

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA PROBLEMAS CONJUGADOS CONDUÇÃO-
CONVECÇÃO EXTERNA TRANSIENTE

Carolina Palma Naveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

Prof. Mohammed Lachi, H.D.R.

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2006

NAVEIRA, CAROLINA PALMA

Soluções Híbridas para Problemas
Conjugado Condução-Convecção Externa
Transiente [Rio de Janeiro] 2006

IX, 117p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Mecânica, 2006)

Dissertação - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Convecção Externa Transiente
2. Problema Conjugado
3. Técnica das Equações Integrais Acopladas - CIEA
4. Método Integral de Karman-Pohlhausen
5. Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao meu filho Victor
com o amor que só a maternidade permite e
ao meu grande amor, há varias vidas, meu marido Renato.

AGRADECIMENTOS

Ao meu anjinho, meu filho Victor, luz da minha vida, minha razão maior de ser, por mesmo sem muita escolha, ter cedido parte do seu tempo comigo, para este trabalho.

Ao meu querido pai, pelos muitos conselhos, incentivo, incessante amor e dedicação à família.

Às minhas irmãs, Lilia e Vanessa, dupla inseparável, por todo o apoio.

Em especial à minha mãe, minha referência, dedicada e carinhosa avó, incondicionalmente ao meu lado dando-me sempre apoio nas horas que mais precisei, deixando de lado os seus próprios afazeres. A essa grande e amada mãe, insuperável avó, o meu muitíssimo obrigado.

Desejo aqui agradecer e expressar meu reconhecimento a duas pessoas muito especiais que co-existiram, e por vezes me confundiram, durante boa parte deste trabalho: meu orientador Professor Renato Cotta, exemplo de excelência acadêmica, pela confiança depositada, pelo constante incentivo, motivação e orientação durante todo o curso deste trabalho e principalmente, por ter me convencido a fazer “apenas” uma mudança na condição de contorno, e ao amor da minha vida, meu marido Renato, exemplo de ser humano e dignidade, que pacientemente soube suportar os meus momentos de mau humor e com seu carinho, seu amor e sua música fez a minha vida entrar em regime permanente.

Au Professeurs Mohammed Lachi e Jacques Padet par la gratifiante opportunité de travailler dans ce sujet de thèse, et à leurs femme et très bonne amie Rose Marie e Collete, par l'attention et l'énorme affection dispensée pendant notre séjour a Reims.

Aos amigos Diana Albani, Guilherme Foerster e Henrique Massard, pelos momentos de estudo em grupo, por vezes não tão produtivos, mas sempre descontraídos.

A Deus, por me permitir ser tão feliz.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA PROBLEMAS CONJUGADOS CONDUÇÃO- CONVECÇÃO EXTERNA TRANSIENTE

Carolina Palma Naveira

Dezembro/2006

Orientadores: Renato Machado Cotta

Mohammed Lachi

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho apresenta soluções híbridas numérico-analíticas do problema transiente de transferência de calor por convecção forçada externa laminar sobre uma placa plana de espessura finita, sujeita à variação arbitrária no tempo da condição de fluxo de calor na interface fluido-sólido.

Este problema conjugado condução-convecção é primeiramente simplificado pela aplicação da Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) na reformulação do problema bidimensional de condução de calor na parede sólida. Como resultado, uma formulação diferencial parcial para a temperatura média no sólido é obtida, enquanto que uma condição de contorno do terceiro tipo para o balanço térmico na interface fluido-sólido é encontrada.

A partir da obtenção do campo de velocidade, a comparação entre dois métodos de solução é então proposto para resolver as equações diferenciais parciais acopladas para a região termicamente afetada: o Método Integral aproximado de Karman-Pohlhausen e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), na sua forma de transformação parcial, ambos combinados com o Método das Linhas implementado na rotina *NDSolve* do sistema *Mathematica 5.2*.

O coeficiente de transferência de calor é então determinado a partir da distribuição de temperatura na parede assim como o campo de temperatura no fluido. Finalmente, resultados comparativos entre os dois métodos de solução são apresentados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

HYBRID SOLUTIONS FOR CONJUGATED PROBLEMS CONDUCTION -
TRANSIENT EXTERNAL CONVECTION

Carolina Palma Naveira

December/2006

Advisors: Renato Machado Cotta

Mohammed Lachi

Department: Mechanical Engineering

This work presents hybrid numerical-analytical solutions for transient laminar forced convection over flat plates of non-negligible thickness, subjected to arbitrary time variations of applied wall heat flux at the interface fluid-solid.

This conjugated conduction-convection problem is first simplified through the employment of Coupled Integral Equations Approach (CIEA) to reformulate the heat conduction problem on the plate by averaging the related energy equation in the transversal direction. As a result, a partial differential formulation for the average wall temperature is obtained, while a third kind boundary condition is achieved for the fluid in the heat balance at the solid-fluid interface.

From the available velocity distributions, the comparison between two methods is then proposed for the coupled partial differential equations for the boundary layer: an approximate solution with the Karman-Pohlhausen integral approach and another with the Generalized Integral Transform Technique (GITT), under its partial transformation mode, both combined with the method of lines implemented in the *Mathematica 5.2* routine *NDSolve*.

The local heat transfer coefficients are readily determined from the wall temperature distributions, as well as the temperature values at any desired point within the fluid. Finally, some comparative results between the two methods are presented.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1. CONVECÇÃO FORÇADA EXTERNA	10
2.2. CONVECÇÃO EXTERNA COM CONJUGAÇÃO	11
3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	15
3.1. MODELO FÍSICO E HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	15
3.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	16
3.3. REFORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO NA PLACA	18
3.4. ADIMENSIONALIZAÇÃO	23
4. SOLUÇÃO PELO MÉTODO INTEGRAL	26
4.1. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	26
4.2. CONVECÇÃO EXTERNA SEM CONJUGAÇÃO	28
4.3. CONVECÇÃO EXTERNA COM CONJUGAÇÃO	30
5. SOLUÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL	33
5.1. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	33
5.2. DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADE	42
5.3. REGULARIZAÇÃO DO DOMÍNIO	46
5.4. CONVECÇÃO EXTERNA SEM CONJUGAÇÃO EM REGIME PERMANENTE	50
5.5. CONVECÇÃO EXTERNA SEM CONJUGAÇÃO EM REGIME TRANSIENTE	57
5.6. CONVECÇÃO EXTERNA COM CONJUGAÇÃO EM REGIME TRANSIENTE	62
5.7. BALANÇO INTEGRAL <i>A POSTERIORI</i>	67
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	71
6.1. CONVECÇÃO EXTERNA SEM CONJUGAÇÃO	72
6.1.1. Método Integral	72
6.1.2. Transformada Integral Generalizada	77

6.1.3. Comparação entre os Métodos	81
6.1.4. Resultados Físicos	83
6.2. CONVECÇÃO EXTERNA COM CONJUGAÇÃO	90
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	105
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107

Capítulo 1

1. Introdução

Na natureza, assim como nos sistemas térmicos construídos pelo homem, os regimes variáveis no tempo são mais comumente encontrados, do que os regimes estacionários. Não obstante, estudos em transferência de calor por convecção em regime transiente ainda são mais pouco disponíveis na literatura, indubitavelmente devido às dificuldades relacionadas à simulação de transientes, em termos de precisão e custo computacional.

Na transferência de calor, distinguiu-se duas categorias de problemas dependentes do tempo (PADET, 2005): os que são devido a causas externas (condições de contorno variáveis) e os que são devido a causas internas (termos-fonte variáveis, instabilidades, turbulência) e ainda a combinação destes dois tipos, também comumente encontrada. Neste sentido, o presente trabalho dispõe-se a estudar algumas situações pertencentes ao primeiro grupo acima, por exemplo, do problema conjugado transiente condução-convecção forçada externa onde a parede, sobre a qual o fluido escoava é sujeita a uma condição variável no tempo do fluxo de calor aplicado.

No que diz respeito a estudos analíticos em transferência de calor que envolvem uma superfície sólida e o escoamento de um fluido, a então chamada condição de contorno do terceiro tipo é geralmente considerada. Esta é uma condição de proporcionalidade entre o fluxo de calor na parede, $q_w(x,t)$, e a diferença de temperatura entre a parede e a temperatura característica do escoamento ($T_w - T_\infty$). Em consequência, um parâmetro de proporcionalidade $h(x,t)$, conhecido como coeficiente de transferência de calor é então introduzido.

$$q_w(x,t) = h(x,t)[T_w - T_\infty] \quad (1.1)$$

Esta relação é usualmente chamada de lei de resfriamento de Newton.

