros como apresentado na formulação geral. Além disso, como apenas um parâmetro atua em cada seção de controle, na resposta do sistema considera-se apenas a atuação deste parâmetro em  $\Sigma_n$ . Com isso, têm-se as condições apresentadas na equação (3.25).

$$\begin{aligned} B_p^n &= 0, \\ B_a^n &= I. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Tem-se, então, que o mapa  $F$ , que relaciona uma seção de controle com a seguinte, não depende dos parâmetros passivos em  $\Sigma_n$  conforme apresentado na equação (3.26).

$$\xi^{n+1} = F(\xi^n, P_a^n), \tag{3.26}$$

onde  $P_a^n$  é o vetor que contém o parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ .

Uma vez que não há mais a dependência de  $P_p^n$  no mapa  $F$ , a equação (3.19), apresentada na formulação geral, pode ser simplificada na equação (3.27).

$$\delta \xi^{n+1} = J^n \delta \xi^n + W^n \delta P_a^n \quad (3.27)$$

onde a matriz sensibilidade,  $W^n$ , é a mesma considerada na seção anterior e  $\delta P_a^n$  pode possuir apenas um elemento não nulo, referente ao parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ . Como  $B_a^n = I$ , tem-se que  $\delta P_a^n = \delta p_a^n$ .

Novamente, é preciso alinhar a direção do vetor  $\delta \xi^{n+1}$ , em  $\Sigma_{n+1}$ , com a direção estável  $v_s^{n+1}$ , conforme apresentado na equação (3.28).

$$\delta \xi^{n+1} = \alpha v_s^{n+1} \quad (3.28)$$

onde  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , deve ser satisfeita, resultando no sistema da equação (3.29).

$$J^n \delta \xi^n + W^n \delta P_a^n = \alpha v_s^{n+1}. \quad (3.29)$$

As incógnitas da equação (3.29) são  $\alpha$  e o único elemento não nulo do vetor  $\delta P_a^n$ . Com isso, obtém-se o sistema apresentado na equação (3.30).

$$[W_{ai}^n \quad -v_s^{n+1}] \begin{Bmatrix} \delta P_{ai}^n \\ \alpha \end{Bmatrix} = -J^n \delta \xi^n \quad (3.30)$$

que ao ser resolvido fornece os valores dos escalares  $\alpha$  e  $\delta P_{ai}^n$  necessários à estabilização do sistema, sendo que  $\delta P_{ai}^n$  está relacionado ao elemento não nulo do vetor  $\delta P_a^n$ , e  $W_{ai}^n$  corresponde a coluna do vetor sensibilidade relacionada ao parâmetro ativo. Neste caso, como  $B_a^n = I$ , o valor  $\delta P_{ai}^n$  calculado pela equação (3.30) corresponde a atuação real,  $\delta p_{ai}^n$ , que deve ser realizada pelo atuador para estabilizar o sistema.

Pode-se observar que a equação (3.30) é semelhante à equação (3.12), obtida para o caso do controle com apenas um parâmetro, uma vez que  $\delta P_a^n$  possui apenas um elemento diferente de zero. Embora neste caso a sensibilidade seja uma matriz, em cada

seção de controle apenas uma coluna desta matriz é multiplicada por um valor diferente de zero, que corresponde ao parâmetro que atua em  $\Sigma_n$ .

Neste controle multiparâmetros desacoplado cada parâmetro retorna à sua posição de referência na seção seguinte à de sua atuação. Com isso, para  $N_S$  seções de controle têm-se  $2 \times N_S$  perturbações. Cabe ressaltar, no entanto, que no controle com apenas um parâmetro ou no caso acoplado do controle multiparâmetros seriam necessárias  $N_S$  atuações.

### 3.5 Método OGY multiparâmetros

O método OGY multiparâmetros é semelhante ao método SC multiparâmetros, no entanto, tem-se apenas uma seção de controle por período de forçamento. Novamente, as abordagens acoplada e desacoplada são apresentadas.

#### 3.5.1 Abordagem Acoplada

Na formulação do método OGY multiparâmetros acoplado, o mesmo desenvolvimento apresentado para o método SC multiparâmetros é realizado até a equação (3.19). A partir desta equação e considerando-se que apenas um parâmetro de controle atua a cada passagem do sistema pela seção de controle, obtém-se a equação (3.31).

$$\delta \xi^{n+1} = J^n \delta \xi^n + W_{ai}^n \delta P_{ai}^n + W_p^n \delta P_p^n \quad (3.31)$$

onde  $W_{ai}^n$  é a coluna da matriz sensibilidade relacionada ao parâmetro ativo na seção de controle  $\Sigma_n$ ;  $\delta P_{ai}^n$  é o único elemento não nulo do vetor  $\delta P_a^n$  e contém a posição do parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ ;  $W_p^n$  é constituído pelas colunas da matriz de sensibilidade relacionadas aos parâmetros passivos na seção de controle  $\Sigma_n$ ; e  $\delta P_p^n$  é um vetor que contém as posições dos parâmetros passivos na mesma seção de controle. Além disso, dado que o vetor resultante das atuações dos parâmetros é dado por uma combinação linear de suas atuações individuais, tem-se que  $\delta P_{ai}^n = \beta_{ai}^n \delta p_{ai}^n$  e  $\delta P_p^n = B_p^n \delta p_p^n$ , onde  $\beta_{ai}^n$  e os componentes da matriz  $B_p^n$  correspondem às contribuições dos efeitos individuais de cada parâmetro.

Além disso, a partir dos autovetores da Jacobiana ( $e_u, e_s$ ) e da base de vetor contravariante ( $f_u, f_s$ ) definida na equação (3.5), pode-se escrever a Jacobiana como:

$$J^n = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s \quad (3.32)$$

Para obter a perturbação  $\delta P_{ai}^n$  de forma que  $\delta \xi^{n+1}$  se alinhe com a direção estável do ponto de controle em  $\Sigma_{n+1}$ , considera-se a restrição dada pela equação (3.33).

$$f_u \cdot \xi^{n+1} = 0 \quad (3.33)$$

Desta forma, para valores de  $\delta \xi^n$  suficientemente pequenos e utilizando a Jacobiana definida em (3.32), obtém-se:

$$\delta P_{ai}^n = -\frac{f_u \cdot (\lambda_u \delta \xi^n + W_p^n \delta P_p^n)}{f_u \cdot W_{ai}^n} \quad (3.34)$$

O valor calculado para  $\delta P_{ai}^n$  pela equação (3.34) ainda não corresponde a atuação que deve ser realizada pelo atuador. Como  $\delta P_{ai}^n = \beta_{ai}^n \delta p_{ai}^n$ , a perturbação real,  $\delta p_{ai}^n = p_{ai}^n - p_{ai0}$ , necessária à estabilização da OPI de interesse é:

$$\delta p_{ai}^n = \gamma_{ai}^n \delta P_{ai}^n, \quad (3.35)$$

onde,

$$\gamma_{ai}^n = \frac{1}{\beta_{ai}^n}, \quad (3.36)$$

sendo  $0 < \gamma_{ai}^n \leq 1$  e  $\beta_{ai}^n \geq 1$ .

### 3.5.2 Abordagem Desacoplada

O caso particular do método OGY multiparâmetros, onde os parâmetros de controle são tratados de forma desacoplada, considera que os parâmetros retornam à posição de referência quando se tornam passivos. Desta forma, a influência dos

parâmetros passivos é anulada, e a equação (3.19) se reduz à equação (3.27). Novamente, para obter a perturbação  $\delta P_{ai}^n$  de forma que  $\delta \xi^{n+1}$  se alinhe com a direção estável do ponto de controle em  $\Sigma_{n+1}$ , considera-se a restrição dada pela equação .

$$f_u \cdot \xi^{n+1} = 0 \quad (3.37)$$

Desta forma, para valores de  $\delta \xi^n$  suficientemente pequenos e utilizando a Jacobiana definida em (3.32), obtém-se

$$\delta P_{ai}^n = -\lambda_u \frac{f_u \cdot \delta \xi^n}{f_u \cdot W_{ai}^n} \quad (3.38)$$

Neste caso, como  $\beta_{ai}^n = 1$ , o valor  $\delta P_{ai}^n$  calculado pela equação (3.38) corresponde a atuação real,  $\delta p_{ai}^n$ , que deve ser realizada pelo atuador na seção de controle  $\Sigma_n$  para estabilizar o sistema, diferentemente do caso acoplado.

### 3.6 Método por realimentação com estados defasados

O método de controle por realimentação com estados defasados (TDF), também conhecido como *Time-Delay Autosynchronization* (TDAS), foi proposto por Pyragas (1992) e consiste em um controle contínuo no tempo capaz de estabilizar sistemas que apresentam comportamento caótico. Esta técnica de controle se aplicada à sistemas dinâmicos que podem se modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares, como apresentado na equação (3.39).

$$\dot{x}(t) = Q(x, t) + B(t) \quad (3.39)$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor que contém as variáveis de estado,  $Q(x, t) \in \mathfrak{R}^n$  define a dinâmica do sistema, enquanto  $B(t) \in \mathfrak{R}^n$  está associado à ação de controle.

O método de controle TDF se baseia na realimentação da diferença entre estados atual e defasado do sistema, e a perturbação é dada pela lei de controle apresentada na equação (3.40).

$$B(t) = K(x_\tau - x) \quad (3.40)$$

onde  $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a matriz de ganho,  $\tau$  é defasagem de tempo,  $x = x(t)$  e  $x_\tau = x(t - \tau)$ . Se o tempo de defasagem coincidir com a periodicidade da  $i$ -ésima OPI tem-se que  $\tau = T_i$  e a perturbação se anula para a solução do sistema da equação (3.39) correspondente a esta OPI,  $x(t) = x_i(t)$ . Além disso, a estabilização da órbita pode ser alcançada a partir da escolha de valores apropriados para a matriz de ganho,  $K$ .

O método de controle TDF foi implementado com sucesso, numérica e experimentalmente, em diferentes sistemas incluindo sistemas mecânicos (Hikihara & Kawagoshi, 1996; Ramesh & Narayanan, 2001), osciladores elétricos caóticos (Gauthier *et al.*, 1994; Pyragas & Tamasevicius, 1993), laser (Bielawski *et al.*, 1993), dentre outros. No entanto, embora tenha sido implementado com sucesso em diferentes sistemas, o procedimento falha para a estabilização de OPIs de elevada periodicidade. Buscando contornar esta limitação, o método de controle por realimentação com estados defasados estendidos foi desenvolvido e é apresentado a seguir.

### 3.7 Método por realimentação com estados defasados estendidos

De forma a contornar as limitações do método de controle TDF, uma generalização da lei de controle apresentada em (3.40) foi proposta por Socolar *et al.* (1994), que consiste no método de controle por realimentação com estados defasados estendidos (ETDF), também denominado *Extended Time-Delay Autosynchronization* (ETDAS). Esta estratégia de controle considera não apenas a informação de um estado do sistema defasado no tempo, mas de vários estados anteriores do sistema, como representado na equação (3.41).

$$B(t) = K[(1 - R)S_\tau - x]$$

$$S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x_{m\tau} \quad (3.41)$$

onde  $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a matriz de ganho,  $0 \leq R < 1$  é um parâmetro do controlador,  $x_{m\tau} = x(t - m\tau)$  e  $x = x(t)$ . Para qualquer valor de  $R$ , a perturbação apresentada na equação (3.41) se anula quando a trajetória do sistema está sobre uma OPI do sistema uma vez que  $x(t - m\tau) = x(t)$  para todo  $m$  se  $\tau = T_i$ , onde  $T_i$  é a periodicidade da  $i$ -

ésima OPI. A estabilização do sistema em uma de suas OPI pode ser alcançada a partir da escolha de parâmetros do controlador,  $R$  e  $K$ , adequados. Além disso, cabe ressaltar que quando  $R=0$ , a equação (3.41) se reduz à lei de controle de original representada pela equação (3.40).

Embora o sistema dinâmico seja descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de 1ª ordem, como apresentado na equação (3.39), o sistema dinâmico com o controlador - composto pelas equações (3.39) e (3.40) no caso do método TDF e pelas equações (3.39) e (3.41) no caso do método ETDF – é composto por equações diferenciais com defasagem temporal (*Delayed Differential Equation* - DDE). Para encontrar a solução desse conjunto de equações diferenciais com atraso é necessário considerar uma função inicial  $x_0 = x_0(t)$  no intervalo  $[-m\tau, 0]$ . Esta função pode ser estimada a partir da expansão em série de Taylor como proposto por Cunningham (1954) e apresentado na equação (3.42).

$$x_{m\tau} = x - m\tau \dot{x} \quad (3.42)$$

Com isso, obtém-se o sistema a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Q(x, t) + K[(1-R)S_\tau - x] \\ \text{onde } \begin{cases} S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} (x - m\tau \dot{x}), & \text{para } (t - m\tau) < 0 \\ S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x_{m\tau}, & \text{para } (t - m\tau) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Note que, enquanto EDOs contêm derivadas que dependem apenas da solução do sistema no instante presente, as DDEs, em contrapartida, contêm derivadas que dependem também da solução do sistema em tempos anteriores. Desta forma, além do tratamento especial realizado para  $(t - m\tau) < 0$ , é necessário lidar com os estados defasados no tempo durante a integração do sistema. Neste trabalho, a integração numérica do sistema dinâmico com o controlador proposto pelos métodos por realimentação é realizada a partir da utilização do método Runge-Kutta de quarta ordem com interpolação linear das variáveis defasadas no tempo, conforme utilizado por Mensour & Longtin (1997).

Durante a fase de aprendizagem realizada no emprego dos métodos contínuos, além da identificação das OPIs, são determinados os valores dos seguintes parâmetros do controlador:  $K$ , no caso do TDF;  $R$  e  $K$ , no caso do ETDF. Estes parâmetros são definidos para cada OPI a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov da órbita correspondente, como apresentado no próximo item desse capítulo. Terminada a fase de aprendizagem, dá-se início à fase de controle. Nesta fase, os parâmetros do controlador definidos são utilizados para determinar as perturbações necessárias à estabilização da OPI escolhida. Neste procedimento as perturbações se iniciam assim que a fase de controle se inicia, não havendo nenhum tempo de espera, como ocorre no caso dos métodos discretos e semi-contínuos apresentados.

### 3.7.1 *Expoente de Lyapunov de uma OPI*

No controle por realimentação com estados defasados constrói-se uma perturbação contínua no tempo conforme proposto por Kittel *et al.* (1994) ou por Pyragas (1993), como apresentado nas equações (3.40) e (3.41) respectivamente. A ideia dessa estratégia de controle é que a OPI de interesse, contida no sistema, não seja modificada mas apenas seus expoentes de Lyapunov. A mudança no sinal do expoente modifica as características da órbita instável, tornando-a estável (Kittel *et al.*, 1995). Esta mudança é conseguida escolhendo-se os parâmetros do controlador de forma que todos os expoentes de Lyapunov se tornem negativo. No entanto, considerando-se um sistema não-autônomo, para a análise de estabilidade de OPIs é suficiente determinar apenas o maior expoente de Lyapunov (Pyragas, 1995). Desta forma, a partir apenas do maior expoente de Lyapunov é possível obter um intervalo de valores da matrix  $K$ , considerando-se um  $R$  constante, onde o controle pode ser alcançado. Em outras palavras, é necessário buscar situações onde o expoente de Lyapunov máximo seja negativo,  $\lambda(K, R) < 0$ . Além disso, segundo Pyragas (1995) tem-se que a valor mínimo de  $\lambda(K, R)$  fornece uma taxa de convergência maior das órbitas próximas para a OPI desejada e torna o método mais robusto na presença de ruído.

O cálculo do expoente de Lyapunov de DDEs é mais complicado do que de EDOs. Além disso, estados defasados no tempo que transformam à equação dinâmica do sistema em DDEs aparecem devido a lei de controle do ETDF, o mesmo ocorre no caso do TDF. Considerando-se o método ETDF com 3 estados defasados no tempo, a última equação do sistema apresentado na equação (3.43) consiste em uma DDE do tipo apresentado na equação (3.44).

$$\dot{x}(t) = Q(x, t) + B(t, x, x_\tau, x_{2\tau}, x_{3\tau}) \quad (3.44)$$

Desta forma, para o cálculo de  $x = x(t)$  num instante maior que  $t$  é necessário conhecer a função  $x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$  no intervalo  $(t-3\tau, t)$ . Equações deste tipo consistem em sistemas de dimensão infinita e devem apresentar infinitos expoentes de Lyapunov, dos quais apenas uma quantidade finita pode ser determinada a partir de uma análise numérica (Vicente *et al.*, 2005). No entanto, para a análise de estabilidade de OPIs em sistemas não-autônomos é suficiente determinar apenas o maior expoente de Lyapunov.

Neste trabalho, o cálculo do expoente de Lyapunov é conduzido aproximando-se a evolução contínua do sistema de dimensão infinita por um número finito de elementos cujos valores mudam em passos discretos no tempo (Farmer, 1982). Neste contexto, as funções  $x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ , no intervalo  $(t-3\tau, t)$  podem ser aproximada por  $N$  amostras espaçadas entre si por intervalos de tempo de  $\Delta t = 3\tau/(N-1)$ . Desta forma, ao invés de  $n$  variáveis de estado, apresentadas na equação (3.44), agora consideram-se  $n(N+1)$  variáveis. Estas variáveis são representadas pelo vetor  $z$ , onde as componentes  $z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}$  estão relacionados aos estados defasados no tempo de  $x(t)$  como apresentado na equação (3.45).

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+N}, \dots, z_{n+(n-1)N+1}, \dots, z_{n(N+1)}) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \\ x_1(t-\Delta t), \dots, x_1(t-N\Delta t), \dots, x_n(t-\Delta t), \dots, x_n(t-N\Delta t)) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Existem diversas formas de realizar esse tipo de aproximação. Neste trabalho, baseado no procedimento utilizado por Sprott (2007), a DDE é substituída por um conjunto de EDOs. A partir desta consideração, o sistema contínuo de dimensão infinita apresentado na equação (3.44), é representado por  $N+1$  EDOs de dimensão finita como apresentado na equação (3.46).

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= Q_j(z_1, z_2, \dots, z_n) + B_j(t, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}), \quad \text{for } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+1+(j-1)N} &= N(z_j - z_{n+2+(j-1)N}) / 2\tau, \quad \text{for } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+i+(j-1)N} &= N(z_{n+i+(j-1)N-1} - z_{n+i+(j-1)N+1}) / 2\tau, \quad \text{for } 2 \leq i \leq (N-1) \text{ and } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+jN} &= N(z_{n+jN-1} - z_{n+jN}) / \tau, \quad \text{for } 1 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde  $N = 3\tau/\Delta t + 1$ . Este sistema pode ser resolvido a partir da utilização de qualquer método indicado para solução de EDOs não-lineares, como o Runge Kutta de quarta

ordem. A partir da representação obtida em (3.46), os expoentes de Lyapunov podem ser calculados a partir do algoritmo clássico proposto por Wolf *et al.* (1985). Além disso, de forma a calcular o expoente de uma OPI, o sistema é integrado ao longo da órbita de interesse. Considerando-se sistemas não-autônomos, os parâmetros do controlador que correspondem ao valor mínimo do expoente de Lyapunov máximo são, então, escolhidos para estabilizar a OPI analisada.

## 4 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CONTROLE DE CAOS A UM PÊNDULO NÃO-LINEAR

Inicialmente, neste capítulo, faz-se a descrição do aparato experimental referente a um pêndulo não-linear, previamente estudado por Blackburn e Baker (1998), Franca e Savi (2001a), Pinto e Savi (2003), Pereira Pinto *et al.* (2004), De Paula (2005) e De Paula *et al.* (2006), e apresenta-se a sua modelagem matemática. As simulações numéricas são realizadas a partir da utilização do método Runge-Kutta de quarta ordem (RUGGIERO e LOPES, 1996).

Em seguida, os métodos de controle de caos apresentados no Capítulo 3 – OGY, OGY multparâmetros, SC, SC multiparâmetros, TDF e ETDF – são aplicados ao pêndulo não-linear com o objetivo avaliar a capacidade desses métodos em estabilizar órbitas periódicas instáveis do sistema em regime caótico. Considera-se dois parâmetros de controle disponíveis para atuar sobre o sistema.

### 4.1 Pêndulo Não-Linear

O pêndulo não-linear é um dispositivo amplamente estudado na literatura, sendo tratado através de aparatos mecânicos e elétricos. A análise de um aparato mecânico que considera as suas não-linearidades não é uma tarefa trivial. Neste contexto, considere um pêndulo mecânico mostrado na Figura 4.1. O aparato consiste de um disco metálico (1) com uma massa concentrada localizada excentricamente (3). Este disco é fixado ao eixo de um sensor de rotação, do tipo *encoder* incremental, (4) e um dispositivo magnético (2) permite ajustar a dissipação de energia do sistema, amortecendo o movimento. Um conjunto de molas e fios (8) proporciona uma rigidez torsional ao pêndulo, além de ser o meio pelo qual um motor elétrico (6) fornece energia ao sistema, excitando o pêndulo por meio de uma polia ligada ao eixo do sensor de rotação. A alimentação do motor elétrico é obtida pela fonte de potência (5) que regula a sua frequência de rotação pela variação da tensão de saída.

A instrumentação do experimento é feita a partir de um sensor de rotação (4), PASCO *encoder* PS-2120, que possui 1440 divisões por volta (360°), proporcionando uma precisão de 0,250°. Esse sensor é conectado a uma interface de aquisição de dados,

*PowerLink* PS-2001, com taxa de aquisição podendo variar de 1Hz a 1000Hz. Essa interface possui 3 canais de entrada e é conectado a um PC por meio de uma porta USB.

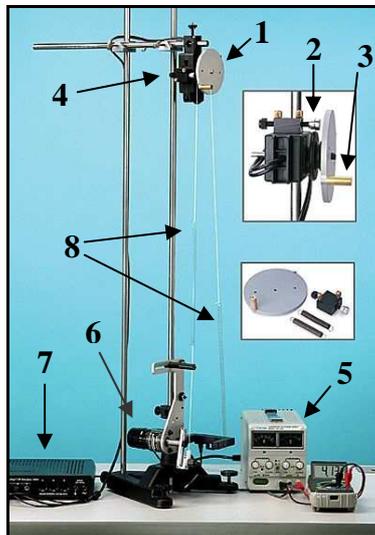


Figura 4.1: Pêndulo não-linear e acessórios: (1) Disco metálico, (2) Dispositivo de amortecimento, (3) Massa excêntrica, (4) Sensor de rotação, (5) Fonte de energia, (6) motor elétrico, (7) Dispositivo de aquisição de dados e (8) Molas e fios.

Para a modelagem matemática do pêndulo considera-se a representação simplificada do aparato mostrada na Figura 4.2.

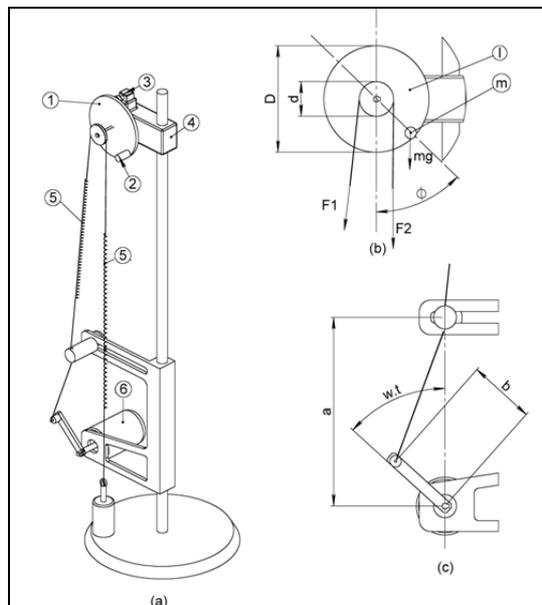


Figura 4.2 : Pêndulo não-linear: (a) Modelo físico: 1-Disco metálico, 2-Massa excêntrica, 3-Dispositivo de amortecimento, 4-Sensor de rotação, 5-Conjunto fio-mola e 6-Motor elétrico; (b) Disco metálico: geometria e forças atuantes; e (c) Sistema de excitação: geometria.

Admite-se que a posição angular do pêndulo, representada por  $\phi$ , é nula no ponto mais baixo da circunferência do círculo descrita pela sua trajetória e atribui-se o sinal positivo quando o pêndulo gira em sentido anti-horário. Assume-se ainda que a fase de forçamento,  $\theta_{forc}$ , é nula quando a haste do motor está no ponto mais elevado de sua trajetória, sendo este forçamento realizado no sentido anti-horário. O aparato experimental é ajustado de forma que, inicialmente, o pêndulo está em equilíbrio com  $\phi = 0$  e  $\theta_{forc} = 0$ .

A equação de movimento do sistema é apresentada na equação (4.1) conforme obtido por de Paula *et al.* (2006), onde assume-se que a dissipação de energia é proporcionada por uma combinação de atrito seco com um amortecimento viscoso linear.

$$\ddot{\phi} + \frac{\zeta}{I} \dot{\phi} + \frac{\mu \operatorname{sgn}(\dot{\phi})}{I} + \frac{kd^2}{2I} \phi + \frac{mgD \operatorname{sen}(\phi)}{2I} = \frac{kd}{2I} (\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varpi t)} - (a - b)) \quad (4.1)$$

onde  $a$  é a altura da guia do fio em relação ao eixo do motor elétrico,  $b$  é o comprimento da haste do motor elétrico,  $d$  é o diâmetro da polia motora do disco metálico,  $D$  é o dobro da distância da massa concentrada ao eixo do sensor de rotação,  $m$  é o valor da massa concentrada,  $\zeta$  representa a constante de amortecimento viscoso e  $\mu$  representa a constante de atrito seco,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $I$  é o momento inércia do conjunto disco e massa pendular,  $k$  é constante de rigidez das molas e  $\varpi$  é a frequência de rotação do motor elétrico. Visando eliminar a descontinuidade na equação (4.1) devido ao termo referente ao atrito seco, realiza-se uma suavização desse termo a partir da função proposta por Leine (2000):

$$\mu \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) = \frac{2}{\pi} \mu \arctan(q\dot{\phi}), \quad (4.2)$$

onde  $q$  assume um valor alto, como por exemplo,  $q = 10^6$ .

Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1) e reescrevendo a equação de movimento sob a forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem do tipo  $\dot{x} = f(x)$  em função das variáveis de estado  $(x_1, x_2) = (\phi, \dot{\phi})$ , chega-se à equação final:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kd^2}{2I} & -\frac{\zeta}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{kd}{2I} \Delta f(t) - \frac{mgD \text{sen}(x_1)}{2I} - \frac{2\mu}{\pi I} \arctan(qx_2) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde  $\Delta f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\omega t)} - (a - b)$ .

As grandezas físicas e geométricas do pêndulo não-linear utilizadas neste trabalho, determinados a partir do experimento em De Paula *et al.* (2006), são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Grandezas físicas e geométricas do pêndulo.

a (m)	b (m)	d (m)	D (m)	m (kg)	I (kg m <sup>2</sup> )	k (N/m)
$1.6 \times 10^{-1}$	$6.0 \times 10^{-2}$	$4.8 \times 10^{-2}$	$9.5 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-2}$	$1.738 \times 10^{-4}$	2.47

Além disso, a determinação dos coeficientes de amortecimento viscoso linear e seco é realizada a partir de procedimento proposto por De Paula *et al.* (2006). Este procedimento é realizado a partir da resposta livre do sistema para uma condição inicial não nula. A partir da observação desta resposta nota-se que, inicialmente, quando as velocidades são maiores, as amplitudes decaem de forma logarítmica, o que representa uma predominância de atrito viscoso. Na medida em que o sistema evolui no tempo, a velocidade diminui e as amplitudes decaem de forma aproximadamente linear, o que representa a predominância do atrito seco. Baseado nessa observação, admitem-se diferentes procedimentos para estimar os parâmetros de dissipação.

Primeiramente, considera-se o decaimento das primeiras amplitudes apresentadas na resposta do sistema, e a partir desse comportamento, aplica-se o conceito de decaimento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{x_j}{x_{j+1}}, \quad (4.4)$$

onde  $x_j$  e  $x_{j+1}$  correspondem às amplitude para os tempos  $t_1$  e  $t_{j+1} = t_1 + jT$  e  $j$  é um número inteiro. O coeficiente de atrito viscoso pode, então, ser determinado pela relação:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}. \quad (4.5)$$

Desta forma, a partir do resultado apresentado pelo sistema quando  $[\phi(0), \dot{\phi}(0)] = [\pi/2, 0]$  e para  $\theta_{forc} = 0$  é obtido que  $\xi = 0,017$ , Figura 4.3(a). Considerando-se a definição do coeficiente de atrito viscoso,  $\xi$ , apresentado em Thomson (1966) e a forma com que o parâmetro de atrito viscoso,  $\zeta$ , é apresentado neste trabalho, pode-se relacionar essas grandezas pela relação:

$$\zeta = 2\xi I\omega_o, \quad (4.6)$$

onde o valor de  $\omega_o$  desconsidera a parcela não-linear da equação, sendo definida como:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{kd^2}{2I}}. \quad (4.7)$$

Desta forma, o parâmetro de dissipação referente à ação do atrito viscoso é  $\zeta = 2,368 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Por outro lado, para a parte final do movimento, onde a diferença entre duas amplitudes é linear, característica de resposta apresentada por sistemas sujeitos predominantemente à ação de atrito seco, tem-se que a magnitude do momento resistente proveniente à ação do atrito é dada por (Meirovitch, 1986):

$$\mu = \frac{k_o}{4} \Delta x, \quad (4.8)$$

onde  $k_o$  está relacionado com a rigidez torsional do sistema linearizado,

$$k_o = \frac{kd^2 + mgD}{2}. \quad (4.9)$$

Esta aproximação é feita uma vez que o atrito seco prevalece apenas para oscilações de menores amplitudes. Para uma diferença obtida entre duas amplitudes consecutivas de  $\Delta x = 0.0525 \text{ rad}$ , Figura 4.3(b), obtém-se que  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$ . A Tabela 4.2 apresenta os valores obtidos para os parâmetros de atrito.

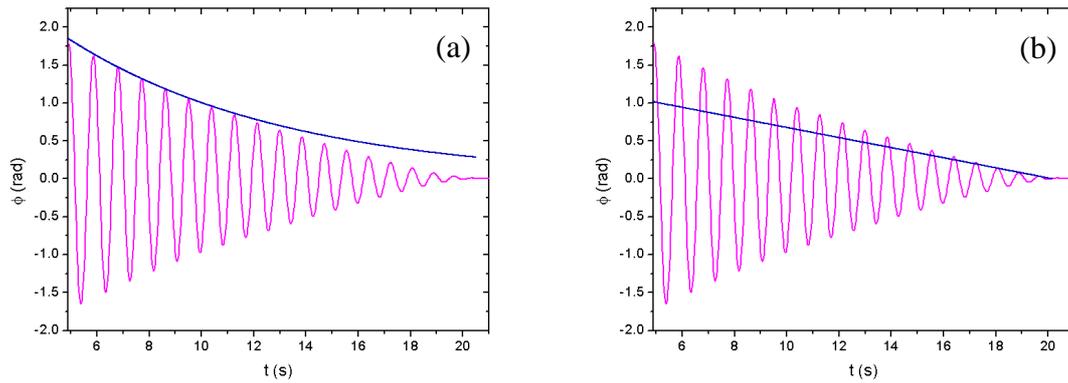


Figura 4.3: Resposta livre do pêndulo.

Tabela 4.2: Parâmetros de atrito.

$\zeta$ (kg m <sup>2</sup> /s)	$\mu$ (N m)
$2.368 \times 10^{-5}$	$1.272 \times 10^{-4}$

A resposta do pêndulo não-linear experimental sujeito a um forçamento periódico é bastante complexa. Objetivando-se analisar o comportamento global do sistema, avaliando onde e como ocorrem mudanças em sua resposta como consequência da variação da frequência de forçamento, a Figura 4.4 mostra o diagrama de bifurcação apresentando-se a posição angular do pêndulo para valores de  $\omega$  variando de 3 rad/s a 7 rad/s. Esse diagrama de bifurcação é construído considerando-se as mesmas condições iniciais para cada frequência de forçamento, sendo os primeiros 2000 períodos desconsiderados. Este procedimento é realizado numericamente utilizando o algoritmo da força bruta (Parker e Chua, 1989), e confirmado experimentalmente para algumas frequências de forçamento. A partir do diagrama podem-se observar regiões relacionadas à resposta periódica e regiões relacionadas a respostas caóticas.

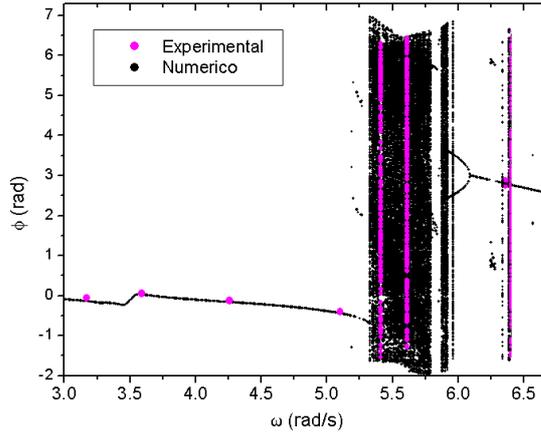


Figura 4.4: Diagrama de Bifurcação.

A Figura 4.5 apresenta a seção de Poincaré para  $\omega = 5.61 \text{ rad/s}$ , numérica e experimental equivalentes, construída em relação à fase de forçamento de 0 rad. Para esta frequência de forçamento, o diagrama de bifurcação indica um comportamento caótico confirmado pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov, que apresenta um expoente positivo. Através da utilização do algoritmo de Wolf *et al.* (1985) obtém-se os expoentes  $\lambda = (+0.4483, -0.5732)$ .

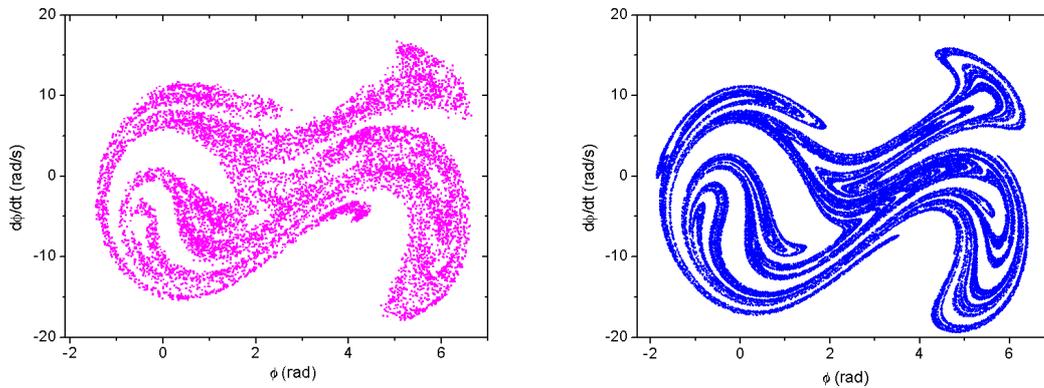


Figura 4.5: Seções de Poincaré em 0 e  $\pi$  rad para  $\omega = 5.61 \text{ rad/s}$ . Lado esquerdo: resultados experimentais; lado direito: resultados numéricos.

Além de comportamentos periódico e caótico, a dinâmica do pêndulo não-linear pode apresentar comportamentos relacionados com caos transiente sob determinadas condições de operação. O sistema apresenta ainda regiões relacionadas à coexistência de atratores periódicos. As características do sistema e os tipos de comportamentos citados são identificados e analisados a partir de procedimentos numéricos e experimentais em De Paula *et al.* (2006) e verificam a complexidade do sistema analisado.

A partir da configuração em que o pêndulo não-linear apresenta comportamento caótico, com os parâmetros físicos e geométricos utilizados e para  $\omega = 5.61 \text{ rad/s}$ ,

objetiva-se avaliar a capacidade dos métodos de controle apresentados no Capítulo 3 em estabilizar o sistema em suas órbitas periódicas instáveis.

Neste contexto, dois possíveis parâmetros de controle são considerados. A atuação do 1º parâmetro de controle,  $\delta p_1$ , consiste na variação do comprimento do fio que, em conjunto com as molas, é o meio pelo qual o forçamento é realizado, sua variável é denominada  $\Delta l_1$ . Isso pode ser feito, por exemplo, a partir de um motor de passo que altera o comprimento do fio. A atuação do 2º parâmetro,  $\delta p_2$ , consiste no movimento horizontal da guia localizada entre a haste de forçamento e a 1ª mola do sistema, sendo sua variável denominada  $\Delta l_2$ . Mais uma vez pode-se utilizar um motor de passo para efetuar esta atuação. A atuação desses parâmetros é indicada na Figura 4.6.

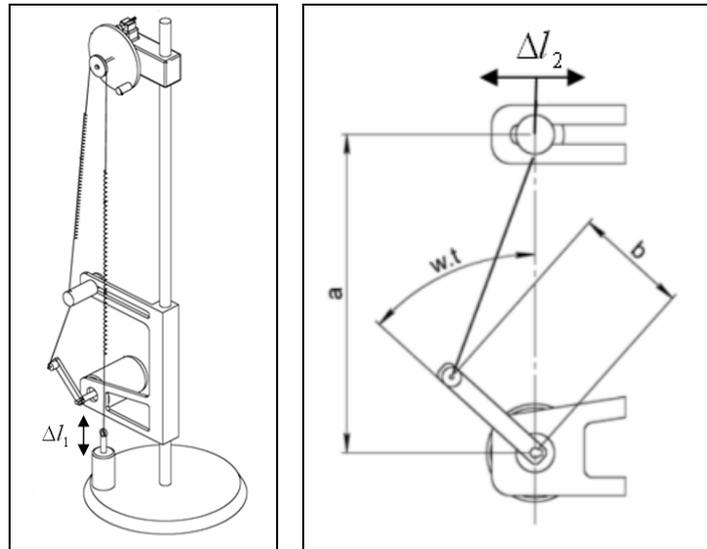


Figura 4.6: Parâmetros de controle.

Considerando-se, então, os dois parâmetros de controle têm-se as novas equações de movimento escritas sob a forma de variáveis de estado apresentadas na equação (4.10).

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kd^2}{2I} & -\frac{\zeta}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{kd}{2I} (\Delta f(t) - \Delta l_1) - \frac{mgD \text{sen}(x_1)}{2I} - \frac{2\mu \arctan(qx_2)}{\pi I} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde  $\Delta f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + \Delta l_2^2 - 2ab \cos(\omega t) - 2b\Delta l_2 \sin(\omega t)} - (a - b)$ ,  $x_1 = \phi$  e  $x_2 = \dot{\phi}$ .

A evolução temporal das variáveis  $(\phi, \dot{\phi})$  é obtida a partir da integração numérica da equação (4.10) utilizando-se os parâmetros experimentais identificados.

A série temporal de posição e velocidade do pêndulo, obtida a partir da integração do modelo matemático com  $\omega = 5.61 \text{ rad/s}$ , é utilizada para identificar OPIs imersas no comportamento caótico. Essa identificação consiste na primeira etapa da fase de aprendizagem, sendo um procedimento comum a todos os métodos de controle.

Neste trabalho, para realizar a identificação das órbitas utiliza-se o método dos pontos recorrentes próximos (AUERBACH *et al.*, 1987). Para o emprego deste método considera-se uma série temporal  $\Phi_n = (\phi(t_0 + n\tau_s), \dot{\phi}(t_0 + n\tau_s))$ , onde  $\tau_s$  é o intervalo de tempo entre duas amostras do sinal e  $n = 1, 2, \dots, (N_M \times N_P)$  é a ordem da amostra, onde  $N_M$  é o número de amostras por período de forçamento e  $N_P$  o número de períodos considerados. Nesta simulação, utilizam-se  $N_M = 120$ ,  $N_P = 50.000$ . O passo do integrador adotado é igual ao intervalo de tempo  $\tau_s = \frac{2\pi}{N_M \omega}$ . Como o forçamento sobre

o sistema é periódico, a seção de Poincaré representa uma amostra estroboscópica da série temporal onde os seus pontos são determinados sempre que o forçamento passa por uma fase determinada,  $\theta_{forc}$ .

A Tabela 4.3 mostra a periodicidade das 23 órbitas periódicas instáveis identificadas no comportamento caótico do pêndulo considerando-se órbitas de até período-8.

Tabela 4.3: OPIs identificadas.

	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período 5	Período 6	Período 7	Período 8
Quantidade de OPIs	1	2	3	2	3	5	5	2

O mesmo procedimento para a identificação de OPIs pode ser realizado a partir de séries temporais experimentais.

## 4.2 Métodos Discretos e Semi-contínuos

Nesta subseção, os métodos discretos e semi-contínuos apresentados no Capítulo 3 são aplicados ao pêndulo não-linear, de modo a avaliar a capacidade destes métodos de estabilizar OPIs do sistema em regime caótico.

Conhecendo-se as OPIs que se deseja estabilizar, a segunda etapa da fase de aprendizagem consiste na determinação dos parâmetros do controlador, como exposto no capítulo anterior. Nesta etapa, utilizam-se os mesmos procedimentos para os métodos discretos (OGY e OGY multiparâmetros) e semi-contínuos (SC e SC multiparâmetros). A seguir, este procedimento é descrito e, depois, apresentam-se os resultados da estabilização do sistema a partir do emprego de cada um desses métodos.