O coeficiente de transferência de calor pode ser determinado experimentalmente e/ou analiticamente a partir da solução das equações pertinentes ao movimento do fluido e de sua energia interna, uma vez que durante os cálculos teóricos geralmente é assumido que a condição da parede é previamente determinada e uniforme, o que permite o problema ser de solução mais simples.

Contudo trabalhos anteriores demonstraram que na prescrição de condições de contorno variáveis, o que de certa forma representa uma vasta gama de situações, a lei de Newton deixa de ser atrativa, e em geral o coeficiente de transferência de calor não mais pode ser analiticamente determinado. Sendo assim, para estes problemas, a distribuição de temperatura na parede, ou do fluxo de calor, com o tempo passa a não ser mais conhecida *a priori*, mas sim, tem que ser obtida simultaneamente através da solução das equações de energia no fluido e no sólido, e das equações de continuidade da temperatura e do fluxo na interface fluido-sólido. A esta classe de problemas, que inclui a formulação mútua dos efeitos térmicos no sólido e no fluido foi dado o nome de problemas conjugados (PERELMAN, 1961).

Neste contexto, o presente trabalho trata do problema de transferência de calor conjugado condução-convecção externa transiente sobre uma placa plana focando-se no estudo de métodos híbridos numérico-analíticos de solução. No que diz respeito aos possíveis métodos de solução de problemas em transferência de calor e mecânica dos fluidos duas categorias tradicionalmente podem ser identificadas: a primeira envolvendo expressões analíticas seja como soluções exatas, seja como relações explícitas aproximadas (KAYS & CRAWFORD, 1980; SCHLICHTING, 1968; WHITE, 1974; LUIKOV *et al.*, 1971; MORI, *et al.*, 1974), e a segunda envolvendo os métodos numéricos clássicos para simulação computacional em versões discretizadas do problema original (SHAH & LONDON, 1978; FAGHRI & SPARROW, 1980; ZARIFFEH *et al.*, 1982).

A primeira classe de soluções apresenta a robustez inerente às metodologias analíticas, associada em geral a baixos custos computacionais e em particular, no caso de expressões exatas, com a precisão limitada somente pela precisão finita dos computadores. Todavia, tal abordagem tem sua aplicabilidade limitada, especialmente quando perseguem expressões exatas.

Por outro lado, as técnicas de discretização numérica apresentam uma essencial flexibilidade e generalidade para sua disseminação no âmbito das aplicações práticas de

engenharia, mas são limitadas face ao aumento explosivo dos custos computacionais em situações multidimensionais e/ou em situações onde maiores precisões são requeridas.

Deste modo, na busca por um maior envolvimento analítico, o presente trabalho resolveu as equações governantes do problema conjugado aplicando e comparando dois métodos: o Integral aproximado de Karman-Pohlhausen e a Técnica da Transformada Integral Generalizada.

As duas metodologias e seus resultados estão apresentados de acordo com a seguinte estrutura:

Capítulo 2: Revisão bibliográfica do problema de transferência de calor por convecção forçada externa sobre uma parede sólida sem e com a conjugação da parede no processo de transferência de calor. Revisão dos métodos de solução mais comumente aplicadas no tratamento do problema de convecção externa transiente e na sua versão conjugada;

Capítulo 3: Descrição, formulação matemática, adimensionalização do problema de transferência de calor transiente por convecção forçada externa sobre uma placa plana de espessura finita. Reformulação do problema de condução de calor na placa através da aplicação da Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA);

Capítulo 4: Metodologia e aplicação do Método Integral ao problema transiente de convecção forçada sobre uma placa plana para os casos com e sem conjugação com a parede sólida.

Capítulo 5: Determinação do campo de velocidade, regularização do domínio, aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) - transformação do problema, definição do problema auxiliar de autovalor, definição do par transformada-inversa, manipulação do sistema de equações para os problemas de convecção forçada externa sobre uma placa plana em regime permanente e transiente, com e sem conjugação com a parede. Aplicação da Técnica de Balanço Integral a Posteriori para aceleração da convergência;

Capítulo 6: Apresentação e análise dos resultados, convergência e validação das soluções, comparação dos métodos e interpretações físicas;

Capítulo 7: Conclusões e recomendações para futuros estudos;

Capítulo 8: Referências bibliográficas

Além da motivação natural de perseguir soluções mais acuradas do problema conjugado clássico, para o qual soluções exatas ainda não se encontram disponíveis, o

presente estudo foi iniciado no contexto da cooperação internacional do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor, PEM/COPPE/UFRJ, com o Laboratoire de Thermomécanique, da Université de Reims, França. O grupo de pesquisa liderado pelo Professor Jacques PADET, com a participação do Professor Mohammed LACHI, reuniu inúmeras contribuições na pesquisa de convecção em regime transiente, incluindo trabalhos experimentais para determinação de coeficientes de transferência de calor durante transientes rápidos, empregando o método *Flash* e medidas termográficas com câmera infravermelha. A situação física aqui modelada e simulada retrata exatamente o experimento de aquecimento de uma placa com um feixe de luz incidindo sobre a interface fluido-sólido, provendo um fluxo de calor relativamente uniforme em toda a superfície. As figuras 1.1 a 1.3 ilustram o aparato experimental construído pelo Professor LACHI no LMT, Université de Reims, com detalhes da placa aquecida (figura 1.1), do insuflamento de ar (figura 1.2) e da instrumentação da face não aquecida da placa e das lâmpadas de flash utilizadas na face oposta (figura 1.3).



Figura 1.1 – *Detalhe da placa aquecida.*



Figura 1.2 – *Detalhe do insuflamento de ar.*



Figura 1.3 – *Detalhe da instrumentação e das lâmpadas flash.*

Em paralelo, o presente trabalho foi também impulsionado pelo desenvolvimento de um projeto no Programa UNIESPAÇO com financiamento da Agência Espacial Brasileira (AEB), usando a análise e caracterização termomecânica de sistemas de proteção térmica para satélites em reentrada atmosférica. Em tese de mestrado anterior (MAYALL, 2004), no contexto deste projeto COPPE/AEB, empregou-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada para a solução híbrida das equações de camada limite em escoamento hipersônico sobre superfície bidimensional axissimétricas, permitindo o cálculo do aquecimento aerodinâmico ao longo da trajetória de reentrada. Também nesse escopo, foram propostas soluções híbridas por transformação integral e formulações aproximadas pela Técnica das Equações Integrais Acopladas (COTTA *et al.*, 2004; SIAS *et al.*, 2005) para o problema de condução de calor com ablação na proteção térmica, a partir de fluxos de calor impostos pelo aquecimento aerodinâmico durante a reentrada, sem levar em conta o acoplamento entre o escoamento hipersônico e o comportamento térmico da parede. Assim, o presente estudo é um primeiro passo na busca de uma solução híbrida para o problema conjugado de aquecimento cinético e condução de calor com ou sem ablação em sistemas de proteção térmica para satélites em reentrada atmosférica.

Capítulo 2

2. Revisão Bibliográfica

Problemas em convecção forçada sobre superfícies sólidas são usualmente estudados pela formulação clássica de camada limite (SCHLICHTING, 1968; WHITE, 1974; KAYS & CRAWFORD, 1980) quando aplicável, buscando o coeficiente de transferência de calor na interface fluido-sólido, para as condições mais comuns de temperatura prescrita ou fluxo de calor prescrito. Trabalhos anteriores envolvendo soluções analíticas para o problema de transferência de calor em escoamento externo (SCHLICHTING, 1968; WHITE, 1974; KAYS & CRAWFORD, 1980) esbarraram na dificuldade inerente ao tratamento analítico exato da formulação matemática para transferência de calor e mecânica dos fluidos simultâneos.

A abordagem clássica do Método Integral (SCHLICHTING, 1968; WHITE, 1974; KAYS & CRAWFORD, 1980) para a camada limite térmica tem sido bastante usada na aproximação da distribuição de temperatura e na determinação da espessura da camada limite térmica transiente por ser uma aproximação analítica bastante simples, mas com reconhecida importância prática, particularmente na análise de problemas sem similaridade em convecção externa. Embora, menos citada na literatura ao longo dos últimos anos, devido à mais ampla disponibilidade de recursos para simulação computacional em mecânica dos fluidos e transferência de calor, o interesse neste tipo de abordagem permanece essencialmente devido à sua simplicidade e a considerável aplicabilidade.

Enquanto que o Método Integral foi largamente empregado na solução de problemas de convecção externa permanente, e bem documentado em livros textos como os a cima citados, bem menos informações encontram-se disponíveis em seu uso dentro do regime transiente causado por flutuações temporais das condições de contorno na parede ou no fluido.

No entanto, contribuições recentes nesta direção têm favorecido o uso desta abordagem aproximada também chamada de aproximação de Karman-Polhausen, tanto para paredes aquecidas impulsivamente quanto periodicamente (LACHI *et al.*, 1998; POLIDORI *et al.*, 1998a; LACHI *et al.*, 2004a; LACHI *et al.*, 2002; LACHI *et al.*, 2003; LACHI *et al.*, 2004b; CHENG & LIN, 2002). O esquema de solução preferido tem sido então o uso combinado do Método Integral para a direção transversal ao escoamento com a abordagem discreta para solução numérica da equação diferencial parcial resultante para a evolução temporal e longitudinal da temperatura na parede.

Mais recentemente, os avanços em abordagens puramente numérica têm permitido a manipulação computacional direta de tais problemas clássicos em transferência de calor para obtenção de resultados de referência, mas com custo computacional substancial para obtenção de soluções com alta precisão, especialmente quando a análise de transientes rápidos é requerida em consequência de variações nas condições de contorno e/ou no escoamento.

Por esta razão, novas perspectivas têm sido abertas pelas propostas híbridas numérico-analíticas, que tentam incorporar as vantagens associadas às abordagens analíticas clássicas, oferecendo suficiente flexibilidade para lidar com diferentes modelos e, portanto, provendo uma possível alternativa às aproximações puramente discretas para uma gama de aplicações. Uma abordagem híbrida típica é a chamada Técnica da Transformada Integral Generalizada-GITT (COTTA, 1993; COTTA & MIKHAILOV, 1997; COTTA, 1998; SANTOS *et al.*, 2001; COTTA & MIKHAILOV, 2006), que expande a aplicação da transformação integral clássica contribuindo na análise híbrida em problemas de convecção-difusão lineares e não-lineares, e tem sido aplicada a vários problemas em transferência de calor e mecânica dos fluidos.

No âmbito da solução das equações de camada limite, vale ressaltar alguns trabalhos anteriores (COTTA & CARVALHO, 1991; CARVALHO *et al.*, 1993; MACHADO & COTTA, 1995; FIGUEIRA DA SILVA & COTTA, 1996, PIMENTEL *et al.*, 1997; COTTA & PIMENTEL, 1998; BOLIVAR *et al.*, 1998; FIGUEIRA DA SILVA & COTTA, 1998; FIGUEIRA DA SILVA *et al.*, 1999; MACHADO & COTTA, 1999; SU, 1999), em sua maioria relacionados a problemas de escoamento interno, embora alguns poucos relacionados à situação de escoamento externo (BOLIVAR *et al.*, 1998; SU, 1999). O conceito básico é propor uma expansão em autofunções para as variáveis dependentes, baseada no comportamento do operador difusivo, e executar a transformação integral na equação diferencial parcial relacionada.

Pode-se propor a expansão em todas, menos uma variável independente, e o procedimento de transformação integral resulta em um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias para o potencial transformado, para ser, em geral, numericamente tratado na variável independente remanescente da integração. A este procedimento dá-se o nome de transformação total, e tem sido o mais freqüentemente adotado ao longo do desenvolvimento desta metodologia híbrida. Uma outra possibilidade, que tem sido mais recentemente empregada, é a então chamada transformação parcial (COTTA & GERK, 1994; SU, 1999; CASTELHÕES & COTTA, 2005), onde não apenas uma única variável independente permanece após a transformação, fato que acontece quando opta-se por não se propor a expansão de um problema transiente em todas as variáveis espaciais, por exemplo. Sendo assim, um sistema acoplado de equações diferenciais parciais resulta para o potencial transformado, em termos, usualmente, de duas variáveis independentes que são escolhidas para não serem eliminadas durante a transformação. Esta abordagem é particularmente interessante em formulações parabólico-hiperbólicas, quando o operador difusivo poderá não estar presente em uma determinada variável espacial. Na presente classe de problemas, este é o caso relacionado à equação de energia transiente formulada na camada limite, onde o operador difusivo na direção longitudinal é normalmente desconsiderado.

A maioria dos estudos apresentados na literatura, concernentes à transferência de calor por convecção, externa e interna, revela a prática de negligenciar a participação da condução de calor no sólido no processo de transferência de calor entre o fluido e a parede, como os trabalhos acima referenciados. Todavia, a análise deste fenômeno acoplado condução-convecção é sem dúvida bastante complexa, uma vez que o campo de temperatura no sólido e no fluido têm que ser resolvidos simultaneamente, acoplados pelas condições de continuidade na interface fluido-sólido.

PERELMAN (1961) usou pela primeira vez o termo “transferência de calor conjugada” para descrever o problema acoplado de transferência de calor por convecção na camada limite térmica de um escoamento sobre uma placa plana de espessura finita e a condução de calor bidimensional nesta parede sólida. Em seu estudo, PERELMAN identificou um parâmetro que combinava a razão de condutividade do fluido e do sólido, o número de Prandtl e o número de Reynolds, mais tarde denominado número de Brum por LUIKOV (1974).

Para este problema conjugado condução-convecção externa são encontradas na literatura essencialmente, soluções aproximadas, empregando o Método Integral em

conjunto com o Método das Diferenças Finitas ou ainda soluções baseadas totalmente em métodos numéricos. Estes trabalhos demonstram as dificuldades matemáticas e/ou computacionais associadas à solução do problema conjugado. Por outro lado, um modelo simplificado que concentra a informação da distribuição da temperatura na direção transversal à interface, mas que retém a condução axial ao longo da parede, foi considerado por alguns pesquisadores no estudo do problema conjugado condução-convecção interna, permitindo uma formulação simplificada (FAGHRI & SPARROW, 1980; ZARIFFEH *et al.*, 1982; WIJEYSUNDERA, 1986). Neste contexto de convecção interna a Técnica da Transformada Integral Generalizada foi empregada para contornar o tratamento da expansão em autofunções com as novas condições de contorno que surgem do procedimento de aproximação por parâmetros concentrados na parede (GUEDES, *et al.*, 1989; GUEDES & COTTA, 1991; GUEDES, *et al.*, 1991; GUEDES & ÖZISIK, 1992; GUEDES, *et al.*, 1992; GUEDES *et al.*, 1994; GUEDES & SCOFANO NETO, 1995), fornecendo assim uma solução híbridas numérico-analítica que provê resultados numéricos a uma precisão controlada e custos não comparáveis às aproximações puramente numéricas.

A aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada no problema de transferência de calor por convecção na camada limite térmica de um escoamento sobre superfícies assimétricas por BOLIVAR *et al.* (1996 e 1998). Todavia, para os problemas onde a conjugação com a parede deve ser levada em consideração, a idealização de que a variação da temperatura na parede na direção normal ao escoamento não é tão significativa apresenta-se como uma alternativa simplificadora para certas situações. Neste sentido, no processo de reformulação do sistema de equações diferenciais parciais para a transferência de calor por condução no sólido, vislumbra-se a possibilidade de utilização da Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) que é um procedimento de parâmetros concentrados melhorado, que utiliza as aproximações de Hermite para as integrais da temperatura e fluxo de calor médios (HERMITE, 1878; MENNING *et al.*, 1983; APARECIDO & COTTA, 1989). Tal abordagem vem sendo empregada na solução de problemas de difusão e convecção-difusão multidimensionais (COTTA & MIKHAILOV, 1997), que apresentam dificuldades associadas com um envolvimento analítico considerável e/ou custo computacional indesejável.

É válido ainda mencionar que as plataformas de computação simbólica têm permitido a revisão e extensão de vários procedimentos analíticos. Neste sentido, o presente trabalho envolve a construção de *notebooks* na plataforma *Mathematica*

(WOLFRAM, 1999), que permite as manipulações simbólicas na solução via transformação integral e utiliza a rotina interna *NDSolve*, a qual emprega o Método das Linhas para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias ou parciais acopladas.

2.1. Convecção Forçada Externa

Diversos estudos podem ser encontrados na literatura concernente a solução transiente da equação de energia para um escoamento laminar externo com mudança de temperatura em degrau ou do fluxo de calor uniformemente distribuído na placa sobre o qual o fluido escoava

CHAO & CHEEMMA (1968) investigaram o comportamento térmico de um fluido escoando em regime laminar sobre uma placa plana sujeita à mudança em degrau da temperatura ou do fluxo de calor.

NAGENDRA (1973) analisou a transferência de calor convectiva sobre uma placa plana na predição do tempo de resfriamento transiente de um fluido cryogênico escoando em turbobombas de aplicação espacial.