A identificação das OPIs é realizada na seção de Poincaré correspondente à  $\theta_{forc} = 0$ , que consiste em uma seção de controle. No caso dos métodos discretos, esta consiste na única seção de controle (S). No caso dos métodos semi-contínuos, tem-se ainda que determinar a interseção da OPI escolhida com as demais seções de controle, os pontos de controle  $\xi_C$ . Em seguida, determina-se a dinâmica local na vizinhança de cada um destes pontos. Esta dinâmica considera o mapa de transição de uma seção para a seguinte,  $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n+1}$ , sendo expressa pela matriz Jacobiana  $J^n$  e pelo vetor de sensibilidade  $w_i^n$  do sistema à perturbação  $\Delta l_i$ ,  $i = 1, 2$ . No caso dos métodos discretos,  $S=1$ , a quantidade de jacobianas e de vetores de sensibilidade será igual à periodicidade da OPI. Considerando-se os métodos semi-contínuos, no entanto, tem-se que  $S=1, \dots, N_S$  e a quantidade de jacobianas e de vetores sensibilidades será igual ao *número de seções de controle*  $\times$  *periodicidade da OPI*. Além disso, para cada parâmetro de controle em um dado ponto de controle tem-se um vetor sensibilidade correspondente.

A matriz  $J^n$  é determinada a partir dos pares  $(\delta \xi^n, \delta \xi^{n+1})$ , selecionados da série temporal com perturbação nula. Os vetores  $\delta \xi^n = \xi^n - \xi_C^n$  pertencem a uma vizinhança do ponto de controle  $\xi_C^n$  na seção  $\Sigma_n$  e os vetores  $\delta \xi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi_C^{n+1}$  são suas respectivas iterações na seção  $\Sigma_{n+1}$ . Então, ajusta-se a matriz  $J^n$  pelo método dos mínimos quadrados à equação (4.11) considerando os pares selecionados e  $\Delta l_1^n = \Delta l_2^n = 0$ , conforme procedimento apresentado em Sano *et al.* (1985). Após a

determinação das matrizes  $J^n$ , aplica-se a decomposição de valor singular para calcular as direções de maior estabilidade e instabilidade ao redor do ponto de controle.

$$\delta \xi^{n+1} \approx J^n \delta \xi^n. \quad (4.11)$$

O vetor sensibilidade é obtido monitorando-se a trajetória do sistema até que ela entre na vizinhança de um ponto de controle  $\xi_C^n$ . Ao entrar nesta vizinhança, o sistema recebe uma perturbação  $\Delta l_i^n$  de módulo igual ao dobro do valor máximo estipulado para esse controlador,  $\Delta l_i^n = 2\Delta l_{i\max}$ , assumindo sinais positivo e negativo alternadamente. O vetor sensibilidade  $w_i^n$  é ajustado à equação (4.12) pelo método dos mínimos quadrados utilizando os pares agrupados  $(\Delta l_i^n, \delta \xi^{n+1} - J^n \delta \xi^n)$ , analogamente realizado na estimativa da jacobiana, e utilizando a matriz  $J^n$  determinada anteriormente.

$$w \delta p_i \approx \delta \xi^{n+1}(\delta p_i) - J^n \delta \xi^n(\delta p_{i-1}). \quad (4.12)$$

O procedimento realizado para o cálculo do vetor sensibilidade é realizado para cada parâmetro de controle separadamente, de acordo com o parâmetro utilizado. No caso dos métodos multiparâmetros, cada coluna da matriz de sensibilidade corresponde a um vetor de sensibilidade de um parâmetro de controle.

Cabe ressaltar que para a fase de aprendizagem dos métodos de controle discretos e semi-contínuos não é necessário o conhecimento das equações de movimento do sistema, como pode ser verificado pelo procedimento descrito acima. A modelagem matemática do pêndulo não-linear, apresentada no início deste capítulo, é utilizada apenas para gerar as séries temporais de posição e velocidade, a partir das quais os parâmetros do controlador são determinados.

Realizada a fase de aprendizagem, dá-se início a fase de controle, onde é necessário aguardar que a trajetória do sistema entre na vizinhança do ponto de controle. Quando isso ocorre, o controlador inicia sua tentativa de estabilizar a trajetória na OPI previamente selecionada por meio de perturbações adequadas em  $\Delta l_i$ . Além disso, se pelo cálculo utilizado a perturbação necessária para se estabilizar o sistema seja, em valor absoluto, maior que  $|\Delta l_{i\max}|$ , o controlador prescreve uma perturbação com o

mesmo sinal do valor calculado, no entanto, com valor absoluto igual ao valor máximo permitido. A seguir, são apresentados os resultados das fases de controle dos métodos discretos e semi-contínuos empregados.

#### 4.2.1 Método OGY

A análise da estabilização do pêndulo não-linear é iniciada pelo método OGY. Como este método não é apropriado para estabilização de órbitas de elevada periodicidade, inicialmente busca-se estabilizar uma OPI de período-1. Após a fase de aprendizagem, descrita anteriormente, dá-se início à fase de controle. Nesta fase, deixa-se o sistema evoluir livremente até que atinja uma vizinhança determinada do ponto de controle. Neste momento, utiliza-se a dinâmica local no ponto para calcular a perturbação no parâmetro de controle por meio da equação (3.6).

Duas situações distintas são consideradas para a aplicação do método OGY. Na primeira as perturbações no sistema são induzidas a partir do primeiro parâmetro de controle, enquanto na segunda o sistema é perturbado pelo segundo parâmetro. Nestes procedimentos, consideram-se atuações máximas de  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 2.5 \text{ cm}$  para o 1º e o 2º parâmetros de controle, respectivamente, e posições de referência de  $\Delta l_{10} = \Delta l_{20} = 0 \text{ cm}$ . A Figura 4.7 apresenta a evolução no tempo da posição do sistema, assim como as perturbações realizadas pelo controlador, a partir de perturbações do 1º parâmetro de controle para estabilizar a OPI de período-1. A Figura 4.8, por sua vez, apresenta os mesmos resultados para o emprego do método OGY perturbando o sistema a partir do 2º parâmetro de controle.

Deve-se observar que o método OGY não permite promover a estabilização de nenhuma das OPIs identificadas, nem mesmo a mais simples, de período-1. Esta limitação se deve à elevada instabilidade do sistema.

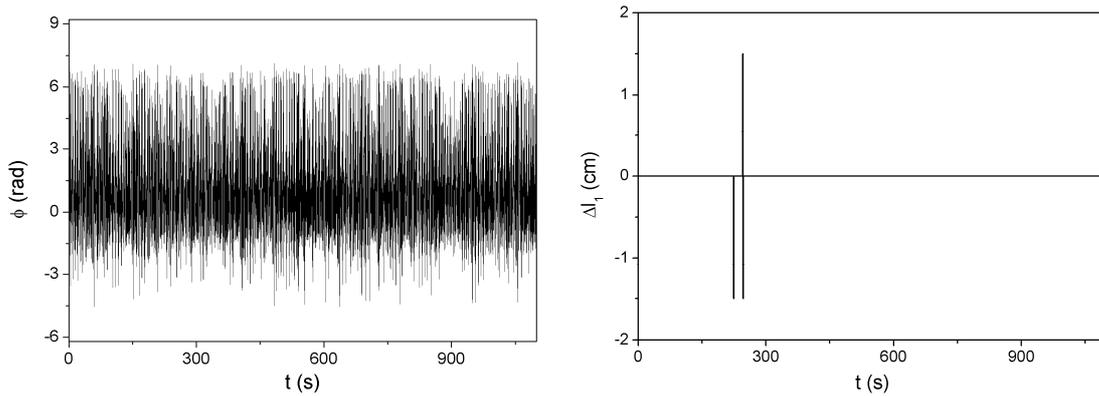


Figura 4.7: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 empregando-se o método OGY utilizando o 1º parâmetro de controle: (a)  $\phi(t)$ ; e (b)  $\Delta l_1(t)$ .

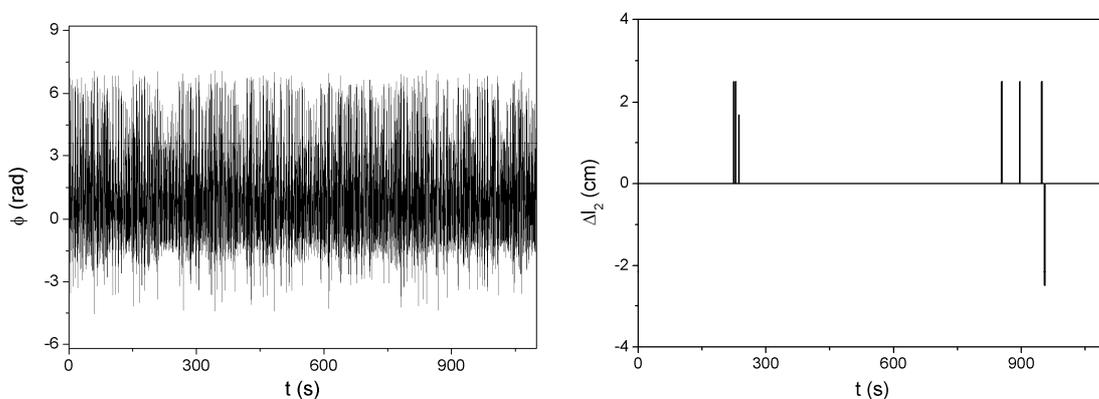


Figura 4.8: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 empregando-se o método OGY utilizando o 2º parâmetro de controle: (a)  $\phi(t)$ ; e (b)  $\Delta l_2(t)$ .

#### 4.2.2 Método SC

Devido a limitação apresentada no emprego do método OGY, considera-se agora o método SC. Este método é mais apropriado para estabilização de sistemas de elevada instabilidade, assim como de OPI de elevada periodicidade. Na implementação do método SC, utiliza-se 4 seções de controle (S) por período de forçamento (S1, S2, S3 e S4), defasadas entre si de  $\pi/2$  rad, conforme proposto por Pereira-Pinto *et al.* (2004). Desta forma, em cada período de forçamento o sistema sofre três perturbações a mais que no método OGY.

Inicialmente, de modo a explorar a possibilidade de estabilizar o sistema com pequenas perturbações no 1º parâmetro,  $\Delta l_1$ , escolhem-se 2 OPIs, uma de período-4 e outra de período-7. Considera-se ainda uma posição de referência do parâmetro de  $\Delta l_{10} = 0 \text{ cm}$  e uma atuação máxima de  $|\Delta l_{1max}| = 1.5 \text{ cm}$ , o que representa uma variação

inferior a 1% no comprimento total do conjunto de fios e molas em relação ao sistema na posição de equilíbrio.

Após a fase de aprendizagem que identifica as órbitas e os parâmetros de controle, deixa-se o sistema evoluir livremente até que atinja uma vizinhança determinada de um dos pontos de controle. Neste momento, utiliza-se a dinâmica local no ponto para calcular a perturbação no parâmetro de controle por meio da equação (3.12).

A Figura 4.9 e a Figura 4.10 mostram detalhadamente duas condições de estabilização a partir do emprego do método SC utilizando o 1º parâmetro de controle representadas por órbitas de período-4 e de período-7, respectivamente. As figuras consideram as órbitas estabilizadas no espaço de fase (a), o comportamento do pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais do parâmetro  $\Delta l_1$  (c).

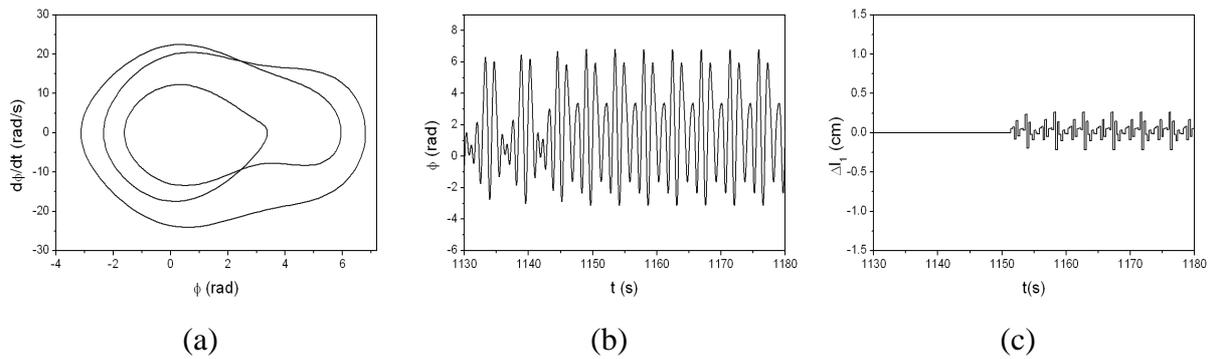


Figura 4.9: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC utilizando o 1º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$ .

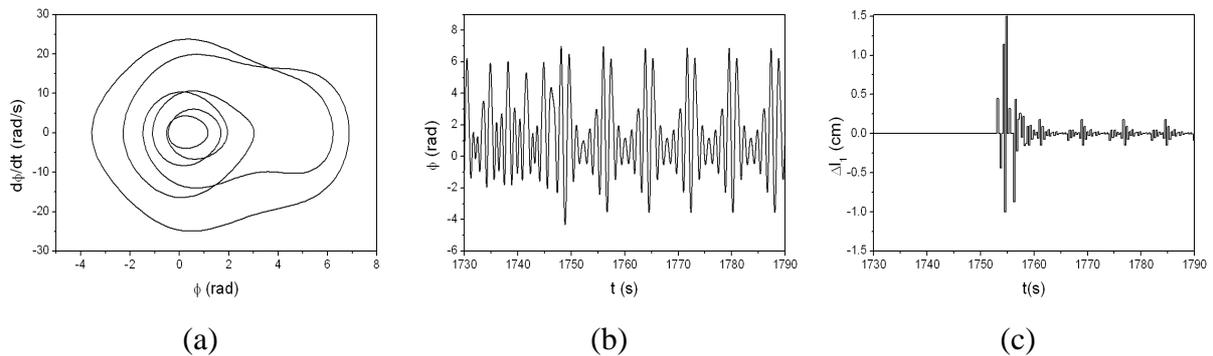


Figura 4.10: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC utilizando o 1º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$ .

Considera-se agora o emprego do método SC onde a atuação é proporcionada pelo 2º parâmetro de controle para estabilizar as mesmas órbitas escolhidas na utilização

do 1º parâmetro. Novamente, antes de iniciar a fase de controle, realiza-se a fase de aprendizagem, que é análoga à realizada para o 1º parâmetro de controle. Agora, no entanto, as perturbações utilizadas para a estimativa do vetor sensibilidade são realizadas pelo 2º parâmetro. A fase de controle também é análoga à realizada no emprego do 1º parâmetro, no entanto, considera-se uma atuação máxima de  $|\Delta l_{2\max}| = 2.5 \text{ cm}$  e a posição de referência de  $\Delta l_{20} = 0 \text{ cm}$ .

A Figura 4.11 e a Figura 4.12 mostram detalhadamente as órbitas de período-4 e de período-7, respectivamente, estabilizadas no espaço de fase (a), o comportamento do pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais do parâmetro  $\Delta l_2$  (c).

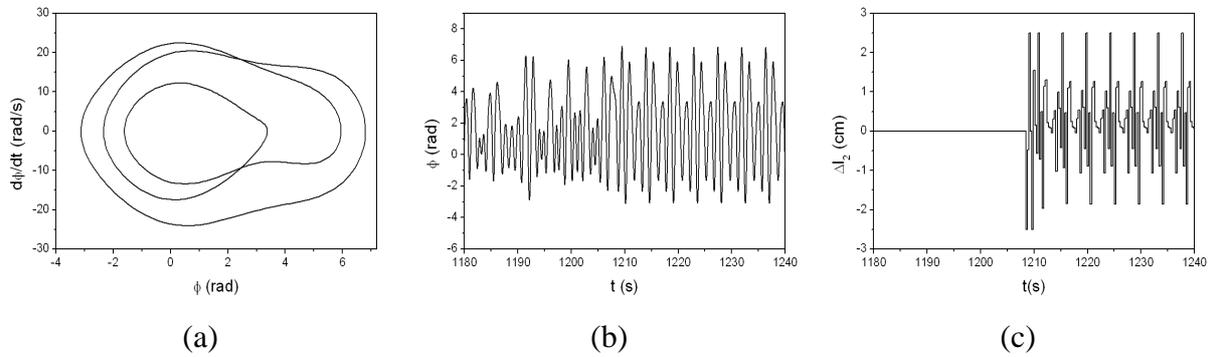


Figura 4.11: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC utilizando o 2º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_2(t)$ .

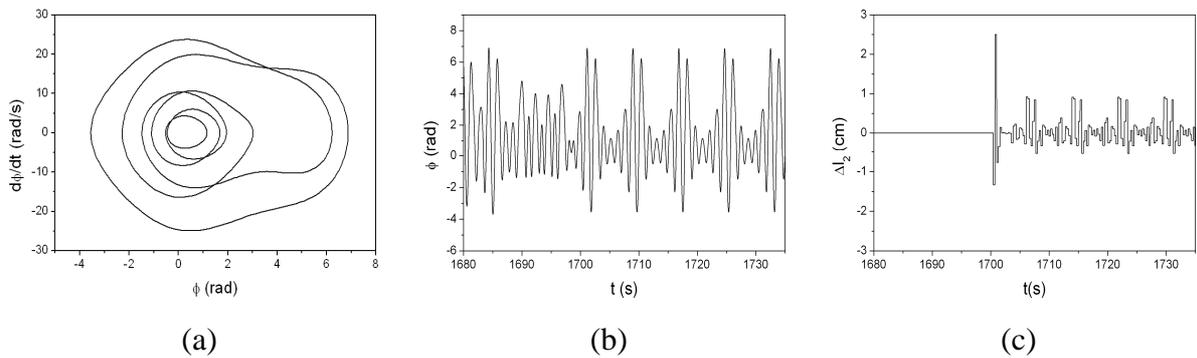


Figura 4.12: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC utilizando o 2º parâmetro de controle: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_2(t)$ .

A partir da Figura 4.11 e da Figura 4.12 observa-se que o sistema também pode ser estabilizado nas duas órbitas periódicas instáveis escolhidas a partir de pequenas perturbações do 2º parâmetro de controle, o que é semelhante aos resultados obtidos para o 1º parâmetro de controle. Além disso, considerando-se também os resultados apresentados na Figura 4.9 e na Figura 4.10, verifica-se que o sistema é estabilizado

pelo 2º parâmetro utilizando-se perturbações, em média, maiores que as realizadas pelo 1º parâmetro.

#### 4.2.3 Método SC Multiparâmetros Acoplado

A formulação do método SC multiparâmetros acoplado, apresentada no capítulo 3, é agora empregada na estabilização do pêndulo considerando-se 2 parâmetros de controle. Considera-se que em cada seção de controle apenas um parâmetro pode atuar. Além disso, um mesmo parâmetro de controle não atua em duas seções consecutivas. Considera-se que as seções de controle ímpares correspondem às atuações do 1º parâmetro, enquanto os pares correspondem às atuações do 2º parâmetro. Além disso, considera-se uma mesma contribuição para o parâmetro passivo e outra para o parâmetro ativo na resposta do sistema, independente de quais sejam os parâmetros passivo e ativo em cada seção de controle. Desta forma, não são mais necessárias matrizes diagonais,  $B_a$  e  $B_p$ , mas apenas escalares,  $\beta_a$  e  $\beta_p$ . Esses valores combinam linearmente os efeitos independentes das atuações de cada parâmetro, fornecendo o vetor resultante da resposta do sistema quando um parâmetro atua e o outro encontra-se fora da posição de referência.

Com isso, nas seções de controle em que o parâmetro 1 atua, tem-se:

$$\delta P_a^n = \beta_a \begin{Bmatrix} \delta p_1^n \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \delta P_p^n = \beta_p \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta p_2^n \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

onde  $\delta p_2^n$  corresponde à atuação do 2º parâmetro em  $\Sigma_{n-1}$ .

Analogamente, nas seções de controle em que o parâmetro 2 atua, tem-se:

$$\delta P_a^n = \beta_a \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta p_2^n \end{Bmatrix} \text{ e } \delta P_p^n = \beta_p \begin{Bmatrix} \delta p_1^n \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde  $\delta p_1^n$  corresponde à atuação do 1º parâmetro em  $\Sigma_{n-1}$ .

A equação (4.15) apresenta o sistema que, ao ser resolvido, fornece os valores dos escalares  $\alpha$  e  $\delta P_{ai}^n$  necessários à estabilização do sistema, como apresentado anteriormente na equação (3.22).

$$[W_{ai}^n \quad -v_s^{n+1}] \begin{Bmatrix} \delta P_{ai}^n \\ \alpha \end{Bmatrix} = -[J^n \quad W^n] \begin{Bmatrix} \delta \xi^n \\ \delta P_p^n \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

onde a matriz sensibilidade é  $[2 \times 2]$ , estando a primeira coluna,  $W_1^n$ , e a segunda coluna,  $W_2^n$ , relacionadas, respectivamente, aos primeiro e segundo parâmetros de controle. Considerando-se as equações (3.23) e (3.24), tem-se que a perturbação que deve ser realizada pelo parâmetro ativo em  $\Sigma_n$ , necessária à estabilização do sistema, é dada pela equação (4.16).

$$\delta P_{ai}^n = \gamma_a \delta P_{ai}^n, \quad (4.16)$$

onde  $\gamma_a = 1/\beta_a$ , sendo  $0 < \gamma_a \leq 1$  e  $\beta_a \geq 1$ .

Procedimentos análogos aos empregados pelos métodos OGY e SC na fase de aprendizagem são realizados para o método multiparâmetros de forma a determinar as matrizes jacobiana  $J^n$  e as matrizes sensibilidade  $W^n$ . Em seguida, como última etapa da fase de aprendizagem, determinam-se os valores de  $\beta_a$  e  $\beta_p$  apropriados. Esses valores estabelecem a combinação linear dos efeitos individuais de cada parâmetro. A determinação desses parâmetros é feita a partir de tentativas individuais de estabilizar cada uma das OPIs identificadas considerando-se um período de integração correspondente a 2000 pontos nas seções de controle. A Tabela 4.4 apresenta a quantidade de OPIs controladas, das 23 identificadas, para diferentes valores de  $\beta_a$  e  $\beta_p$ . Trata-se de uma abordagem para verificar a eficácia da estabilização do sistema em função dos valores desses parâmetros.

Tabela 4.4: Quantidade de OPIs estabilizadas para diferentes valores de  $\beta_a$  e  $\beta_p$ .

$\beta_p \backslash \beta_a$	1	1.5	2	2.5	3
1	9	18	20	20	19
1.5	4	14	22	<b>23</b>	20
2	1	9	16	20	19

Pode-se observar, a partir da Tabela 4.4, que para  $\beta_a = 2.5$  e  $\beta_p = 1.5$  todas as OPIs identificadas são estabilizadas. Desta forma, estes são os valores adotados. Como

a contribuição do efeito do parâmetro ativo,  $\beta_a$ , é maior que 1, e conseqüentemente  $\gamma_a < 1$ , as perturbações realizadas são menores do que as que seriam consideradas a partir da soma vetorial dos efeitos.

As mesmas órbitas estabilizadas pelo método SC são novamente consideradas, objetivando-se avaliar a capacidade de estabilização de OPIs pelo método SC multiparâmetros acoplado.

Após a fase de aprendizagem, dá-se início a fase de controle. Assim como adotado no método SC para apenas um parâmetro, são consideradas 4 seções de controle por período de forçamento. Além disso, considera-se  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 2.5 \text{ cm}$  como valores máximos admitidos para atuações dos parâmetros, e posições de referência para os dois controladores de  $\Delta l_{10} = \Delta l_{20} = 0 \text{ cm}$ .

A Figura 4.13 e a Figura 4.14 mostram detalhadamente as órbitas de período-4 e de período-7, respectivamente, estabilizadas no espaço de fase (a), o comportamento do pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais dos parâmetros de controle  $\Delta l_1$  e  $\Delta l_2$  (c) a partir do emprego do método SC multiparâmetros acoplado.

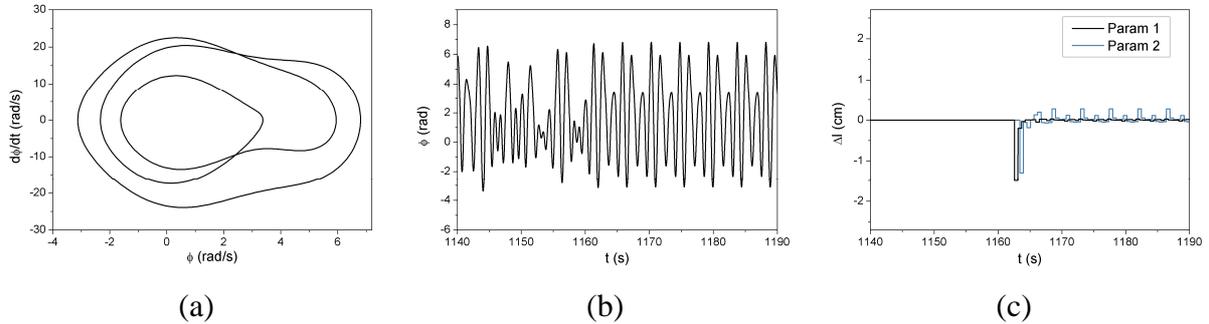


Figura 4.13: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC multiparâmetros acoplado:  
 (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

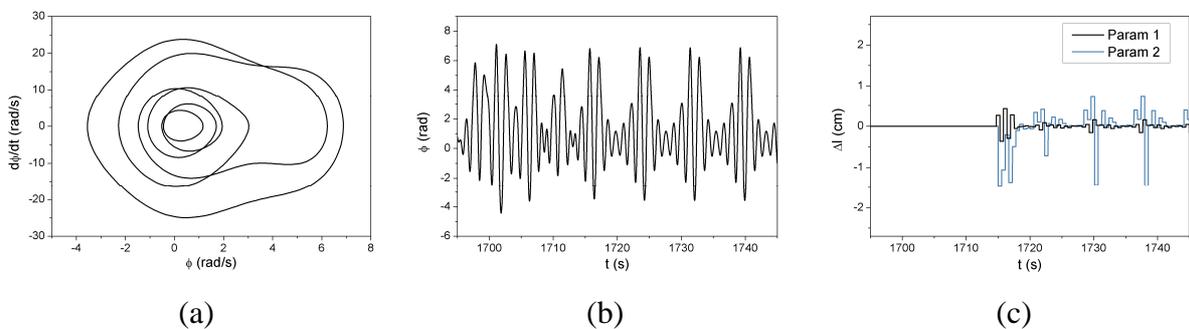


Figura 4.14: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC multiparâmetros acoplado:  
 (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

Os resultados mostram que o sistema estabiliza com sucesso as duas OPIs escolhidas. Além disso, as perturbações realizadas são, em média, menores que as atingidas nos dois casos do controle com apenas um parâmetro. Em parte, este fato ocorre devido à combinação linear entre os efeitos.

A partir da Figura 4.13 e da Figura 4.14 tem-se que num mesmo instante de tempo dois parâmetros de controle podem estar em posições diferentes de suas posições de referência. Isto acontece porque quando ocorre a atuação do parâmetro ativo, o parâmetro passivo não necessariamente se encontra em sua posição de referência, o que faz necessário a consideração do acoplamento entre os parâmetros

A seguir é apresentado o caso particular do controle multiparâmetros, onde os atuadores não mais são tratados de forma acoplada. Novamente consideram-se os mesmos parâmetros de controle apresentados para o pêndulo não-linear.

#### 4.2.4 Método SC Multiparâmetros Desacoplado

Nesta subseção, apresentam-se resultados da estabilização do pêndulo empregando-se o método SC multiparâmetros desacoplado com 2 parâmetros de controle. Nesta particularização, cada um dos dois parâmetros retorna à sua condição de referência na seção seguinte à sua seção de atuação, ou seja, quando se tornam passivos. Com isso, faz-se desnecessário considerar o acoplamento entre os parâmetros. A partir da equação (3.25) obtém-se as condições apresentadas na equação (4.17).

$$\beta_a^n = 1 \text{ e } \beta_p^n = 0. \quad (4.17)$$

Com isso, nas seções de controle em que o parâmetro 1 atua, tem-se:

$$\delta P_a^n = \begin{Bmatrix} \delta p_1^n \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.18)$$

e nas seções de controle em que o parâmetro 2 atua, tem-se:

$$\delta P_a^n = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta p_2^n \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

A equação (4.20) apresenta o sistema que, ao ser resolvido, fornece os valores dos escalares  $\alpha$  e  $\delta P_{ai}^n$  necessários à estabilização do sistema, como apresentado anteriormente na equação (3.30).

$$[W_{ai}^n \quad -v_s^{n+1}] \begin{Bmatrix} \delta P_{ai}^n \\ \alpha \end{Bmatrix} = -J^n \delta \xi^n \quad (4.20)$$

onde  $\delta P_{ai}^n = \delta p_{ai}^n$  e  $W_{ai}^n$  é a coluna da matriz sensibilidade relacionada ao parâmetro ativo na seção de controle  $\Sigma_n$ . Além disso, a matriz sensibilidade é rigorosamente a mesma utilizada na subseção anterior, quando os parâmetros do pêndulo não-linear são tratados de forma acoplada.

Cabe ressaltar que, neste caso, a atuação  $\delta P_{ai}^n$  obtida a partir da equação (4.20) corresponde à atuação real que deve ser realizada pelo atuador de forma a estabilizar o sistema, uma vez que  $\beta_a^n = 1$ .

Pode-se observar pelas equações (4.20) e (3.12) que a formulação obtida para o controle multiparâmetros desacoplado é semelhante à do controle com apenas um parâmetro, agora, no entanto, com diferentes parâmetros de controle se revezando nas seções de controle.

De forma a avaliar a capacidade de estabilização de OPIs pelo método SC multiparâmetros desacoplado, novamente busca-se estabilizar as OPIs de períodos 4 e 7. Os mesmos procedimentos realizados na fase de aprendizagem do controle multiparâmetros acoplado são empregados no caso desacoplado, com exceção da obtenção de valores  $\beta_a$  e  $\beta_p$  apropriados, desnecessário no emprego da abordagem desacoplada. Assim sendo, os parâmetros do controlador são idênticos aos calculados para a abordagem acoplada. Além disso, consideram-se as mesmas condições na fase de controle: 4 seções, sendo que as ímpares correspondem às atuações do 1º parâmetro, enquanto as pares correspondem às atuações do 2º parâmetro; valores máximos admitidos para os atuadores de  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 2.5 \text{ cm}$ ; e posições de referência para os dois controladores de  $\Delta l_{10} = \Delta l_{20} = 0 \text{ cm}$ .

A Figura 4.15 e a Figura 4.16 mostram detalhadamente as órbitas de período 4 e de período 7, respectivamente, estabilizadas no espaço de fase (a), o comportamento do

pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais dos parâmetros de controle  $\Delta l_1$  e  $\Delta l_2$  (c) a partir do emprego do método SC multiparâmetros desacoplado.

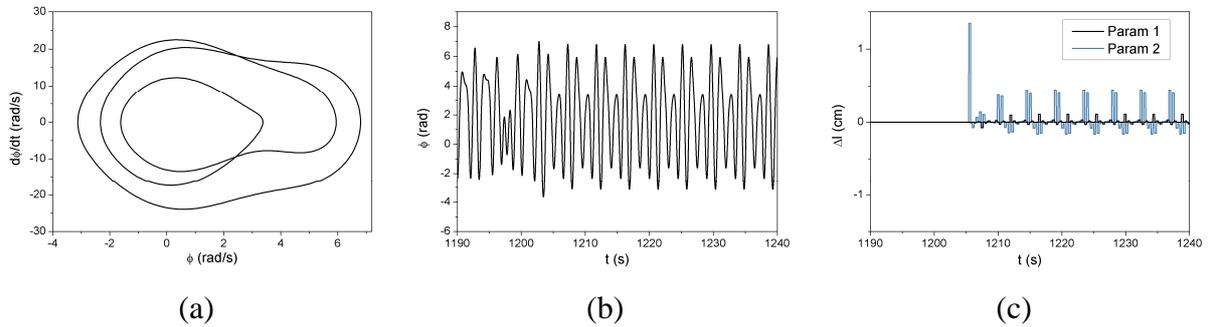


Figura 4.15: OPI de período 4 estabilizada pelo método SC multiparâmetros desacoplado: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

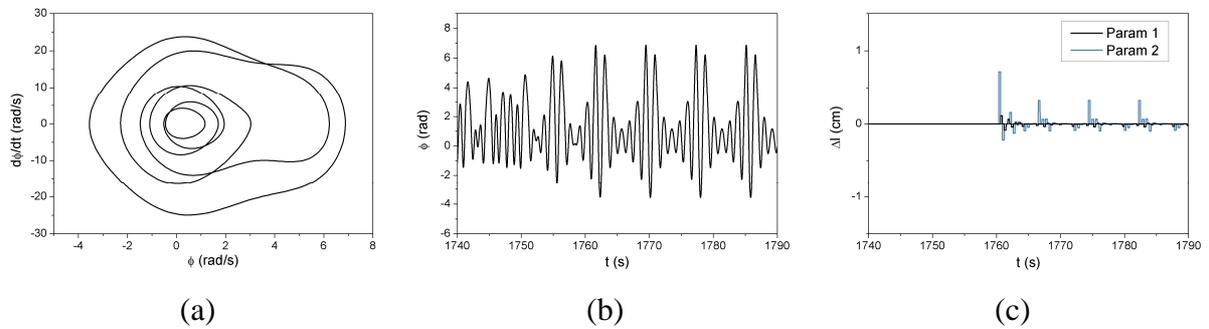


Figura 4.16: OPI de período 7 estabilizada pelo método SC multiparâmetros desacoplado: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

Os resultados mostram que o método SC desacoplado com 2 parâmetros realiza a estabilização das OPIs selecionadas com sucesso. Além disso, pode-se perceber que num mesmo instante de tempo apenas um dos parâmetros de controle encontra-se em uma posição diferente de sua de referência. Isto ocorre porque, diferentemente do caso acoplado, quando ocorre a atuação do parâmetro ativo, o passivo se encontra sempre na posição de referência, por isso, não é necessário considerar o acoplamento entre os parâmetros.

#### 4.2.5 Método OGY Multiparâmetros

O método OGY não apresenta bons resultados quando aplicado ao pêndulo não-linear dada à alta instabilidade deste sistema. Buscando-se melhorar esse desempenho considera-se a formulação do método discreto com multiparâmetros de controle, incluindo as abordagens acoplada e desacoplada.

No emprego das duas abordagens, da mesma forma que adotado no emprego dos métodos apresentados anteriormente neste capítulo, consideram-se atuações máximas de  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 2.5 \text{ cm}$  para o 1º e o 2º parâmetros de controle, respectivamente, e posições de referência de  $\Delta l_{10} = \Delta l_{20} = 0 \text{ cm}$ .

Inicialmente analisa-se a abordagem acoplada do método OGY multiparâmetros. As mesmas contribuições dos efeitos individuais dos parâmetros de controle obtidas na fase de aprendizagem do método SC multiparâmetros acoplado são utilizadas, ou seja,  $\beta_a = 2.5$  e  $\beta_p = 1.5$ .

Assim como realizado no emprego do método OGY com um único parâmetro, busca-se estabilizar uma OPI de período-1. A Figura 4.17 mostra os resultados da estabilização desta órbita em regime permanente no espaço de fase (a), o comportamento do pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais dos parâmetros de controle  $\Delta l_1$  e  $\Delta l_2$  (c).

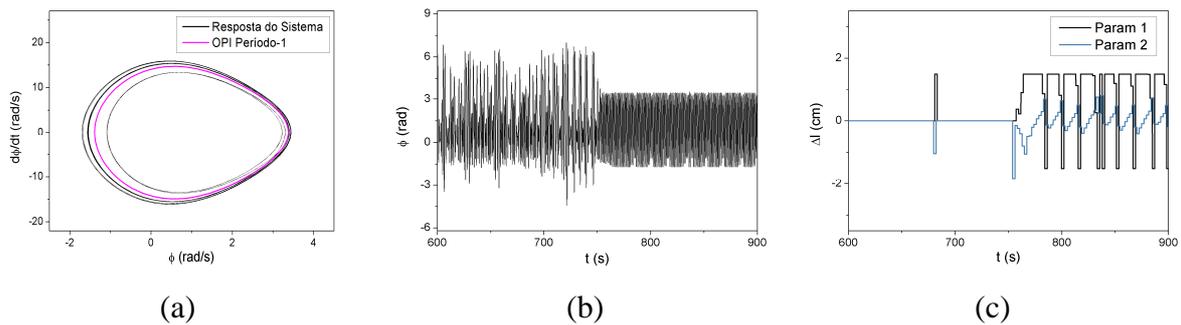


Figura 4.17: Estabilização da OPI de período 1 pelo método OGY multiparâmetros acoplado: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

A partir da Figura 4.17 pode-se perceber que a OPI não é estabilizada com sucesso. No entanto, a trajetória do pêndulo fica próxima da órbita, num comportamento não caótico. Embora o comportamento obtido não seja exatamente o desejado, o desempenho é melhor que no emprego do método OGY. O uso de multiparâmetros proporciona maior eficácia ao método e, em sistemas com um grau menor de instabilidade, o método OGY multiparâmetros acoplado pode apresentar resultados consideravelmente melhores que o método OGY.

O método OGY multiparâmetros desacoplado é utilizado para estabilizar a mesma OPI de período-1. A Figura 4.18 mostra os resultados da tentativa de estabilização desta órbita em regime permanente no espaço de fase (a), o

comportamento do pêndulo no tempo (b) e as evoluções temporais dos parâmetros de controle  $\Delta l_1$  e  $\Delta l_2$  (c).

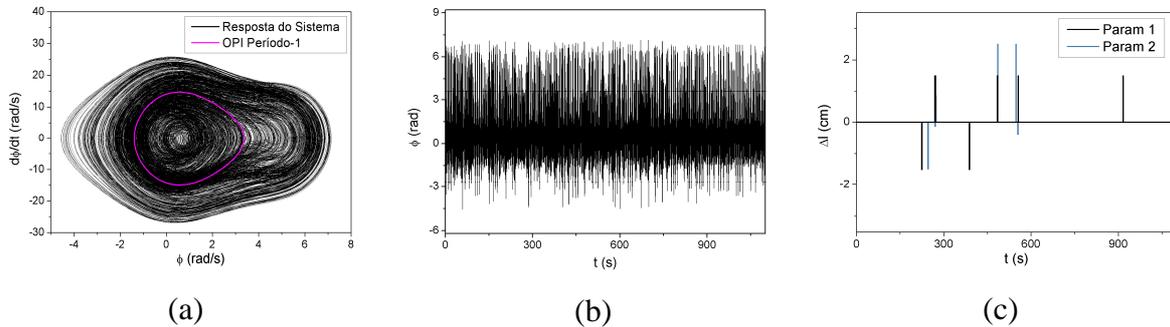


Figura 4.18: Tentativa de estabilização da OPI de período 1 pelo método OGY multiparâmetros desacoplado: (a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$  e  $\Delta l_2(t)$ .

Diferentemente do método OGY multiparâmetros acoplado, a abordagem desacoplada não apresentou vantagem em relação ao método OGY considerando-se o pêndulo não-linear analisado. Isso, contudo não é definitivo considerando outros sistemas. Conforme pode ser verificado em De Paula & Savi (2008) (e nos resultados reproduzidos no Apêndice), por exemplo, a estabilização de OPIs em mapas é obtida com maior eficácia a partir do emprego do método OGY multiparâmetros desacoplado do que pelo método OGY.

### 4.3 Métodos Contínuos

Nesta subseção, analisa-se a capacidade dos métodos de controle de caos contínuos, apresentados no Capítulo 3, em estabilizar OPIs do pêndulo não-linear em regime caótico.

Para a aplicação dos métodos contínuos considera-se apenas a ação do 1º parâmetros de controle, apresentado na equação (4.10). A matriz de ganho considerada é dada por:

$$K_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Com isso, a matriz de ganho  $K_M$  pode ser reduzida a um escalar,  $K$ . Além disso, para a aplicação dos métodos por realimentação é necessário escrever a equação de

movimento do sistema de forma a atender à lei de controle,  $F(t)$ . Para isso, o termo da equação de movimento associado ao parâmetro de controle deve ter a forma  $\psi \Delta l^n$  e ser igual a  $F(t)$ . A partir das leis de controle apresentadas nas equações (3.40) e (3.41), obtém-se as condições para aplicação do método TDF na equação (4.22) e para a aplicação do método ETDF na equação (4.23).

$$\psi \Delta l^n = F(t) = K[x_{2\tau} - x_2] \quad (4.22)$$

$$\psi \Delta l^n = F(t) = K[(1-R)S_\tau - x_2] \quad (4.23)$$

Com isso, a diferença na utilização de parâmetros de controle diferentes ocorre nas magnitudes das perturbações, como mostrado na equação (4.24) para o caso do método ETDF. Desta forma, o desempenho dos métodos por realimentação independe do parâmetro de controle escolhido, desde que seja possível aplicar a lei de controle.

$$\Delta l = \sqrt[n]{\frac{K[(1-R)S_\tau - x_2]}{\psi}} \quad (4.24)$$

onde  $S_\tau = S(t - \tau) = x_2(t - \tau) + R x_2(t - 2\tau) + R^2 x_2(t - 3\tau)$  considerando-se 3 termos em  $S_\tau$ . Desta forma, para o pêndulo não-linear utilizando-se o 1º parâmetro de controle, a partir das equações (4.10) e (4.24), tem-se que:

$$\psi = -2l / kd \quad e \quad n=1 \quad (4.25)$$

Além disso, não é possível empregar o método ETDF utilizando o 2º parâmetro de controle, pois o termo associado à perturbação deste parâmetro não pode ser escrito nas formas apresentadas pelas equações (4.22) e (4.23).

Durante a fase de aprendizagem, de forma a estimar os parâmetros do controlador,  $K$  no caso do TDF e  $R$  e  $K$  no caso do ETDF, calcula-se o expoente de Lyapunov máximo para cada OPI de interesse considerando-se diferentes valores para os parâmetros. Nesta análise busca-se regiões associadas a expoentes negativos, onde o controle do sistema pode ser alcançado. Finalizada a fase de aprendizagem, inicia-se a

fase de controle, onde o atuador realiza perturbações de forma a estabilizar o sistema na OPI escolhida. Além disso, as perturbações começam assim que a fase de controle é iniciada e a estabilização da órbita de interesse, quando é alcançada, ocorre rapidamente.