POLIDORI *et al.* (1998a) compararam a solução numérica via Método de Diferenças Finitas da convecção forçada transiente sobre uma placa plana sujeita a um pulso de calor na face superior da placa, com a solução permanente deste mesmo problema deduzida via Método Integral juntamente com o Método das Diferenças Finitas.

HARRIS *et al.* (2001) estudaram o problema de convecção forçada transiente sobre uma placa semi-infinita sujeita a um fluxo de calor constante utilizando um procedimento numérico baseado no Método de Perturbação.

CHENG & LIN (2002) utilizando o Método de Diferenças Finitas em esquema centrado e o método iterativo de Newton obtiveram uma correlação para o problema de transferência de calor convectiva sobre uma cunha para os casos de temperatura uniforme prescrita na parede e fluxo de calor prescrito, que é válida desde um estágio inicial de condução de calor transiente até um estágio final de convecção forçada.

LACHI *et al.* (2004a) estudaram a convecção forçada transiente sobre uma placa plana de espessura desprezível sujeita a um fluxo de calor variável no tempo utilizando o Método Integral conjuntamente com o Método de Diferenças Finitas.

REBAY & PADET (2004) abordaram o problema de convecção transiente sobre uma cunha para o caso de temperatura prescrita variável no tempo, utilizando o Método de Similaridade em conjunto com o Método de Diferenças Finitas.

Mais recentemente, diversos outros autores vêm apresentando estudos sobre o problema de convecção externa transiente sujeito a condições variáveis no espaço e/ou periódicas no tempo.

POLIDORI *et al.* (1998b) utilizaram o Método Integral no estudo da convecção forçada transiente sobre uma placa plana de espessura nula, para o caso da condição de fluxo de calor periódico no tempo e variável no espaço.

POLIDORI & PADET (2002) realizaram um estudo do emprego do Método Integral em conjunto com o Método de Diferenças Finitas na convecção forçada transiente sobre uma placa plana com variação espacial do fluxo de calor para uma ampla faixa de números de Prandtl.

COSSALI (2005) reporta um estudo do uso da Transformação de Fourier em problemas de convecção forçada sobre uma placa plana semi-infinita sujeita a variações periódicas do fluxo de calor.

REBAY & PADET (2005) simularam numericamente um problema de convecção forçada transiente sobre uma cunha e apresentaram resultados parametrizados por diferentes ângulos de inclinação.

2.2. Convecção Externa com Conjugação

Diversos trabalhos encontrados na literatura apresentam resultados do estudo do problema conjugado condução-convecção externa em regime permanente.

KARVINEN (1981) estudou o problema conjugado de convecção forçada e natural para os casos de escoamento laminar e turbulento sobre uma aleta vertical.

SUNDEN (1989) investigou numericamente o problema conjugado condução-convecção forçada externa sobre uma placa plana, considerando os casos laminar e

turbulento. A técnica de Diferenças Finitas de segunda ordem e o modelo de duas equações para turbulência foram utilizados.

CHEN & CHANG (1996) apresentaram um estudo da taxa de transferência de calor entre duas regiões de fluido em diferentes temperaturas sofrendo convecção natural, separados por uma placa vertical, onde os efeitos da condução de calor unidimensional ao longo da placa e a condução transversal de calor foram discutidos.

CHEN & CHIOU (1996) estudaram o problema conjugado condução-convecção forçada turbulenta em regime permanente, sobre uma aleta vertical para o caso da temperatura da base prescrita mas oscilando no entorno de um valor médio.

COLE (1997) estudou o resfriamento de componentes eletrônicos em problemas conjugados e apresentou resultados numéricos para uma ampla gama de escoamentos, razões de condutividade fluido-sólido e espessuras de placa, e sugeriu um novo parâmetro adimensional para determinar quando a condução de calor axial no fluido pode ser negligenciado no problema conjugado.

LACHI *et al.* (1997) desenvolveram uma solução numérica baseada no Método Integral para estudar o problema de convecção forçada permanente sujeita a um fluxo de calor constante comparando os casos de uma placa plana de espessura desprezível e uma placa de espessura finita.

WANG (1997) estudou o problema conjugado de convecção forçada-condução de calor de um fluido não-newtoniano escoando sobre uma placa plana, usando o Método de Diferenças Finitas.

VYNNYCKY *et al.* (1998) investigou analiticamente o problema bidimensional permanente de transferência de calor conjugado com uma placa retangular e resolveu numericamente o acoplamento entre as equações de Navier-Stokes completas para o escoamento e as equações de energia para o fluido e para o sólido, usando o Método de Diferenças Finitas.

MOSSAD (1999) realizou um estudo teórico do emprego do Método Integral na solução de problemas conjugados convecção-condução sobre uma placa plana para o caso de temperatura prescrita na superfície inferior da placa.

CHIDA (2000), utilizando um modelo bidimensional para a condução no sólido, estudou o comportamento da temperatura na interface fluido-sólido em um problema conjugado convecção externa permanente sobre uma placa plana com temperatura constante na superfície inferior da placa utilizando os Métodos da bissecção e Runge-Kutta.

JILANI *et al.* (2002), usando o Método de Diferenças Finitas, estudaram o problema conjugado bidimensional de convecção forçada permanente sobre um cilindro vertical com geração interna de calor.

KANNA & DAS (2005) estudaram o problema bidimensional de transferência de calor conjugado de um jato escoando sobre uma placa, e as equações completas de Navier-Stokes foram consideradas na modelagem do escoamento.

Alguns pesquisadores vêm apresentando resultados no estudo do problema conjugado em regime transiente, principal objetivo do presente estudo, quais sejam a seguir.

POZZI & TOGNACCINI (2000) analisaram o comportamento térmico e dinâmico de uma placa semi-infinita subitamente acelerada em um fluido compressível de número de Prandtl igual a um. Utilizaram o Método de Lagrange na solução deste problema conjugado levando em consideração os efeitos da espessura da placa e negligenciando a condução de calor axial no sólido.

LACHI *et al.* (2002) estudaram o problema conjugado convecção-condução em regime transiente para os casos de escoamento de ar/água sobre uma placa plana de aço/PVC onde a temperatura da superfície inferior da placa foi mantida constante, utilizando-se o Método Integral.

SOCIO & MARINO (2002) estudaram o problema conjugado transiente, considerando o escoamento de um gás compressível sobre uma placa plana de espessura finita, levando-se em conta o escorregamento da velocidade na parede, *slip flow*, e a condição de salto de temperatura na interface.

LACHI *et al.* (2004b) reporta a utilização do Método Integral em conjunto com o Método de Diferenças Finitas no estudo do problema conjugado transiente de convecção forçada externa e a condução de calor numa placa plana sujeita a um fluxo de calor uniforme na interface.

JUNCU (2005) utilizou-se do Método de Diferenças Finitas em formulação implícita (ADI) para investigar o problema conjugado transiente de convecção forçada na transferência de calor/massa com uma placa plana, focando o seu estudo na influência do produto da razão de aspecto *versus* razão de propriedades físicas na taxa de transferência de calor.

POZZI & TOGNACCINI (2005) estudaram o efeito do número de Prandtl no problema conjugado envolvido na aceleração de uma placa semi-infinita, com temperatura prescrita na sua superfície inferior, e imersa em um fluido compressível.

Capítulo 3

3. Formulação do Problema

3.1. Modelo Físico e Hipóteses Simplificadoras

Considera-se o escoamento bidimensional, laminar e incompressível de um fluido Newtoniano sobre uma placa plana. À interface sólido-fluido é aplicado um fluxo de calor variável no tempo, $\Phi(t)$, enquanto as demais superfícies de contorno da placa são consideradas termicamente isoladas. Tal configuração corresponde ao experimento método *flash* para determinação do coeficiente de transferência de calor na convecção externa em regime transiente (PETIT *et al.*, 1981; REMY *et al.*, 1995; REBAY *et al.*, 2002).

As propriedades termofísicas são supostas constantes e a camada limite hidrodinâmica é assumida em regime permanente e desacoplada da temperatura. O escoamento com velocidade de corrente livre, u_∞ , chega à borda da placa com temperatura T_∞ . O modelo físico é esquematicamente mostrado na figura 3.1.

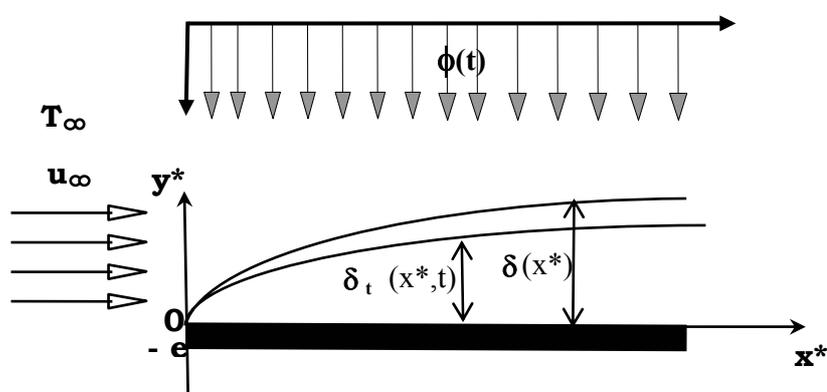


Figura 3.1- Descrição do problema físico conjugado de convecção externa transiente e condução de calor na placa.

3.2. Formulação Matemática

As hipóteses de camada limite são assumidas válidas para o escoamento e para o problema de transferência de calor no fluido. No problema de transferência de calor foi considerada a participação da parede, que tem espessura, e , e comprimento, L . Logo, o problema conjugado condução-convecção é matematicamente descrito como:

- Problema Hidrodinâmico:

- equação de continuidade:

$$\frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial v(x^*, y^*)}{\partial y^*} = 0, \quad 0 < y < \delta^*(x^*), \quad 0 < x^* < L \quad (3.1)$$

- equação de momentum na direção- x^* :

$$u \frac{\partial u}{\partial x^*} + v \frac{\partial u}{\partial y^*} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}}, \quad 0 < y < \delta^*(x^*), \quad 0 < x^* < L \quad (3.2)$$

- equação de momentum na direção- y^* :

$$\frac{\partial P(x^*, y^*)}{\partial y^*} = 0, \quad 0 < y^* < \delta^*(x^*), \quad 0 < x^* < L \quad (3.3)$$

- Problema Térmico:

- equação de energia na camada limite:

$$\frac{\partial T_f(x^*, y^*, t)}{\partial t} + u \frac{\partial T_f(x^*, y^*, t)}{\partial x^*} + v \frac{\partial T_f(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} = \alpha_f \frac{\partial^2 T_f(x^*, y^*, t)}{\partial y^{*2}}, \quad (3.4)$$

$$0 < y^* < \delta_t^*(x^*, t), \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0$$

com condição inicial:

$$T_f(x^*, y^*, 0) = T_\infty \quad y^* > 0, \quad 0 < x^* < L \quad (3.5)$$

e condições de contorno:

$$T_f(0, y^*, t) = T_\infty, \quad y^* > 0, \quad t > 0 \quad (3.6)$$

$$T_f(x^*, \delta_t^*, t) = T_\infty, \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0 \quad (3.7)$$

- equação de energia na placa:

$$\frac{\partial T_s(x^*, y^*, t)}{\partial t} = \alpha_s \left(\frac{\partial^2 T_s(x^*, y^*, t)}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T_s(x^*, y^*, t)}{\partial y^{*2}} \right), \quad (3.8)$$

$$-e < y^* < 0, \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0$$

com condição inicial:

$$T_s(x^*, y^*, 0) = T_\infty, \quad -e < y^* < 0, \quad 0 < x^* < L \quad (3.9)$$

e condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = \left. \frac{\partial T_s}{\partial x^*} \right|_{x^*=L} = 0, \quad -e < y^* < 0, \quad t > 0 \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \right|_{y^*=-e} = 0, \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0 \quad (3.11)$$

as condições de continuidade de potencial e fluxo na interface fluido-sólido, são dadas respectivamente por:

$$T_s(x^*, 0, t) = T_f(x^*, 0, t), \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0 \quad (3.12)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y^*} \right|_{-} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y^*} \right|_{+} + \phi(t), \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0 \quad (3.13)$$

3.3. Reformulação da Equação de Condução na Placa

A Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) é uma ferramenta de reformulação utilizada em problemas de difusão e convecção-difusão (COTTA & MIKHAILOV, 1997). O processo consiste em eliminar uma ou mais variáveis espaciais a partir de médias nestas direções. Assim, uma forma simplificada do sistema diferencial parcial original é então obtido, através da redução do número de variáveis independentes numa situação multidimensional, pela integração da equação diferencial em uma ou mais variáveis espaciais, mas retendo algumas informações da direção eliminada através das condições de contorno relacionadas. Diferentes níveis de aproximação em tal reformulação podem ser utilizados, começando pela análise de parâmetros concentrados clássica. Todavia, formulações melhoradas podem ser obtidas através da aproximação de Hermite para integrais (COTTA e MIKHAILOV, 1997). Tal abordagem vem sendo empregada em diferentes problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor (APARECIDO & COTTA, 1989; COTTA & MIKHAILOV, 1997; CORRÊA & COTTA, 1998)

A formula de Hermite para aproximação de uma integral, baseada no valor do integrando e de suas derivadas nos limites da integração, é dada na seguinte forma (COTTA & MIKHAILOV, 1997):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx \cong \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu} y_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} D_{\nu} y_i^{(\nu)} \quad (3.14)$$

Onde $y(x)$ e suas derivadas $y^{(n)}(x)$ são definidas para todo $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Assume-se ainda que o valor numérico de $y^{(\nu)}(x_{i-1}) \equiv y_{i-1}^{(\nu)}$ para $\nu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$ e $y^{(\nu)}(x_i) \equiv y_i^{(\nu)}$ para $\nu = 0, 1, 2, \dots, \beta$, estão disponíveis nos extremos do intervalo.

De tal maneira, a integral de $y(x)$ é expressa como uma combinação linear de $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ e suas derivadas, $y^{(\nu)}(x_{i-1})$ até a ordem $\nu = \alpha$, e $y^{(\nu)}(x_i)$ até a ordem $\nu = \beta$. Isto é então chamado aproximação $H_{\alpha, \beta}$. A expressão resultante para a aproximação $H_{\alpha, \beta}$ é dada por (COTTA & MIKHAILOV, 1997):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} y_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{\nu}(\beta, \alpha) (-1)^{\nu} h_i^{\nu+1} y_i^{(\nu)} + O(h_i^{\alpha+\beta+3}) \quad (3.15)$$

onde,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad C_{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha+1)! (\alpha+\beta+1-\nu)!}{(\nu+1)! (\alpha-\nu)! (\alpha+\beta+2)!} \quad (3.16)$$

No presente trabalho foram considerados apenas duas aproximações, $H_{0,0}$ e $H_{1,1}$, dadas por:

$$H_{0,0} \rightarrow \int_0^h y(x) dx \cong \frac{h}{2} (y(0) + y(h)) \quad (3.17)$$

$$H_{1,1} \rightarrow \int_0^h y(x) dx \cong \frac{h}{2} (y(0) + y(h)) + \frac{h^2}{12} (y'(0) - y'(h)) \quad (3.18)$$

que correspondem, respectivamente, às regras do trapézio e do trapézio corrigido.

Empregou-se então a CIEA na aproximação da formulação do problema de condução de calor no sólido. De acordo com esta abordagem (COTTA &

MIKHAILOV, 1997), aproximou-se as médias na direção transversal da temperatura e do fluxo de calor na parede, pelas fórmulas de Hermite para integrais, $H_{1,1}$, e $H_{0,0}$, respectivamente. Esta solução combinada $H_{1,1}/H_{0,0}$ não muda a natureza da formulação clássica de parâmetros concentrados, mas tão somente modifica os coeficientes da equação, esperando-se uma maior acurácia dos resultados para as temperaturas médias.

A temperatura média na direção transversal para a parede sólida, T_{av} , é então aproximada como:

$$T_{av}(x^*, t) \equiv \frac{1}{e} \int_{-e}^0 T_s(x^*, y^*, t) dy^* \approx \frac{1}{2} [T_s(x^*, 0, t) + T_s(x^*, -e, t)] - \frac{e}{12} \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (3.19)$$

O fluxo de calor médio na direção transversal na parede é aproximado por:

$$\int_{-e}^0 \frac{\partial T_s(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} dy^* \equiv [T_s(x^*, 0, t) - T_s(x^*, -e, t)] \approx \frac{e}{2} \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (3.20)$$

Uma expressão para a temperatura em $y^* = -e$, a ser eliminada posteriormente, é então obtida:

$$T_s(x^*, -e, t) = 2T_{av}(x^*, t) - T_s(x^*, 0, t) + \frac{e}{6} \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (3.21)$$

A expressão acima é então substituída na expressão para o fluxo médio, eq (3.20):

$$\left[T_s(x^*, 0, t) - \left(2T_{av}(x^*, t) - T_s(x^*, 0, t) + \frac{e}{6} \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \right) \right] = \frac{e}{2} \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (3.22)$$

Fazendo uso da condição de continuidade de temperatura na interface, eq.(3.12), tem-se:

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{3}{e} [T_f(x^*, 0, t) - T_{av}(x^*, t)] \quad (3.23)$$

Com isso, a condição de continuidade de fluxo na interface, eq.(3.13), é então reformulada como:

$$-k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \phi(t) - \frac{3k_s}{e} [T_f(x^*, 0, t) - T_{av}(x^*, t)] \quad (3.24)$$

Observa-se, de acordo com a expressão acima, que a condição de contorno para o fluido em $y=0$, foi reformulada como uma condição de terceiro tipo que inclui a participação da parede através da sua temperatura média. Quando a temperatura na interface $T_f(x^*, 0, t)$ e a temperatura média no sólido $T_{av}(x^*, t)$ tem o mesmo valor, a parede passa a não participar do problema de transferência de calor e então a condição de contorno convencional de segundo tipo é recuperada.