Para realizar o cálculo dos expoentes de Lyapunov, no entanto, é necessário utilizar uma representação alternativa do sistema onde as dependências de estados defasados no tempo são eliminadas. Este procedimento é apresentado a seguir. Posteriormente, nesta mesma subseção, são apresentados os resultados da fase de controle a partir do emprego dos métodos por realimentação.

#### 4.3.1 Representação do sistema para o cálculo do Expoente de Lyapunov

Para realizar o cálculo dos expoentes de Lyapunov do pêndulo não-linear com o controlador, cujas equações de movimento contêm uma DDE, é utilizada uma representação alternativa do sistema. Neste contexto, o sistema original com o controlador, composto pelas equações (4.10), (4.24) e (4.25), é reescrito como um conjunto de  $N+1$  EDOs, conforme apresentado na equação (4.26). Esta nova representação é, então, utilizada para calcular o expoente de Lyapunov. Desta forma, assumindo-se  $z_1 = \phi$ ,  $z_2 = \dot{\phi}$  e considerando-se as variáveis  $z_3, \dots, z_{N+2}$  para a aproximação de  $\dot{\phi}$  no intervalo  $(t-3\tau, t-h)$ , o conjunto de equações associado à equação (3.46) é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{kd^2}{2I} z_1 - \frac{\zeta}{I} z_2 + \frac{kd}{2I} \Delta f(t) - \frac{mgD \text{sen}(z_1)}{2I} - \frac{2\mu}{\pi I} \arctan(10^6 z_2) + \\ \quad + K[(1-R)(z_{(N-1)/3+2} + R z_{2(N-1)/3+2} + R^2 z_{N+1}) - z_2] \\ \dot{z}_i = N(z_{i-1} - z_{i+1})/(2\tau), \quad \text{if } 3 \leq i < N+2 \\ \dot{z}_{N+2} = N(z_N - z_{N+1})/\tau \end{cases} \quad (4.26)$$

onde  $N = 3\tau/h + 1$  e  $h$  é o passo de integração. Esse conjunto de  $N+1$  EDOs de primeira ordem pode, então, ser numericamente integrado utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem. Além disso, dado que o sistema consiste em um sistema não-autônomo, a estabilidade é avaliada a partir do cálculo do maior expoente de Lyapunov. Neste

trabalho, o expoente é calculado a partir de um algoritmo baseado no proposto por Wolf *et al.* (1985).

Incluindo as equações de movimento do sistema, apresentadas na equação (4.26), e suas linearizações, um conjunto de  $(N+2)^2 + (N+2)$  EDOs é obtido para implementação do algoritmo de Wolf *et al.* (1985). Esse sistema é bastante grande e o cálculo de todos os expoente de Lyapunov seria um procedimento computacionalmente caro e bastante demorado. No entanto, é possível realizar o cálculo apenas do maior expoente de Lyapunov considerando-se um conjunto de  $(N+2)$  EDOs e adaptando-se o algoritmo de Wolf *et al.* (1985). Além disso, é importante ressaltar que a trajetória da OPI associada ao sistema original  $(\phi, \dot{\phi})$  é substituída pela série temporal que representa a órbita, obtida na identificação da mesma.

De forma a verificar a capacidade dos métodos por realimentação de estabilizar a OPI desejada, o maior expoente de Lyapunov da órbita é calculado para diferentes valores dos parâmetros do controlador. Em princípio, a estabilização da órbita escolhida pode ser alcançada para parâmetros do controlador relacionados a valores negativos do expoente. Além disso, a escolha dos valores dos parâmetros deve ser realizada de forma que o expoente de Lyapunov máximo esteja próximo de seu valor mínimo, o que segundo Pyragas (1995) fornece uma taxa de convergência maior das órbitas próximas para a OPI desejada e torna o método mais robusto na presença de ruído.

O cálculo do expoente de Lyapunov máximo é realizado a partir das equações de movimento do sistema. Com isso, tem-se uma questão bastante relevante no caso dos métodos contínuos, que é a necessidade do conhecimento das equações que governam a dinâmica do sistema para determinar os parâmetros do controlador, diferente do que ocorre no caso dos métodos discretos e semi-contínuos.

#### 4.3.2 Métodos por realimentação

O método ETDF é equivalente ao TDF quando  $R=0$ . Desta forma, a análise desses dois métodos é feita de forma semelhante e neste mesmo item. Quando houver referência ao método ETDF com  $R=0$  está implícito que se trata do TDF.

Simulações numéricas do pêndulo não-linear são realizadas objetivando-se verificar a capacidade dos métodos TDF e ETDF de estabilizar as OPIs escolhidas utilizando-se o 1º parâmetro de controle. A seguir são apresentados os valores dos expoentes de Lyapunov máximos para algumas OPIs escolhidas assim como os

resultados de suas estabilizações. Nesta primeira análise não é realizada nenhuma restrição ao controlador, nem no que diz respeito à atuações máximas permitidas.

Inicialmente, a OPI de período-1 identificada é analisada. A Figura 4.19 mostra essa órbita no espaço de fase, assim como os valores dos expoentes de Lyapunov máximos obtidos para diferentes valores de  $R$  e  $K$ . Esta análise indica que a estabilização desta órbita pode ser alcançada para todos os valores de  $R$  avaliados, inclusive para  $R=0$ , que consiste no método TDF. Este resultado é coerente dada a baixa periodicidade da OPI.

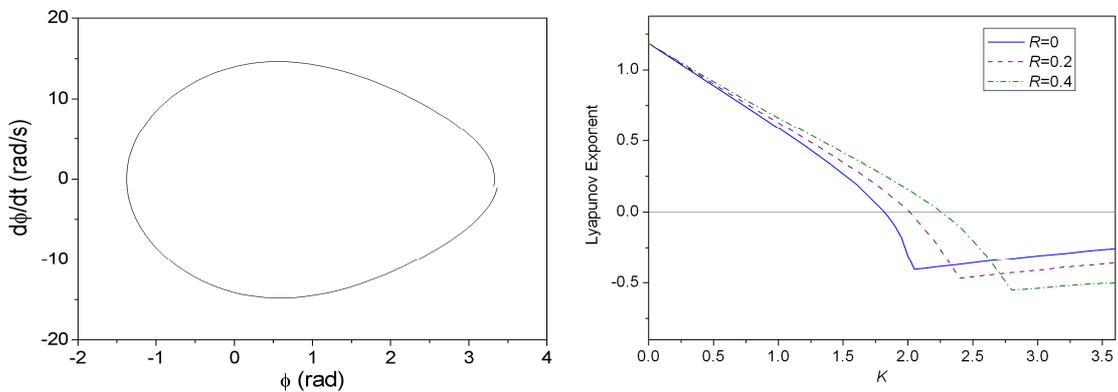


Figura 4.19: OPI de período 1: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador.

A estabilização do sistema é alcançada a partir da escolha de parâmetros do controlador associados a um expoente de Lyapunov máximo negativo. Dois conjuntos de parâmetros são considerados de forma a estabilizar a OPI de período 1. A Figura 4.20 apresenta o espaço de fase do sistema em regime permanente, a posição ao longo do tempo, assim como a perturbação realizada considerando-se  $R=0$  e  $K=2.1$ , para esses valores o expoente de Lyapunov máximo está próximo ao seu valor mínimo para  $R=0$ . A Figura 4.21 apresenta os mesmos resultados para  $R=0.2$  e  $K=2.4$ . Deve-se observar que os dois conjuntos de parâmetros escolhidos permitem a estabilização da órbita com sucesso. Cabe ressaltar que para a estabilização da órbita de período-1 utiliza-se o valor de  $\tau$  correspondente à periodicidade 1.

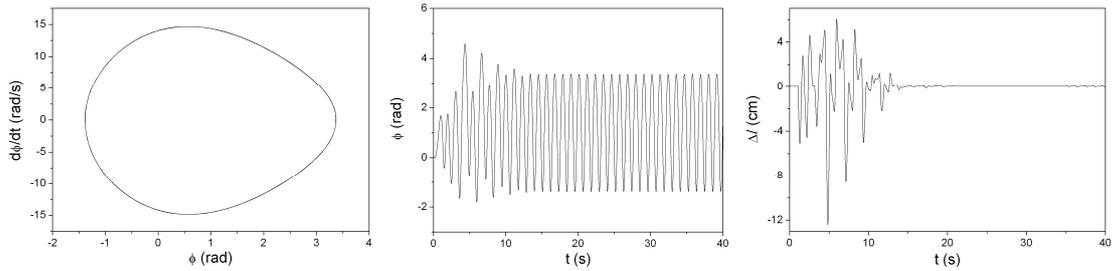


Figura 4.20: OPI de período 1 estabilizada com  $R = 0$  e  $K = 2.1$ :

(a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta I_1(t)$ .

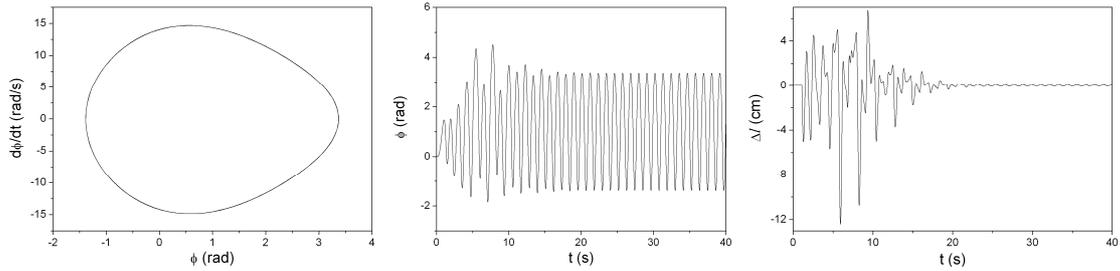


Figura 4.21: OPI de período 1 estabilizada com  $R = 0.2$  e  $K = 2.4$ :

(a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta I_1(t)$ .

Agora considera-se uma OPI de período-2 apresentada na Figura 4.22 no espaço de fase juntamente com os valores dos expoentes de Lyapunov máximos para diferentes valores de  $R$  e  $K$ . Neste caso, a estabilização da órbita não pode ser alcançada com  $R=0$ , uma vez que não há valores negativos para o expoente de Lyapunov máximo associados a esse valor de parâmetro. Este resultado mostra a importância de incluir o parâmetro  $R$ , método ETDF, na lei de controle.

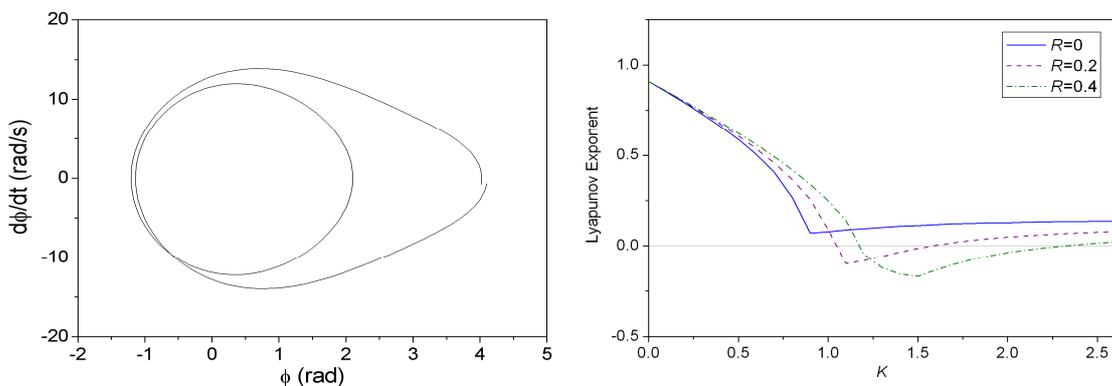


Figura 4.22: OPI de período 2: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador.

Novamente, a estabilização do sistema é realizada a partir da escolha de parâmetros do controlador associados a um expoente de Lyapunov máximo negativo. A Figura 4.23 apresenta o espaço de fase do sistema em regime permanente, a posição ao longo do tempo, assim como a perturbação realizada considerando-se  $R=0.2$ ,  $K=1.1$  e um valor de  $\tau$  correspondente à periodicidade de 2. Com essa escolha, o valor do expoente de Lyapunov máximo está próximo ao mínimo obtido para a OPI analisada, permitindo a estabilização da mesma.

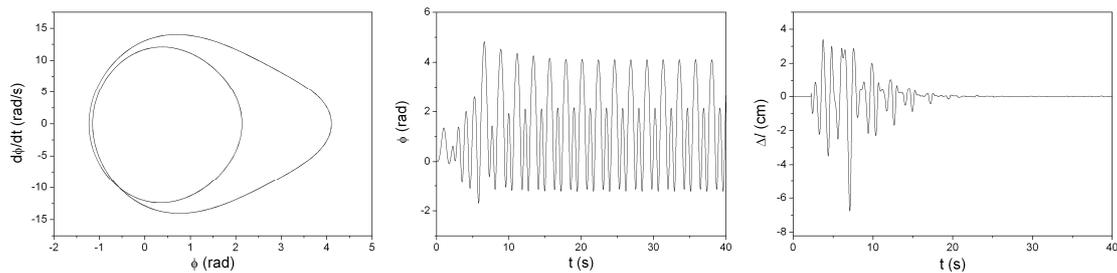


Figura 4.23: OPI de período 2 estabilizada com  $R = 0.2$  e  $K = 1.1$ :

(a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta l_1(t)$ .

Seguindo a análise, considera-se uma OPI de período-3 apresentada na Figura 4.24 no espaço de fase juntamente com os valores dos expoentes de Lyapunov máximos para diferentes valores de  $R$  e  $K$ . Novamente, obtêm-se regiões associadas a expoentes de Lyapunov máximos negativos que permitem a estabilização da órbita. A Figura 4.25 apresenta o espaço de fase do sistema em regime permanente, a posição ao longo do tempo, assim como a perturbação realizada considerando-se  $R=0.2$ ,  $K=0.7$  e um valor de  $\tau$  correspondente à periodicidade de 3.

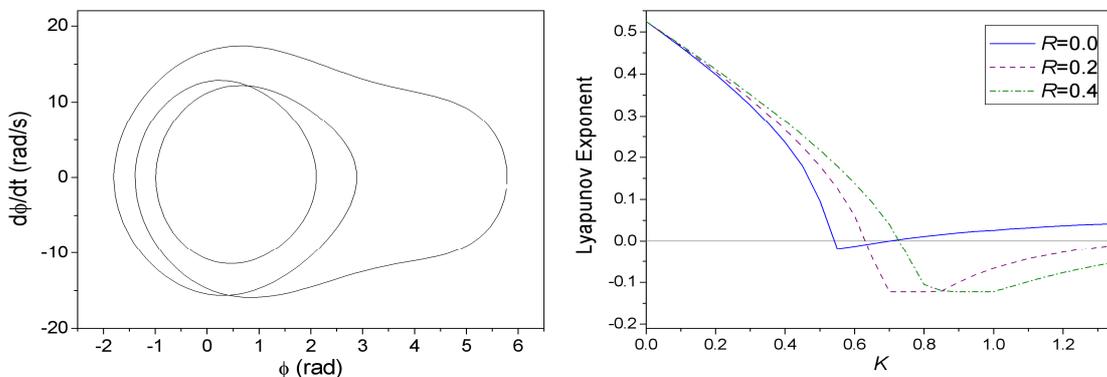


Figura 4.24: OPI de período 3: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador.

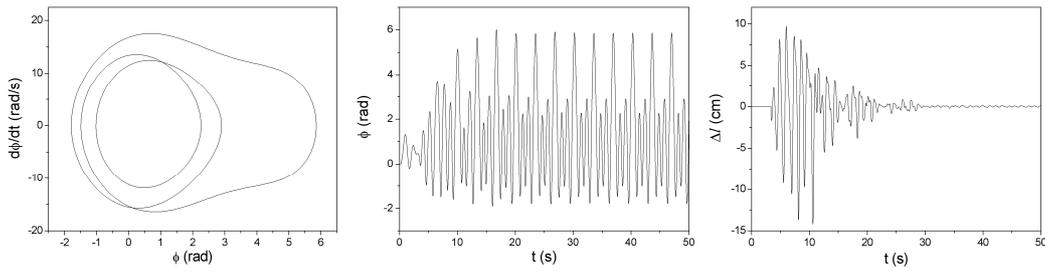


Figura 4.25: OPI de período 3 estabilizada com  $R = 0.2$  e  $K = 0.7$ :

(a) Espaço de fase; (b)  $\phi(t)$ ; e (c)  $\Delta I_1(t)$ .

Por último, considera-se uma órbita de periodicidade maior, uma OPI de período 6. A Figura 4.26 apresenta a órbita no espaço de fase assim como os valores dos expoentes de Lyapunov máximos para diferentes valores de  $R$  e  $K$ . Essa análise mostra que a estabilização da OPI pode ser obtida apenas para uma pequena faixa de valores de  $K$  com  $R = 0.4$  e para uma faixa maior no caso de  $R = 0.8$ .

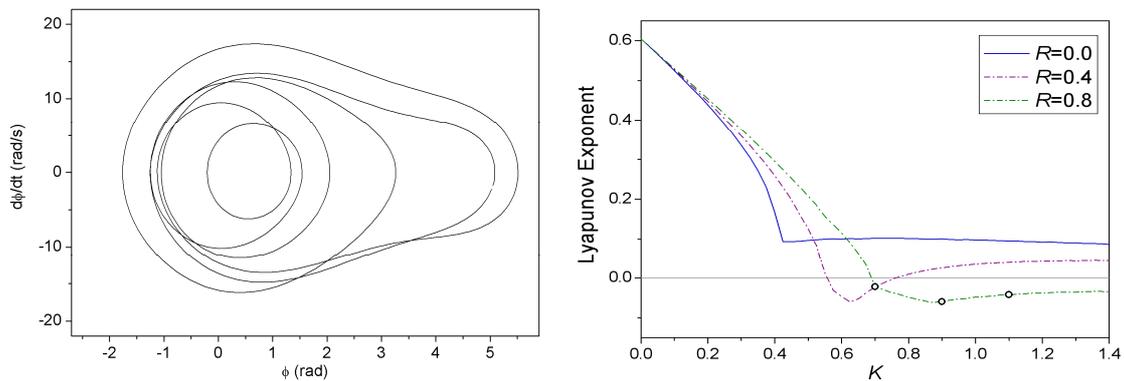


Figura 4.26: OPI de período 6: (a) Espaço de fase; e (b) Expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros do controlador.

Dentro das regiões que apresentam valores de expoentes de Lyapunov máximos negativos, três conjuntos de valores de parâmetros do controlador são escolhidos. A Figura 4.27 apresenta o espaço de fase do sistema em regime permanente para  $R=0.8$  e diferentes valores de  $K$ . Para este valor de  $R$ , o valor mínimo do expoente ocorre em torno de  $K=0.9$ , e considerando-se esse valor, uma OPI de período 3 é estabilizada, a mesma apresentada na Figura 4.25. Mudando-se o valor de  $K$  para  $K=0.7$ , obtém-se a estabilização da OPI de período 6 escolhida. Realizando-se uma nova variação de  $K$  para  $K=1.1$ , estabiliza-se uma OPI de período 2, similar à apresentada na Figura 4.23.

Pode-se perceber que as órbitas estabilizadas, diferentes da OPI de período 6 selecionada, possuem como periodicidade valores submúltiplos da periodicidade da órbita escolhida. Cabe ressaltar que para a análise apresentada na Figura 4.27 utiliza-se um valor de  $\tau$  correspondente à periodicidade 6.

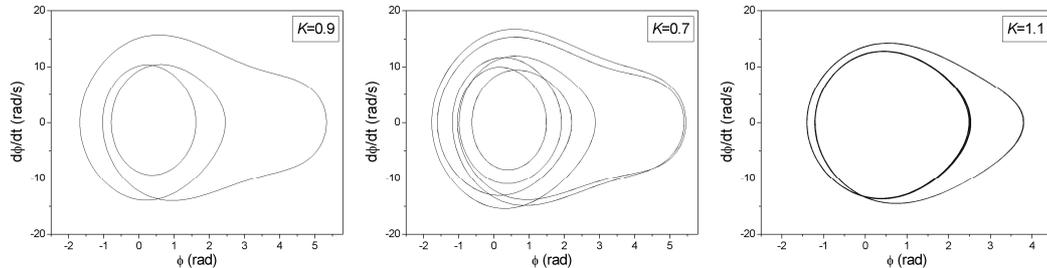


Figura 4.27: Espaço de fase do sistema em regime permanente para  $R=0.8$  e diferentes valores de  $K$ .

Embora seja possível estabilizar a OPI de período 6 selecionada, outras órbitas diferentes desta podem ser estabilizadas dependendo da escolha dos parâmetros do controlador, como mostrado na Figura 4.27. Essa análise mostra a dificuldade de estabilizar OPIs de periodicidade alta mesmo a partir do emprego de procedimentos adequados para a escolha dos parâmetros do controlador, como verificado por De Paula & Savi (2009a).

A ideia dos métodos por realimentação é modificar o sistema sutilmente, de forma que a OPI de interesse se torne estável. Desta forma, os valores de  $K$  não podem ser muito altos. Para valores de  $K$  muito altos, o sistema deixa de responder caoticamente. No entanto, as respostas periódicas que aparecem não estão associadas a OPIs do sistema e as perturbações realizadas não são mais pequenas. A Figura 4.28 apresenta o espaço de fase do sistema em regime permanente para  $R=0.8$ ,  $K=3$  e  $\tau = 2\pi/\omega$ , ou seja,  $\tau$  corresponde à periodicidade 1. A resposta apresentada consiste em um movimento periódico, no entanto, esta órbita de período-1 não foi identificada como OPI do sistema.

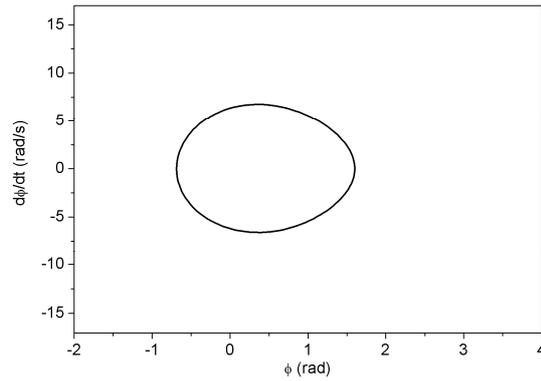


Figura 4.28: Espaço de fase do sistema em regime permanente para  $R=0.8$  e  $K=3.0$ .

Além disso, mesmo para valores de  $K$  não muito elevados, a órbita estabilizada pode ser um pouco diferente da identificada. Isto ocorre porque o controlador modifica o sistema, mesmo que pouco. Essa diferença aparece entre a OPI de período 3 identificada e a estabilizada com  $R=0.8$  e  $K=0.9$ , assim como entre a OPI de período 6 identificada e a estabilizada com  $R=0.8$  e  $K=0.7$ , como apresentado na Figura 4.29. Cabe ressaltar que essa diferença pode não ocorrer, dependendo dos valores dos parâmetros de controle.

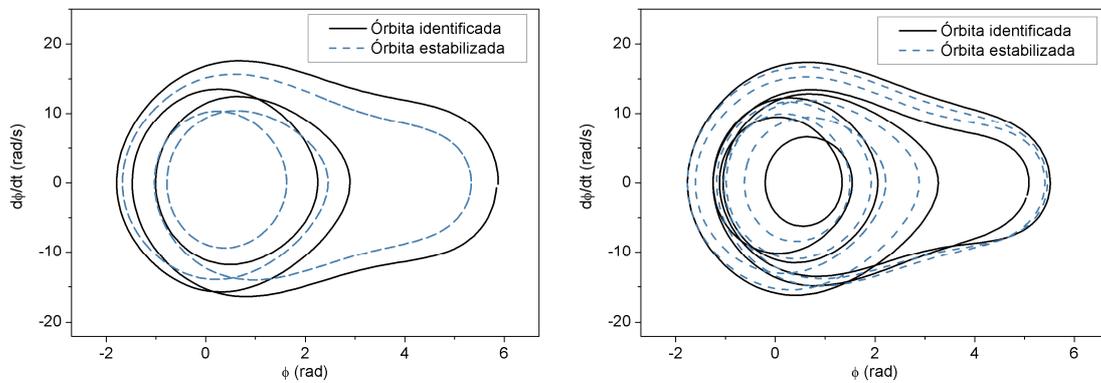


Figura 4.29: OPIs identificadas e estabilizadas: (a) Período 3; e (b) Período 6.

## 5 ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE CONTROLE

A partir dos resultados obtidos no capítulo anterior, dos métodos de controle abordados, tem-se que 3 apresentaram indicativos para um bom desempenho na estabilização do sistema analisado: o OGY-SC; o OGY-SC multiparâmetros, abordagens acoplada e desacoplada; e o ETDF. Neste capítulo, estas estratégias de controle são aplicadas ao pêndulo não-linear, a partir da utilização de regras de controle, de forma a comparar seus desempenhos.

Além disso, tem-se que dados experimentais são invariavelmente contaminados com alguma intensidade de ruído. Estes ruídos representam a parte não desejada do sinal estudado. E, tratando-se de sistemas caóticos, a presença de ruídos prejudica a extração de informações quantitativas sobre a dinâmica do sistema, tais como a dimensão do atrator e os expoentes de Lyapunov, além de obscurecerem a estrutura fractal do atrator (Kostelich e Schreiber, 1993). Kantz e Schreiber (1997) fazem um resumo acerca dos efeitos da presença de ruídos na análise de séries temporais caóticas.

Uma questão importante na implementação de qualquer método de controle é a análise de sua robustez em relação à presença de ruídos. Assim, é necessária uma análise prévia dos possíveis efeitos decorrentes desta contaminação no desempenho do controlador. No controle de sistemas em regime caótico esta robustez é ainda mais crítica devido à sensibilidade do sistema a pequenas perturbações, o que faz com que pequenos erros tenham um crescimento exponencial.

No caso dos métodos que utilizam a equação de movimento para estimar parâmetros do controlador, outra questão bastante relevante é a análise de robustez considerando-se imprecisões na modelagem do sistema.

Neste capítulo, o desempenho dos métodos de controle é comparado em três etapas. Na primeira, considera-se ausência de ruído; em seguida, considera-se que o sistema está sujeito a um ruído de observação; e, por último, considera-se imprecisões na modelagem do sistema, expressas a partir de incertezas no conhecimento do amortecimento presente.

## 5.1 Análise da Estabilização do Sistema na Ausência de Ruído

Nesta primeira etapa da análise comparativa, de modo a explorar a possibilidade de alternar o comportamento do pêndulo através da estabilização de OPIs e de comparar o desempenho dos métodos OGY-SC, OGY-SC multiparâmetros abordagens acoplada e desacoplada, e ETDF na ausência de ruídos, define-se uma regra de controle. Nesta regra, busca-se estabilizar uma órbita de período-5 nos primeiros 500 períodos de forçamento, uma de período-3 entre 500 e 1000 períodos de forçamento, uma de período-8 entre 1000 e 1500 e finalmente a de período-1, entre 1500 e 2000 períodos de forçamento. A Figura 5.1 apresenta estas 4 órbitas escolhidas nas seções de controle, consideradas pelos métodos semi-contínuos, enquanto a Figura 5.2 apresenta as OPIs no espaço de fase.

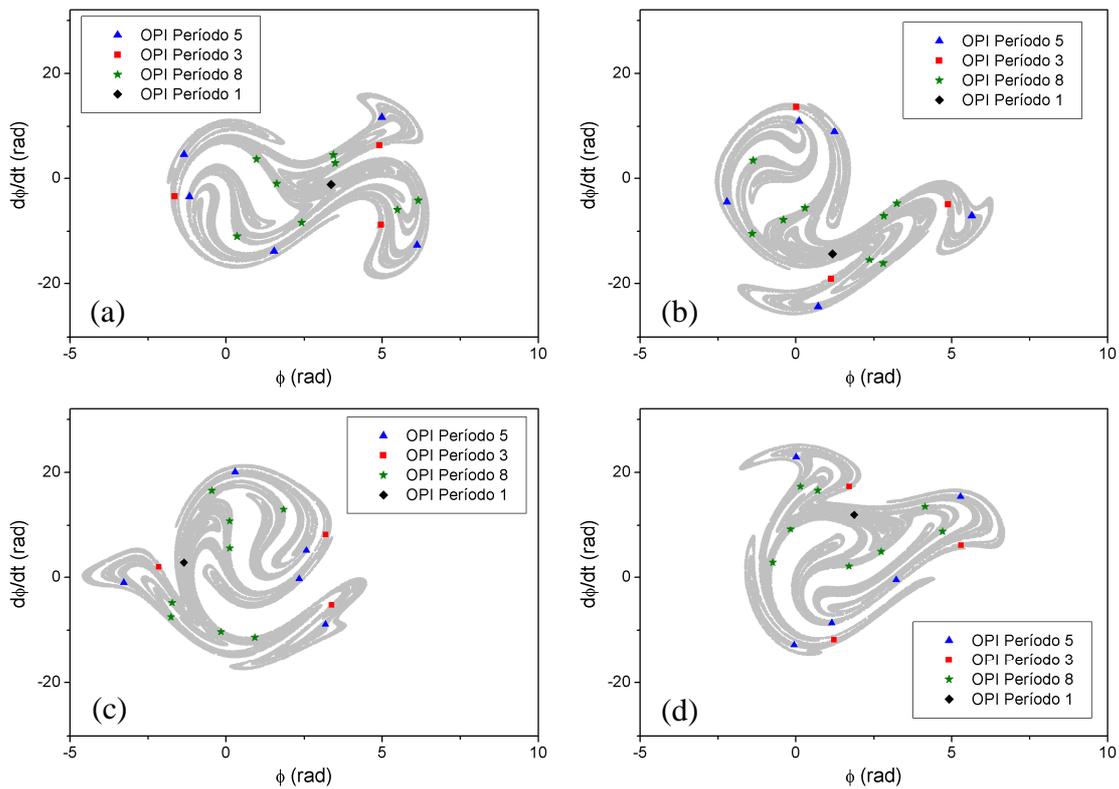


Figura 5.1: OPIs da regra de controle. a) S1 ; b) S2; c) S3 ; d) S4.

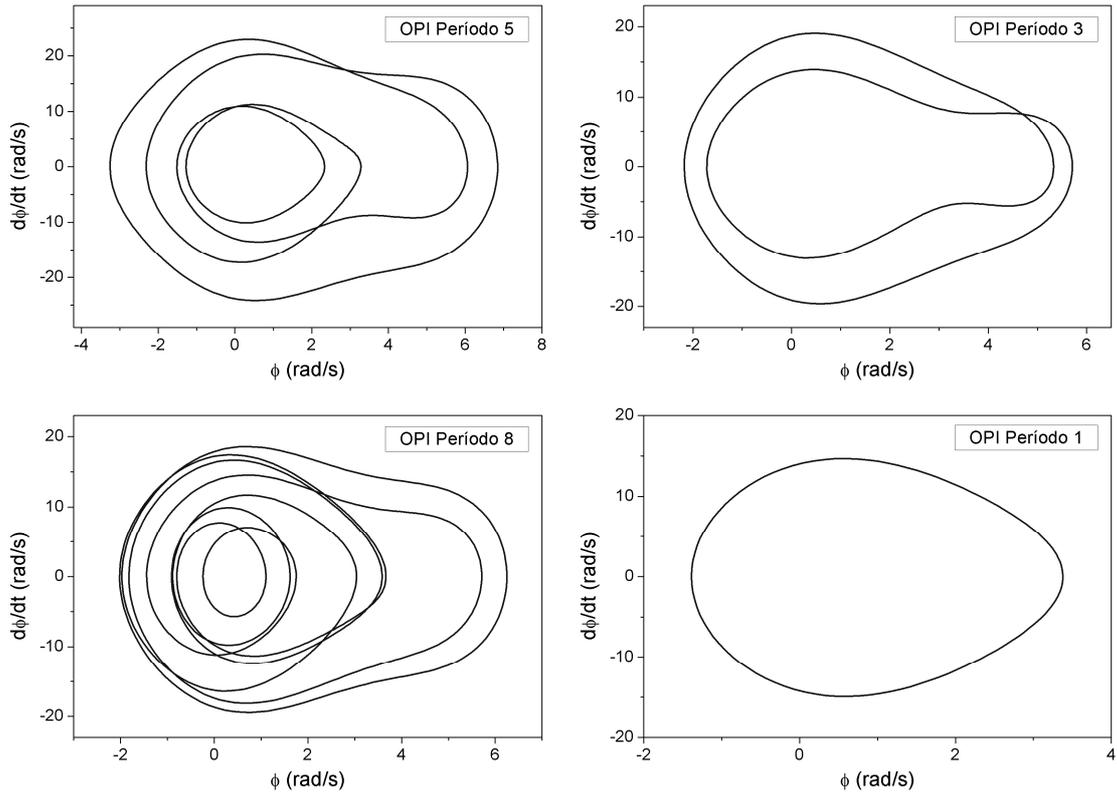


Figura 5.2: Espaço de fase das OPIs a serem estabilizadas.

Inicialmente, considera-se o controle baseado no método OGY-SC utilizando-se somente o 1º parâmetro de controle. A Figura 5.3 (a) apresenta a trajetória desejada, imposta pela regra de controle, assim como a evolução do sistema no tempo na S1, enquanto a Figura 5.3 (b) mostra o comportamento do atuador nesta mesma seção durante a fase de controle. Neste procedimento foram consideradas 4 seções de controle e uma atuação máxima do controlador de  $|\Delta l_{m\acute{a}x}| = 1.5 \text{ cm}$ , como realizado no capítulo anterior.

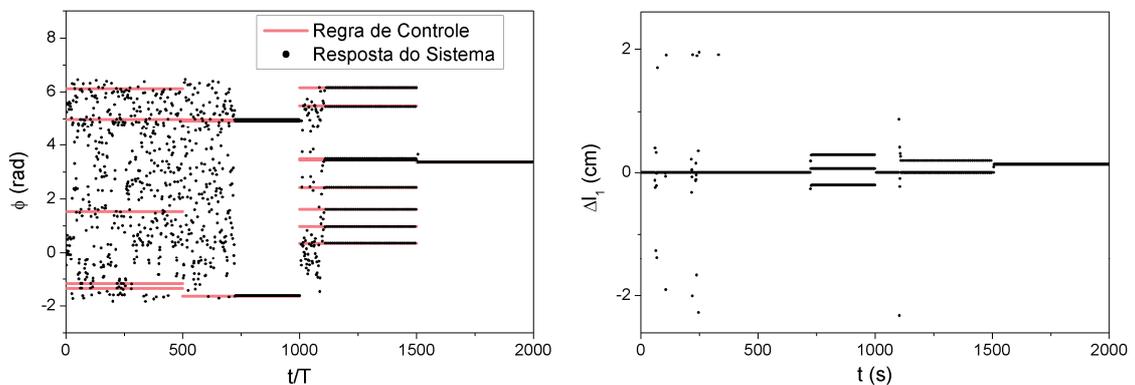


Figura 5.3: Sistema controlado a partir do Método SC com o 1º parâmetro de controle: (a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.

Como pode ser observado a partir da Figura 5.3, o método SC utilizando o 1º parâmetro de controle não é capaz de estabilizar a primeira órbita da regra, sendo as demais OPIs estabilizadas com sucesso. Além disso, pode-se observar uma região considerável de comportamento caótico antes da estabilização da segunda órbita, que corresponde ao tempo que a trajetória do sistema demora para entrar na vizinhança de algum dos pontos de controle.

Agora, o método SC utiliza apenas o segundo parâmetro de controle para estabilizar as OPI's. A Figura 5.4 (a) apresenta a trajetória desejada, assim como a evolução do sistema no tempo na S1, enquanto a Figura 5.4 (b) mostra o comportamento do atuador nesta mesma seção durante a fase de controle. Neste procedimento foram consideradas 4 seções de controle e uma atuação máxima do controlador de  $|\Delta l_{2m\acute{a}x}| = 2.5 \text{ cm}$ , como realizado no capítulo anterior.

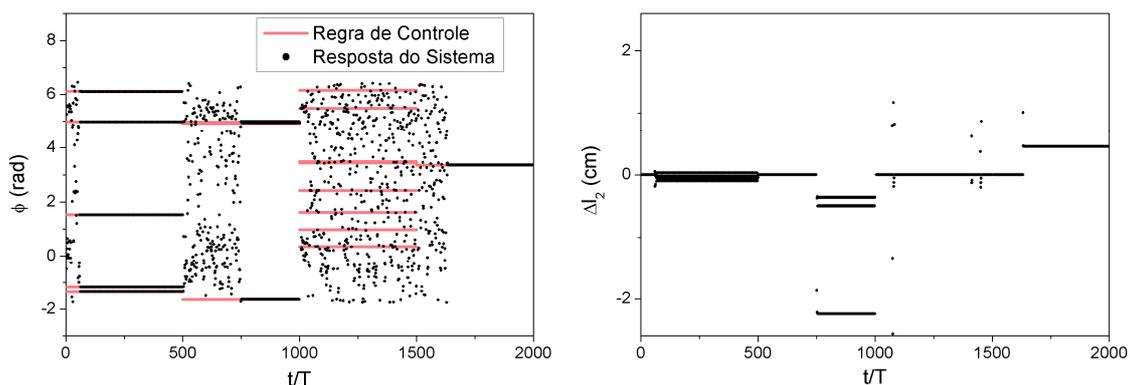


Figura 5.4: Sistema controlado a partir do Método SC com o 2º parâmetro de controle: (a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.

Como no método SC com o 1º parâmetro de controle, utilizando-se o 2º parâmetro de controle não é possível estabilizar uma das órbitas da regra, neste caso, a de periodicidade 8. As demais OPIs são estabilizadas com sucesso. Novamente, pode-se observar uma região considerável de comportamento caótico antes da estabilização da segunda OPI da regra.

A seguir, o método SC multiparâmetros acoplado considerando os dois parâmetros de controle do pêndulo não-linear é apresentado. As Figura 5.5 e Figura 5.6 (a) apresentam a trajetória desejada, imposta pela regra de controle, assim como a evolução do sistema no tempo na S1 e na S2, respectivamente, enquanto as Figura 5.5 e Figura 5.6 (b) mostram o comportamento dos parâmetros de controle nestas mesmas

seções durante a fase de controle. Neste procedimento, foram consideradas novamente 4 seções de controle e atuações máximas permitidas para os controladores de  $|\Delta l_{1máx}| = 0.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 1.0 \text{ cm}$ , menores que as consideradas no capítulo anterior.

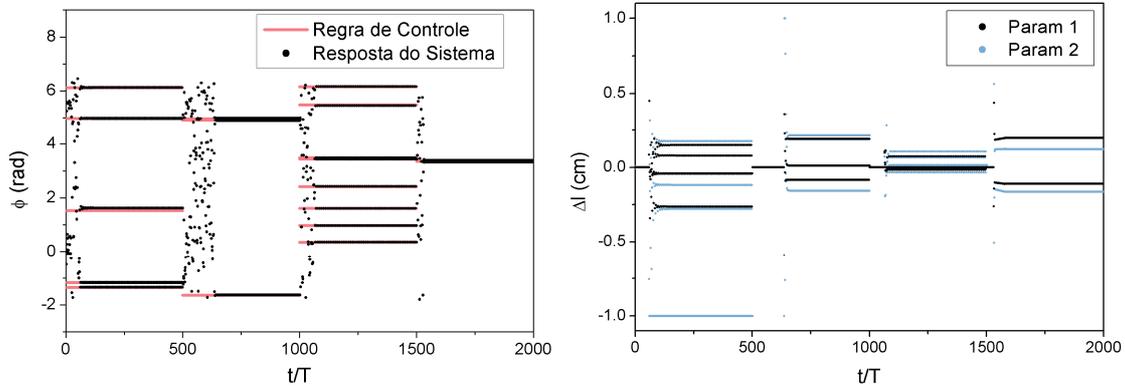


Figura 5.5: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Acoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.

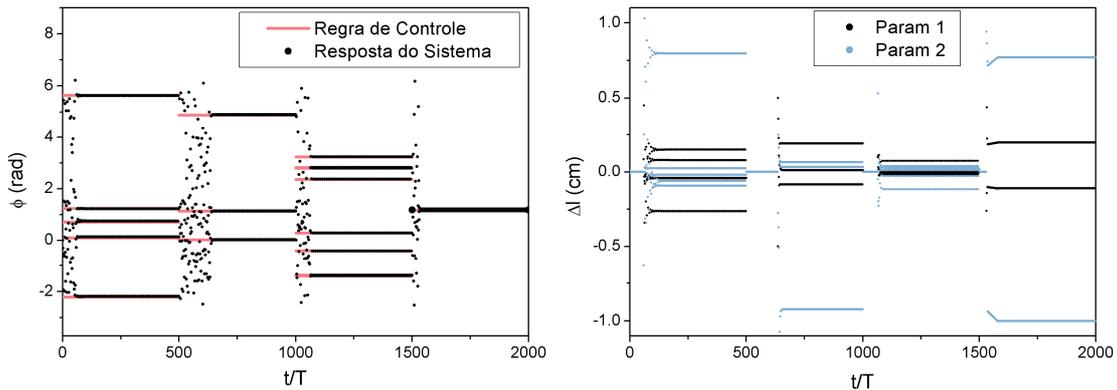


Figura 5.6: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Acoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S2; e (b) Perturbação na S2.

Empregando-se o método SC multiparâmetros acoplado com dois parâmetros de controle todas as órbitas da regra de controle são estabilizadas com sucesso, como mostrado na Figura 5.5 e na Figura 5.6.

Seguindo a análise, o método SC multiparâmetros desacoplados é empregado. A Figura 5.7 e a Figura 5.8 (a) apresentam a trajetória desejada assim como a evolução do sistema no tempo na S1 e na S2, respectivamente, enquanto a Figura 5.7 e a Figura 5.8 (b) mostram o comportamento dos parâmetros de controle nestas mesmas seções durante a fase de controle. Neste procedimento foram consideradas 4 seções de controle

e atuações máximas dos controladores de  $|\Delta I_{1máx}| = 0.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta I_{2máx}| = 1.0 \text{ cm}$ , como realizado no emprego da abordagem acoplada para a regra de controle.

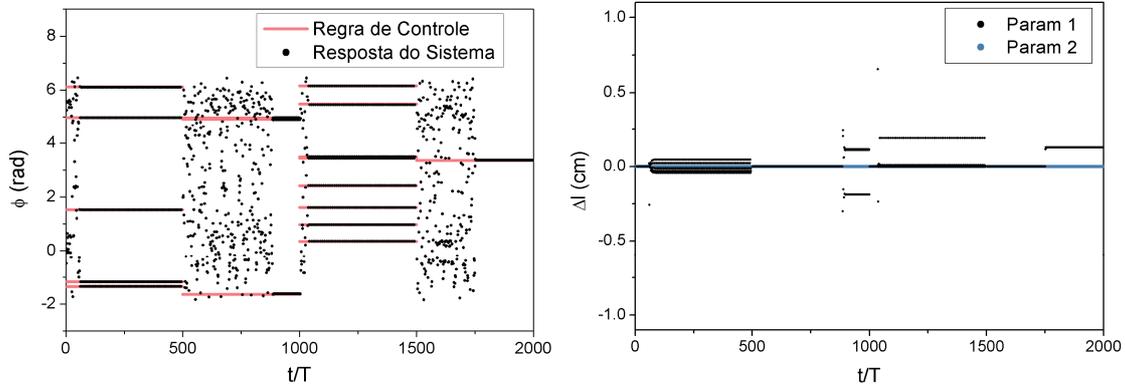


Figura 5.7: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Desacoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.

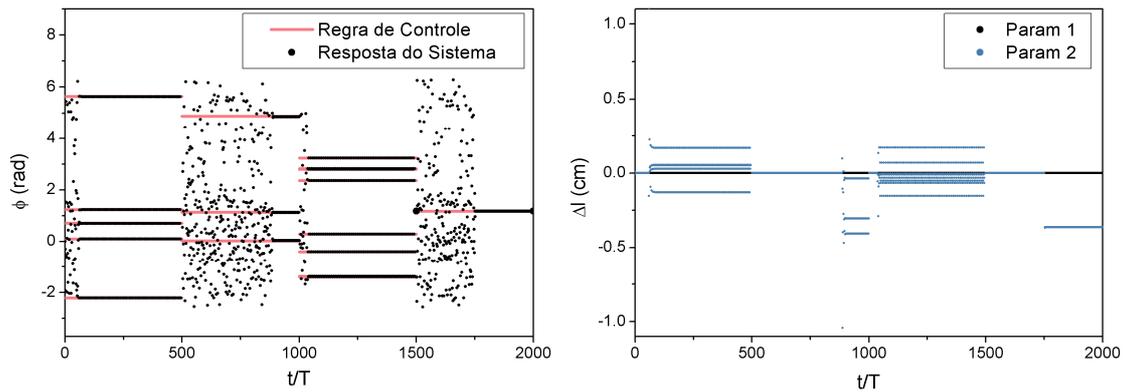


Figura 5.8: Sistema controlado a partir do Método SC Multiparâmetros Desacoplado: (a) Posições do sistema e desejada na S2; e (b) Perturbação na S2.

Como no emprego método SC multiparâmetros acoplado, na abordagem desacoplada todas as órbitas da regra de controle são estabilizadas com sucesso, como mostrado na Figura 5.7 e a Figura 5.8. Além disso, pode-se observar uma grande região de comportamento caótico antes da estabilização da 2ª órbita, assim como antes da estabilização da última órbita da regra de controle. Novamente, essas regiões correspondem ao tempo em que a trajetória do sistema leva para entrar na vizinhança de um dos pontos de controle.

Finalmente, o método por realimentação com estados defasados estendidos é empregado utilizando-se o 1º parâmetro de controle. Neste procedimento não são mais consideradas seções de controle, as atuações são realizadas a cada passo de integração tendo em vista que o método de controle é contínuo e não mais discreto, como os

analisados anteriormente neste capítulo. Os resultados, no entanto, são apresentados nas seções de controle de forma a comparar com os demais métodos empregados na análise comparativa. A Figura 5.9 e a Figura 5.10 (a) apresentam a trajetória desejada, imposta pela regra de controle, assim como a evolução do sistema no tempo na S1 e na S2, respectivamente, enquanto a Figura 5.9 e a Figura 5.10 (b) mostram o comportamento dos parâmetros de controle nestas mesmas seções durante a fase de controle. Além disso, diferentemente do capítulo anterior, agora considera-se uma atuação máxima permitida para o controlador de  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$ .

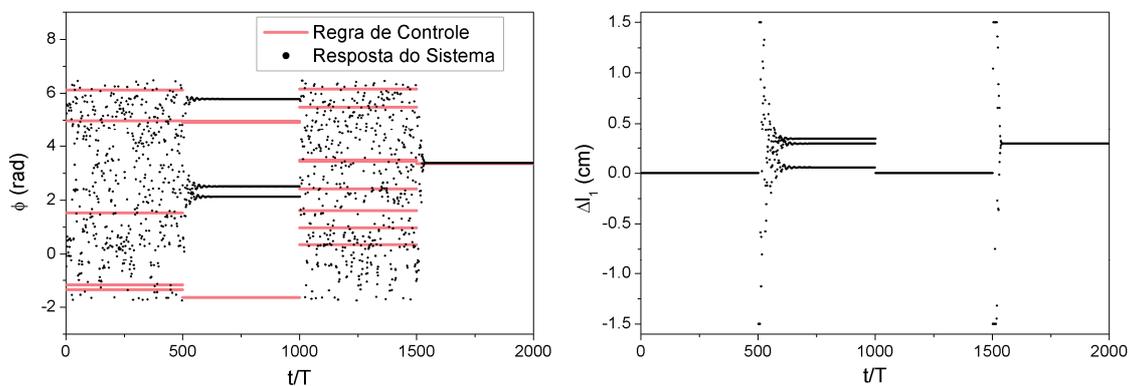


Figura 5.9: Sistema controlado a partir do método ETDf:  
(a) Posições do sistema e desejada na S1; e (b) Perturbação na S1.

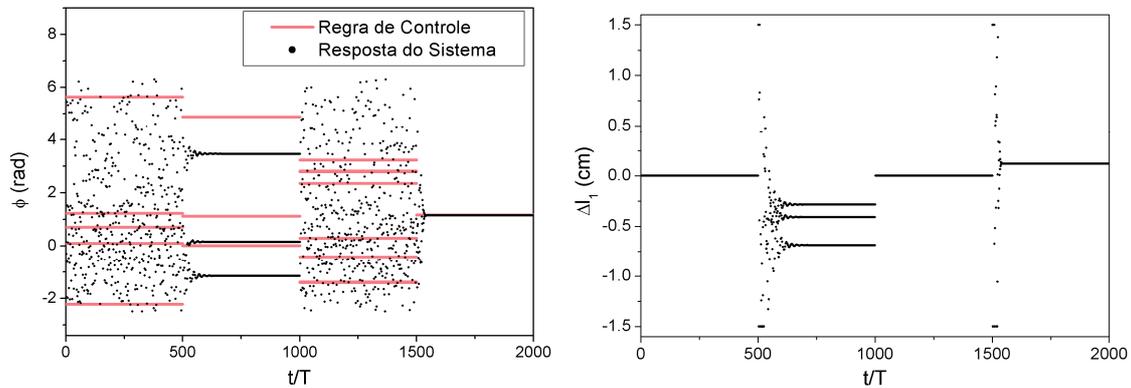


Figura 5.10: Sistema controlado a partir do método ETDf:  
(a) Posições do sistema e desejada na S2; e (b) Perturbação na S2.

Como pode ser observado a partir da Figura 5.9 e da Figura 5.10, na segunda órbita da regra de controle uma OPI de periodicidade 3 é estabilizada, no entanto, esta órbita é diferente da desejada. A partir da posição do pêndulo na S1 apenas dois pontos fixos são visualizados na região relacionada à estabilização da OPI de período-3. Na realidade existem 3 pontos fixos, no entanto, considerando-se apenas a posição, dois

desses pontos estão próximos e não são distinguidos a partir da Figura 5.9. A Figura 5.11 apresenta a OPI estabilizada pelo procedimento empregado, assim como a órbita da regra de controle no espaço de fase, ambas de periodicidade igual a 3.

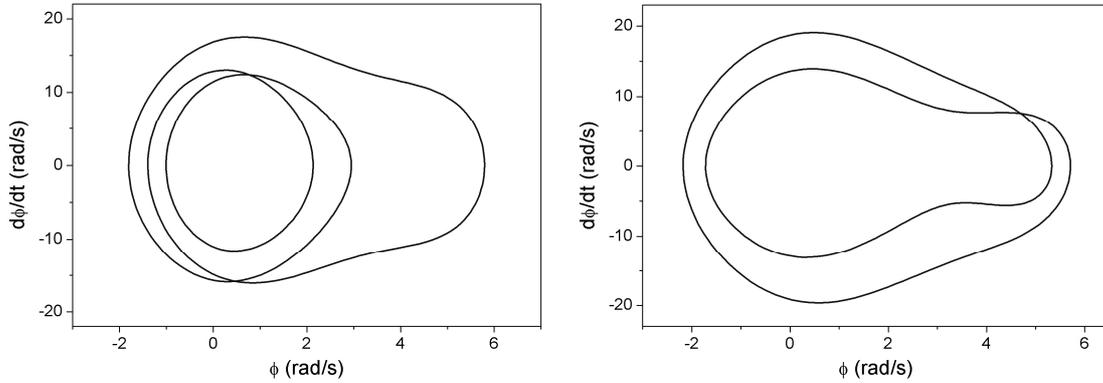


Figura 5.11: OPI's de período 3: (a) Estabilizada pelo ETDF; e (b) Da regra de controle.

A estabilização da órbita errada pode ser explicada pelos valores dos expoentes de Lyapunov máximos dessas duas órbitas. Embora a OPI de período 3 da regra de controle possua uma região em que o expoente de Lyapunov máximo é negativo, esta região é pequena e os valores são maiores quando comparados com os correspondentes da OPI de período 3 estabilizada, como mostrado na Figura 5.12.

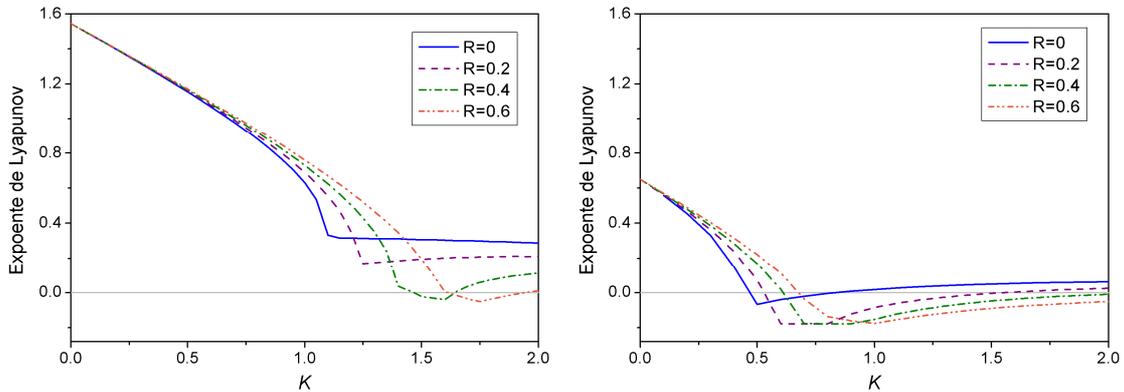


Figura 5.12: Expoentes de Lyapunov máximos para valores de  $R$  e  $K$ :  
(a) OPI de período 3 da regra de controle; e (b) OPI de período 3 estabilizada.

Para a primeira e a terceira órbitas da regra de controle não foi encontrada nenhuma região em que todos os seus expoentes de Lyapunov fossem negativos, como apresentado na Figura 5.13. Desta forma, não é possível estabilizar estas OPIs pelo

método ETDF e os parâmetros de controle,  $R$  e  $K$ , foram considerados nulos nas regiões da regra de controle correspondentes à estabilização destas órbitas.

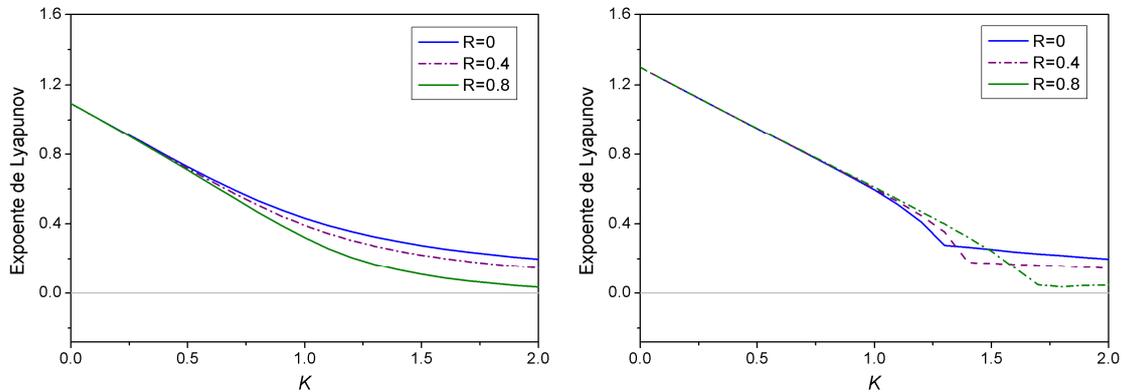


Figura 5.13: Expoentes de Lyapunov máximos para valores de  $R$  e  $K$ :  
(a) OPI de período 5; (b) OPI de período 8.

A partir dos resultados apresentados, pode-se observar que no emprego da regra de controle o método SC com apenas um parâmetro não foi capaz de estabilizar todas as órbitas. Nos dois casos, um para cada parâmetro de controle considerado para o pêndulo não-linear, o controlador só foi capaz de estabilizar três das quatro órbitas escolhidas. A partir de diversas simulações numéricas o método SC com apenas um parâmetro de controle, para os dois atuadores analisados, apresentou uma eficácia em torno 60%, sendo essa eficácia medida pela quantidade das OPIs identificadas que são estabilizadas. Já para o método SC multiparâmetros desacoplado obteve-se uma eficácia em torno de 95%. Finalmente, o método SC multiparâmetros acoplado alcançou uma eficácia de 100% para valores de  $\beta_a$  e  $\beta_p$  adequados. Nesta comparação, consideram-se as mesmas condições: mesma tolerância para a identificação das OPIs, mesma vizinhança para acionamento do controle, mesmas condições iniciais e tempo de duração na fase de controle.

No caso do método ETDF apenas duas órbitas foram estabilizadas no emprego da regra de controle, sendo que apenas uma corresponde realmente a uma órbita desejada. Além disso, de todas as órbitas identificadas no sistema analisado, apenas 4 foram estabilizadas com sucesso por este método, o que corresponde a uma eficácia um pouco inferior a 20%. Neste procedimento, para estabilizar as OPIs, primeiro calculou-se seus expoentes de Lyapunov máximos. As órbitas que não apresentaram regiões com expoentes negativos foram consideradas, de imediato, não-controláveis; caso contrário,

foram escolhidos os parâmetros do controlador associados ao valor mínimo do expoente de Lyapunov máximo e a lei de controle foi empregada com esses valores a fim de alcançar a estabilização na OPI de interesse. Em alguns casos, como ilustrado no emprego da regra de controle, os parâmetros associados ao valor mínimo do expoente de Lyapunov máximo levam a estabilização de órbitas diferentes das analisadas no cálculo do expoente.

Na aplicação de todas as formulações considera-se que, quando a atuação calculada é maior que o valor máximo estipulado para o controlador, este realiza uma perturbação com mesmo sinal do valor calculado, no entanto, com valor absoluto igual ao valor máximo permitido. Com isso, no controle SC com apenas um parâmetro algumas vezes o atuador não consegue estabilizar a órbita em uma primeira tentativa. Em determinados trabalhos apresentados na literatura, a perturbação só é realizada se o valor calculado for menor ou igual ao máximo admitido. Com isso, no caso dos métodos semi-contínuos, a quantidade de órbitas estabilizadas no cálculo da eficácia, que considera uma duração na fase de controle de 2000 períodos, pode ser superior se for considerado um tempo mais longo na fase de controle. No controle SC multiparâmetros, mesmo com valores máximos menores para os atuadores, este fato não ocorre. Nos casos verificados a estabilização foi conseguida sempre na primeira tentativa. No caso do controle ETDF a duração da fase de controle não tem influência sobre a estabilização das órbitas pois neste método não é necessário esperar que o sistema entre na vizinhança do ponto de controle.

Além disso, embora a formulação do controle multiparâmetros desacoplado seja semelhante ao caso com apenas um parâmetro de controle, no caso multiparâmetros as atuações máximas dos atuadores são limitadas a um valor menor. Considerando-se estas limitações máximas menores para o controle SC com apenas um parâmetro, obtém-se uma eficácia menor do que a obtida neste trabalho.

O método SC multiparâmetros acoplado também utiliza valores máximos menores para as atuações dos parâmetros quando comparado ao controle com um parâmetro, igualmente ao caso desacoplado. Neste caso, essa limitação das atuações máximas a valores menores apresenta melhores resultados pelo fato de que a estimativa da jacobiana e, consequentemente, o cálculo das direções estáveis e instáveis, considera os valores de referência dos atuadores. Com isso, se as atuações dos parâmetros se distanciarem muito destes valores de referência, as estimativas realizadas não são mais válidas. Este problema não ocorre no caso desacoplado, pois os atuadores retornam às

suas posições iniciais nas seções seguintes às suas seções de atuação. No caso do controle ETDF a limitação da atuação máxima é dada apenas pela limitação do atuador, não estando relacionado a nenhuma aproximação ou simplificação que faça restrições ao uso deste método.

Os métodos semi-contínuos conferem maior flexibilidade ao sistema, na medida em que mais órbitas podem ser estabilizadas. Além disso, dentre estes métodos, o método SC multiparâmetros acoplado apresentou a melhor eficácia entre todas as formulações apresentadas. No entanto, existe a desvantagem da necessidade de identificar  $\beta_a$  e  $\beta_p$  adequados. O SC multiparâmetros desacoplado apresentou uma eficácia bastante alta e dispensa a identificação destes valores de  $\beta_a$  e  $\beta_p$ .

No método contínuo ETDF as atuações começam assim que se inicia a fase de controle não sendo necessário esperar que a trajetória do sistema entre na vizinhança de um dos pontos de controle, como ocorre nos métodos semi-contínuos. No entanto, o método por realimentação apresentou uma eficácia muito baixa, a menor dentre os métodos analisados. Além disso, apresenta um maior número de atuações, enquanto neste método as atuações são realizadas a cada passo de integração, nos métodos semi-contínuos as perturbações ocorrem apenas nas seções de controle.

## 5.2 Análise da Estabilização do Sistema na Presença de Ruído

Na subseção anterior, os métodos de controle de caos OGY-SC, OGY-SC multiparâmetros abordagens acoplada e desacoplada, e ETDF foram utilizados para estabilizar órbitas periódicas instáveis de um pêndulo não-linear na ausência de ruídos externos e seus desempenhos foram comparados. Nesta etapa da análise, os mesmos métodos são empregados e avaliados quando se tem o sistema contaminado por ruídos. A análise verifica as consequências da presença do ruído na estabilização do sistema a partir do emprego de uma segunda regra de controle. Considera-se ainda o conhecimento prévio das órbitas a serem estabilizadas, pois não é objetivo deste trabalho o estudo de algoritmos específicos para determinação de órbitas periódicas instáveis a partir de séries contaminadas por ruídos. A literatura possui discussões sobre algoritmos para a detecção de órbitas periódica instáveis nessas condições: Pierson e Moss (1995), So *et al.* (1996), Dolan *et al.* (1999) e Dolan (2001).

Sistemas dinâmicos influenciados por ruídos externos,  $\mu_d$  e  $\mu_o$ , podem ser expressos pela equação (5.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) + \mu_d \\ \dot{y} = h(x,t) + \mu_o \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $x$  representa as variáveis de estado,  $y$  representa a resposta observada do sistema e  $f(x,t)$  e  $h(x,t)$  são funções não-lineares. Os processos estocásticos aleatórios  $\mu_d$  e  $\mu_o$  são denominados ruído dinâmico e ruído de observação ou medição, respectivamente. Os ruídos dinâmicos podem ser interpretados como sendo perturbações na dinâmica do sistema, ou seja, o sistema é perturbado aleatoriamente, enquanto que ruídos de observação só possuem influência na observação das variáveis de estado do sistema.

Neste trabalho o ruído é modelado como um ruído branco gaussiano, sendo adicionado à série temporal gerada numericamente, simulando uma contaminação na leitura das variáveis de estado decorrente de problemas na instrumentação do aparato. Desta forma, o ruído não influencia a dinâmica do sistema, sendo portanto caracterizado como ruído de observação.

O nível de ruído presente no sistema pode ser expresso pelo desvio padrão  $\sigma$  da distribuição gaussiana de probabilidade que o caracteriza. Assim, este desvio padrão é parametrizado pelo desvio padrão do sinal ( $\sigma_{\text{sinal}}$ ) da variável de estado na qual o ruído é adicionado. Desta forma, tem-se o nível de ruído,  $\eta$ , expresso pela equação (5.2).

$$\eta(\%) = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{sinal}}} \times 100 \quad (5.2)$$

As séries temporais de posição e de velocidade do pêndulo são obtidas pela integração numérica do modelo matemático. Considera-se que o sinal é amostrado a taxa de  $120\omega/2\pi$  Hz, ou seja, a cada período de forçamento tem-se 120 medidas de posição e velocidade.

A Figura 5.14(a) mostra a seção de Poincaré do sistema ideal, sem a contaminação por ruídos, enquanto a Figura 5.14(b-d) apresenta a mesma seção, construída a partir do sistema contaminado com a adição de ruídos de observação com

diferentes níveis. Pode-se observar que a adição de ruídos ao sistema tende a obscurecer a estrutura fractal do atrator estranho, eliminando suas lamelas.

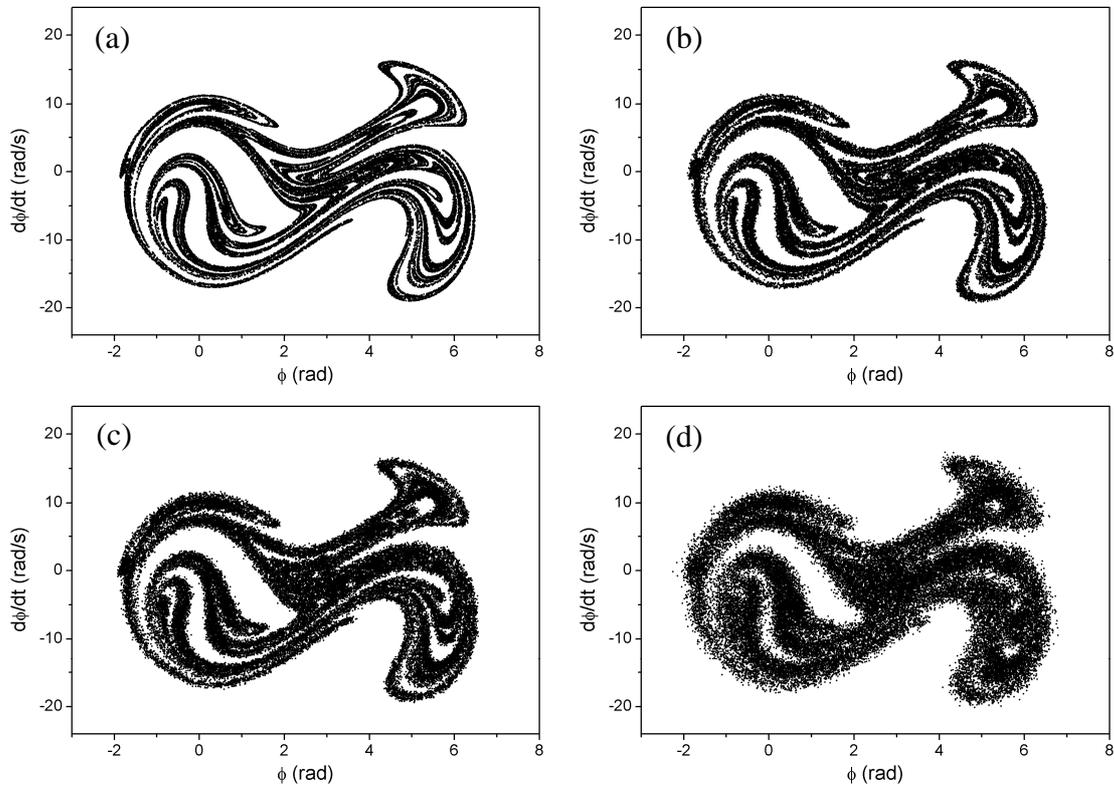


Figura 5.14: Atrator caótico: (a) Sem ruído; (b)  $\eta = 1.0\%$  ; (c)  $\eta = 2.0\%$  ; (d)  $\eta = 5.0\%$  .

Define-se agora uma segunda regra de controle com objetivo de comparar o desempenho dos métodos de controle analisados na presença de ruído de observação. Nesta regra, busca-se estabilizar uma órbita de período-6 nos primeiros 500 períodos de forçamento, uma de período-2 entre 500 e 1000 períodos de forçamento, uma de período-3 entre 1000 e 1500 e finalmente a de período-1, entre 1500 e 2000 períodos de forçamento. Na criação desta regra buscaram-se OPIs que fossem estabilizadas por todos os métodos. O objetivo agora é avaliar o desempenho do método quando o sistema está sujeito a ruído, identificando até que nível de ruído é possível estabilizar as órbitas, e não avaliar qual método é capaz de estabilizar quais órbitas. A Figura 5.15 apresenta estas 4 órbitas escolhidas nas seções de controle, consideradas pelos métodos semi-contínuos, enquanto a Figura 5.16 apresenta as OPIs no espaço de fase.

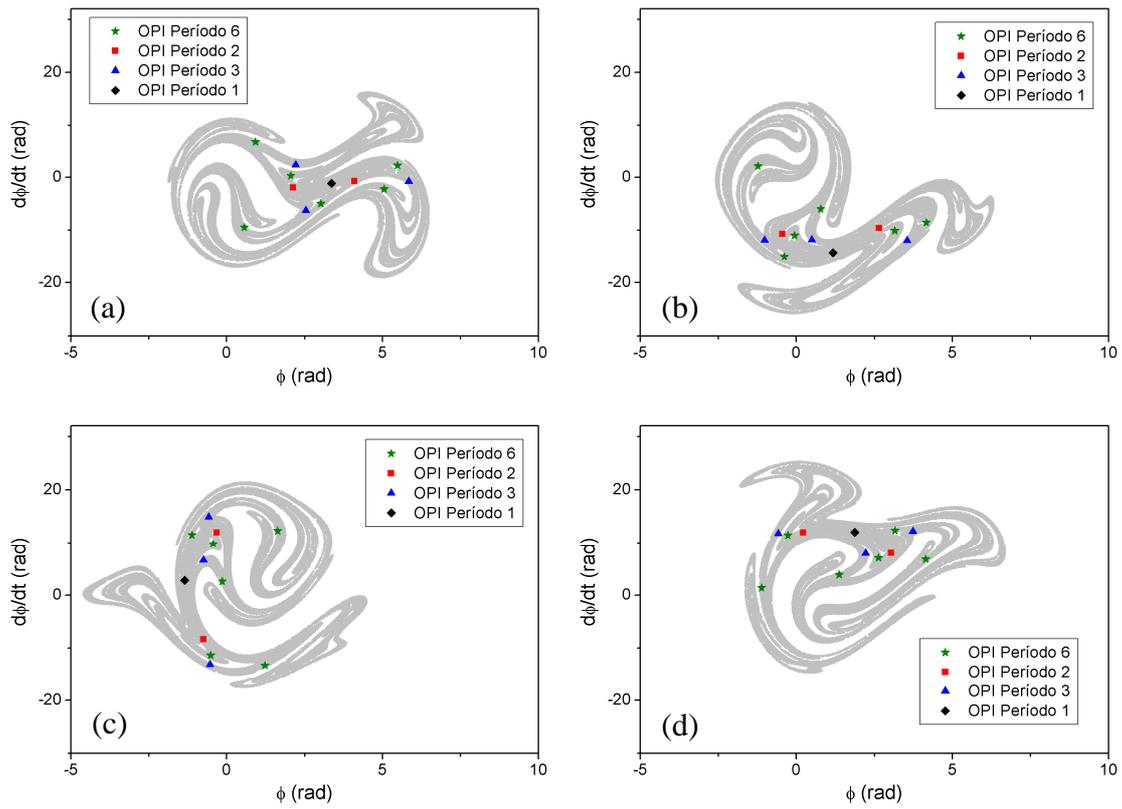


Figura 5.15: OPIs da regra de controle. a) S1 ; b) S2; c) S3; d) S4.

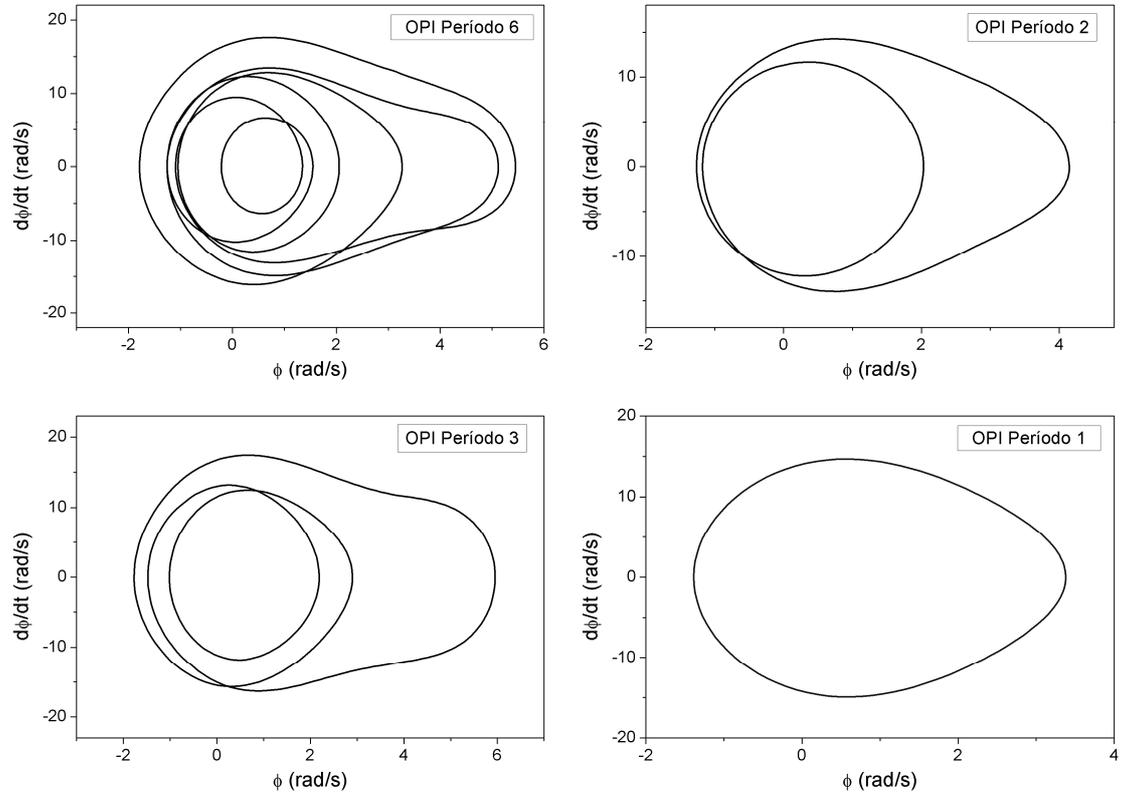


Figura 5.16: Espaço de fase das OPIs da segunda regra de controle.

Inicialmente, considera-se a ausência de ruídos,  $\eta = 0\%$ . A Figura 5.17 apresenta o resultado da estabilização na S1 a partir do emprego do método OGY-SC com os 1º e 2º parâmetros de controle, assim como a trajetória desejada imposta pela regra de controle. A Figura 5.18 apresenta a mesma análise para o método SC multiparâmetros acoplado e desacoplado, enquanto a Figura 5.19 apresenta os resultados a partir do emprego do ETDF. No emprego dos métodos SC com um único parâmetro, do SC multiparâmetros desacoplado e do ETDF consideram-se atuações máximas dos controladores de  $|\Delta I_{1máx}| = 1.5\text{ cm}$  e  $|\Delta I_{2máx}| = 2.5\text{ cm}$ , enquanto no emprego do SC multiparâmetros acoplado consideram-se atuações máximas de  $|\Delta I_{1máx}| = 0.5\text{ cm}$  e  $|\Delta I_{2máx}| = 1.0\text{ cm}$ . Além disso, no caso dos métodos semi-contínuos consideram-se 4 seções de controle.

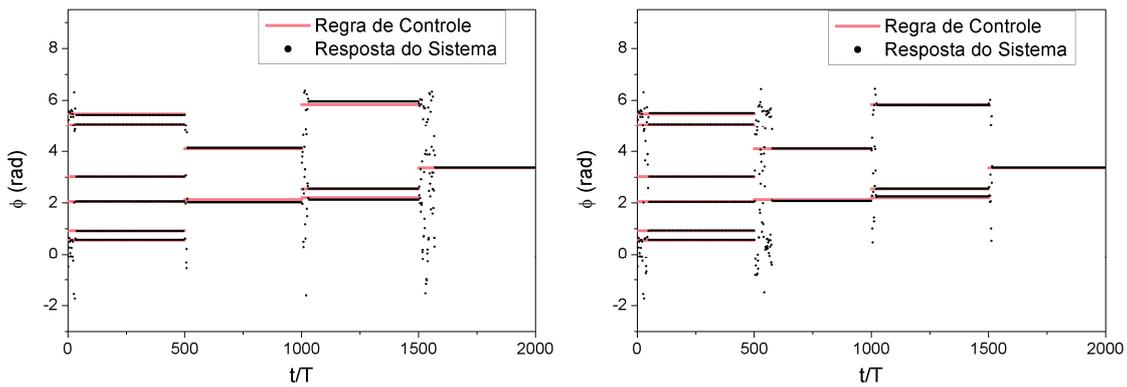


Figura 5.17: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 0\%$  :  
(a) SC com 1º parâmetro de controle; e (b) SC com 2º parâmetro de controle.

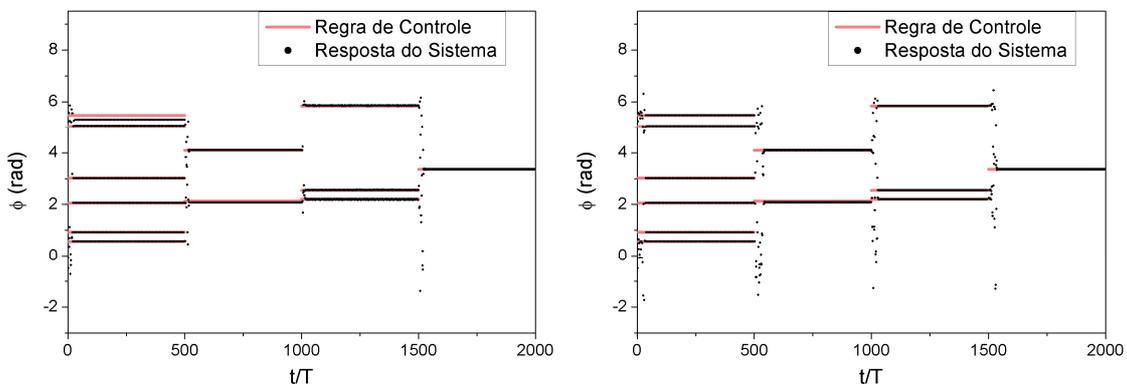


Figura 5.18: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 0\%$  :  
(a) SC multiparâmetros acoplado; e (b) SC multiparâmetros desacoplado.

No emprego dos métodos semi-contínuos pode-se observar que alguns pontos das OPI's foram estabilizados em pontos um pouco diferentes dos pontos das órbitas reais. Este fato ocorre pela consideração de vizinhanças em torno dos pontos de controle maiores que as consideradas anteriormente para ativar as perturbações. Essa vizinhança maior diminui o tempo de espera, mas pode ocasionar essas diferenças entre órbitas identificada e estabilizada, assim como pode ser necessário um número maior de tentativas antes de alcançar a estabilização.

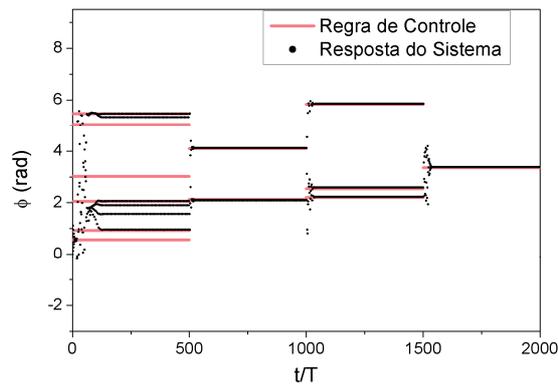


Figura 5.19: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 0\%$  empregando-se o ETDF.

A partir do emprego do ETDF pode-se observar que a órbita de período 6 estabilizada é diferente da identificada, como ocorreu no capítulo anterior. Estas órbitas são apresentas no espaço de fase na Figura 5.20.

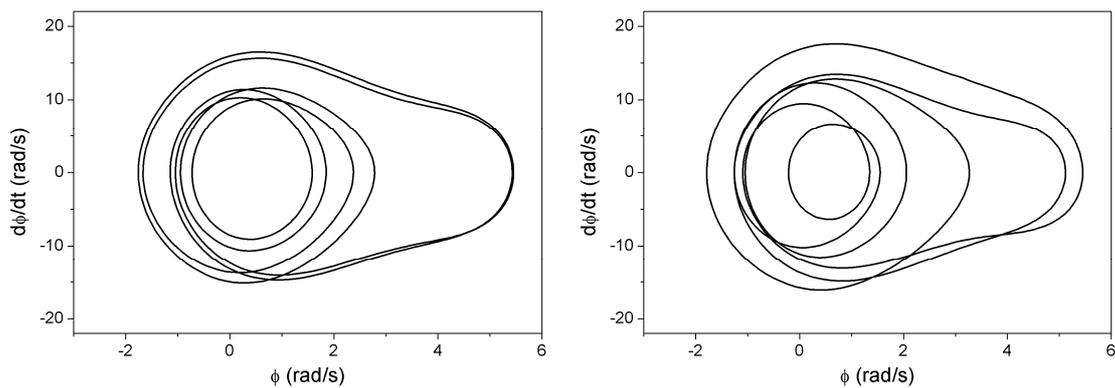


Figura 5.20: OPI de período 6 estabilizada pelo ETDF (esquerda) e OPI identificada (direita).

Considera-se agora um nível de ruído de 1%. A Figura 5.21 apresenta o resultado da estabilização na S1 a partir do emprego do método OGY-SC com os 1º e 2º parâmetros de controle, assim como a trajetória desejada. A Figura 5.22 apresenta a

mesma análise para o método SC multiparâmetros acoplado e desacoplado, enquanto a Figura 5.23 apresenta os resultados a partir do emprego do ETDF.

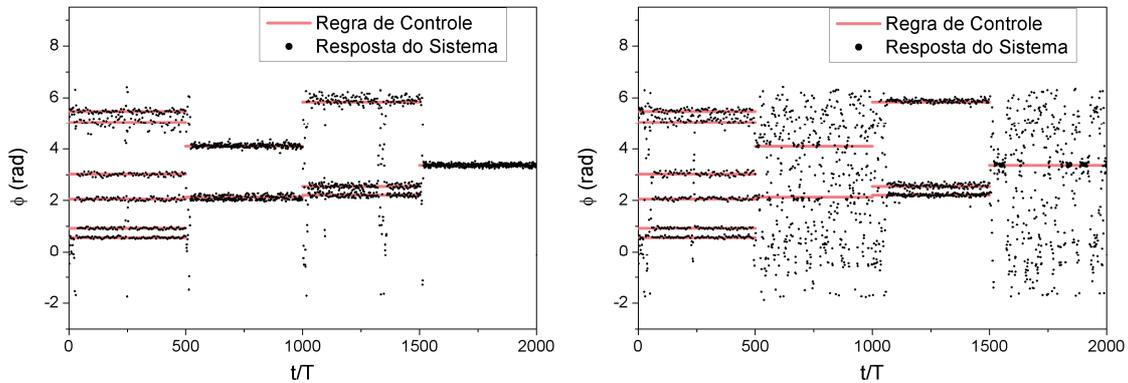


Figura 5.21: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 1\%$  :  
 (a) SC com 1º parâmetro de controle; e (b) SC com 2º parâmetro de controle.

Como pode ser observado a partir da Figura 5.21, para  $\eta = 1\%$  o emprego do método SC com o 1º parâmetro estabiliza com sucesso as 2ª e 4ª OPI's da regra, as 1ª e 3ª também são estabilizadas, no entanto, em alguns momentos a trajetória sai da órbita desejada e volta em seguida. Com o 2º parâmetro a 1ª órbita é estabilizada, mas apresenta também um ponto de escape da trajetória, a 3ª OPI é estabilizada com sucesso, no entanto, as 2ª e 4ª não conseguem ser estabilizadas.