A equação de energia para o sólido, eq. (3.8), é então reformulada tomando a média na direção transversal operando-a com, $\frac{1}{e} \int_{-e}^0 \dots dy^*$, alcançando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{av}(x^*, t)}{\partial t} &= \alpha_s \frac{\partial^2 T_{av}(x^*, t)}{\partial x^{*2}} + \frac{\alpha_s}{e} \int_{-e}^0 \frac{\partial^2 T_s(x^*, y^*, t)}{\partial y^{*2}} dy^* \\ &= \alpha_s \frac{\partial^2 T_{av}(x^*, t)}{\partial x^{*2}} + \frac{\alpha_s}{e} \left[\left. \frac{\partial T_s(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} - \left. \frac{\partial T_s(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} \right|_{y^*=-e} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pode-se então eliminar as derivadas em $y^*=0$ e em $y^*=-e$, aplicando as condições de continuidade de fluxo e de contorno, respectivamente, eqs. (3.13) e (3.11):

$$\frac{\partial T_{av}(x^*, t)}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_{av}(x^*, t)}{\partial x^{*2}} + \frac{\alpha_s}{ek_s} \left[k_f \frac{\partial T_f(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} + \phi(t) \right] \quad (3.26)$$

fazendo uso da condição de continuidade de fluxo na interface na forma dada pela eq.(3.24), tem-se a equação de energia para o sólido reformulada:

$$\frac{\partial T(x^*, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T(x^*, t)}{\partial x^*} - \frac{3\alpha}{e} [T(x^*, t) - T(x^*, 0, t)] \quad (3.27)$$

Esta equação é acompanhada pela condição inicial e condições de contorno médias:

$$T_{av}(x^*, 0) = T_\infty \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial T_{av}(x^*, t)}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = 0; \quad \frac{\partial T_{av}(x^*, t)}{\partial x^*} \Big|_{x^*=L} = 0 \quad (3.29)$$

Novamente, a diferença entre a temperatura média no sólido e a temperatura na interface com o fluido é responsável pelo acoplamento dos dois processos ao longo da coordenada longitudinal- x^* .

O problema conjugado de transferência de calor encontra-se agora reduzido ao par acoplado de equações diferenciais parciais para $T_f(x^*, y^*, t)$ e $T_{av}(x^*, t)$, e será a seguir adimensionalizado e então resolvido empregando-se dois diferentes métodos: o Método Integral e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Todavia, aproximações de maior ordem poderiam ter sido empregadas na reformulação do problema como, por exemplo, introduzindo a aproximação $H_{1,1}$ também para o fluxo médio e a formulação iria assim incorporar uma equação diferencial parcial adicional para a temperatura em $y^* = -e$, acoplando-a à temperatura média e à temperatura na interface. Neste presente trabalho, preferiu-se a proposição de uma formulação mais simplificada para o problema conjugado, como o descrito acima.

3.4. Adimensionalização

Utilizou-se os seguintes grupos adimensionais para o problema conjugado condução-convecção reformulado:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{u}{u_\infty}, & V &= \frac{v}{u_\infty}, & x &= \frac{x^*}{L}, & y &= \frac{y^*}{L}, & \tau &= \frac{u_\infty \cdot t}{L}, \\
 \theta &= \frac{T - T_\infty}{\frac{\phi_{\text{ref}} \cdot L}{k_f}}, & Re_L &= \frac{u_\infty \cdot L}{\nu}, & Pe_f &= \frac{u_\infty \cdot L}{\alpha_f}, & Pe_s &= \frac{u_\infty \cdot L}{\alpha_s} \quad (3.30) \\
 \delta &= \frac{\delta^*}{L}, & \delta_t &= \frac{\delta_t^*}{L}, & Q_w &= \frac{\phi}{\phi_{\text{ref}}}, & R &= \frac{e}{L}, & K &= \frac{k_f}{k_s}
 \end{aligned}$$

A equação da continuidade adimensionalizada é dada por:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.31)$$

A equação de momentum na direção-x adimensionalizada torna-se:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = Re_L \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \delta(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.32)$$

A equação de energia no fluido adimensionalizada é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_f(x, y, \tau)}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta_f(x, y, \tau)}{\partial x} + V \frac{\partial \theta_f(x, y, \tau)}{\partial y} &= \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f(x, y, \tau)}{\partial y^2}, \\
 0 < y < \delta_t(x, \tau), \quad 0 < x < 1, \quad \tau > 0 & \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

com condição inicial adimensionalizada:

$$\theta_f(x, y, 0) = 0, \quad y > 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.34)$$

e condições de contorno adimensionalizadas dadas por:

$$\theta_f(0, y, \tau) = 0, \quad y > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.35)$$

$$\theta_f(x, \delta_t, \tau) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \tau > 0 \quad (3.36)$$

A equação de energia no sólido adimensionalizada torna-se:

$$\frac{\partial \theta_{av}(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{R}{Pe_s} \frac{\partial^2 \theta_{av}(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{3}{Pe_s \cdot R} [\theta_f(x, 0, \tau) - \theta_{av}(x, \tau)] \quad , \quad (3.37)$$

$$0 < x < 1, \quad \tau > 0$$

com condição inicial adimensionalizada:

$$\theta_{av}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.38)$$

e condições de contorno adimensionalizadas:

$$\frac{\partial \theta_{av}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta_{av}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \tau > 0 \quad (3.39)$$

A condição de continuidade de fluxo na interface fluido-sólido adimensionalizada e reformulada é dada por:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{3}{K \cdot R} [\theta_f(x, 0, \tau) - \theta_{av}(x, \tau)] - Q_w(\tau), \quad 0 < x < 1, \quad \tau > 0 \quad (3.40)$$

As equações (3.31) a (3.40) completam a formulação do problema conjugado em forma adimensional, cuja solução será objeto do capítulo seguinte. Cabe observar que embora o problema de convecção externa seja formalmente definido em um domínio semi-infinito na direção transversal y , aqui já foi introduzido o conceito de uma região termicamente afetada, que reduz a região de interesse para representação do campo de temperatura, a partir da solução da equação de energia do fluido no domínio $0 < y < \delta_t(x, \tau)$. Deve-se observar que nas duas metodologias aqui adotadas, a definição da função $\delta_t(x, \tau)$ tem características diferentes. Para o Método Integral δ_t faz parte da própria solução do problema, sendo seu valor encontrado de forma a satisfazer a forma integral da equação de energia. Já para o Método de Transformação Integral, a função δ_t é prescrita tão somente, visando uma redução de domínio para obtenção de expansões em autofunções com melhores taxas de convergência.

Capítulo 4

4. Solução pelo Método Integral

4.1. Metodologia de Solução

O problema de transferência de calor no fluido pode ainda ser representado pela forma integral da equação de energia. A equação integral de energia é desenvolvida integrando-se a equação (3.4) ao longo da camada limite térmica, utilizando-se da equação da continuidade para eliminar a componente de velocidade na direção transversal ao escoamento, e empregando-se as condições de contorno impostas para a temperatura. Encontra-se, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta_t^*} T_f dy^* + \frac{\partial}{\partial x^*} \int_0^{\delta_t^*} u(T_f - T_\infty) dy^* = -\alpha_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (4.1)$$

Esta equação ainda não pode ser resolvida, pois envolve três incógnitas, $\delta_t^*(x^*, t)$, $u(x^*, y^*)$, $T_f(x^*, y^*, t)$, e necessita-se de relações adicionais. A abordagem do presente trabalho foi introduzir aproximações para desenvolver expressões analíticas para $u^*(x^*, y^*)$ e $T_f(x^*, y^*, t)$ utilizando-se da aproximação clássica do Método Integral (SCHLICHTING, 1968; WHITE, 1974; KAYS & CRAWFORD, 1980)

A metodologia de solução aproximada pelo Método Integral aplicada à eq. (4.1) é aqui ilustrada pelo polinômio de Karman-Pohlhausen de terceira ordem para a velocidade e segunda ordem para o campo de temperatura. Ordens mais altas para a aproximação polinomial para o campo de temperatura foram evitadas para não introduzir a derivada temporal da temperatura da interface na determinação dos coeficientes, o que requereria mais uma equação diferencial parcial acoplada. A escolha

das ordens de aproximação polinomial para os perfis de velocidade e temperatura adotados no presente trabalho foram resultados também de uma análise numérica, em regime permanente, da acurácia das diferentes combinações.