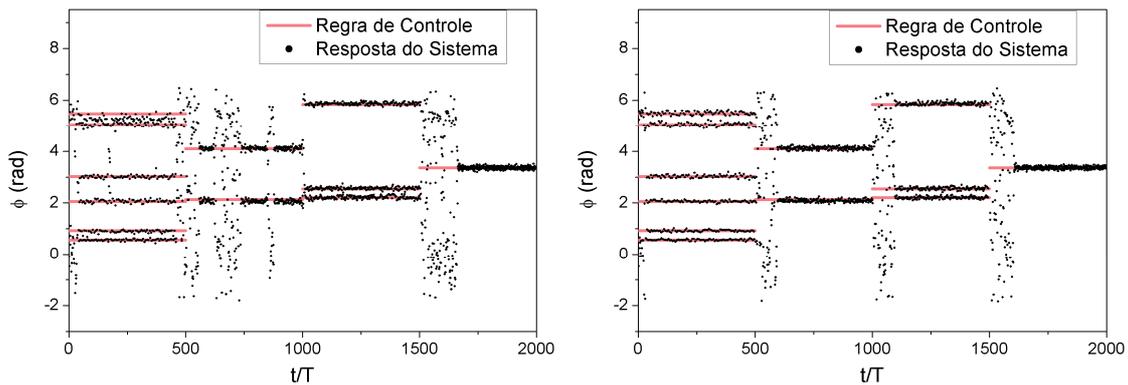


Figura 5.22: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 1\%$  :  
 (a) SC multiparâmetros acoplado; e (b) SC multiparâmetros desacoplado.

Com  $\eta = 1\%$  o emprego do método SC multiparâmetros acoplado estabiliza as 1ª, 3ª e 4ª órbitas satisfatoriamente, no entanto, a 2ª apresenta muitos pontos de escape

da trajetória. A partir do emprego do método SC multiparâmetros desacoplado todas as OPI's são estabilizadas com sucesso.

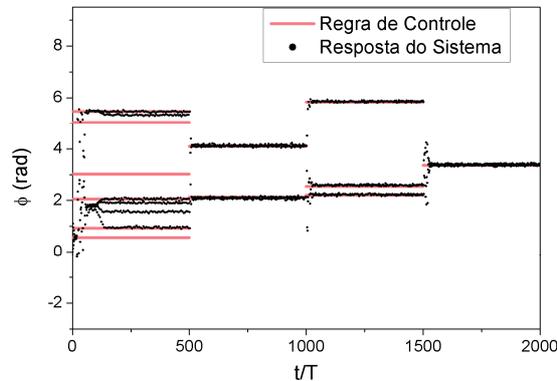
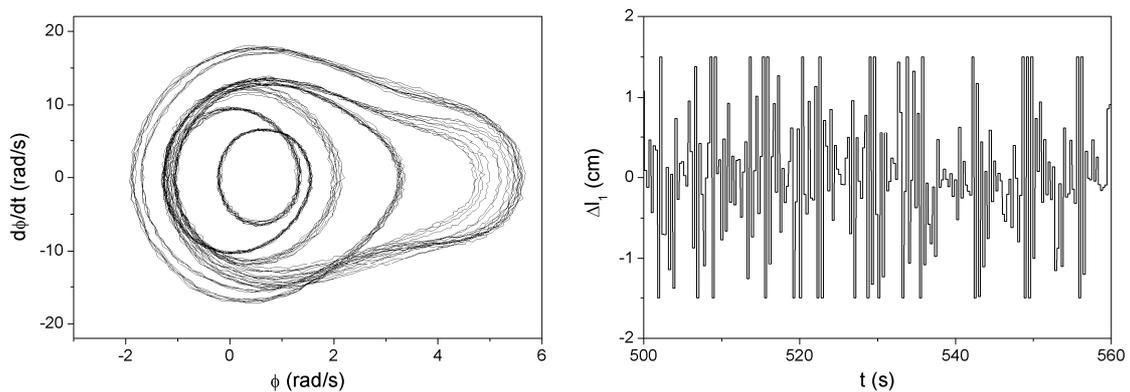


Figura 5.23: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 1\%$  empregando-se o ETDF.

Como pode ser observado a partir da Figura 5.23 o emprego do método ETDF estabiliza todas as OPI's com sucesso. A mesma órbita de período 6 estabilizada no caso sem ruído é estabilizada, diferente da OPI da regra de controle.

As Figura 5.24-5.28 (a) apresentam o espaço de fase do sistema, enquanto as Figura 5.24-5.28 (b) apresentam as perturbações no tempo correspondentes, resultantes dos 5 procedimentos empregados com  $\eta = 1\%$ . Esses detalhes da estabilização mostram o espaço de fase do sistema e as perturbações realizadas apenas nos 60s finais do período de estabilização correspondente a cada uma das órbitas da regra de controle, o que corresponde a um pouco mais de 50 períodos de forçamento.



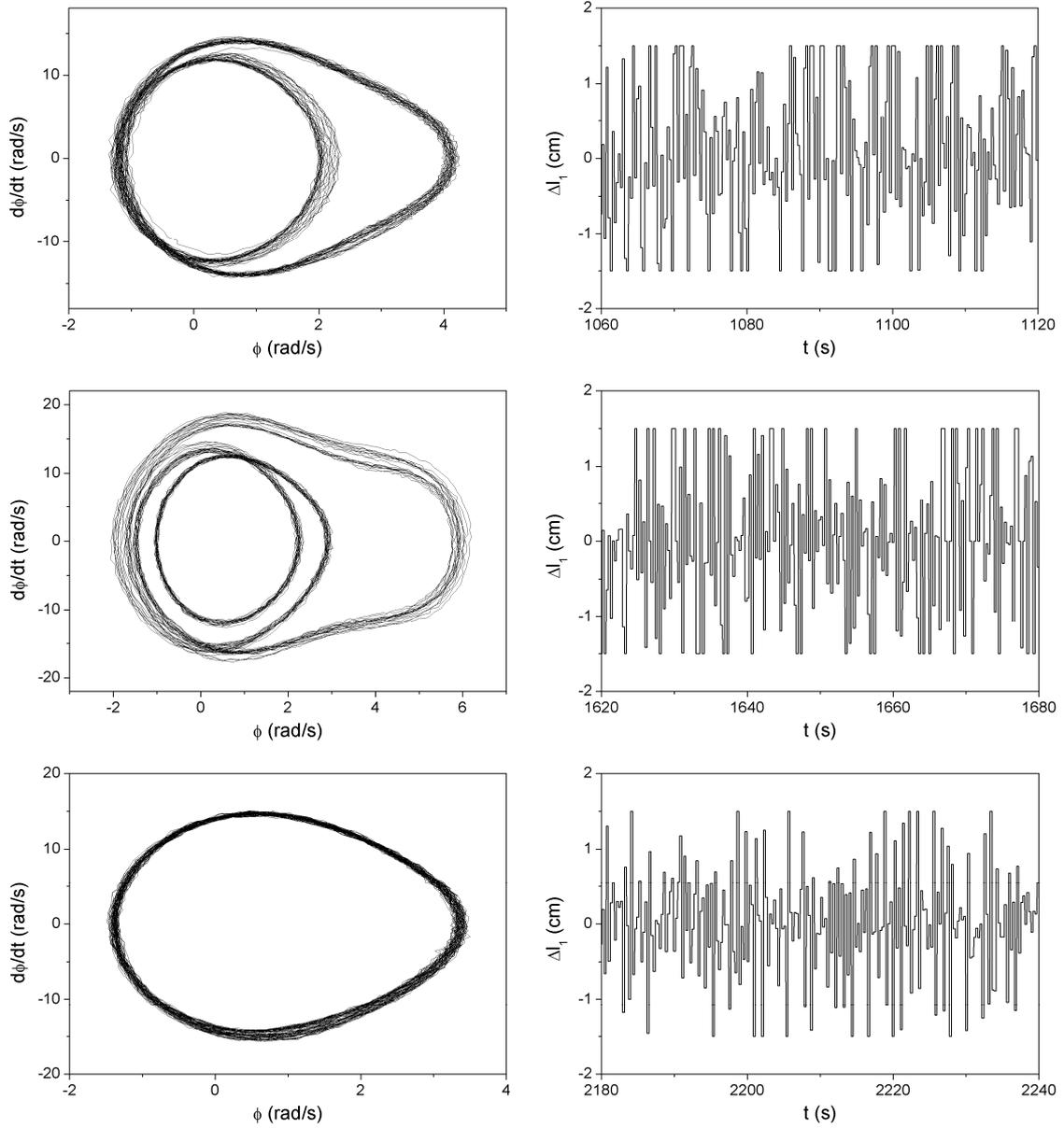
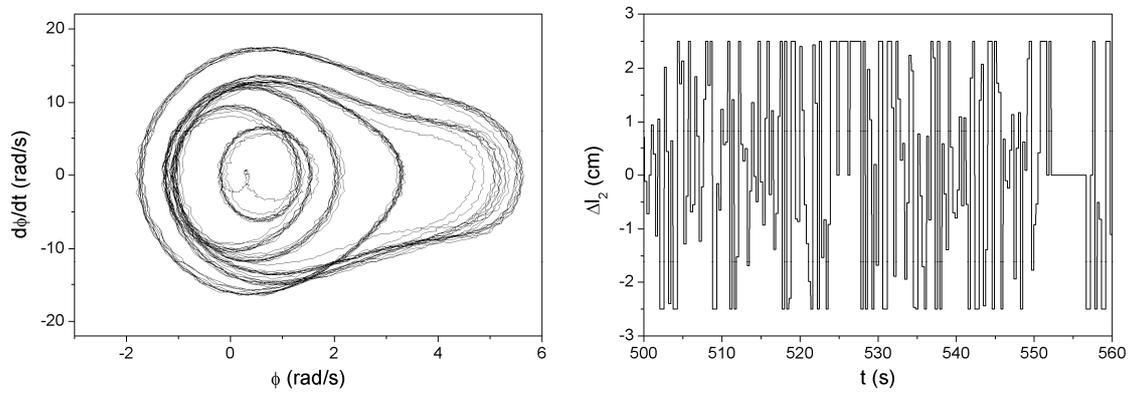


Figura 5.24: OPIs estabilizadas pelo método SC utilizando o 1º parâmetro com  $\eta = 1\%$ .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.



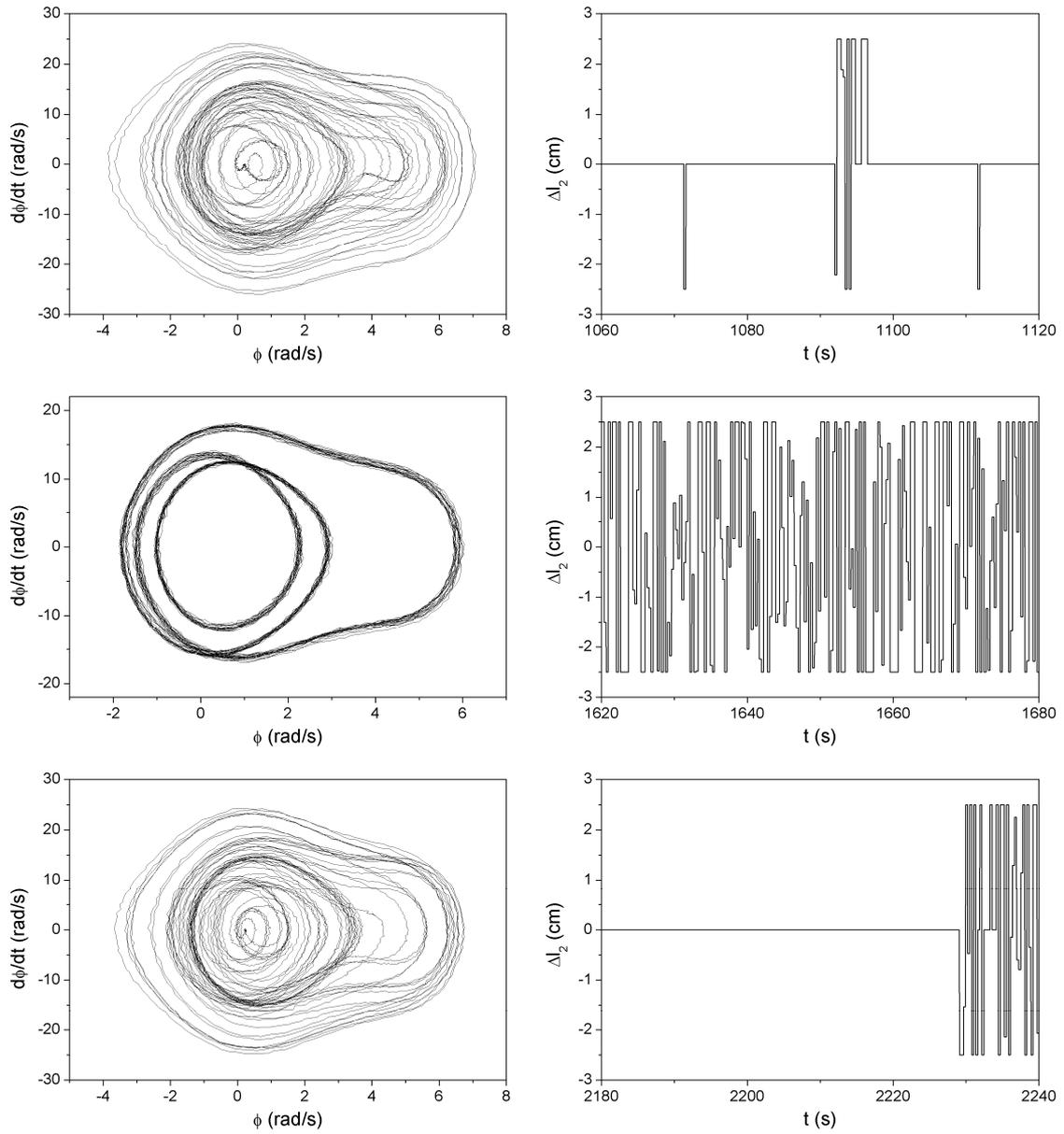
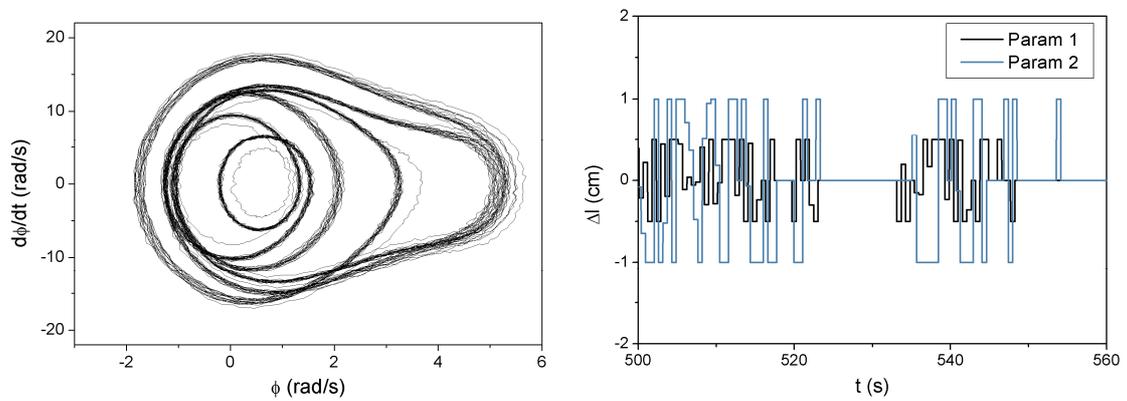


Figura 5.25: OPIs estabilizadas pelo método SC utilizando o 2º parâmetro com  $\eta = 1\%$ .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.



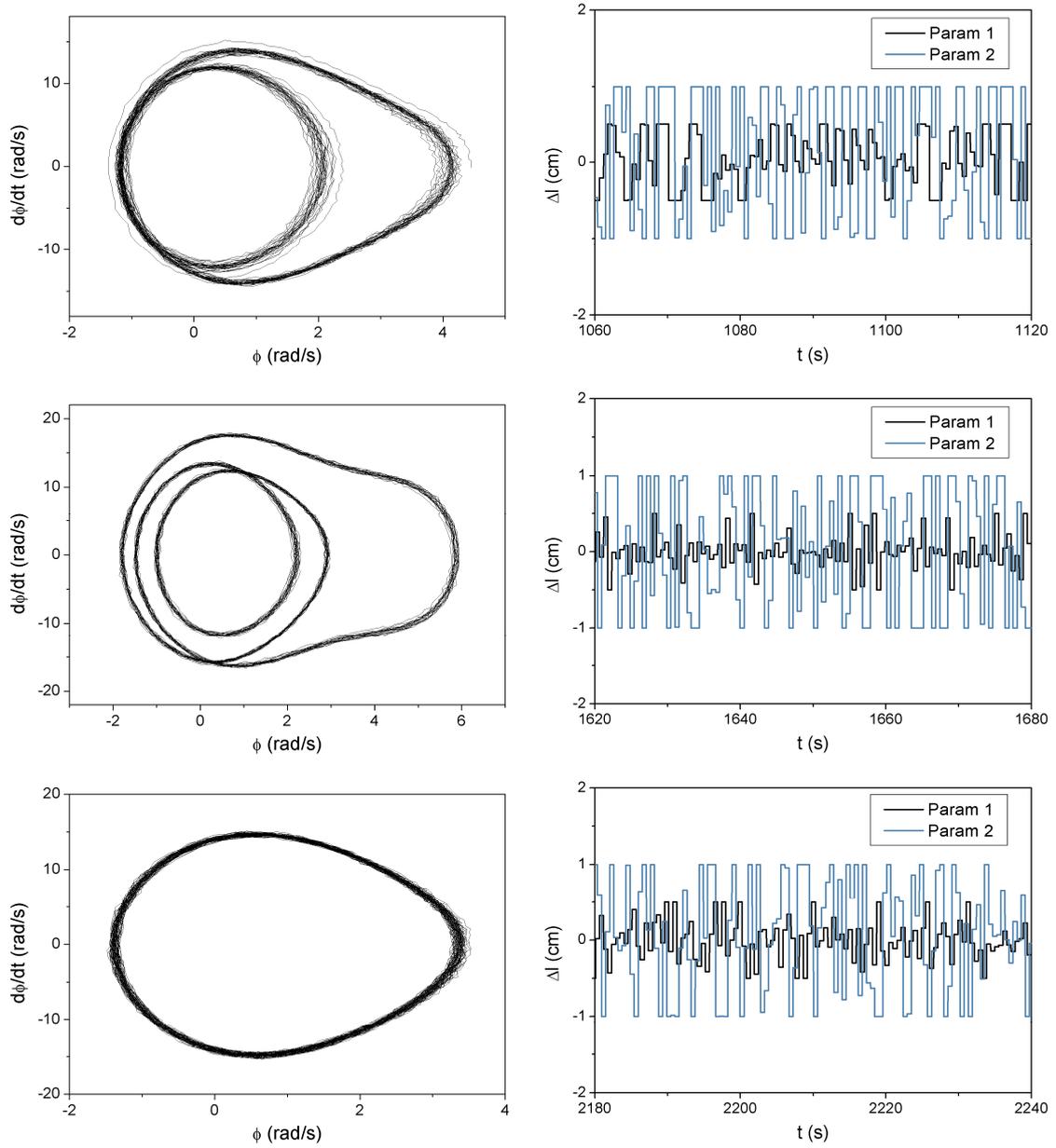
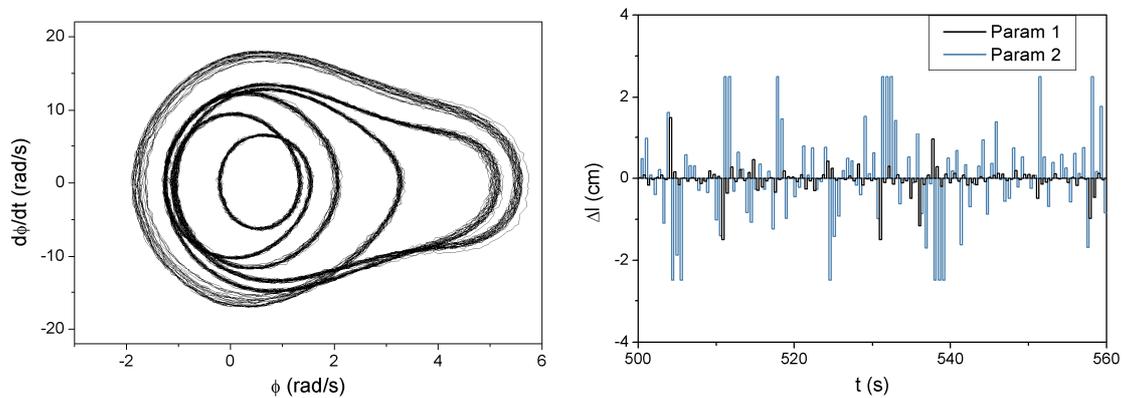


Figura 5.26: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros acoplado com  $\eta = 1\%$  .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.



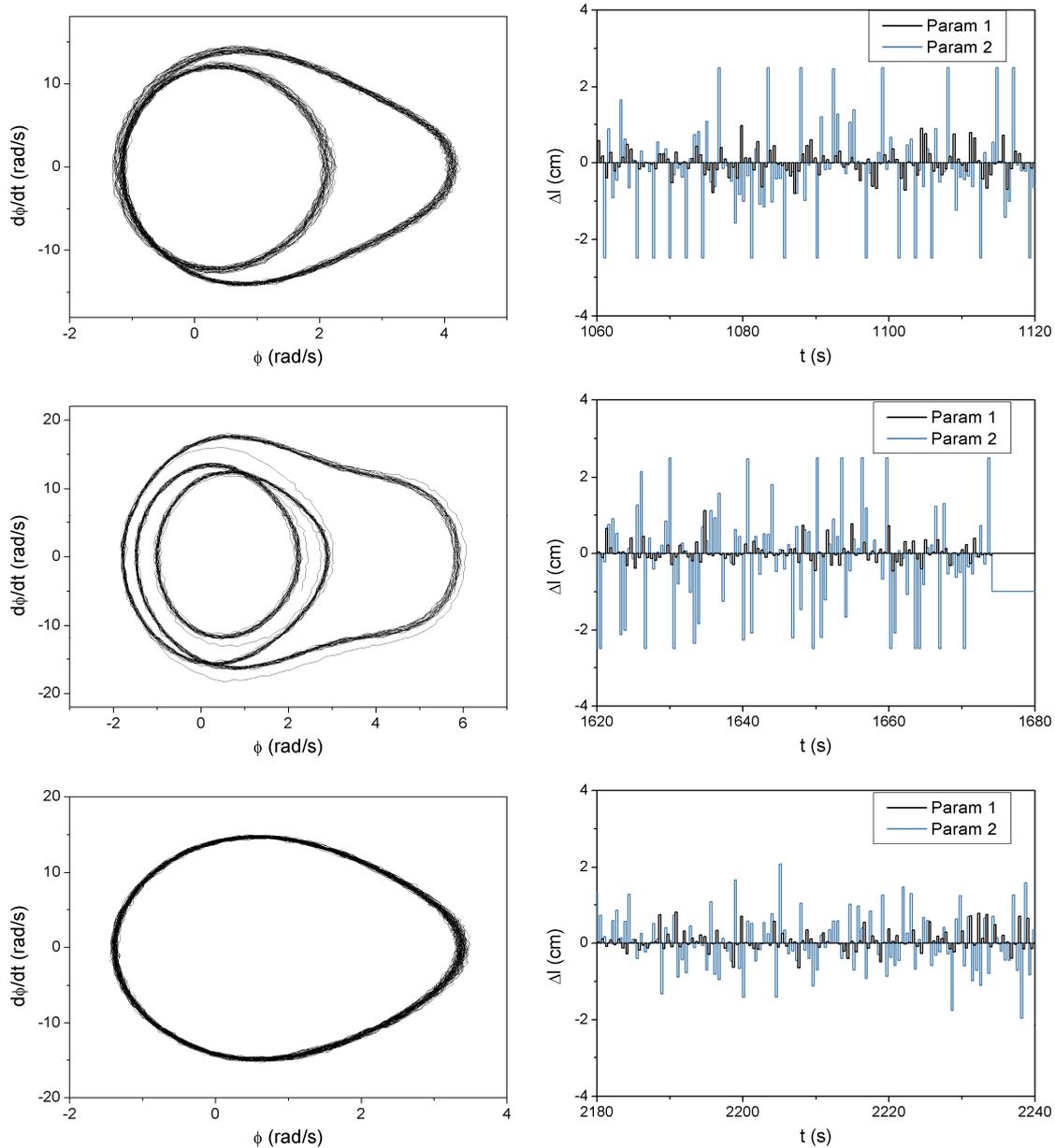
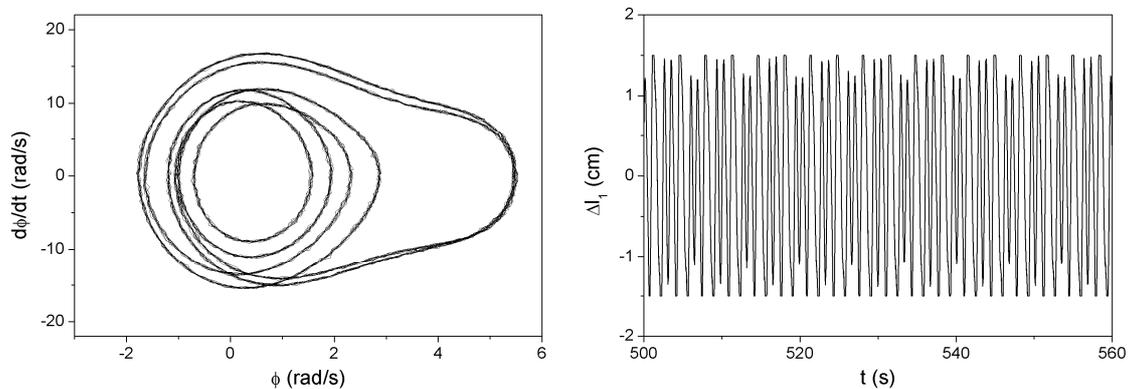


Figura 5.27: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros desacoplado com  $\eta = 1\%$ .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.



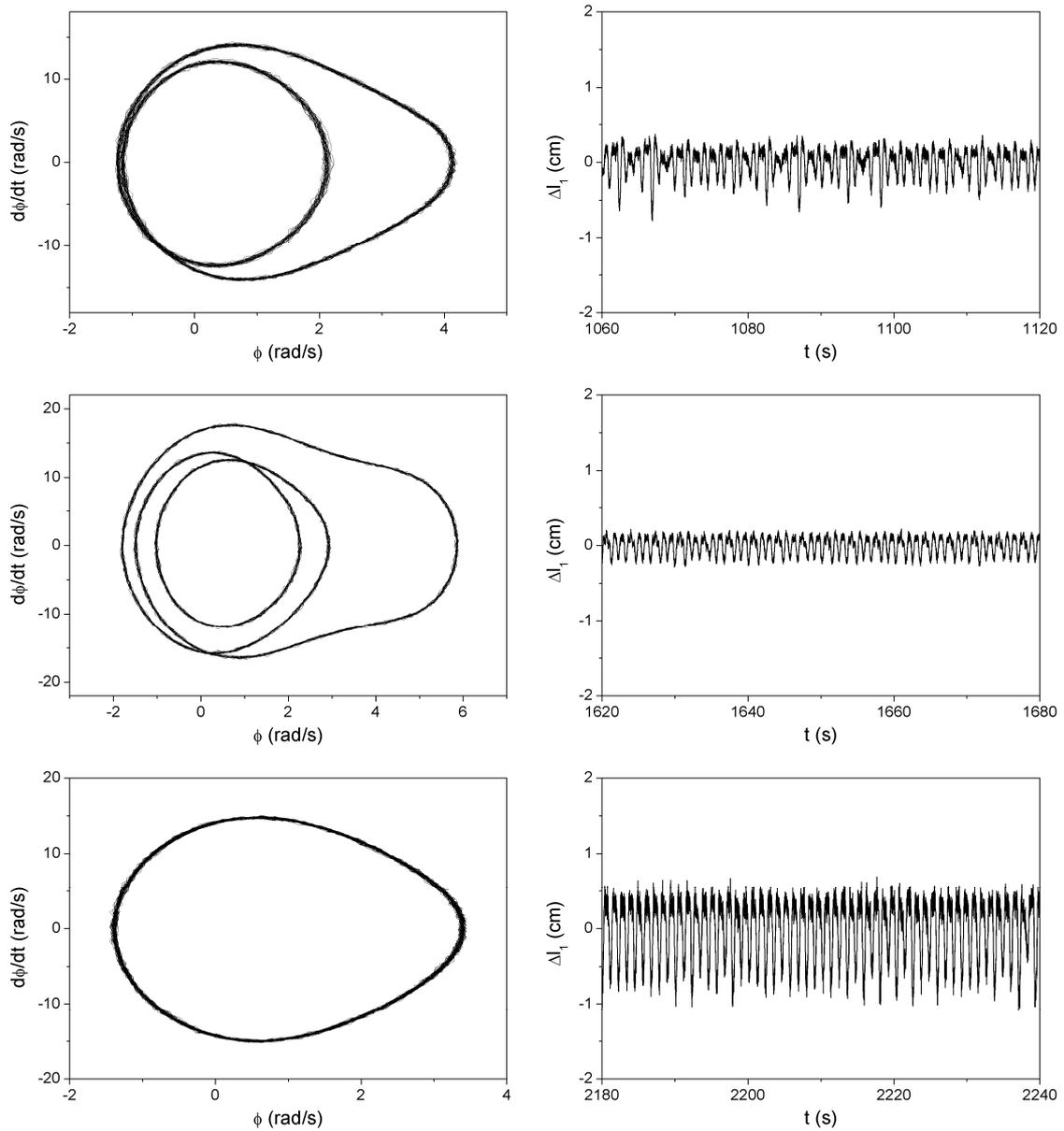


Figura 5.28: OPIs estabilizadas pelo método ETDF com  $\eta = 1\%$  .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.

A seguir, considera-se um nível de ruído de 2%. A Figura 5.29 apresenta o resultado da estabilização na S1 a partir do emprego do método OGY-SC com os 1º e 2º parâmetros de controle, assim como a trajetória desejada. A Figura 5.30 apresenta a mesma análise para o método SC multiparâmetros acoplado e desacoplado, enquanto a Figura 5.31 apresenta os resultados a partir do emprego do ETDF.

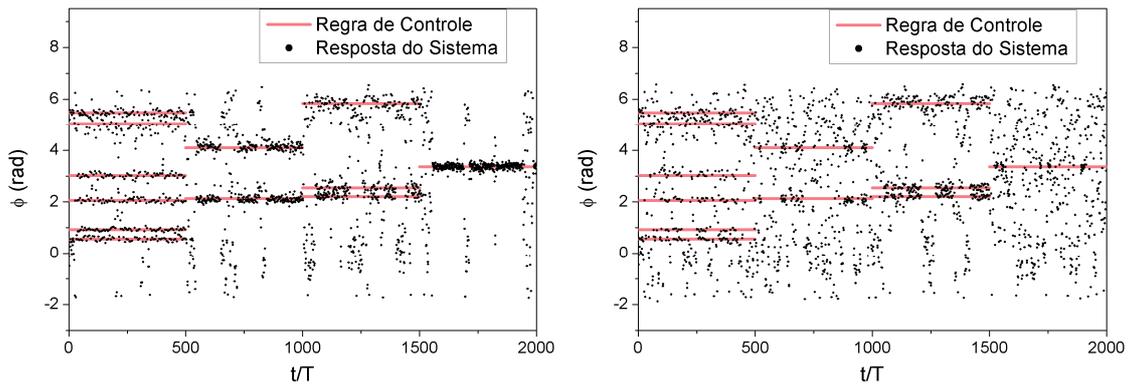


Figura 5.29: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 2\%$  :  
 (a) SC com 1º parâmetro de controle; e (b) SC com 2º parâmetro de controle.

Com  $\eta = 2\%$  o emprego dos métodos SC com um único parâmetro não apresenta bons resultados, embora a utilização do 1º parâmetro de controle apresente resultados sutilmente melhores que com o 2º parâmetro, como mostrado na Figura 5.29.

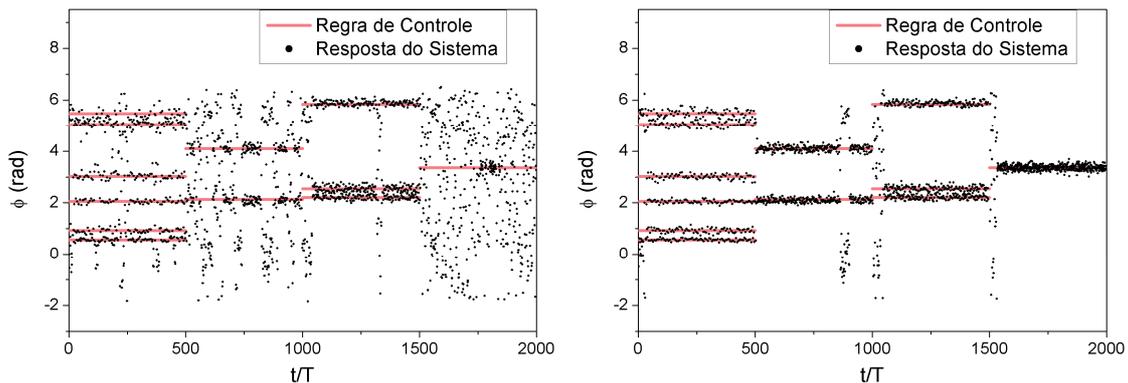


Figura 5.30: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 2\%$  :  
 (a) SC multiparâmetros acoplado; e (b) SC multiparâmetros desacoplado.

Pela Figura 5.30 pode-se observar que com  $\eta = 2\%$  o emprego do método SC multiparâmetro acoplado também não apresenta bons resultados, com estabilização apenas de uma das órbitas, a de periodicidade 3, e mesmo assim apresentando uma região de escape. No entanto, o desempenho deste procedimento é um pouco melhor que o método SC com um único parâmetro de controle. Já a partir da utilização SC multiparâmetros desacoplado todas as OPT's são estabilizadas com sucesso, apenas a 2ª órbita apresenta uma região de escape, o que representa um desempenho consideravelmente superior à abordagem acoplada e, principalmente, ao método SC com um único parâmetro de controle.

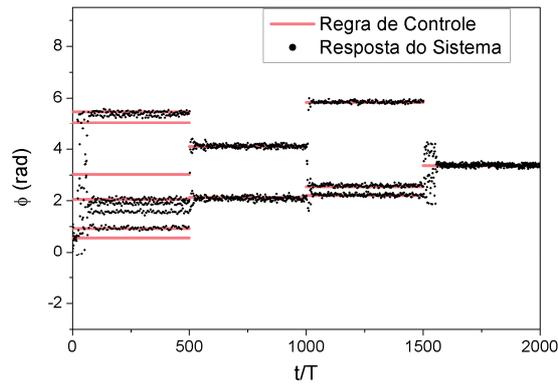
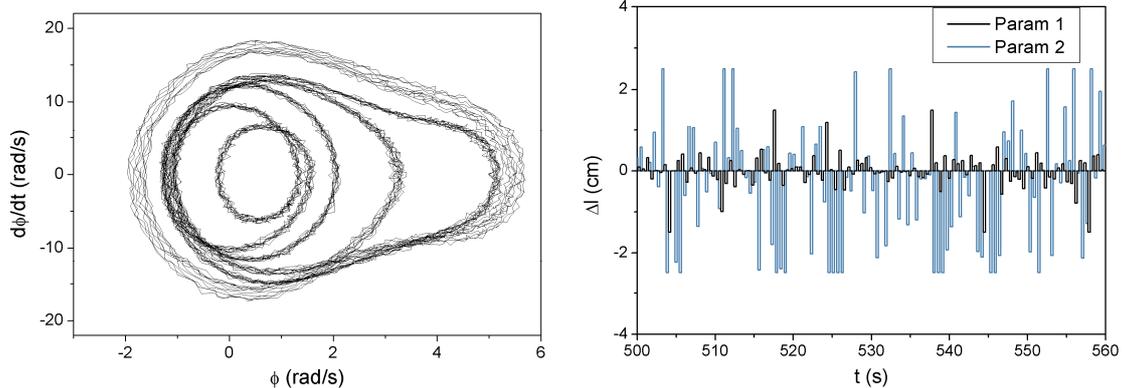


Figura 5.31: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 2\%$  empregando-se o ETDF.

Finalmente, o emprego do método ETDF com  $\eta = 2\%$  estabiliza todas as órbitas com sucesso e, novamente, a órbita de período 6 estabilizada é diferente da OPI da regra de controle.

A seguir, apresentam-se detalhes da estabilização dos dois métodos que apresentaram bons resultados com  $\eta = 2\%$ , o SC multiparâmetros desacoplado e o ETDF. A Figura 5.32 e a Figura 5.33 (a) apresentam o espaço de fase, enquanto a Figura 5.32 e a Figura 5.33 (b) apresentam as perturbações no tempo, referente aos 60s finais do período de estabilização correspondente a cada uma das órbitas da regra de controle, o que corresponde a um pouco mais de 50 períodos de forçamento.



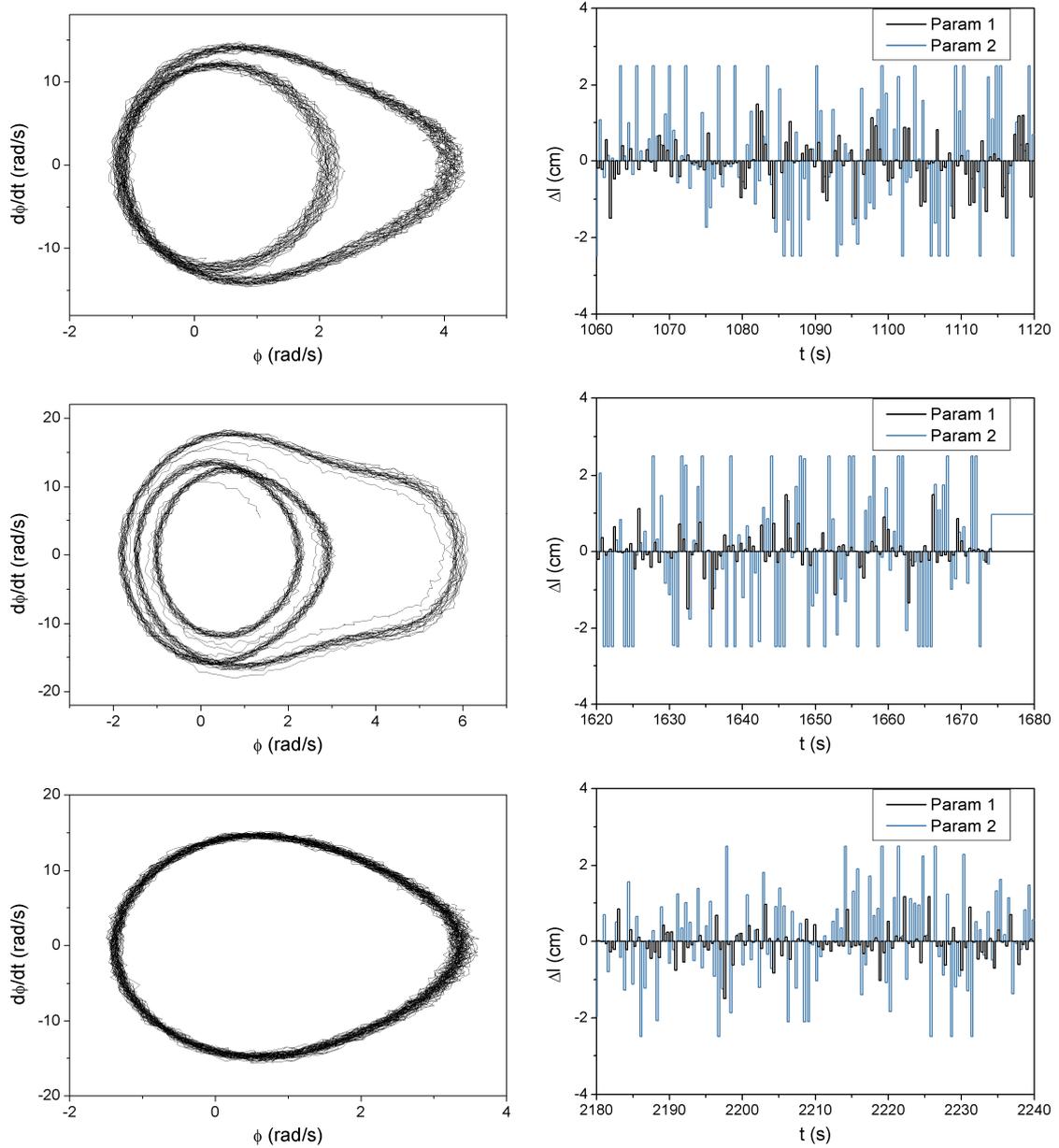
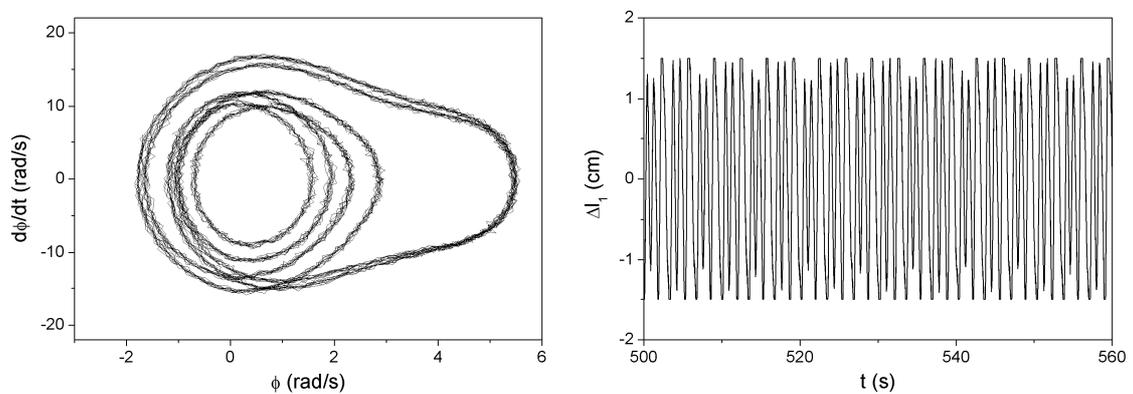


Figura 5.32: OPIs estabilizadas pelo método SC multiparâmetros desacoplado com  $\eta = 2\%$ .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.