Supõe-se a seguinte aproximação cúbica para o campo de velocidade dentro da camada limite hidrodinâmica:

$$u(x^*, y^*) = a_0 + a_1(x^*)y^* + a_2(x^*)y^{*2} + a_3(x^*)y^{*3}, \quad (4.2)$$

$$0 < x^* < L, \quad 0 < y^* < \delta^*(x^*)$$

e as quatro condições utilizadas para a determinação dos quatro coeficientes são:

$$u(x^*, 0) = 0, \quad 0 < x^* < L \quad (4.3)$$

$$u(x^*, \delta^*) = u_\infty, \quad 0 < x^* < L \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y^*} \right|_{y^*=\delta^*} = 0, \quad 0 < x^* < L \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} \right|_{y^*=0} = 0, \quad 0 < x^* < L \quad (4.6)$$

onde, as duas primeiras relações são as condições de contorno do problema, a terceira resulta do conceito de camada limite e a última é uma condição derivada que se obtém da equação de momentum. O perfil de velocidade é então obtido pela expressão cúbica bem conhecida (ÖZISIK, 1985):

$$u(x^*, y^*) = u_\infty \left[\frac{3}{2} \frac{y^*}{\delta^*(x^*)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y^*}{\delta^*(x^*)} \right)^3 \right] \quad (4.7)$$

4.2. Convecção Externa sem Conjugação

Nesta situação, não se considera a transferência de calor por condução na placa, e é suposto que o fluxo de calor incidente e absorvido na superfície da parede seja completamente cedido para o fluido.

O principal interesse, deste caso específico, é que ele pode ser considerado como um primeiro resultado de referência tanto numa abordagem experimental quanto teórica. Supõe-se aqui a seguinte aproximação quadrática para o perfil de temperatura:

$$T_f(x^*, y^*, t) = b_0(x^*, t) + b_1(x^*, t)y^* + b_2(x^*, t)y^{*2}, \quad (4.8)$$

$$0 < x^* < L, \quad 0 < y^* < \delta_t^*(x^*, t)$$

e as três condições utilizadas para a determinação dos três coeficientes têm a seguinte forma:

$$-k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \phi(t), \quad 0 < x^* < L \quad (4.9)$$

$$T_f(x^*, \delta_t^*, t) = T_\infty, \quad 0 < x^* < L \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=\delta_t^*} = 0, \quad 0 < x^* < L \quad (4.11)$$

As duas primeiras relações são as condições de contorno do problema e a terceira resulta do conceito de camada limite.

Maiores ordens na aproximação polinomial para o perfil de temperatura poderiam ter sido utilizadas. Contudo, uma vez que a condição de contorno de segunda derivada em $y^* = 0$ no problema térmico não é nula para o caso de regime transiente, como pode ser visto na relação (4.12) obtida da simplificação da equação de energia em $y^* = 0$, a utilização desta condição introduziria a derivada temporal dos coeficientes do polinômio, acrescentando assim mais uma equação diferencial ao sistema, e por tal motivo optou-se por não utilizá-la no presente trabalho.

$$\left. \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^{*2}} \right|_{y^*=0} = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f(x^*, 0, t)}{\partial t}, \quad 0 < x^* < L, \quad t > 0 \quad (4.12)$$

Logo, para o presente estudo, o campo de temperatura dentro da camada limite térmica tem sua aproximação limitada a um polinômio de segunda ordem, dado na forma:

$$T_f(x^*, y^*, t) = T_\infty + \frac{\phi(t)}{k_f} \left[\frac{\delta_t^*(x^*, t)}{2} - y^* + \frac{1}{2\delta_t^*(x^*, t)} y^{*2} \right] \quad (4.13)$$

A substituição das equações (4.7) e (4.13) na equação integral da energia fornece então a equação diferencial parcial para a espessura da camada limite térmica, $\delta_t^*(x^*, t)$, que é então dada por:

$$\phi \left(16\delta_t^* \frac{\partial \delta_t^*}{\partial t} + 9u_\infty \delta_t^* (\delta_t^*)^2 \frac{\partial \delta_t^*}{\partial x^*} - 48\alpha_f + \frac{3u_\infty (2 + 3\delta_t^{*2}) (\delta_t^*)^3 \frac{d\delta_t^*(x^*)}{dx^*}}{\delta_t^{*2}} \right) + 8(\delta_t^*)^2 \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (4.14)$$

A equação (4.14) pode então ser resolvida numericamente obtendo-se $\delta_t^*(x^*, t)$ ou $T_f(x^*, 0, t)$ uma vez que eles se relacionam pela eq. (4.13), ou seja:

$$T_f(x^*, 0, t) = T_\infty + \frac{\phi(t)}{2k_f} \delta_t^*(x^*, t) \quad (4.15)$$

De posse da temperatura do fluido em $y^* = 0$ e do fluxo de calor, pode-se calcular o coeficiente de transferência de calor convectivo pela relação:

$$h(x^*, t) = \frac{\phi(t)}{T_f(x^*, 0, t) - T_\infty} \quad (4.16)$$

ou por,

$$h(x^*, t) = \frac{2k}{\delta(x^*, t)} \quad (4.17)$$

4.3. Convecção Externa com Conjugação

No problema conjugado, uma parte do fluxo de calor incidente é absorvido na superfície é cedido para o fluido, enquanto a outra parte é conduzida para dentro da própria placa. Supõe-se para o perfil de temperatura uma aproximação quadrática como a dada pela eq. (4.8), onde as três condições necessárias para a determinação dos três coeficientes têm a seguinte forma:

$$-k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \phi(t) - \frac{3k_s}{e} [T_f(x^*, 0, t) - T_{av}(x^*, t)], \quad 0 < x^* < L \quad (4.18)$$

$$T_f(x^*, \delta_t^*, t) = T_\infty, \quad 0 < x^* < L \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y^*} \right|_{y^*=\delta_t^*} = 0, \quad 0 < x^* < L \quad (4.20)$$

Da mesma forma que no problema sem conjugação, as duas primeiras relações são as condições de contorno do problema e a terceira resulta do conceito de camada limite. Logo, tem-se que o perfil de temperatura aproximado para o problema conjugado resulta em:

$$T_f(x^*, y^*, t) = T_\infty + \frac{\left(y^* - \delta_t^*(x^*, t)\right)^2 (e \phi(t) + 3k_s(T_{av}(x^*, t) - T_\infty))}{\delta_t^*(x^*, t)(2e k_f + 3k_s \delta_t^*(x^*, t))} \quad (4.21)$$

e para a temperatura de interface tem-se:

$$T_f(x^*, 0, t) = T_\infty + \frac{\delta_t^*(x^*, t)(e \phi(t) + 3k_s(T_{av}(x^*, t) - T_\infty))}{(2e k_f + 3k_s \delta_t^*(x^*, t))} \quad (4.22)$$

Claramente, para um material de condutividade térmica, $k_s \rightarrow 0$, e/ou espessura $e \rightarrow \infty$, as equações (4.21) e (4.22) recuperam, respectivamente, as expressões (4.13) e (4.15) para a situação sem conjugação, com a eq. (4.18) assumindo a forma da eq. (4.9). Da mesma forma, para o outro caso limite onde a espessura $e \rightarrow 0$ e/ou condutividade térmica $k_s \rightarrow \infty$, tem-se que a temperatura média no sólido tende para a temperatura na interface, $T_{av}(x^*, t) \rightarrow T_f(x^*, 0, t)$, de modo que a eq. (4.18) novamente assume a forma da eq. (4.9), recuperando a situação sem conjugação.