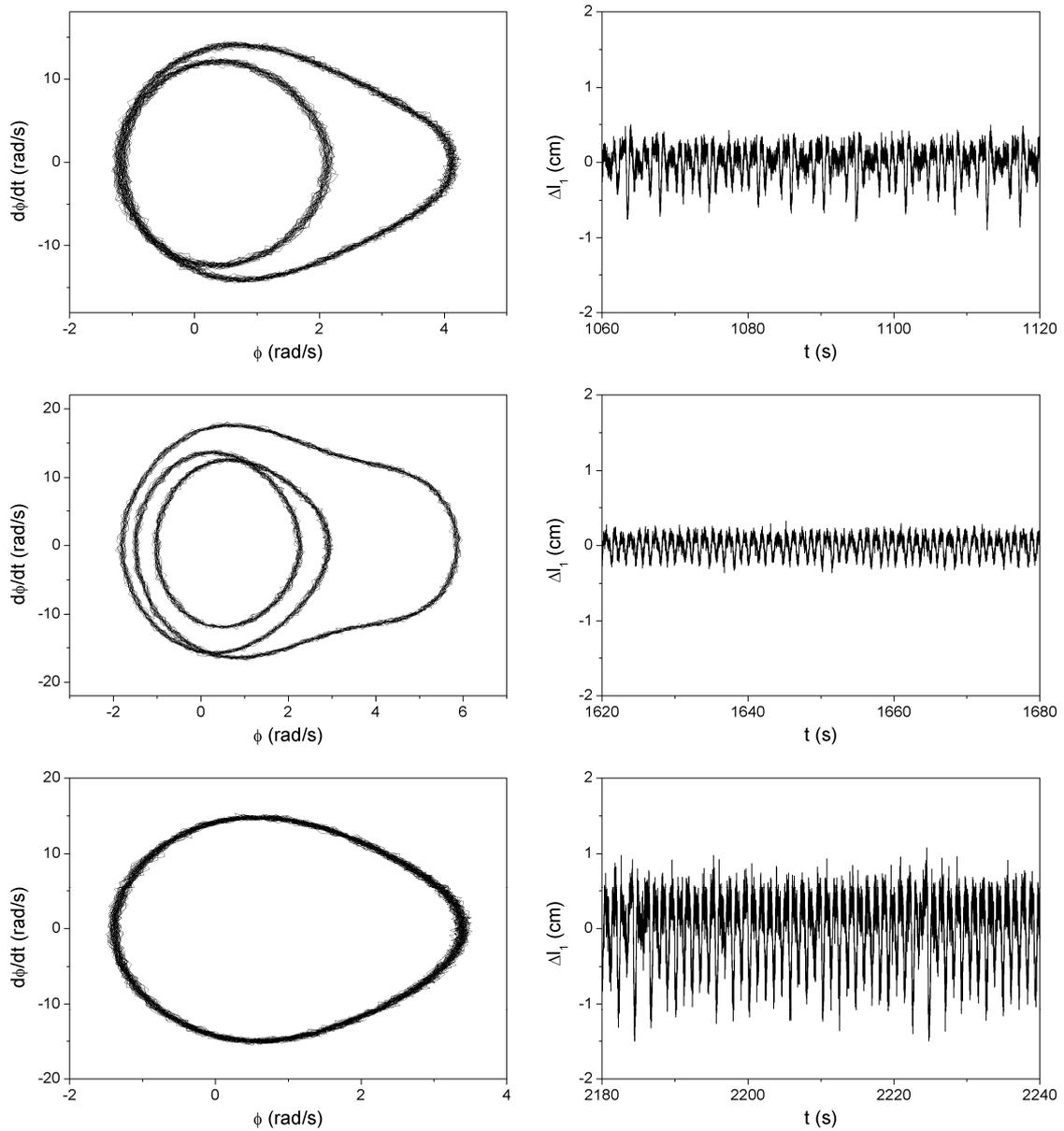


Figura 5.33: OPIs estabilizadas pelo método ETDF com  $\eta = 2\%$  .  
Esquerda: Espaço de Fase; Direita: Perturbação no tempo.

Como verificado por Pereira-Pinto *et al.* (2004), a consideração de um número maior de seções de controle no método SC pode melhorar a estabilização de OPIs na presença de ruído. Neste contexto, a seguir são apresentados resultados da estabilização da regra de controle a partir do emprego do método SC utilizando o 1º parâmetro considerando-se 4 e 6 seções de controle. A Figura 5.34 apresenta o resultado da estabilização na S1, assim como a trajetória desejada, para  $\eta = 1\%$  , enquanto a Figura 5.35 apresenta os mesmos resultados para  $\eta = 2\%$  .

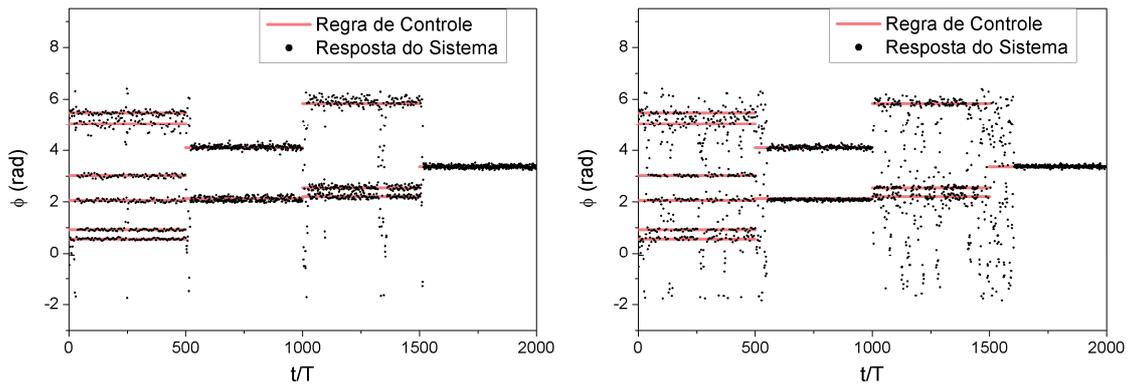


Figura 5.34: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 1\%$  empregando-se o SC com o 1º parâmetro: (a) 4 seções de controle; e (b) 6 seções de controle

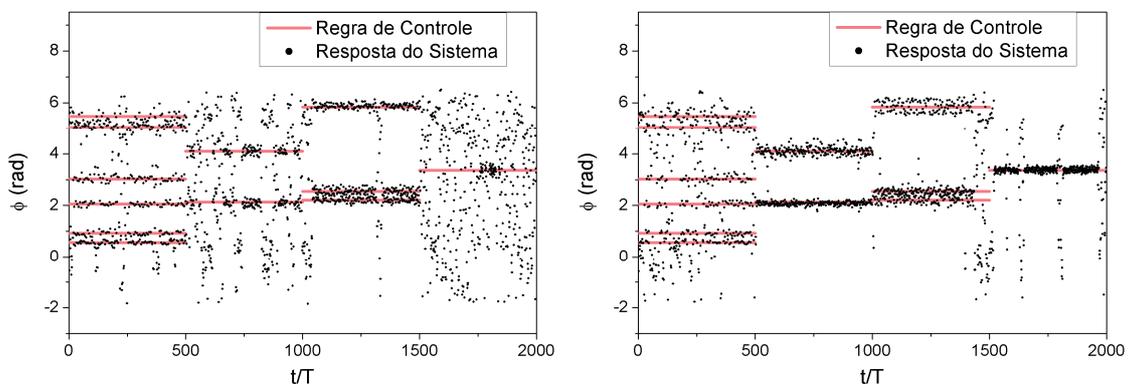


Figura 5.35: Posições do sistema e desejada na S1 com  $\eta = 2\%$  empregando-se o SC com o 1º parâmetro: (a) 4 seções de controle; e (b) 6 seções de controle

A partir dos resultados apresentados nas Figura 5.34 e Figura 5.35 pode-se perceber que para  $\eta = 1\%$  a utilização de 4 seções de controle apresenta resultados melhores que com 6 seções. No entanto, para um nível maior de ruído,  $\eta = 2\%$ , a utilização de 6 seções de controle apresenta resultados melhores na estabilização do sistema.

Um aumento no número de seções de controle pode aumentar a robustez do controlador em relação à contaminação do sistema por ruídos, como obtido no caso de  $\eta = 2\%$  e apresentado na Figura 5.35. No entanto, existe um limite para o aumento do número de seções de controle. Este limite está relacionado com o tempo de resposta do sistema em relação às perturbações no parâmetro de controle. Desta forma, quando se tem um sistema cujo tempo de resposta é maior que o intervalo de tempo entre duas seções de controle aparecem incertezas na determinação dos parâmetros do controlador, principalmente no que se refere ao vetor sensibilidade, que prejudicam a estabilização

do sistema. Esta limitação pode ser observada nos resultados apresentados na Figura 5.34.

Para níveis de ruído maiores que 2% nenhum dos métodos semi-contínuos apresentou bons resultados, incluindo o SC multiparâmetros desacoplado, que apresentou resultados satisfatórios até  $\eta = 2\%$ . O emprego do ETDF, no entanto, estabiliza com sucesso as OPIs da regra com níveis de ruído consideravelmente maiores. A Figura 5.36 apresenta o espaço de fase das 4 órbitas estabilizadas pelo ETDF para  $\eta = 5\%$ .

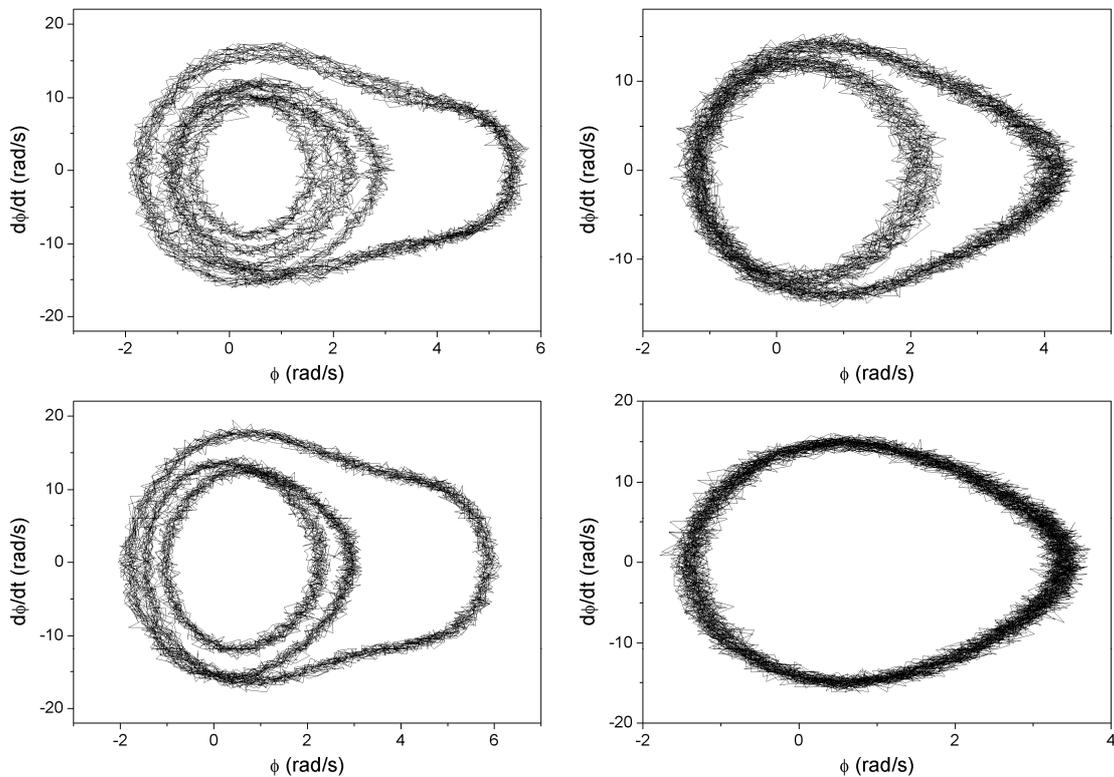


Figura 5.36: Espaço de fase das OPIs estabilizadas pelo método ETDF com  $\eta = 5\%$ .

A partir das Figura 5.24-5.28(a) e das Figura 5.32-5.33(a) pode-se observar que para um mesmo nível de ruído de observação a estabilização das OPIs pelos métodos semi-contínuos é mais sensível ao ruído que no caso do método contínuo.

Dentre os métodos semi-contínuos analisados na presença de ruído de observação, o método SC multiparâmetros desacoplado apresentou o melhor desempenho, principalmente quando comparado com o SC com um único parâmetro. A abordagem desacoplada estabilizou com sucesso todas as órbitas da regra de controle até um nível de ruído de 2%. Embora para níveis de ruído maiores não haja um bom

desempenho do método quando aplicado à regra, algumas OPIs conseguem ser estabilizadas com níveis mais altos.

Considerando-se todos os métodos analisados, o ETDF apresentou a melhor robustez na presença de ruído, alcançando a estabilização de todas as órbitas da regra com  $\eta = 5\%$ . A órbita de período 6 estabilizada, no entanto, foi diferente da OPI da regra. Problema este verificado anteriormente no emprego deste método considerando-se a 1ª regra de controle.

No caso do método SC com um único parâmetro, a consideração de um número maior de seções de controle pode melhorar a estabilização de OPIs na presença de ruído, como verificado por Pereira-Pinto *et al.* (2004). Os testes com um número maior de seções, no entanto, não levou a um desempenho melhor do controlador em todas as simulações, tendo em vista o tempo de resposta do sistema. Em alguns casos, o aumento do número de seções de controle melhora a estabilização das órbitas da regra, em outros casos piora e para algumas situações os resultados permanecem inalterados qualitativamente. Essa mesma característica foi observada no caso do método SC multiparâmetros abordagens acoplada e desacoplada.

Além disso, verifica-se que quando o sistema é capaz de estabilizar uma OPI com uma determinada quantidade de seções de controle, o aumento do número de seções pode fazer com que não seja mais possível estabilizar o sistema, inclusive na ausência de ruídos. No entanto, quando a estabilização de uma OPI não é alcançada, um aumento do número de seções de controle pode fazer com que a estabilização seja conseguida, principalmente quando uma OPI deixa de ser estabilizada devido a presença de um nível maior de ruído. Desta forma, a quantidade de seções de controle mais adequada para a estabilização do sistema depende da OPI, assim como do nível de ruído. Quando a estabilização do sistema não é alcançada pode-se tentar aumentar o número de seções.

Por esses motivos, no emprego da 2ª regra de controle na presença de ruído de observação foram consideradas 4 seções de controle, igualmente realizado no caso da 1ª regra.

Na aplicação de todas as formulações considera-se que, quando a atuação calculada é maior que o valor máximo estipulado para o controlador, este realiza uma perturbação com mesmo sinal do valor calculado, no entanto, com valor absoluto igual ao valor máximo permitido. Além disso, no caso dos métodos semi-contínuos é considerada uma vizinhança em torno dos pontos de controle maior que a considerada

na 1ª regra de controle para ativação das perturbações. Se essa vizinhança não for maior, o desempenho na presença de ruído fica muito inferior ao obtido. Como consequências dessa vizinhança maior, o tempo de espera é menor, no entanto, os pontos estabilizados podem ter uma diferença em relação aos pontos de controle reais das OPIs e pode ser necessário um número maior de tentativas antes de se alcançar a estabilização do sistema.

### 5.3 Análise da Estabilização do Sistema com Imprecisão na Modelagem

Considerando-se os métodos de controle de caos que necessitam do conhecimento das equações de governo do sistema durante a fase de aprendizagem, além da análise da robustez em relação à presença de ruídos externos, outra análise importante consiste na avaliação da robustez dos métodos considerando-se imprecisões na modelagem do sistema.

Dentre os métodos considerados na análise comparativa, apenas o ETDF e a abordagem acoplada do método multiparâmetros necessitam do conhecimento das equações de movimento. Além disso, no caso acoplado estas equações são utilizadas apenas na determinação dos valores de  $\beta$ 's adequados. No caso do método SC e da abordagem desacoplada do método multiparâmetros, no entanto, toda a fase de aprendizagem é realizada apenas a partir de séries temporais.

Cabe ressaltar que a dependência das equações de movimento dos métodos ETDF e SC multiparâmetros acoplado ocorre na determinação dos ganhos  $K$  e  $R$ , no primeiro caso, e dos valores de  $\beta$ 's, no segundo caso. A limitação não está nos métodos de controle, mas na forma de determinar os parâmetros do controlador.

A identificação do amortecimento presente nos sistemas pode não ser uma tarefa trivial, Feeny & Liang (1996), De Paula *et al.* (2006) e Horton *et al.* (2008) tratam da identificação dos coeficientes de amortecimento do sistema quando este está sujeito a atritos seco e viscoso linear. Além disso, estes coeficientes podem variar com a funcionamento do sistema. Com isso, de forma a analisar a capacidade dos métodos de controle em lidar com incertezas na modelagem do sistema, considera-se imprecisões nos valores dos coeficientes de amortecimento.

Com objetivo de comparar o desempenho dos métodos de controle que dependem do conhecimento das equações de movimento, novamente considera-se a segunda regra de controle apresentada neste capítulo. No emprego do método ETDF

consideram-se atuações máximas dos controladores de  $|\Delta l_{1máx}| = 1.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 2.5 \text{ cm}$ , enquanto no emprego do método SC multiparâmetros acoplado consideram-se 4 seções de controle e atuações máximas de  $|\Delta l_{1máx}| = 0.5 \text{ cm}$  e  $|\Delta l_{2máx}| = 1.0 \text{ cm}$ .

Inicialmente, emprega-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros na estabilização da regra de controle. Utilizam-se os mesmos valores de  $\beta$ 's estimados anteriormente,  $\beta_a = 2.5$  e  $\beta_p = 1.5$ , quando  $\zeta = 2.368 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$  foram admitidos como coeficientes de amortecimento durante a fase de aprendizagem. Agora, no entanto, admitem-se diferentes valores de amortecimento. Cabe ressaltar que, como a estimativa das jacobianas e das matrizes de sensibilidade são realizadas a partir de séries temporais, a imprecisão no conhecimento do amortecimento não interfere na estimativa destes parâmetros do controlador. A Figura 5.37 apresenta o resultado da estabilização na S1 assim como a trajetória desejada para valores de amortecimento de (a)  $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$  e (b)  $\zeta = 1.42 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$ . No primeiro caso, o coeficiente referente ao atrito seco possui uma variação de 40% em relação ao valor utilizado para a determinação dos  $\beta$ 's, enquanto no segundo caso o coeficiente de amortecimento viscoso possui uma variação de 40%.

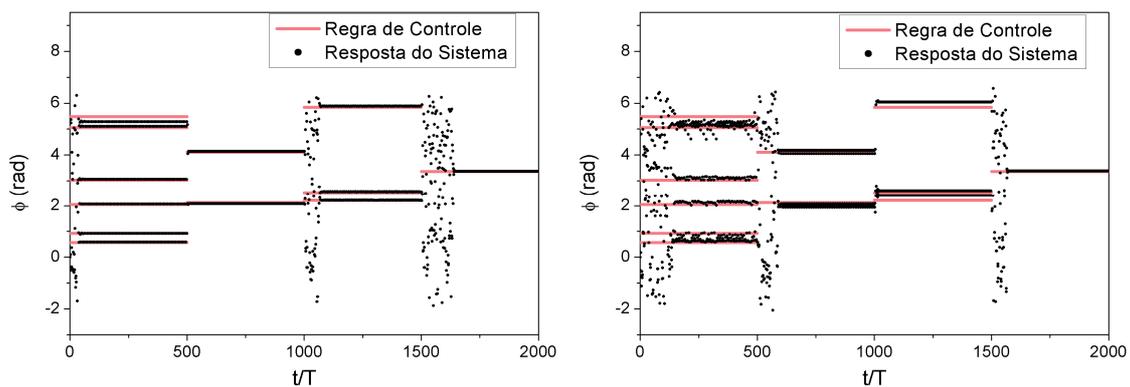


Figura 5.37: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros: (a)  $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$ ; (b)  $\zeta = 1.42 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$ .

A Figura 5.38 apresenta o resultado da estabilização na S1 assim como a trajetória desejada para valores de amortecimento para  $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ , neste caso, ambos os coeficientes possuem uma variação de 30% em relação aos valores utilizados para a determinação dos  $\beta$ 's.

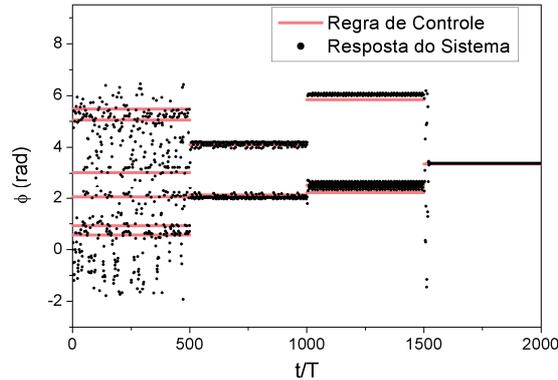


Figura 5.38: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros com  $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ .

Agora, emprega-se o método ETDF na estabilização da mesma regra de controle considerando-se imprecisões no conhecimento do amortecimento presente no sistema. Os mesmos valores de  $R$  e  $K$  referentes a cada OPI da regra, utilizados na subseção anterior, são considerados. A Figura 5.39 apresenta o resultado da estabilização na S1 assim como a trajetória desejada para valores de amortecimento de (a)  $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$  e (b)  $\zeta = 1.42 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$ . No primeiro caso, o coeficiente referente ao atrito seco possui uma variação de 40% em relação ao valor utilizado na estimativa dos parâmetros do controlador, enquanto no segundo caso o coeficiente de amortecimento viscoso possui uma variação de 40%.

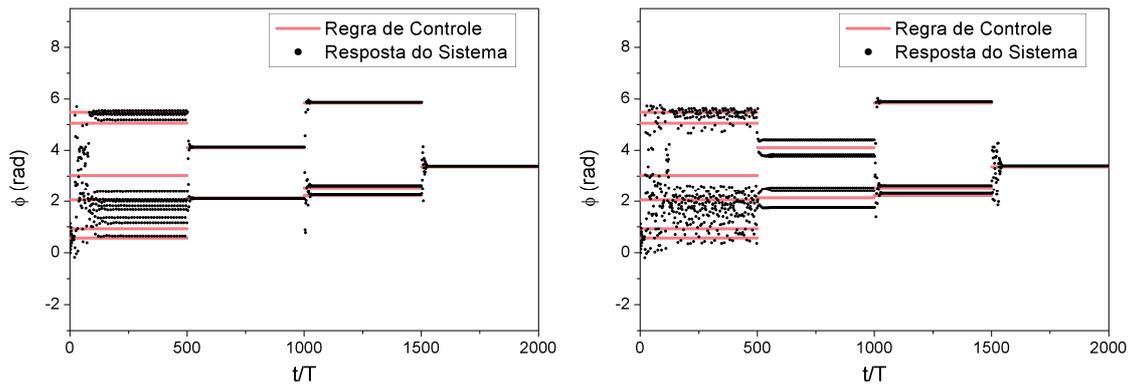


Figura 5.39: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros: (a)  $\zeta = 2.36 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.763 \times 10^{-4} \text{ N m}$ ; (b)  $\zeta = 1.42 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 1.272 \times 10^{-4} \text{ N m}$ .

A Figura 5.40 apresenta o resultado da estabilização na S1 assim como a trajetória desejada para valores de amortecimento para  $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ , neste caso, ambos os coeficientes possuem uma variação de 30% em relação aos valores utilizados na estimativa dos parâmetros do controlador.

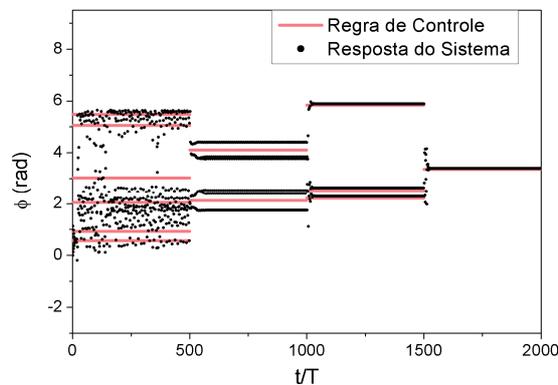


Figura 5.40: Posições do sistema e desejada na S1 empregando-se a abordagem acoplada do método multiparâmetros com  $\zeta = 1.65 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\mu = 0.89 \times 10^{-4} \text{ N m}$ .

A partir dos resultados pode-se observar que os dois métodos analisados apresentam uma boa robustez com relação à imprecisão no conhecimento do amortecimento presente no sistema. Além disso, tem-se que a estabilização da OPI de período 1 é alcançada em todos os casos; no caso da OPI de período 2, embora a sua estabilização seja alcançada em todas as situações, no caso do emprego do ETDF com variação no coeficiente de amortecimento viscoso a órbita é estabilizada com um erro; essa mesma diferença entre a órbita identificada e a estabilizada ocorre no caso da OPI

de período 3 a partir do emprego do método multiparâmetros acoplado com imprecisão no amortecimento viscoso; enquanto a órbita de periodicidade 6 só é estabilizada em alguns casos, como apresentado na Figura 5.37 e na Figura 5.39(a). Desta forma, tem-se que a influência da imprecisão na modelagem, expressa a partir de variações no amortecimento, é maior na estabilização das OPIs de maior periodicidade.

## 6 CONTROLE DE CAOS PARA COLHEITA DE ENERGIA

Nos últimos anos, a importância do conceito de *energy harvesting* vem crescendo gradativamente e está relacionada a diversas aplicações. Os dispositivos geralmente exploram energia térmica, cinética, vibracional e eletromagnética. Além da utilização de materiais inteligentes, com destaque para os piezoelétricos (Howells, 2009), recentemente há um uso crescente da tecnologia de MEMS/NEMS (Liu *et al.*, 2008; Bretthauer *et al.*, 2009).

O conceito de extrair energia a partir de ondas do mar, proposto por Wiercigroch (2005), consiste em mais uma possibilidade de colheita de energia. Esta proposta está baseada na conversão de oscilações verticais em movimento rotativo utilizando um pêndulo excitado parametricamente. A ideia é que a oscilação vertical de uma estrutura, devido às ondas do mar, possa gerar um comportamento rotativo do pêndulo que, por sua vez, forneça o torque para um gerador elétrico. Visando ilustrar essa ideia, a Figura 6.1 mostra um pêndulo pivotado montado rigidamente sob uma base que oscila em um plano vertical.

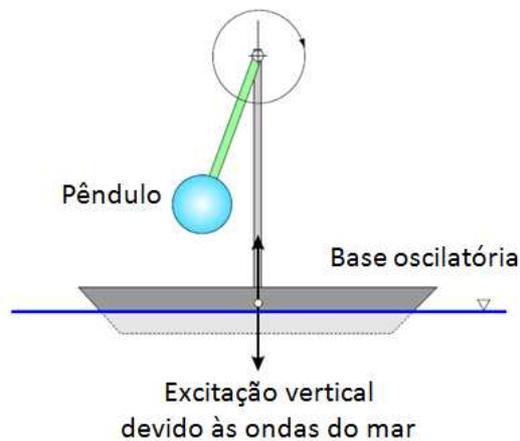


Figura 6.1: Princípio de funcionamento de um pêndulo excitado parametricamente.

A dinâmica do pêndulo excitado parametricamente tem sido investigada há algum tempo (Clifford & Bishop, 1995 e 1996; Lu, 2006). Sem ação de controle, o pêndulo pode apresentar diferentes tipos de comportamento, indo de simples oscilações periódicas ao comportamento caótico, como verificado por Xu *et al.* (2005). O

comportamento apresentado depende das condições iniciais, frequência e amplitude de forçamento. Embora diversos autores tenham verificado soluções rotativas, é importante mencionar que o pêndulo excitado parametricamente apresenta bifurcações que podem desestabilizar este tipo de resposta. Desta forma, torna-se interessante controlar bifurcações com objetivo de manter soluções rotativas estáveis.

Neste contexto, os métodos de controle de caos contínuos são empregados de forma a manter um movimento rotativo do pêndulo em três etapas distintas: controlar uma OPI rotativa quando o sistema encontra-se em regime caótico; evitar a duplicação de período e manter uma órbita rotativa de período-1; e, finalmente, evitar a bifurcação para o caos e conservar novamente uma órbita periódica de período-1 rotativa.

A seguir discute-se um sistema pêndulo-shaker que representa o sistema de colheita de energia. Este sistema é modelado e a partir daí, aplicam-se as técnicas de controle de caos para estabilizar um comportamento rotativo do sistema, incluindo controle de resposta caótica e controle de bifurcação.

## **6.1 Sistema Pêndulo-Shaker**

A ideia de que energia elétrica pode ser obtida a partir de ondas do mar foi abordada anteriormente por Xu (2005), Horton & Wiercigroch (2008) e Horton (2009), que investigam a dinâmica de um pêndulo paramétrico forçado harmonicamente. Motivado por essa ideia, Xu *et al.* (2007) realiza a análise de um pêndulo excitado parametricamente por um shaker eletro-dinâmico. Esse sistema é apresentado na Figura 6.2 e consiste no mesmo sistema analisado nesse trabalho. O aparato experimental está disponível na Universidade de Aberdeen, no Laboratório de Dinâmica Aplicada, localizado no Departamento de Engenharia.

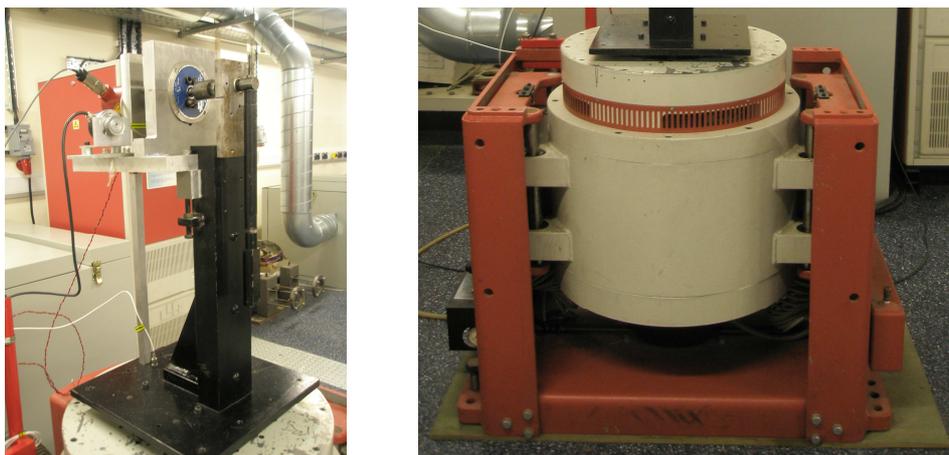


Figura 6.2: Pêndulo (na esquerda) pivotado montado sob uma base fixada ao shaker eletrodinâmico (na direita).

O pêndulo representa o sistema mecânico responsável pela transferência de energia, enquanto o movimento do shaker simula o efeito das ondas do mar. A Figura 6.3 mostra o desenho esquemático das partes mecânica e elétrica do sistema conforme apresentado e explicado detalhadamente em Xu *et al.* (2007). A parte mecânica (Figura 6.3(a)) é composta por 3 massas: a massa do pêndulo,  $M$ , a massa do conjunto da armadura do shaker,  $M_a$ , e a massa do corpo do shaker,  $M_b$ . A excitação é fornecida por uma força axial eletromagnética,  $F_{em}$ , que é gerada por uma corrente alternada em um campo magnético constante representado por um circuito elétrico.

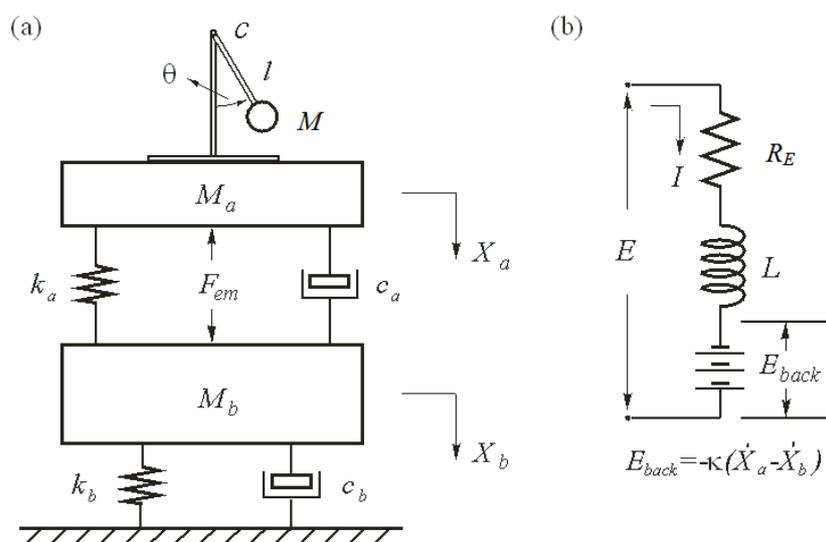


Figura 6.3: Modelo físico do sistema pêndulo-shaker com os componentes mecânico e elétrico.

A parte mecânica do sistema pêndulo-shaker é descrita por três coordenadas generalizadas: deslocamento angular do pêndulo,  $\theta$ , e deslocamentos vertical do corpo e

da armadura,  $X_b$  e  $X_a$ , respectivamente. O sistema elétrico é descrito por uma carga elétrica  $q$ , que está relacionada com a corrente através de sua derivada:  $I = dq/dt$ . A equação de movimento de cada grau de liberdade do sistema pêndulo-shaker é dada por:

$$\begin{aligned}
\theta : & \quad Ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + Mg \sin \theta = M\ddot{X}_a \sin \theta + T_C / l \\
X_a : & \quad (M_a + M)\ddot{X}_a + c_a(\dot{X}_a - \dot{X}_b) + k_a(X_a - X_b) \\
& \quad = (M_a + M)g + Ml\ddot{\theta} \sin \theta + Ml\dot{\theta}^2 \cos \theta - \kappa I \\
X_b : & \quad M_b\ddot{X}_b + c_b\dot{X}_b - c_a(\dot{X}_a - \dot{X}_b) + k_bX_b - k_a(X_a - X_b) \\
& \quad = M_b g + \kappa I \\
I : & \quad R_E I + L \frac{dI}{dt} - \kappa(\dot{X}_a - \dot{X}_b) = E_0 \cos(\Omega t)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $T_C$  corresponde a atuação do parâmetro de controle e consiste em um torque aplicado diretamente ao pêndulo. Considerando-se as variáveis de estado  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = \{\theta, \dot{\theta}, X_a, \dot{X}_a, X_b, \dot{X}_b, I\}$ , as equações de movimento podem ser reescritas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{(T_C / l - clx_2)(M_a + M) - [c_a(x_4 - x_6) + k_a(x_3 - x_5) + \kappa x_7]M \sin x_1 + M^2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{Ml(M_a + M - M \sin^2 x_1)} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{(M_a + M)g + Ml\dot{\theta}^2 \cos \theta - \kappa x_7 - c_a(x_4 - x_6) - k_a(x_3 - x_5) - clx_2 \sin x_1 - mg \sin^2 x_1}{M_a + M - M \sin^2 x_1} \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{M_b g + \kappa x_7 - c_b x_6 + c_a(x_4 - x_6) - k_b x_5 + k_a(x_3 - x_5)}{M_b} \\
\dot{x}_7 &= \frac{E_0 \cos(\Omega t) - R_E x_7 + \kappa(x_4 - x_6)}{L}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

A partir da lei de controle do método ETDF, a atuação  $T_C$  é expressa pela equação:

$$T_C = \frac{Ml^2(M_a + M - M \sin^2 x_1)}{(M_a + M)} K[(1 - R)(x_\tau + Rx_{2\tau} + R^2 x_{3\tau}) - x], \tag{6.3}$$

considerando-se  $m=3$ .

Xu *et al.* (2007) apresentam uma análise numérica e experimental da dinâmica do sistema pêndulo-shaker. O modelo proposto e os parâmetros experimentais identificados, apresentados na Tabela 6.1, são utilizados nessa tese.

Tabela 6.1: Parâmetros do sistema pêndulo-shaker identificados experimentalmente  
(Xu *et al.*, 2007)

$M$	0.845 kg	$l$	0.3166 m	$c$	0.0475 kg/s
$M_a$	68.38 kg	$K_a$	86175.9 kg/s <sup>2</sup>	$C_a$	534.05 kg/s
$M_b$	820 kg	$K_b$	244284 kg/s <sup>2</sup>	$C_b$	679.35 kg/s
$R$	0.3 $\Omega$	$L$	$2.626 \times 10^{-3}$ H	$\kappa$	130 N/A

Inicialmente, realiza-se uma análise do comportamento do sistema sem controle. Para a construção do diagrama de bifurcação em relação à amplitude da tensão,  $E_0$ , considera-se  $\Omega = 9\text{rad/s}$ , um valor inicial de  $E_0=60\text{V}$  e um aumento quasi-estático do parâmetro. Além disso, os primeiros 200 períodos são descartados de forma a considerar apenas a resposta do sistema em regime permanente. O diagrama, apresentado na Figura 6.4, mostra bifurcações com duplicação de período que levam ao comportamento caótico e, depois, uma janela periódica relacionada a uma resposta de período-6. O atrator caótico para  $E_0 = 115\text{V}$  também é apresentado na Figura 6.4 considerando-se o espaço de fase restringido a  $(-\pi, +\pi)$ .

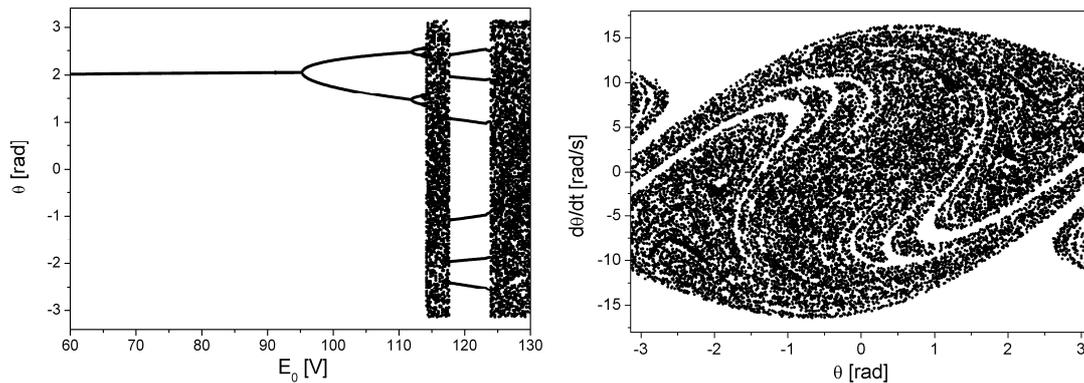


Figura 6.4: Diagrama de bifurcação construído com  $\Omega=9\text{rad/s}$  e seção de Poincaré com  $\Omega=9\text{rad/s}$  e  $E_0=115\text{V}$ .

Neste momento, outro diagrama de bifurcação é construído considerando-se uma variação quasi-estática da frequência de forçamento  $\Omega$  e para  $E_0=85\text{V}$ . A Figura 6.5 apresenta o diagrama construído a partir de três procedimentos diferentes: aumentando-se a frequência de forçamento, em rosa, e diminuindo-se a frequência com diferentes

condições iniciais, em preto e em cinza. Embora o sistema aparente ter comportamentos semelhantes para  $\Omega=12.2\text{rad/s}$  e  $\Omega=10.25\text{rad/s}$ , no primeiro caso três atratores periódicos coexistem enquanto no segundo caso coexistem dois atratores quase-periódicos e um atrator periódico. O espaço de fase das órbitas coexistentes em  $\Omega=12.25\text{rad/s}$ , duas de período-1 e uma de período-2, e em  $\Omega=12.2\text{rad/s}$ , duas quase-periódicas e uma de período-2, são mostradas na Figura 6.5.

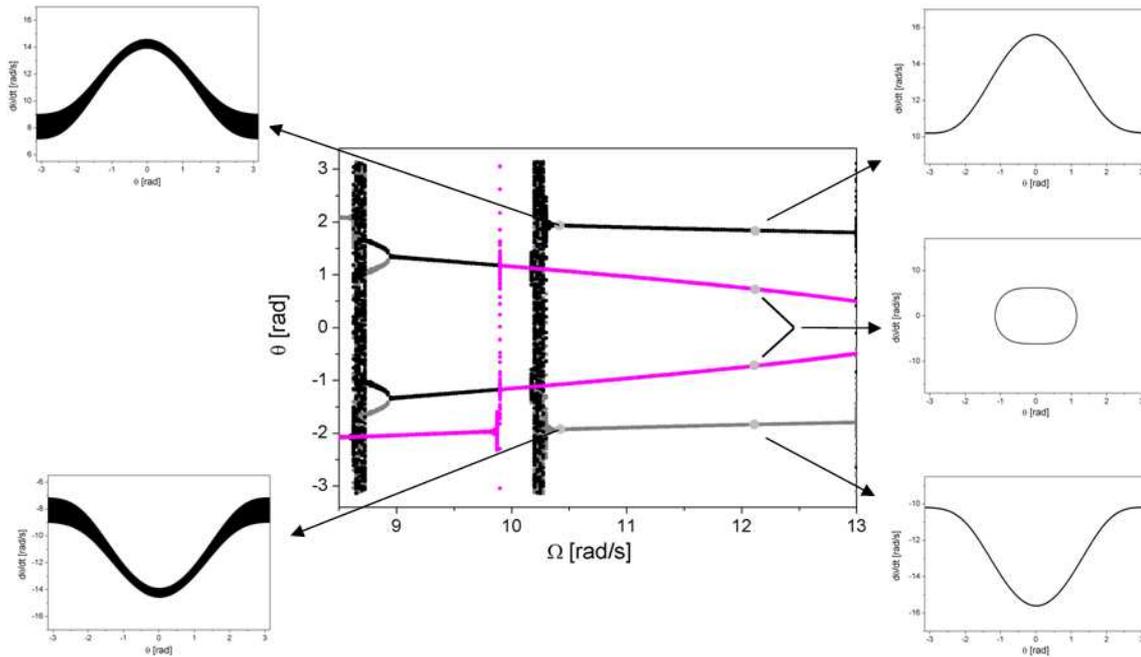


Figura 6.5: Diagrama de bifurcação com  $E_0=85\text{V}$  aumentando-se e diminuindo-se a frequência de forçamento.

Na construção dos diagramas de bifurcação apresentados na Figura 6.4 e na Figura 6.5, o último estado do sistema obtido para um valor do parâmetro que está sendo variado é considerado como condição inicial para o próximo valor deste parâmetro.

Após essa breve discussão sobre a dinâmica do sistema pêndulo-shaker, as técnicas de controle são aplicadas a seguir.

## 6.2 Controle do sistema Pendulo-Shaker

Nesta seção, empregam-se os métodos de controle de caos contínuos para estabilizar o comportamento do sistema. Diferentes situações interessantes no contexto

de colheita de energia são consideradas. Inicialmente, realiza-se o controle de caos clássico, onde OPIs imersas no atrator caótico são estabilizadas. Em seguida, evita-se a bifurcação com duplicação de período objetivando-se manter uma órbita rotativa de período-1. E, por último, evita-se a bifurcação para o caos a partir da estabilização da mesma órbita periódica rotativa de período-1. Cabe ressaltar que essa órbita de período-1 deve ser uma órbita natural do sistema.

### 6.2.1 Controle de Caos

Nesta seção, os métodos de controle de caos contínuos são empregados de forma a estabilizar OPIs do sistema pêndulo-shaker. A Figura 6.6(a) apresenta uma OPI de período-1 identificada pelo método dos pontos recorrentes próximos (Auerbach, 1987) para  $\Omega=9\text{rad/s}$  e  $E_0=115\text{V}$ , comportamento relacionado à seção de Poincaré apresentada na Figura 6.4. A Figura 6.6(b) mostra o expoente de Lyapunov máximo desta órbita considerando-se diferentes valores para os parâmetros de controle. A análise mostra que existem diferentes alternativas para valores negativos do expoente de Lyapunov máximo que podem ser utilizados para alcançar a estabilização do sistema.

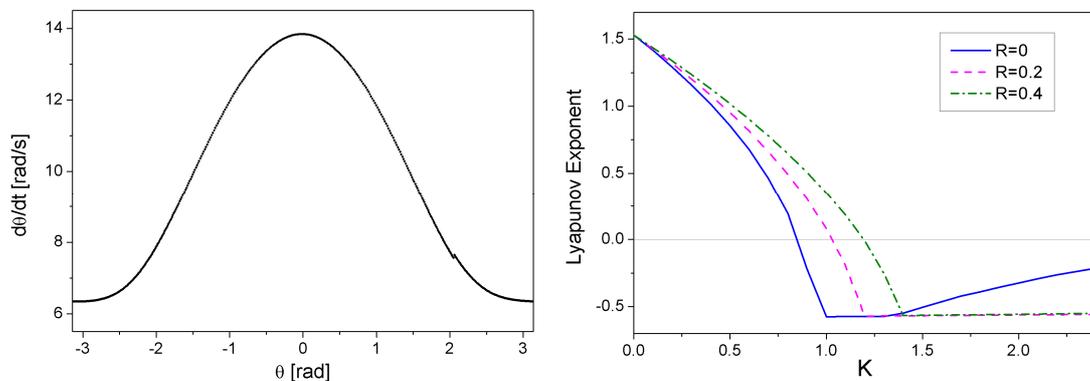


Figura 6.6: OPI de period-1 e seu expoente de Lyapunov máximo para diferentes parâmetros de controle.

Neste ponto, o controle é aplicado com objetivo de estabilizar a OPI de período-1 identificada, que consiste em um movimento rotativo, assumindo-se  $R=0$  e  $K=1.2$ . A Figura 6.7 mostra o deslocamento do pêndulo e o torque aplicado no tempo para condições iniciais  $x_0=\{-3,0,0,0,0,0\}$ , enquanto a Figura 6.8 apresenta o espaço de fase do pêndulo durante o controle com o estado permanente ressaltado em rosa.

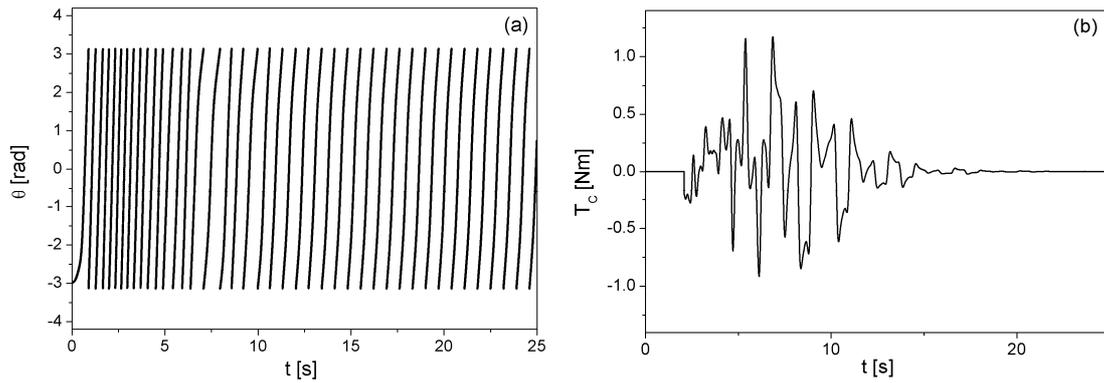


Figura 6.7: OPI de período-1 estabilizada para  $R = 0$ ,  $K = 1.2$  e  $x_0 = \{-3, 0, \dots, 0\}$ :  
 (a) Deslocamento do pêndulo; (b) Torque de controle aplicado.

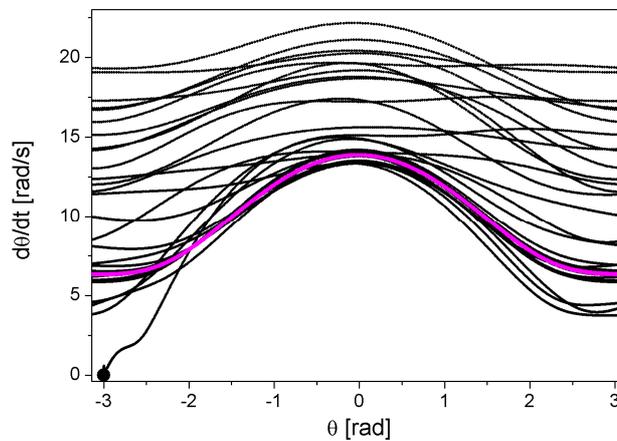


Figura 6.8: Espaço de fase do pêndulo com ação do controle para  $R=0$ ,  $K=1.2$  e  $x_0 = \{-3, 0, \dots, 0\}$  com estado permanente ressaltado em rosa.

### 6.2.2 Evitando bifurcação com duplicação de período

O emprego do controle de caos para evitar bifurcação com duplicação de período tem como objetivo manter estável a órbita rotativa de período-1. No caso do sistema analisado, a duplicação de período pode alterar o aproveitamento de energia, mas não consiste em um problema dramático dado que a órbita de período-2 também é rotativa. No entanto, esse tipo de bifurcação é indesejável em diversas situações como, por exemplo, no caso de flambagem de colunas ou saltos dinâmicos em treliças (Savi *et al.*, 2002b). Desta forma, esta abordagem torna-se interessante em diferentes aplicações.

A Figura 6.9(a) apresenta a órbita de período-1 para  $E_0=95.5V$  e  $\Omega=9rad/s$ , estável antes da duplicação de período e instável após a bifurcação. A Figura 6.9(b) mostra o expoente de Lyapunov máximo dessa órbita para diferentes parâmetros de controle,  $E_0=96V$  e  $\Omega=9rad/s$ , valores estes referentes ao comportamento do sistema

após a bifurcação com duplicação de período. A Figura 6.10 mostra o diagrama de bifurcação para  $\Omega=9\text{rad/s}$  sem ação de controle (em preto) e com ação de controle (em rosa) considerando-se dois conjuntos distintos de valores para os parâmetros de controle:  $R=0, K=0.6$  e  $R=0, K=1$ . Note que, no primeiro caso, a bifurcação com duplicação de período ocorre apenas para um valor mais elevado de  $E_0$  e o comportamento caótico é suprimido, já no segundo caso a órbita rotativa de período-1 é estabilizada em toda a faixa de amplitude analisada.

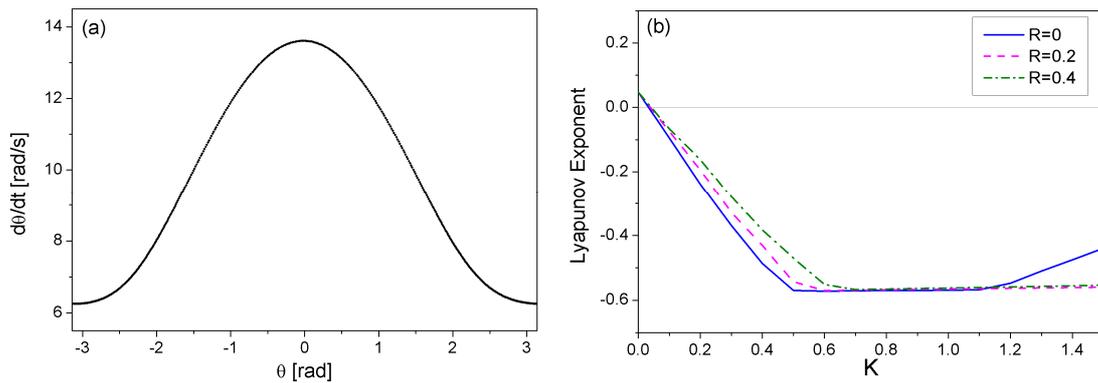


Figura 6.9: (a) Órbita de período-1 da resposta do pêndulo para  $E_0=95.5\text{V}$  e (b) expoente de Lyapunov máximo da órbita para  $E_0=96\text{V}$  e diferentes parâmetros de controle.

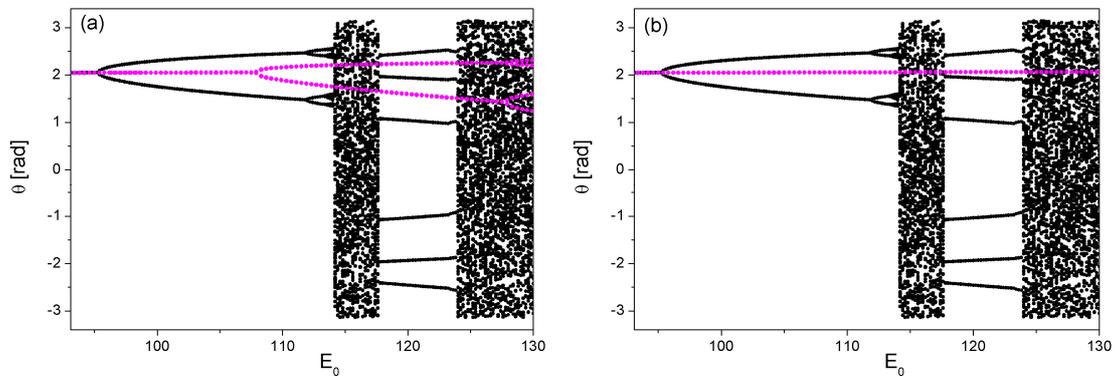


Figura 6.10: Diagrama de bifurcação para  $\Omega=9\text{rad/s}$  sem ação de controle (preto) e com controle (rosa): (a)  $R=0, K=0.6$  e (b)  $R=0, K=1$ .

### 6.2.3 Evitando bifurcação para o caos

Outra possibilidade relativa ao controle do sistema pêndulo-shaker é evitar a bifurcação para o caos e manter uma órbita rotativa estável. A Figura 6.11 apresenta algumas órbitas coexistentes identificadas no diagrama de bifurcação da Figura 6.5. A Figura 6.11(a) apresenta o espaço de fase de três órbitas: duas de período-1 e uma de

período-2 que coexistem para  $\Omega=12.2\text{rad/s}$  e  $E_0=85\text{V}$ . A Figura 6.11(b) apresenta o espaço de fase das mesmas órbitas para  $\Omega=10.25\text{rad/s}$  e  $E_0=85\text{V}$  mostrando que as órbitas de período-1 se transformam em comportamentos quasi-periódicos. Além disso, no caso dos comportamentos quasi-periódicos as seções de Poincaré também são apresentadas.

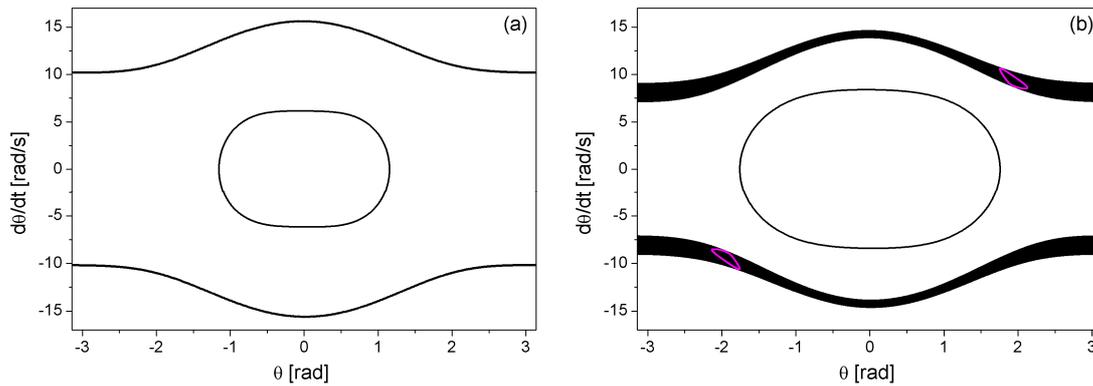


Figura 6.11: Espaço de fase dos atratores coexistentes: (a) Três periódicos em  $E_0=85\text{V}$  e  $\Omega=12.2\text{rad/s}$ ; e (b) Um periódico e dois quasi-periódicos, junto com suas seções de Poincaré, em  $E_0=85\text{V}$  e  $\Omega=10.25\text{rad/s}$ .

Neste momento, aplica-se o controle a essas órbitas. Inicialmente, considera-se o caso onde a frequência de forçamento é diminuída. O objetivo é manter a órbita rotativa, evitando a bifurcação para o caos. Além disso, uma vez que a órbita de período-2 não é rotativa, este comportamento não é desejável. Diminuindo-se a frequência de forçamento, o sistema apresenta a seguinte rota para o caos: período-1, comportamento quasi-periódico e caos. Dado que antes da bifurcação para o caos o sistema apresenta um comportamento quasi-periódico, considera-se a órbita periódica de período-1 “positiva” identificada em  $E_0=85\text{V}$  e  $\Omega=12.2\text{rad/s}$  como trajetória de referência. A Figura 6.12 apresenta os valores do expoente de Lyapunov máximo para essa órbita considerando-se diferentes parâmetros de controle para  $E_0=85\text{V}$  e  $\Omega=10.33\text{rad/s}$ , conjunto de parâmetros relacionado a um comportamento caótico sem ação de controle.

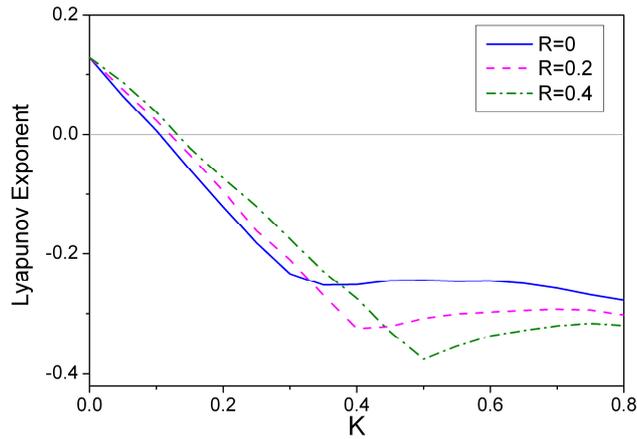


Figura 6.12: Expoente de Lyapunov máximo da órbita periódica de período-1 em  $E_0=85\text{V}$  e  $\Omega=10.33\text{rad/s}$  para diferentes parâmetros de controle.

Após a fase de aprendizagem, onde os parâmetros de controle relacionados à estabilização da órbita desejada são definidos, dá-se início a fase de controle. A Figura 6.13 apresenta o diagrama de bifurcação construído para  $E_0=85\text{V}$ , sem e com ação de controle (no caso com controle adota-se  $R=0.2$  e  $K=0.4$ ). Além disso, considera-se duas situações. Na primeira, as atuações do controlador começam apenas quando a trajetória do sistema entra na vizinhança da órbita de referência (Figura 6.13(a)). Este tempo de espera se faz necessário devido ao comportamento quasi-periódico. No caso em que esse tempo de espera não é considerado, o controlador não estabiliza o comportamento rotativo de referência com sucesso, como apresentado na Figura 6.13(b).

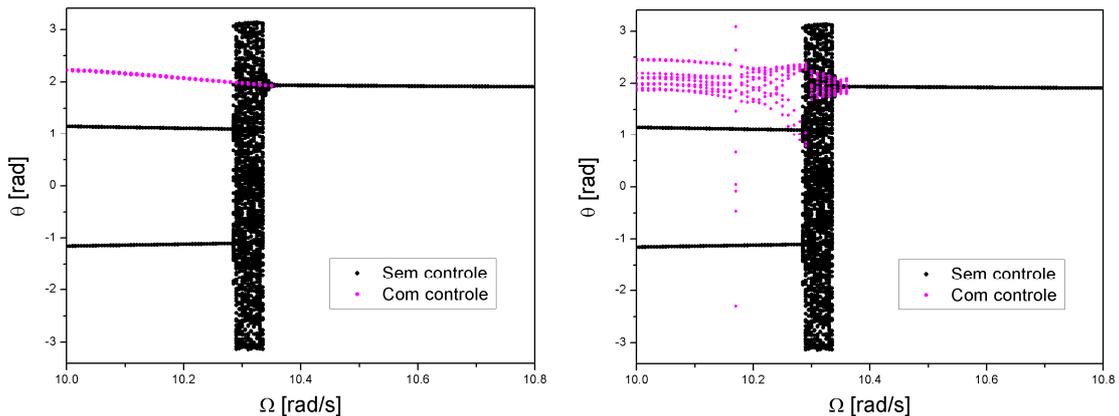


Figura 6.13: Diagrama de bifurcação em  $E_0=85\text{V}$  com e sem ação de controle. (a) Com tempo de espera; (b) Sem tempo de espera.

A Figura 6.14 apresenta o comportamento do sistema com ação de controle considerando-se o caso com tempo de espera, para  $E_0=85\text{V}$  e duas frequências de

forçamento distintas:  $\Omega=10.3\text{rad/s}$  e  $\Omega=10.15\text{ rad/s}$ . A partir dos resultados, tem-se que o comportamento caótico e a resposta periódica de período-2 são evitados e obtém-se um movimento rotativo, como desejado. É importante ressaltar que o comportamento obtido não é a órbita de período-1 de referência, no entanto, para o caso analisado o resultado é satisfatório.

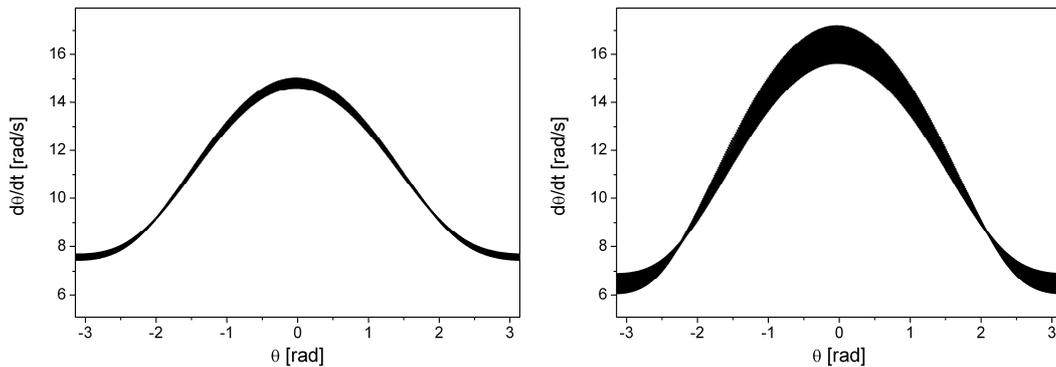


Figura 6.14: Resposta em regime permanente para o sistema com controle para  $E_0=85\text{V}$ .  
(a)  $\Omega=10.3\text{ rad/s}$ ; (b)  $\Omega=10.15\text{ rad/s}$ .

A partir dos resultados obtidos tem-se que a bifurcação é controlada nas duas situações analisadas, seja para evitar a duplicação de período ou para evitar a bifurcação para o caos. Em ambos os casos, os ganhos do controlador são calculados apenas uma vez. Para este cálculo, considera-se um conjunto de parâmetros relacionado ao comportamento do sistema logo após a bifurcação, tomando-se como referência uma órbita rotativa de período-1. No entanto, a estabilização é alcançada para uma faixa de valores (de tensão ou de frequência de forçamento) e não apenas para o parâmetro utilizado no cálculo dos ganhos. Este resultado é bastante interessante e mostra a robustez do método de controle.

Além disso, após ocorrer uma bifurcação, a órbita que antes era estável passa a ser uma órbita instável do sistema. A partir dos resultados obtidos, tem-se que essa OPI pode ser estabilizada em uma região com resposta não caótica, apesar dos métodos de controle empregados serem específicos para controle de caos. Esse resultado também é bastante interessante e pode ser explorado em diversas aplicações. Para os casos analisados, como o objetivo era evitar a bifurcação, a trajetória do sistema já se encontrava próxima da órbita de interesse, mesmo no caso com comportamento quase-periódico. No entanto, para estabilizar uma OPI em uma região sem comportamento caótico, torna-se interessante o uso de uma técnica de controle que leve a trajetória do

sistema para a vizinhança da órbita de interesse para, em seguida, ser empregado um dos métodos de controle de caos.

A escolha da utilização dos métodos de controle de caos contínuos para o caso abordado neste capítulo se deu pelas razões descritas a seguir. A órbita rotativa desejada consiste em uma OPI de período-1, ou seja, possui baixa periodicidade. Considerando-se a aplicação real, existe uma variação significativa das ondas do mar devido ao ambiente, desta forma, o sistema de controle deve ser suficientemente robusto para que a solução rotativa seja mantida apesar de situações críticas. Dentre os métodos analisados neste trabalho, as estratégias de controle contínuas foram as que apresentaram maior robustez. Outro fator relevante, embora menos definitivo, é que para o emprego das técnicas de controle contínuas não é necessária a construção de seções de controle, o que torna sua implementação mais simples. Além disso, é importante ressaltar que para determinar os parâmetros de controle é necessário o conhecimento das equações que governam o sistema. Desta forma, é necessário ter algum conhecimento sobre o sistema analisado, assim como da excitação da base. No entanto, como o sistema analisado não é muito complexo, isso não representa um problema.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma análise da capacidade de estabilização de um sistema em regime caótico a partir do emprego de diferentes métodos de controle de caos. Dentre eles, dois são discretos – método OGY e método OGY multiparâmetros – dois são semi-contínuos – método semi-contínuo (SC) e método semi-contínuo multiparâmetros – e dois são contínuos – método por realimentação com estados defasados (TDF) e por realimentação com estados defasados estendidos (ETDF). Além disso, no caso dos métodos multiparâmetros duas abordagens são apresentadas, acoplada e desacoplada, que se referem ao acoplamento, ou não, dos parâmetros de controle. As formulações dos métodos multiparâmetros são propostas nesta tese, sendo contribuições inéditas na literatura.

Inicialmente, é feita uma revisão bibliográfica que revela a importância do estudo e do controle de caos em sistemas mecânicos. Nota-se também a incorporação recente de técnicas da teoria de controle convencional no tratamento de sistemas caóticos.

Um pêndulo não-linear é o primeiro dispositivo considerado como aplicação. Utilizando-se de técnicas adequadas, verifica-se que o sistema apresenta uma dinâmica caótica para determinados conjuntos de parâmetros. Considerando-se uma das configurações em que o sistema apresenta comportamento caótico, discute-se a estabilização do pêndulo em suas órbitas periódicas instáveis a partir do emprego de todos os métodos abordados.

A partir da análise do desempenho dos métodos de controle, tem-se que 3 procedimentos apresentam indicativos para uma boa performance na estabilização do sistema analisado: o SC; o SC multiparâmetros, abordagens acoplada e desacoplada; e o ETDF. Estas estratégias de controle são aplicadas ao pêndulo não-linear a partir da utilização de regras de controle, e seus desempenhos são comparados.

Inicialmente, na análise comparativa considera-se sinais ideais, sem ruídos. A partir desta análise pode-se verificar que os métodos semi-contínuos conferem maior flexibilidade ao sistema, na medida em que mais órbitas podem ser estabilizadas e é possível trocar a trajetória do sistema de uma para outra conforme seja necessário. Dentre estes métodos, o método SC multiparâmetros acoplado apresentou a melhor eficácia entre todas as formulações apresentadas, sendo essa eficácia medida pela

quantidade das OPIs identificadas que são estabilizadas. O método SC multiparâmetros desacoplado também apresentou uma eficácia bastante alta e, como vantagem em relação a abordagem acoplada, dispensa a identificação de valores adequados de  $\beta_a$  e  $\beta_p$ . O método ETDF apresentou uma eficácia muito baixa, a menor dentre os métodos analisados, o que confere pouca flexibilidade ao sistema.

Considerando-se a análise comparativa na presença de ruído de observação, o ETDF apresentou a melhor robustez. O desempenho obtido na presença de ruídos foi muito superior ao desempenho dos demais métodos analisados. Dentre os métodos semi-contínuos, a maior robustez obtida foi pelo método SC multiparâmetros desacoplado. Além disso, tem-se que para um mesmo nível de ruído de observação a estabilização das OPIs pelos métodos semi-contínuos é mais sensível ao ruído que no emprego do método contínuo.

Na avaliação da robustez dos métodos de controle dependentes das equações que governam o sistema, apresenta-se ainda uma análise considerando-se imprecisões em sua modelagem. Esta imprecisão é expressa a partir de incertezas no conhecimento do amortecimento presente. A partir dessa análise, nota-se que a influência na estabilização do sistema é maior para OPIs de maior periodicidade.

Além da robustez, como vantagem, no ETDF as atuações podem começar assim que se inicia a fase de controle, não sendo necessário esperar que a trajetória do sistema entre na vizinhança de um dos pontos de controle, como ocorre obrigatoriamente nos métodos discretos. No entanto, em alguns casos a consideração do tempo de espera pode melhorar a eficácia dos métodos contínuos, como obtido no controle de bifurcações apresentado no capítulo 6. Como desvantagem, no emprego do ETDF algumas órbitas estabilizadas são diferentes das desejadas.

Tem-se ainda uma questão bastante relevante no que diz respeito ao cálculo dos parâmetros do controlador. Nos métodos semi-contínuos, toda a fase de aprendizagem é realizada a partir apenas de séries temporais, com exceção da determinação dos valores dos  $\beta$ 's no caso do método SC multiparâmetros acoplado. No caso do ETDF os parâmetros do controlador são definidos a partir das equações que governam a dinâmica do sistema, através do cálculo dos expoentes de Lyapunov máximos de cada OPI. Experimentalmente, não seria possível o cálculo dos expoentes para cada OPI. Alguns autores, no entanto, apresentam como vantagem dos métodos por realimentação a não necessidade de conhecimento da dinâmica do sistema para a sua implementação. Eles

apontam que a estabilização do sistema pode ser alcançada simplesmente adotando-se como defasagem a periodicidade da OPI a ser estabilizada e o ganho é aumentado até que a órbita seja estabilizada, ou seja, por tentativa e erro. A partir deste procedimento, inclusive, seria possível identificar OPIs. No entanto, se o interesse for estabilizar uma OPI previamente identificada, como no caso deste trabalho, é necessário o conhecimento das equações de movimento do sistema de forma a identificar os parâmetros do controlador, principalmente no caso do ETDF, onde além do ganho,  $K$ , tem-se também o valor de  $R$  a ser definido.

Finalizada a análise comparativa, apresenta-se um segundo sistema, constituído por um pêndulo excitado parametricamente através de um shaker eletro-dinâmico. O estudo desse sistema é motivado pelo conceito de colheita de energia e tem-se como objetivo estabilizar OPIs rotativas do pêndulo. Apesar desse dispositivo apresentar soluções rotativas, existem bifurcações que podem desestabilizar este tipo de resposta. Neste contexto, o método ETDF é empregado ao sistema pêndulo-shaker em três etapas distintas: num primeiro momento uma OPI de período-1 rotativa é estabilizada quando o sistema encontra-se em regime caótico; em seguida, evita-se uma bifurcação com duplicação de período, mantendo-se estável uma órbita rotativa de período-1; e, finalmente, evita-se uma bifurcação para o caos e conserva-se novamente uma órbita rotativa.

Nas três situações analisadas, o emprego do método ETDF alcançou o objetivo desejado com sucesso. Além disso, algumas questões importantes foram observadas e são descritas a seguir.

No caso do controle de bifurcação, os parâmetros do controlador são calculados apenas para um conjunto de parâmetros. No entanto, a estabilização do sistema é alcançada para uma faixa de valores (de tensão ou de frequência de forçamento). Este resultado é bastante interessante e mostra a robustez do método.

Outra conclusão bastante relevante é que OPIs podem ser estabilizadas mesmo quando o sistema não apresenta comportamento caótico, apesar das técnicas utilizadas serem específicas para controle de caos. Esse resultado pode ser explorado em diversas aplicações. Além disso, para estabilizar uma OPI em uma região sem comportamento caótico, torna-se interessante o uso de uma técnica de controle que leve a trajetória do sistema para a vizinhança da órbita de interesse para, em seguida, ser empregado um dos métodos de controle de caos.

A escolha de um método adequado para o controle da bifurcação foi possível a

partir da análise comparativa e se deu pelas seguintes razões: baixa periodicidade da OPI de interesse; robustez necessária para estabilização do sistema em situações reais; e não necessidade da construção de seções de controle. Além disso, é importante ressaltar que para determinar os parâmetros do controlador é necessário o conhecimento das equações que governam o sistema. Desta forma, é necessário ter algum conhecimento sobre o sistema analisado, assim como da excitação da base.

## APÊNDICE - CONTROLE DE CAOS EM MAPAS UTILIZANDO O MÉTODO OGY MULTIPARÂMETROS DESACOPLADO

Neste apêndice o método OGY multiparâmetros, abordagem desacoplada, é empregado para estabilizar um mapa com resposta caótica considerando-se 2 parâmetros de controle. Neste contexto, os mapas de Hénon e Ikeda são analisados.

O mapa de Hénon é um mapa de duas dimensões simples com uma não-linearidade quadrática. Este mapa forneceu o primeiro exemplo de atrator estranho com estrutura fractal (SONIS, 1996). Como sugerido por Hénon (1976), esse mapa bidimensional é uma versão simples do problema original que descreve o escoamento de fluidos em um espaço tridimensional. O mapa de Ikeda também é bidimensional e originalmente representa uma sequência de pulsos de luz colidindo em um espelho parcialmente transmissor (HAMMEL *et al.*, 1985).

De forma a avaliar a capacidade do método multiparâmetros desacoplado em estabilizar OPIs dos mapas, considera-se regras de controle que buscam a estabilização sequencial de quatro OPIs diferentes. Além disso, de forma a estabelecer uma comparação entre o método OGY multiparâmetros desacoplado e o método OGY com um único parâmetro de controle, a mesma regra de controle é empregada para ambos os casos.

### Controle do mapa de Hénon

Matematicamente, o mapa de Hénon pode ser expresso pela equação a seguir (HÉNON, 1976):

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (\alpha + \delta\alpha) + (\beta + \delta\beta)Y_n - X_n^2 \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\delta\alpha$  é o primeiro parâmetro de controle enquanto  $\delta\beta$  é o segundo parâmetro.

A Figura 1 apresenta o atrator estranho do mapa de Hénon para  $\beta = 0.3$  e  $\alpha = 1.4$ . Para esses valores dos parâmetros aplicam-se os métodos OGY e o OGY multiparâmetros desacoplado.

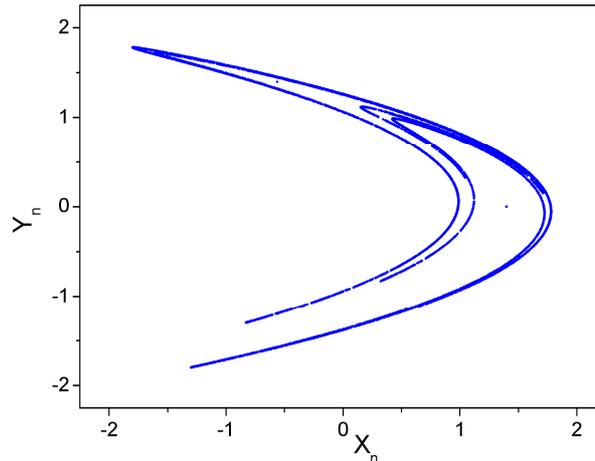


Figura 1. Atrator estranho do mapa de Hénon para  $\beta = 0.3$  e  $\alpha = 1.4$ .

A identificação de OPIs é realizada considerando-se 10000 iterações do mapa e uma tolerância de 0.01 no emprego do método dos pontos recorrentes próximos (AUERBACH *et al.*, 1987). A partir dessas considerações, 32 OPIs são identificadas durante a fase de aprendizagem, considerando-se periodicidade até 15. Define-se então uma regra de controle que considera a sequência de OPIs a seguir: uma órbita de período-1 durante as 500 primeiras iterações, uma de período-15 nas iterações de 500 a 1000, uma de período-4 de 1000 a 1500 e, finalmente, uma de período-7 de 1500 a 2000.

No emprego dos métodos de controle de caos considera-se como atuações máximas  $\delta\alpha_{\max} = \delta\beta_{\max} = 0.09$ . Quando o valor da perturbação calculado for maior que este, o atuador realiza uma perturbação igual ao máximo admitido. As posições de referência para ambos os parâmetros são  $\delta\alpha_0 = \delta\beta_0 = 0$ .

A Figura 2 apresenta os resultados do emprego do método OGY multiparâmetros desacoplado. Por outro lado, os resultados da estabilização para o emprego do método OGY com um único parâmetro de controle são apresentados na Figura 3 (onde  $\delta\alpha$  é o parâmetro de controle) e na Figura 4 (onde  $\delta\beta$  é o parâmetro de controle). Todas essas Figuras apresentam o deslocamento e as perturbações realizadas. Na Figura 2, as perturbações dos dois parâmetros são apresentadas juntas, no entanto, cabe ressaltar que apenas um parâmetro de controle é perturbado em cada iteração do sistema e, quando isso ocorre, o outro está em sua posição de referência. A partir dos resultados apresentados, tem-se que tanto pelo emprego do método OGY como do OGY multiparâmetros é possível alcançar a estabilização da regra de controle com sucesso.

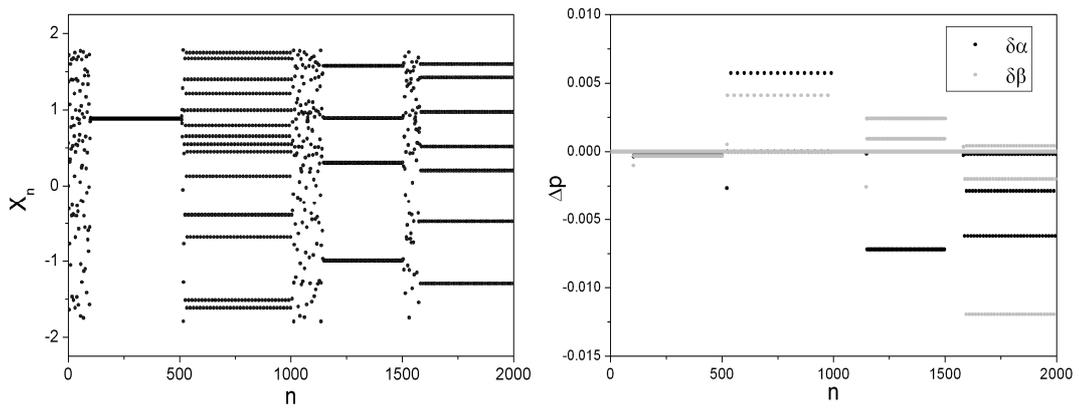


Figura 2. Estabilização do mapa de Hénon a partir do emprego do método OGY multiparâmetros desacoplado: (a) Deslocamento; (b) Perturbações dos parâmetros.

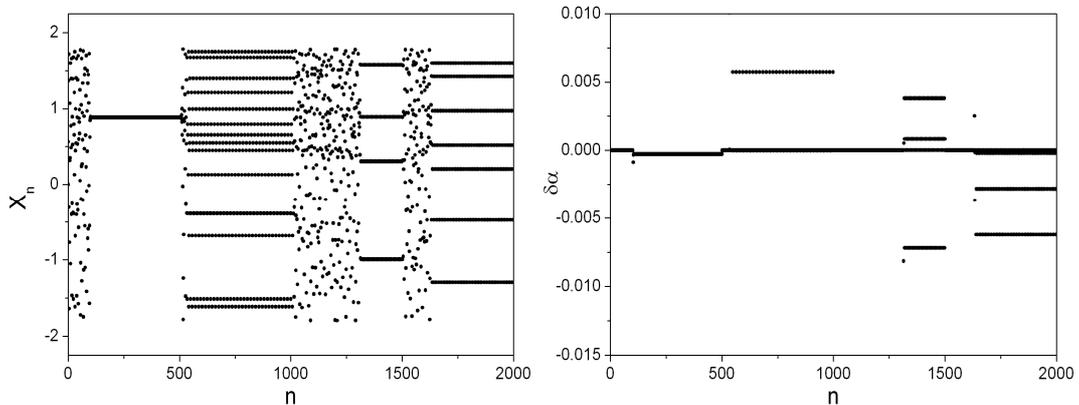


Figura 3. Estabilização do mapa de Hénon a partir do emprego do método OGY com o parâmetro de controle  $\delta\alpha$ : (a) Deslocamento; (b) Perturbações do parâmetro.

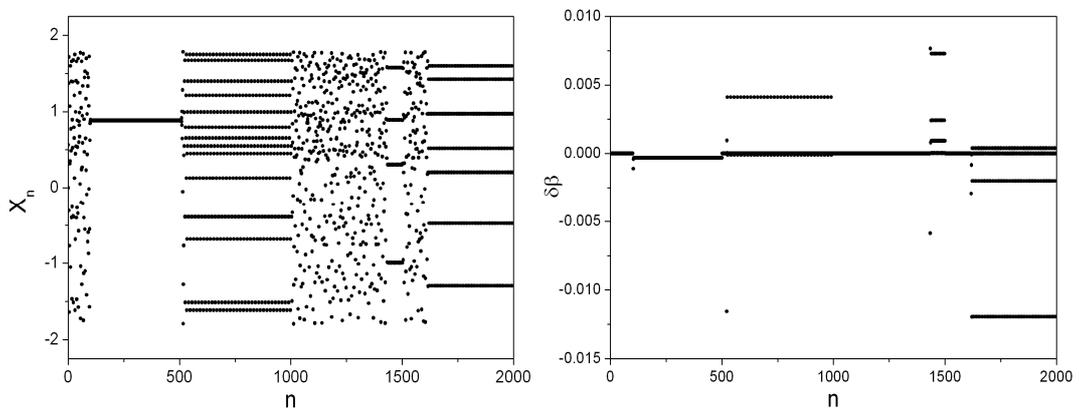


Figura 4. Estabilização do mapa de Hénon a partir do emprego do método OGY com o parâmetro de controle  $\delta\beta$ : (a) Deslocamento; (b) Perturbações do parâmetro.

## Controle do mapa de Ikeda

Matematicamente, o mapa de Ikeda pode ser expresso pela equação a seguir (HAMMEL, 1985):

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (\alpha + \delta\alpha) + (\mu + \delta\mu)(X_n \cos[t_n] - Y_n \sin[t_n]) \\ Y_{n+1} &= (\mu + \delta\mu)(X_n \cos[t_n] - Y_n \sin[t_n]) \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $t_n = \beta - \frac{\gamma}{1 + X_n^2 + Y_n^2}$ ,  $\delta\alpha$  é o primeiro parâmetro de controle enquanto  $\delta\mu$  é o segundo parâmetro de controle.

No emprego dos métodos de controle considera-se  $\delta\alpha_{\max} = \delta\mu_{\max} = 0.05$  como atuações máximas permitidas. Novamente, quando o valor da perturbação calculado for maior que este, o atuador realiza uma perturbação igual ao valor máximo admitido. As posições de referência para ambos os parâmetros são  $\delta\alpha_0 = \delta\mu_0 = 0$ .

A Figura 5 apresenta o atrator estranho do mapa de Ikeda para  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 7$ ,  $\mu = 0.9$  e  $\alpha = 1.25$ . Os métodos de controle são empregados para estes valores de parâmetros.

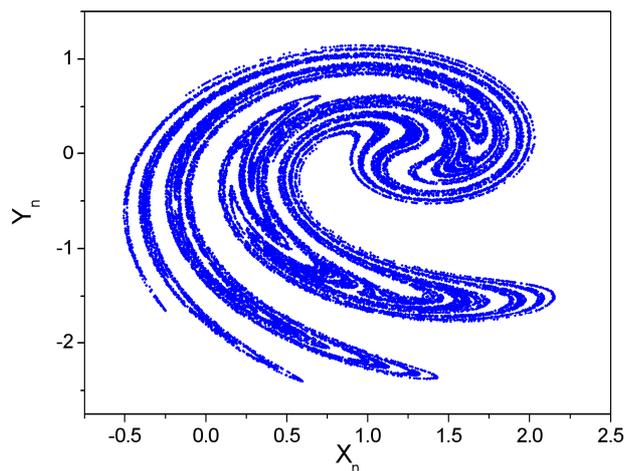


Figura 5. Atrator estranho do mapa de Ikeda para  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 7$ ,  $\mu = 0.9$  e  $\alpha = 1.25$ .

Para a identificação de OPIs considera-se 30000 iterações do mapa e uma tolerância de 0.005 no emprego do método dos pontos recorrentes próximos. A partir dessas considerações, 8 OPIs são identificadas considerando-se periodicidade até 15. A

regra de controle considera a seguinte sequência de OPIs: uma órbita de período-10 durante as 500 primeiras iterações, uma de período-14 nas iterações de 500 a 1000, uma de período-8 de 1000 a 1500 e, finalmente, uma de período-5 de 1500 a 2000.

A Figura 6 apresenta os resultados da estabilização da regra de controle a partir do emprego do método OGY multiparâmetros desacoplado. Por outro lado, os resultados da estabilização para o emprego do método OGY com um único parâmetro de controle são apresentados na Figura 7 (onde  $\delta\alpha$  é o parâmetro de controle) e na Figura 8 (onde  $\delta\mu$  é o parâmetro de controle). Todas essas Figuras apresentam o deslocamento e as perturbações realizadas. Na Figura 6 as perturbações dos dois parâmetros são apresentadas juntas. No entanto, cabe ressaltar que apenas um parâmetro de controle é perturbado em cada iteração do sistema e, quando isso ocorre, o outro está em sua posição de referência. Os resultados mostram que a partir do emprego da abordagem desacoplada do método OGY multiparâmetros todas as órbitas da regra de controle são estabilizadas com sucesso. Observando-se os resultados do emprego do método OGY com um único parâmetro de controle, no entanto, tem-se que nem todas as órbitas da regra de controle são estabilizadas. A Figura 7 mostra que no emprego do método OGY com a utilização do primeiro parâmetro de controle,  $\delta\alpha$ , não é possível estabilizar a primeira órbita da regra de controle. Por outro lado, a partir da utilização do segundo parâmetro de controle,  $\delta\mu$ , a terceira órbita da regra não é estabilizada (Figura 8). Esses resultados mostram que o método OGY multiparâmetros desacoplado pode ser mais eficaz na estabilização de OPIs que o método OGY com um único parâmetro de controle.

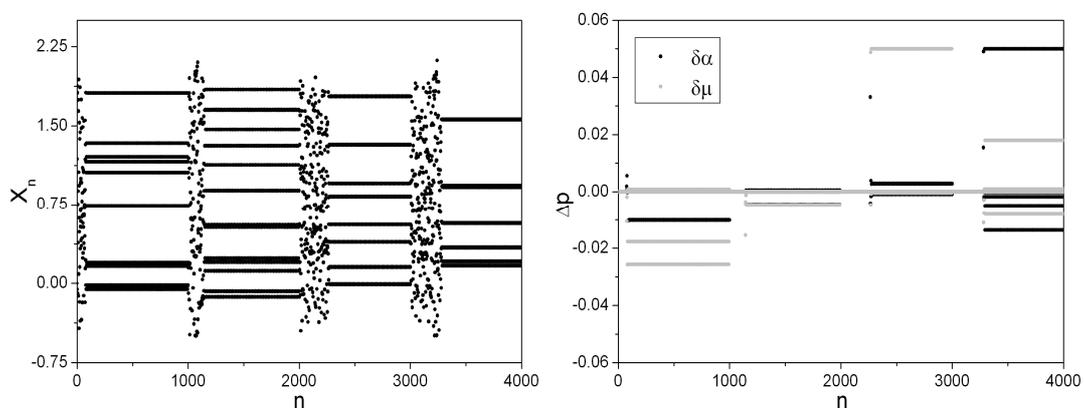


Figura 6. Estabilização do mapa de Ikeda a partir do emprego do método OGY multiparâmetros desacoplado: (a) Deslocamento; (b) Perturbações dos parâmetros.

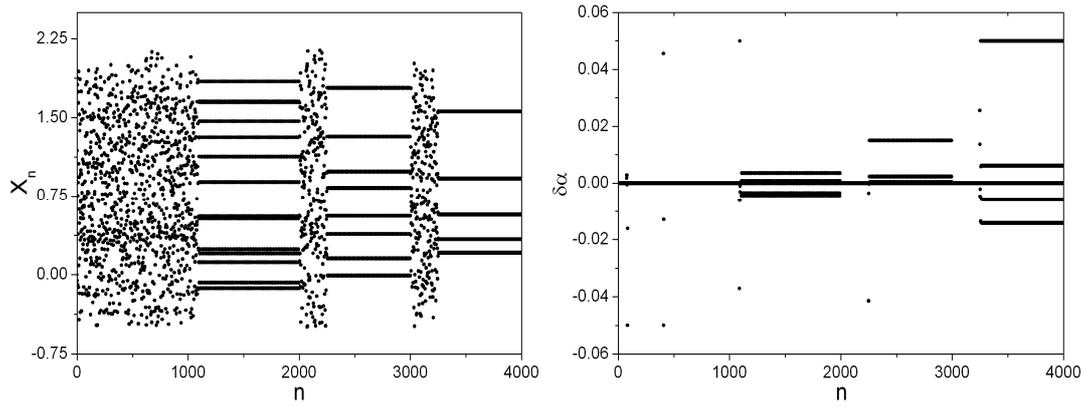


Figura 7. Estabilização do mapa de Ikeda a partir do emprego do método OGY com o parâmetro de controle  $\delta\alpha$ : (a) Deslocamento; (b) Perturbações dos parâmetros.

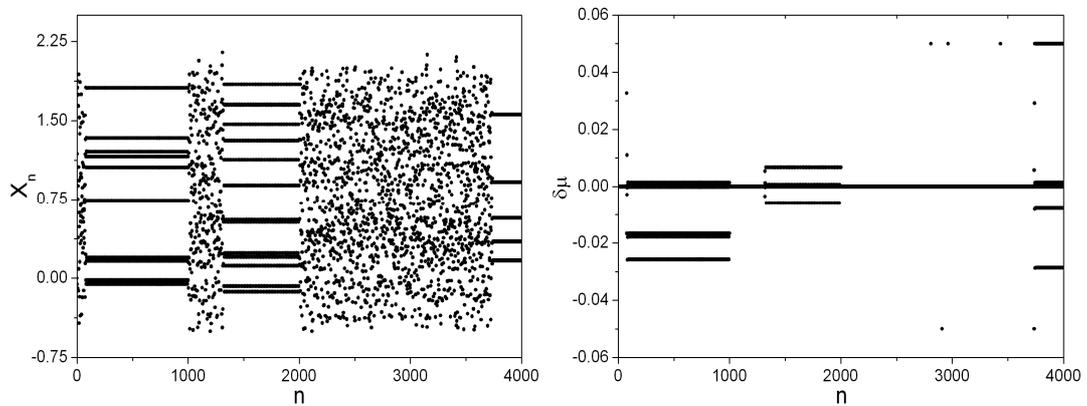


Figura 8. Estabilização do mapa de Ikeda a partir do emprego do método OGY com o parâmetro de controle  $\delta\mu$ : (a) Deslocamento; (b) Perturbações dos parâmetros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abarbanel, H. D. I., Korzinov, L., Mees, A. I. & Starobinets, I. M., 1997, “Optimal control of nonlinear systems to given orbits”, *Systems & Control Letters*, v.31, pp.263-276.
- Ahlborn, A. & Parlitz, U., 2004, “Stabilizing Unstable Steady States Using Multiple Delay Feedback Control”, *Physical Review Letters*, v.93, pp.264101.
- Alasty, A. & Salarieh, H., 2005, “Controlling the chaos using fuzzy estimation of OGY and Pyragas controllers”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.26, pp.379-392.
- Andrievskii, B. R. & Fradkov, A. L., 2003, “Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods”, *Automation and Remote Control*, v. 64, n. 5, pp. 673-713.
- Andrievskii, B. R. & Fradkov, A. L., 2004, “Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications”, *Automation and Remote Control*, v. 65, n. 4, pp. 505-533.
- Arecchi, F. T., Boccaletti, S., Ciofini, M. & Meucci, R., 1998, “The Control Of Chaos: Theoretical Schemes And Experimental Realizations”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 8, n. 8, pp. 1643-1655.
- Aston, P. J. & Bird, C. M., 1997, “Analysis of the Control of Chaos – Extending the Basin of Attraction”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.8, n.9, pp.1413-1429.
- Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J. -P., Gunaratne, G. & Procaccia, I., 1987, “Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits”, *Physical Review Letters*, v.58, n.23, pp.2387-2389.
- Babloyantz, A. & Destexhe, A., 1988, “Is the normal heart a periodic oscillator?”, *Biological Cybernetics*, v.58, pp.203-211.
- Barreto, E. & Grebogi, C., 1995. “Multiparameter Control of Chaos”, *Physical Review E*, v.54, n.4, pp.3553-3557.
- Battelli, F. & Feckan, M., 2005, “Chaos in the Beam Equation”, *Journal of Differential Equations*, v.209, pp.172-227.
- Bayly, P. V. & Virgin, L. N., 1994, “Practical considerations in the control of chaos”, *Physical Review E*, v.50, n.1, pp.604-607.

- Bessa, W. M., de Paula, A. S. & Savi, M. A., 2009, “Chaos Control Using an Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller with Application to a Nonlinear Pendulum”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.42, pp.784-791.
- Bielawski, S., Bouazaoui, M., Derozier, D. & Glorieux, P., 1993, “Stabilization and characterization of unstable steady states in a laser”, *Physical Review A*, v.47, pp.3276-3279.
- Blackburn, J.A. & Baker, G.L., 1998, “A Comparison of Commercial Chaotic Pendulums”, *American Journal of Physics*, v.66, n.9, pp.821-829.
- Boccaletti, S. & Arecchi, F. T., 1995, “Adaptive Control of Chaos”, *Europhysics Letters*, v.31, pp.127-132.
- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.-C., Mancini, H. & Maza, D., 2000, “The control of chaos: theory and applications”, *Physics Reports*, v.329, pp.103-197.
- Bowong, S. & Kakmeni, F. M. M., 2003, “Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems”, *Physics Letters A*, v.316, pp.206-217.
- Bretthauer, C., Müller, C. & Reinecke, H., 2009, “Design and fabrication of a MEMS-based metal hydride/air accumulator for energy harvesting”, *Electrochimica Acta*, v.54, Issue 25, pp.6094-6098.
- Cao, Y. J., 2000, “A nonlinear adaptative approach to controlling chaotic oscillators”, *Physics Letters A*, v.270, pp.171-176.
- Carrol, T. L., Triandaf, I., Schwartz, I. & Pecora, L., 1992, “Tracking unstable orbits in an experiment”, *Physical Review A*, v.46, n.10, pp.6189-6192.
- Chen, G., 1994, “Optimal control of chaotic systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v.4, n.2, pp.461-463.
- Chen, G., 1997, “On some controllability conditions for chaotic dynamics control”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.8, n.9, pp.1461-1470.
- Chen, G., 2001, “Introduction to chaos control and anti-control”, In: Leung, T. P.; Qin, H. -S., *Advanced Topics in Nonlinear Control Systems*, Singapore: World Scientific Pub. Co., 2001, cap. 6, pp.193-245.
- Chen, G. & Yu, X., 1999, “On Time-Delayed Feedback Control of Chaotic Systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, v.46, n.6, pp.767-772.
- Chen, G. & Yu, X., 2003, “*Chaos Control – Theory and Applications*”, Nova Iorque: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- Christini, D. J., Collins, J. J. & Linsay, P. S., 1996, “Experimental Control of High-dimensional Chaos: The Driven Double Pendulum”, *Physical Review E*, v.54, n.5, pp.4824-4827.
- Christini, D. J., In, V., Spano, M. L., Ditto, W. L. & Collins, J. J., 1997, “Real-time experimental control of a system in its chaotic and nonchaotic regimes”, *Physical Review E*, v.56, n.4, pp.R3749-R3752.
- Clifford, M. J. & Bishop, S. R., 1995, “Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum”, *Physics Letters A*, v.201, n.2-3, pp. 191-196.
- Clifford, M. J. & Bishop, S. R., 1996, “Locating oscillatory orbits of the parametrically-excited pendulum”, *Journal of the Australian Mathematical Society Series B - Applied Mathematics*, v.37, pp.309-319.
- Cunningham, W. J., 1954, “A nonlinear differential-difference equation of growth”, *Mathematics*, v.40, pp.708-713.
- D’Humieres, D., Beasley, M.R., Huberman, B.A. & Libehaber, A., 1982, “Chaotic States and Routes to Chaos in the Forced Pendulum”, *Physical Review A*, v.26, n.6, pp.3483-3496.
- De Paula, A. S., 2005, “*Caos em Sistemas Mecânicos: Análise Experimental em um Pêndulo Não-Linear*”, Trabalho Final de Curso de Graduação.
- De Paula, A. S., Savi, M. A. & Pereira-Pinto, F. H. I., 2006, “Chaos and Transient Chaos in an Experimental Nonlinear Pendulum”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 294, n. 3, p. 585-595.
- De Paula, A. S. & Savi, M. A., 2008, “A Multiparameter Chaos Control Method Applied to Maps”, *Brazilian Journal of Physics*, v. 38, pp. 537-543.
- De Paula, A. S. & Savi, M. A., 2009a, “Controlling Chaos in a Nonlinear Pendulum Using an Extended Time-Delayed Feedback Control Method”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.42, n.5, pp.2981-2988.
- De Paula, A. S. & Savi, M. A., 2009b, “A Comparative Analysis of Chaos Control Methods”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Submetido.
- De Paula, A. S. & Savi, M. A., 2009c, “A multiparameter chaos control method based on OGY approach”, *Chaos Solitons and Fractals*, v.40, n.3, pp.1376-1390.
- DeSerio, R., 2003, “Chaotic Pendulum: The Complete Attractor”, *American Journal of Physics*, v.71, n.3, pp.250-256.

- Ditto, W. L., Rauseo, S. N. & Spano, M. L., 1990, “Experimental Control of Chaos”. *Physical Review Letters*, v. 65, n. 26, p. 3211-3214.
- Ditto, W. L., Spano, M. L. & Lindner, J. F., 1995, “Techniques for the control of chaos”. *Physica D*, v. 86, pp. 198-211.
- Divenyi, S., Savi, M. A., Weber, H. I. & Franca, L. F. P., 2008, “Experimental investigation of an oscillator with discontinuous support considering different system aspects”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 38, pp. 685-695.
- Dressler, U. & Nitsche, G., 1992, “Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates”, *Physical Review Letters*, v.68, n.1, pp.1-4.
- Dubé, L. J. & Després, P., 2000, “The Control of Dynamical Systems – Recovering Order from Chaos” -, In: *The Physics of Electronic and Atomic Collisions*, ed. Y. Itikawa, AIP Conference Proceedings 500, pp. 551-570.
- Feigenbaum, M. J., 1978, “Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations”, *Journal of Statistical Physics*, v.19, pp.25-52.
- Feigenbaum, M. J., 1979, “The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations”, *Journal of Statistical Physics*, v.21, pp.669-706.
- Eckmann, J., -P. & Ruelle, D., 1985, “Ergodic Theory os Chaos ans Strange Attractors”, *Reviews of Modern Physics*, v.57, part I, pp.617-656.
- Farmer, J. D., 1982, “Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system”, *Physica D*, pp.366-393.
- Feeny, B. F. & Liang, J. W., 1996, “A Decrement method for the simultaneous estimation of coulomb and viscous friction”, *Journal of Sound and Vibration*, v.195, pp.149-154.
- Femat, R., Ramírez, J. A. & González, J., 1997, “A strategy to control chaos in nonlinear driven oscillators with least prior knowledge”, *Physics Letters A*, v. 224, pp. 271-276.
- Fiedler, B., Flunkert, V., Georgi, M., Hövel, P., & Schöll, E., 2007, “Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control”, *Physical Review Letters*, v.98, pp. 114101.
- Foong, C-H., Pavlovskaja, E., Wiercigrch, M. & Deans, W. F., 2003, “Chaos caused by fatigue crack growth”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.16, pp.651-659.
- Fradkov, A. L. & Evans, R. J., 2002, “Control of Chaos: Survey 1997-2000”, 15th IFAC World Congress on Automatic Control.

- Fradkov, A. L., Evans, R. J. & Andrievsky, B. R., 2006, “Control of Chaos: Methods and Applications in Mechanics”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v.364, pp.2279-2307.
- Franca, L. F. P. & Savi, M. A., 2001a, “Distinguishing Periodic and Chaotic Time Series Obtained from an Experimental Nonlinear Pendulum”, *Nonlinear Dynamics*, v.26, n.3, pp.253-271.
- Franca, L. F. P. & Savi, M. A., 2001b, “Estimating Attractor Dimension on the Nonlinear Pendulum Time Series”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v.XXIII, n. 4, p. 427-439.
- Franca, L. F. P. & Savi, M. A., 2003, “Evaluating Noise Sensitivity on the Time Series Determination of Lyapunov Exponents Applied to Nonlinear Pendulum”, *Shock And Vibration*, v. 10, n. 1, p. 37-50.
- Freeman, W. J., 1991, “The Physiology of Perception”, *Scientific American*, v. 264, pp. 78-85.
- Galias, Z. & Ogorzalek, M. J., 1995, “Bang-bang control of chaotic systems” In: International Workshop, *Nonlinear Dynamics of Electronics Systems (NDES'95)*, Proceedings, pp. 229-232, Dublin.
- Galvanetto U., 1998, “Dynamics of a three DOF mechanical system with dry friction”, *Physics Letters A*, v. 248, n. 1, pp. 57-66.
- Galvanetto U., 2002, “Delayed Feedback Control of Chaotic Systems with Dry Friction”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 12, pp. 1788-1883.
- Gauthier, D.J., Sukow, D. W., Concannon, H. M. & Socolar, J. E. S., 1994, “Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization”, *Physical Review E*, v. 50, pp.2343 – 2346.
- Gluckman, B. J., Spano, M. L., Yang, W., Ding, M., In, V. & Ditto, W. L., 1997, “Tracking unstable periodic orbits in nonstationary high-dimensional chaotic systems: Method and experiment”, *Physical Review E*, v. 55, n. 5, pp. 4935-4942.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J.A., 1983, “Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos”, *Physica 7D*, pp.181-200.
- Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S. & Yorke, J.A., 1984, “Strange Attractors that are not Chaotic”, *Physica 13D*, 1-2, pp.261-268.
- Grebogi, C. & Lai, Y. -C., 1997, “Controlling chaotic dynamical systems”. *Systems and Control Letters*, v. 31, pp.307-312.

- Gu, P., Dubowsky, S. & Mavroidis, C., 1998, “The Design Implications of Chaotic and Near-Chaotic Vibrations in Machines”, *In: ASME Design Engineering Technical Conference, Proceedings*.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983, “*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*”, Springer-Verlag.
- Gunaratne, G., Linsay, P. S. & Vinson, M. J., 1989, “Chaos beyond Onset: A Comparison of Theory and Experiment”, *Physical Review Letters*, v.63, n.1, pp.1-4.
- Hammel, S., Jones, C. K. R. T. & Maloney, J., 1985, “Global Dynamical Behavior of the Optical Field in a Ring Cavity”, *Journal of the Optical Society of America B*, v. 2, pp. 552.
- Hayes, S., Grebogi, C. & Ott., E., 1993, “Communicating with Chaos”, *Physical Review Letters*, v.70, pp.3031-3034.
- Hénon, M., 1976, “A two-dimensional mapping with a strange attractor”, *Communications in Mathematical Physics*, v.50, pp.69.
- Herrmann, G., 2001, “A Robust Delay Adaptation Scheme for Pyragas’ Chaos Control Method”, *Physics Letters A*, v.287, pp.245-256.
- Hikiyama, T. & Kawagoshi, T., 1996, “An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos”, *Physics Letters A*, v. 211, pp.29-36.
- Horton, B. W., 2009, “Rotational motion of pendula systems for wave energy extraction”, PhD Thesis, University of Aberdeen.
- Horton, B. W. & Wiercigroch, M., 2008, “Effects of heave excitation on rotations of a pendulum for wave energy extraction”, *IUTAM Symposium on fluid-structure interaction in ocean engineering*, v.8, pp.117-128
- Horton, B., Wiercigroch, M. & Xu, X., 2008, “Transient tumbling chaos and damping identification for parametric pendulum”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, v.366, pp.767-784.
- Howells, C. A., 2009, “Piezoelectric energy harvesting”, *Energy Conversion and Management*, v.50, Issue 7, pp. 1847-1850.
- Hsiao, Y.-C. & Tung, P. C., 2002, “Global chaos control of non-autonomous systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 254, n. 1, pp. 163-174.

- Hubinger, B., Doerner, R., Martienssen, W., Herdering, M., Pitka, R. & Dressler, U., 1994, “Controlling chaos experimentally in systems exhibiting large effective Lyapunov exponents”. *Physical Review E*, v. 50, n. 2, pp.932-948.
- In, V., Ditto, W. L. & Spano, M. L., 1995, “Adaptative control and tracking of chaos in a magnetoelastic ribbon”, *Physical Review E*, v. 51, n. 4 part A, pp.R2689-R2692.
- Islam, Md. M. & Murase, K., 2005, “Chaotic dynamics of a behavior-based miniature mobile robot:effects of environment and control structure”, *Neural Networks*, v.18, pp.123-144.
- Jansri, A., Klomkarn, K., Sooraksa, P., 2004, “On Comparison os Attractors for Chaotic Mobile Robots”, *The 30<sup>th</sup> Annual Conference of the IEEE Industrial Eletronics Society*, v.3, pp.2536-2541.
- Just, W., Bernard, T., Ostheimer, M., Reibold, E. & Benner, H., 1997, “Mechanism of Time-Delayed Feedback Control”, *Physical Review Letters*, v.78, n.2, pp.203-206.
- Kerpenko, E. V., Wiercigroch, M., Pavlovskaiia, E. E. & Neilson, R. D., 2006, “Experimental verification of Jeffcott rotor model with preloaded snubber ring”, *Journal of Sound and Vibration*, v.298, pp.907-917.
- Kim, S. H. & Lee, I., 1996, “Aeroelastic analysis of a flexible airfoil with a freeplay non-linearity”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 193, pp. 823-846.
- Kittel, A., Pyragas, K. & Richter R., 1994, “Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos”, *Physical Review E*, v.50, n.1, pp.262-268.
- Kittel, A., Parisi, J. & Pyragas, K., 1995, “Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time”, *Physics Letters A*, v.198, pp.433-436.
- Kobes, R., Liu, J. & Peles, S., 2001, “Analysis of a Parametrically Driven Pendulum”, *Physical Review E*, v.63, pp.036219.
- Konishi, K., Hirai, M. & Kokame, H., 1998, “Sliding mode control for a class of chaotic systems”, *Physics Letters A*, v. 245, pp. 511-517.
- Korte, R. J. de, Schouten, J. C. & Bleek, C. M. van den, 1995, “Experimental control of a chaotic pendulum with unknown dynamics using delay coordinates”. *Physical Review E*, v. 52, n. 4, pp. 3358-3365.
- Lai, Y.-C. & Grebogi, C., 1994, “Converting Transient Chaos into Sustained Chaos by Feedback Control”, *Physical Review E*, v.49, n.2, pp.1094-1098.

- Leine, R.I., 2000, “*Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*”, PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- Liao, T.-L., 1998, “Observer-based approach for controlling chaotic systems”, *Physical Review E*, Vol. 57, n. 2, pp. 1604-1610.
- Lin, R. M. & Ewins, D. J., 1993, “Chaotic vibration of mechanical systems with backlash”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 7, n. 3, pp.257-272.
- Lindner, J. F. & Ditto, W., 1995, “Removal, suppression, and control of chaos by nonlinear design”, *Applied Mechanical Reviews*, v.48, n.12, pp.795-808.
- Linsay, P. S., 1981, “Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator”, *Physical Review Letters*, v.47, n. 19, pp.1349-1352.
- Litak, G., 2002, “Chaotic Vibrations in a regenerative cutting process”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.13, pp.1531-1535.
- Litak, G. & Friswell, M. I., 2003, “Vibration in Gear Systems”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.16, pp.795-800.
- Litak, G., Syta, A. & Wiercigroch, M., 2007a, “Identification of chaos in a cutting process by the 0–1 test”, *Chaos, Solitons and Fractals*, In Press.
- Litak, G., Ali, M. & Saha, L. M., 2007b, “Pulsating feedback control for stabilizing unstable periodic orbits is a nonlinear oscillator with a nonsymmetric potential”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v.17, pp.1797-2803.
- Litak, G., Sen, A. K. & Syta, A., 2008a, “Intermittent and chaotic vibrations in a regenerative cutting process”, *Chaos, Solitons and Fractals*, In Press.
- Litak, G., Borowiec, M., Friswell, M. I. & Szabelski, K., 2008b, “Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v.13, pp.1373-1383.
- Liu, J.-Q., Fang, H.-B. Xu, Z.-Y., Mao, X.-H., Shen, X.-C., Chen, D., Liao, H. & Cai, B.-C., 2008, “A MEMS-based piezoelectric power generator array for vibration energy harvesting”, *Microelectronics Journal*, v.39, Issue 5, pp.802-806.
- Mandelbrot, B. B., 1982, “*The Fractal Geometry of Nature*”, Freeman.
- Lu, C., 2006, “Chaotic motions of a parametrically excited pendulum”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v.11, n.7, pp.861-884.
- Martins-Filho, L. S. & Macau, E. E. N., (2007), “Patrol Mobile Robots and Chaotic Trajectories”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2007.

- Mausbach, Th., Klinger, Th., Piel, A., Atipo, A., Pierre, Th. & Bonhomme G., 1997, “Continuous control of ionization wave chaos by spatially derived feedback signals”, *Physical Letters A*, v.228, pp.373-377.
- Meirovitch, L., 1986, “*Elements of Vibration Analysis*”, McGraw-Hill.
- Mensour, B. & Longtin, A., 1997, “Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations”, *Physica D*, v.113, pp.1-25.
- Mevel, B. & Guyader, J. L., 1993, “Routes to Chaos in Ball Bearings”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 162, n. 3, pp. 471-487.
- Mondragon, R. J. & Arrowsmith, D. K., 1997, “Tracking unstable fixed points in parametrically dynamic systems”, *Physics Letters A*, v. 229, pp. 88-96.
- Moon, F. C., 1987, “*Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*”, New York: John Wiley & Sons.
- Moon, F. C. & Holmes, P. J., 1979, “A magnetoelastic strange attractor”, *Journal of Sound and Vibration*”, v. 65, n. 2 , pp. 275-296.
- Moon, F. C., 1992, “*Chaotic and Fractal Dynamics*”, New York: John Wiley and Sons.
- Muszynska, A. & Goldman, P., 1995, “Chaotic Responses of Unbalanced Rotor/Bearing/Stator Systems with Looseness or Rubs”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 5, n. 9, pp. 1683-1704.
- Myneni, K., Barr, T. A., Corron, N. J. & Pethel, S. D., 1999, “New Method for the Control of Fast Chaotic Oscillations”, *Physical Review Letters*, v.83, pp.2175-2178.
- Nakajima, H., 1997, “On analytical properties of delayed feedback control of chaos”, *Physics Letters A*, v.232, pp.207-210.
- Nakajima, H. & Ueda, Y., 1998a, “Limitation of Generalized Delayed Feedback Control”, *Physica D*, v.111, pp.143-150.
- Nakajima, H. & Ueda, Y., 1998b, “Half-period Delayed Feedback Control for Dynamical Systems with Symmetries”, *Physical Review E*, v.58, pp.1757-1763.
- Nakamura, Y. & Sekiguchi, A., 2001, “The Chaotic Mobile Robot”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 17, n. 6, pp. 898-904.
- Nazzal, J. M. & Natsheh, A. N., 2007, “Chaos Control Using Slide-Mode Theory”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.33, pp.695-702.
- Nitsche, G. & Dressler, U., 1992, “Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates”. *Physica D*, v. 58, pp. 153-164.

- Nusse, H. & Yorke, J. A., 1994, “*Dynamics: Numerical Explorations*”, Springer-Verlag.
- Ogorzalek, M., 1994, “Chaos Control: How to Avoid Chaos or Take Advantage of It”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 331B, n. 6, pp. 681-704.
- Osipov, G., Glatz, L. & Troger, H., 1998, “Suppressing Chaos in the Duffing Oscillator by Impulsive Actions”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.9, pp.307-321.
- Otani, M. & Jones, A. J, 1997, “*Guiding Chaotic Orbits*”, Research Report.
- Ott, E., 1993, “Chaos in Dynamical Systems”. 2.ed. [S.I.]: Cambridge University Press, 1993. 385 p. ISBN 0-521-43799-7.
- Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A., 1990, “Controlling Chaos”. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 11, pp. 1196-1199.
- Palacin, J., Salse, A., Valganon, I. & Clua, X., 2004, “Building a Mobile Robot for Floor-Cleaning Operation in Domestic Environments”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v.53, n.5, pp.1418-1424.
- Pardo, Z. J. G. N Del, 2001, “*Acoplamento e Interação Modal na Instabilidade Dinâmica de Cascas Cilíndricas*”, Tese de Doutorado.
- Parker, T. S. & Chua, L. O., 1989, “*Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*”, New York: Springer-Verlag.
- Pereira-Pinto, F.H.I., 2004, “*Controle de Caos em Sistemas Mecânicos: Aplicação a um Pêndulo Não-Linear*”, Dissertação de Mestrado.
- Pereira-Pinto, F.H.I., Ferreira, A.M. & Savi, M.A., 2004, “Chaos Control in a Nonlinear Pendulum Using a Semi-Continuous Method”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.22, n.3, pp.653-668.
- Pereira-Pinto, F.H.I., Ferreira, A.M. & Savi, M.A., 2005, “State Space Reconstruction Using Extended State Observers to Control Chaos in a Nonlinear Pendulum”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, to appear.
- Peterka, F. & Vacík, J., 1992, “Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts”, *Journal of Sound and Vibration*, v.154, n.1, pp.95-115.
- Pfeiffer, F., 1988, “Seltsame Attraktoren in Zahnradgetrieben”, *Ingenieur Archiv*, v.58, pp.113-125.
- Pierson, D. & Moss, F., 1995, “Detecting Periodic Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractor with Application to Biology”, *Physical Review Letters*, v.75, n.11, pp.2124-2127.

- Pinto, E. G. F. & Savi, M. A., 2003, “Nonlinear Prediction of Time Series Obtained from an Experimental Pendulum”, *Current Topics in Acoustical Research – Research Trends*, v.3, pp.151-162.
- Price, S. & Keleris, J. P., “Nonlinear dynamics of an airfoil forced to oscillate in dynamic stall”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 194, pp. 265-283.
- Pyragas, K., 1992, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback”, *Physics Letters A*, v. 170, pp. 421-428.
- Pyragas, K., 1993, “Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems”, *Physics Letters A*, v.181, pp.203-210.
- Pyragas, K., 1995, “Control of chaos via extended delay feedback”, *Physics Letters A*, v.206, pp.323-330.
- Pyragas, K., 2001, “Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller”, *Physical Review Letters*, v.86, n.11, pp.2265-2268.
- Pyragas, K., 2006, “Delayed Feedback Control of Chaos”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v.364, pp.2309-2334.
- Pyragas, K. & Just, W., 2007, “Global Properties in an Experimental Realization of Time-Delayed Feedback Control with an Unstable Control Loop”, *Physical Review Letters*, v.98, pp.214102 1-4.
- Pyragas, K. & Tamasevicius, A., 1993, “Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback”, *Physics Letters A*, v.180, pp.99-102.
- Ramesh, M. & Narayanan, S., 2001, “Controlling chaotic motions in a two-dimensional airfoil using time-delayed feedback”, *Journal of Sound and Vibration*, v.239, pp.1037-1049.
- Rempel, E. L., Chian, A. C.-L., Macau, E. E. N. & Rosa, R. R., 2004, “Analysis of chaotic saddles in low-dimensional dynamical systems: the derivative nonlinear Schrödinger equation”, *Physica D*, v.199, pp.407-424.
- Ritz, T., Schweinsberg, A. S. Z., Dressler, U., Doerner, R., Hubinger, B. & Martienssen, W., 1997, “Chaos Control with Adjustable Control Times”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 8, n. 9, pp. 1559-1576.
- Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. & Dayawansa, W. P., 1992, “Controlling chaotic dynamical systems”, *Physica D*, v. 58, pp. 165-192.
- Rooks, B., 2005, “Robotics Outside the Metals Industries”, *Industrial Robots*, v.32, n.3, pp.205-208.

- Roux, J. C., Simoyi, R. H. & Swinney, H. L., 1983, “Observation of a strange attractor”, *Physica D*, v.8, pp.257-266.
- Sano, M. & Sawada, Y., 1985, “Measurement of the Lyapunov Exponents from a Chaotic Time Series”, *Physical Review Letters*, v. 55, n. 10, pp. 1082-1085.
- Savi, M. A. & Pacheco, P. M. C. L., 2002a, “Chaos and Hyperchaos in Shape Memory Systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v.12, n.3, pp.645-657.
- Savi, M. A., Pacheco, P. M. C. L. & Braga, A. M. B., 2002b, “Chaos in a shape memory two-bar truss”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.37, n.8, pp.1387-1395.
- Savi, M. A., 2006, “*Dinâmica Não-linear e Caos*”, Rio de Janeiro: E-papers, v.1, 304 p.
- Savi, M. A., Pereira-Pinto, F. H. I. & Ferreira, A. M., 2006, “Chaos Control in Mechanical Systems”, *Shock and Vibration*, v. 13, pp. 301-314.
- Savi, M. A., Divenyi, S., Franca, L. F. P. & Weber, H. I., 2007, “Numerical and Experimental Investigations of the Nonlinear Dynamics and Chaos in Non-Smooth Systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v.301, pp.59-73.
- Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J., & Yorke, J. A., 1992, “Chaos in a Double Pendulum”, *American Journal of Physics*, v. 60, n.6, pp. 491-499.
- Shinbrot, T., Grebogi, C.; Ott, E. & Yorke, J. A., 1993, “Using small perturbations to control chaos”. *Nature*, v. 363, pp. 411-417.
- So, P. & Ott, E., 1995, “Controlling Chaos using time delay coordinates via stabilization of periodic orbits”, *Physical Review E*, v. 51, n. 4, pp. 2955-2962.
- So, P., Ott, E. & Schiff, S., Kaplan, D. T., Sauer, T. & Grebogi, C., 1996, “Detecting Unstable Periodic Orbits in Chaotic Experimental Data”, *Physical Review Letters*, v.76, n.25, pp.4705-4708.
- Socolar, J. E. S., Sukow, D. W. & Gauthier, D. J., 1994, “Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems”, *Physical Review E*, v.50, n.4, pp.3245-3248.
- Solak, E., Morgul, O. & Ersoy, U., 2001, “Observer-based control of a class of chaotic systems”, *Physics Letters A*, v. 279, pp. 47-55.
- Sonis, M., 1996, “Once more on Hénon map: analysis of bifurcations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 7, pp.2215-2234.

- Sousa Vieira, M. de & Lichtenberg, A. J., 1996, “Controlling chaos using nonlinear feedback with delay”, *Physical Review E*, v.54, n.2, pp.1200-1207.
- Spano, M. L., Ditto, W. L. & Rauseo, S. N., 1991, “Exploitation of Chaos for Active Control: An Experiment”, *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, v. 2, pp. 482-493.
- Sprott, J. C., 2007, “A simple chaotic delay differential equation”, *Physics Letters A*, v.366, pp.397-402.
- Starret, J. & Tagg, R., 1995, “Control of a Chaotic Parametrically Driven Pendulum”, *Physical Review Letters*, v. 74, n. 11, pp. 1974-1977.
- Stewart, I., 1991, “*Será que Deus Joga Dados?: a nova matemática do caos*”, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.
- Sugimoto, Y. & Osuka, K., 2004, “Walking Control of Quasi Passive Dynamic Walking Robot “Quarter III” based on Continuous Delayed Feedback Control”, In *Proceedings of the 2004 IEEE – International Conference on Robotics and Biomimetics*, pp.606-611.
- Swinney, H. L. & Gollub J.P., 1978, "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence," *Physics Today*, v. 64, pp. 164-175.
- Tian, Y. -P. & Yu, X., 2000, “Stabilizing unstable periodic orbits of chaotic systems via an optimal principle”, *Journal of the Franklin Institute*, v.337, pp.771-779.
- Tian, L., Xu, J., Sun, M. & Li, X., 2007, “On a new time-delayed feedback control of chaotic systems”, *Chaos, Solitons and Fractals*, In Press, doi:10.1016/j.chaos.2007.01.091.
- Trueba, J.L., Baltanás, J.P. & Sanjuán, M.A.F., 2003, “A Generalized Perturbed Pendulum”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.15, pp.911-924.
- Tsai, H.-H., Fuh, C.-C. & Chang, C.-N., 2002, “A robust controller for chaotic systems under external excitation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.14, pp.627-632.
- Turci, L. F. R., Macau, E. E. N. & Yoneyama, T., 2007, “Chaotic transient and the improvement of system flexibility”, *Physics Letters A*, In Press.
- Universidade de Aberddden: Centre for Applied Dynamics Research, “Nonlinear Dynamics of Parametric Pendulum for Wave Energy Extraction”. Disponível em: <<http://www.eng.abdn.ac.uk/cadr/Projects.html>>. Acesso em: abril 2007.

- Ushio, T., 1996, “Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems”, *IEEE Transactions on Circuit Systems I: Fundamental Theory Applied*, v.43, pp.815-816.
- Ushio, T. & Yamamoto, S., 1998, “Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems”, *Physics Letters A*, v. 247, p. 112-118.
- Ushio, T. & Yamamoto, S., 1999, “Prediction-based control of chaos”, *Physics Letters A*, v. 264, p. 30-35.
- Vicente, R., Daudén, J., Colet, P. & Toral, R., 2005, “Analysis and characterization of the hyperchaos generated by a semiconductor laser subject to a delayed feedback loop”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.41, n.4, pp.541-548.
- Wang, R. & Jing, Z., 2005, “Chaos Control of Chaotic Pendulum System”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.21, pp.201-207.
- Wendeker, M., Czarnigowski, J., Litak, G. & Szabelski, K., 2003, “Chaotic combustion in spark ignition engines”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 18, n. 4, pp.803-806.
- Werner, L., Kurz, T. & Parlitz, U., 1997, “Experimental Nonlinear Physics”, *Journal of the Franklin Institute*, v.334B, n.5/6, pp.865-907.
- Wieland, C. & Westerhoff, F. H., 2005, “Exchange Rate Dynamics, Central Bank Interventions and Chaos Control Methods”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, v.58, pp.117-132.
- Wiercigroch, M., 2005, “A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum”, UK patent application.
- Wiercigroch, M. & Cheng, A. H-D., (1997), “Chaotic and Stochastic Dynamics of Orthogonal Metal Cutting”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.8, pp.715-726.
- Wiggins, S., 1990, “*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*”, Springer-Verlag.
- Winfree, A. T., 1980, “*The Geometry of Biological Time*”, Springer.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A., 1985, “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”, *Physica D*, v.16, pp.285-317.
- Xu, D., Zhigang, L., Bishop, S. R. & Galvanetto, U., 2002, “Estimation of periodic-like motions of chaotic evolutions using detected unstable periodic patterns”, *Pattern Recognition Letters*, v.23, pp.245-252.

- Xu, X., 2005, “Nonlinear Dynamics of Parametric Pendulum for Wave Energy Extraction”, *PhD Thesis*, University of Aberdeen.
- Xu, X., Pavlovskaja, E., Wiercigroch, M., Romeo, F. & Lenci, S., 2007, “Dynamic interactions between parametric pendulum and electro-dynamical shaker”, *Z. Angew. Math. Mech.*, v.87, n.2, pp.172 – 186.
- Xu, X., Wiercigroch, M & Cartmell, M. P., 2005, “Rotating Orbits of a Parametrically-Excited Pendulum”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.23, pp.1537-1548.
- Xu, X. & Wiercigroch, M., 2007, “Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum”, *Nonlinear Dynamics*, v.47.
- Yagasaki, K. & Uozumi, T., 1998, “Controlling chaos using nonlinear approximations and delay coordinate embedding”, *Physics Letters A*, v. 247, pp.129-139.
- Yagasaki, K., 2007, “Extension of a chaos control method to unstable trajectories on infinite- or finite-time intervals: Experimental verification”, *Physics Letters A*, v.368, pp.222-226.
- Yang, T., Yang, C.-M. & Yang, L.-B., 1997, “Control of Rossler System to Periodic Motion Using Impulsive Control Methods”, *Physics Letters A*, v. 232, pp.356-361.
- Yu, X., Chen, G., Xia, Y., Song, Y. & Cao, Z., 2001, “An Invariant-Manifold-Based Method for Chaos Control”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, v. 48, n. 8, pp. 930-937.
- Zhao, L. C. & Yang, Z. C., 1990, “Chaotic motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow”, *Journal of Sound and Vibrations*, v. 138, pp. 245-254.
- Zhu, Q. & Ishitobi, M., 1999, “Experimental Study of Chaos in a Driven Triple Pendulum”, *Journal of Sound and Vibration*, v.227, n.1, pp.230-238.