Substituindo as aproximações polinomiais, eqs (4.7) e (4.21), na forma integral da energia, eq. (4.1), tem-se uma equação diferencial parcial para a espessura da camada limite térmica do problema conjugado, $\delta_t^*(x^*, t)$, como função da coordenada longitudinal e variável com o tempo, mas agora, acoplada com a temperatura média no sólido. Todos os passos da derivação desta metodologia de solução foram realizados fazendo-se uso da computação simbólica através da plataforma *Mathematica* (Wolfram, 1999). Como uma ilustração dos resultados da computação simbólica, reproduz-se na figura 4.1 a equação diferencial parcial obtida para a espessura da camada limite térmica com a derivada temporal explicitada.

$$\begin{aligned}
& \partial_t \delta_t^* [x, t] := \\
& \left(67200 \alpha_f e k_f (e \phi [t] + 3 k_s (-T_\infty + T_{av} [x, t])) + 100800 \alpha_f k_s \delta_t^* [x, t] (e \phi [t] + 3 k_s (-T_\infty + T_{av} [x, t])) - \right. \\
& 5600 \delta_t^* [x, t]^2 (2 e k_f + 3 k_s \delta_t^* [x, t]) (e \phi' [t] + 3 k_s T_{av}^{(0,1)} [x, t]) - \\
& \frac{1}{\sqrt{\frac{v x}{u_\infty}}} \\
& \left. \left(\sqrt{910} u_\infty \delta_t^* [x, t]^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{1}{7280 u_\infty v x^2} ((e \phi [t] + 3 k_s (-T_\infty + T_{av} [x, t])) \right. \right. \right. \\
& (-39 k_s u_\infty (13 u_\infty + 1120 v x) \delta_t^* [x, t]^4 + 14112000 e k_f v^2 x^3 \partial_x \delta_t^* [x, t] + \\
& 1400 v x \delta_t^* [x, t]^2 (9 k_s (13 u_\infty + 560 v x) - 52 e k_f u_\infty x \partial_x \delta_t^* [x, t]) + \\
& 16800 v x \delta_t^* [x, t] (e k_f (13 u_\infty + 420 v x) + 840 k_s v x^2 \partial_x \delta_t^* [x, t]) - \\
& 52 u_\infty \delta_t^* [x, t]^3 (e k (13 u_\infty + 700 v x) + 1680 k_s v x^2 \partial_x \delta_t^* [x, t])) - \\
& 3 k_s \delta_t^* [x, t] (2 e k_f + 3 k_s \delta_t^* [x, t]) \left(-15 + \frac{13 u_\infty \delta_t^* [x, t]^2}{280 v x} \right) \\
& \left. \left. \left. \partial_x T_{av} [x, t] \right) \right) \right) / (5600 \delta_t^* [x, t] (4 e k_f + 3 k_s \delta_t^* [x, t]) (e \phi [t] + 3 k_s (-T_\infty + T_{av} [x, t])))
\end{aligned}$$

Figura 4.1 – Célula do software *Mathematica* com a expressão simbólica para a equação diferencial parcial para a espessura da camada limite térmica.

A equação de energia para a temperatura média na parede, também simbolicamente preparada, é mostrada na figura 4.2.

$$\frac{\partial_t T_{av} [x, t]}{\alpha_s} := - \frac{3 \left(-T_\infty + T_{av} [x, t] - \frac{\delta_t^* [x, t] (e \phi [t] + 3 k_s (-T_\infty + T_{av} [x, t]))}{2 e k_f + 3 k_s \delta_t^* [x, t]} \right)}{e^2} + \partial_{x,x} T_{av} [x, t]$$

Figura 4.2 - Célula do software *Mathematica* com a expressão para a equação diferencial parcial para a temperatura média na parede.

Assim, após sua avaliação simbólica, as equações acopladas da espessura da camada limite térmica e da temperatura média no sólido são numericamente resolvidas fazendo-se uso da rotina *NDSolve* do *Mathematica*. Expressões interpoladas são geradas automaticamente pela rotina para a temperatura média na placa e para a espessura da camada limite térmica no fluido, possibilitando o cálculo das mesmas em qualquer posição x do domínio e em qualquer tempo t .

5. Solução por Transformação Integral

5.1. Metodologia de Solução

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma metodologia híbrida numérico-analítica derivada da Técnica de Transformação Integral Clássica (CITT), que oferece precisão controlada e performance computacional eficiente para uma grande variedade de problemas não-transformáveis, incluindo as formulações não-lineares mais usuais em aplicações em mecânica dos fluidos e transferência de calor. Além de ser ela própria um método computacional alternativo, essa técnica híbrida é particularmente interessante para propósitos de “benchmark” (validação). Em face do aspecto de controle automático do erro, o método retém as mesmas características de uma solução puramente analítica.

Além do controle e estimativa de erro bem simples, outro aspecto notável desse método é a extensão direta para situações multidimensionais, com apenas um moderado aumento moderado do esforço computacional. Outra vez, a natureza híbrida é responsável por esse comportamento, uma vez que a parte analítica do procedimento de solução é empregada sobre todas menos uma variável independente, e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário nessa única variável independente restante.

Mais recentemente, entretanto, tendo em vista os desenvolvimentos também importantes no controle automático de erro em soluções numéricas de equações diferenciais parciais, em particular para formulações unidimensionais, a GITT foi empregada em combinação com algoritmos bem testados para equações parabólicas e parabólica-hiperbólicas (COTTA & GERK, 1994). Essa possibilidade abriu novas perspectivas na fusão de idéias numéricas e analíticas, e em explorar o poder e

flexibilidade de sub-rotinas progressivamente mais confiáveis para equações diferenciais parciais, disponíveis tanto comercialmente quanto em domínio público.

Os dois esquemas alternativos de solução, de transformação total e parcial, são então descritos neste trabalho.

- Transformação Total

Como ilustração de procedimento formal de transformação integral, considere-se um problema de convecção-difusão transiente de n potenciais acoplados (por exemplo velocidade, temperatura e concentrações). Esses potenciais são definidos na região V^* com superfície de contorno S^* e incluindo efeitos não-lineares nos termos fontes e convectivos como segue:

$$w_k(x^*) \frac{\partial T_k(x^*, t)}{\partial t} + u(x^*, t, T_\ell) \cdot \nabla T_k(x^*, t) + L_k T_k(x^*, t) = P_k(x^*, t, T_\ell), \quad (5.1)$$

$$x^* \in V^*, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

com condições iniciais e de contorno dadas, respectivamente, por

$$T_k(x^*, 0) = f_k(x^*), \quad x^* \in V^* \quad (5.2)$$

$$\left[\alpha_k(x^*) + \beta_k(x^*) K_k(x^*) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] T_k(x^*, t) = \phi_k(x^*, t, T_\ell), \quad x^* \in S^*, \quad t > 0 \quad (5.3)$$

onde o operador da equação é escrito como

$$L_k \equiv -\nabla K_k(x^*) \nabla + d_k(x^*) \quad (5.4)$$

e \mathbf{n} representa a normal apontando no sentido saindo da superfície S^* .

Sem os termos convectivos e para termos fonte lineares, isto é, $u(x^*, t, T_\ell) \equiv 0$, $P_k \equiv P_k(x^*, t)$, e $\phi \equiv \phi(x^*, t)$, esse exemplo se torna um problema linear de difusão de

classe I de acordo com a classificação em (MIKHAILOV & ÖZISIK, 1984). Soluções analíticas exatas são obtidas nessa situação pela técnica de transformação integral clássica. Senão, este problema seria *a priori* não-transformável, e as idéias na técnica da transformada integral generalizada (COTTA, 1990; COTTA, 1993; COTTA, 1994; COTTA & MIKHAILOV, 1997; COTTA, 1998; SANTOS *et al.*, 2001; COTTA & ORLANDE, 2003; COTTA *et al.*, 2005; COTTA & MIKHAILOV, 2006) devem ser utilizadas para desenvolver soluções híbridas numérico-analíticas para essa classe de problemas. Seguindo soluções previamente estabelecidas para problemas não-lineares de difusão e convecção-difusão, a solução formal do problema não-linear proposto requer a consideração de expansões em autofunções para os potenciais associados. A situação linear acima comentada que admite solução exata pela técnica de transformação integral clássica, naturalmente leva aos problemas de autovalor a serem preferidos também na análise da situação não-linear. Estes surgem da aplicação direta de separação de variáveis à versão linear homogênea e puramente difusiva do problema acima. Assim, o conjunto de problemas auxiliares recomendado é dado por:

$$L_k \psi_{k,i}(x^*) = \mu_{k,i}^2 \psi_{k,i}(x^*), \quad x^* \in V^* \quad (5.5)$$

com condições de contorno

$$\left[\alpha_k(x^*) + \beta_k(x^*) K_k(x^*) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi_{k,i}(x^*) = 0, \quad x^* \in S^* \quad (5.6)$$

onde os autovalores, $\mu_{k,i}$, e autofunções relacionadas, $\psi_{k,i}(x^*)$, são assumidos conhecidos na forma de expressões analíticas exatas ou da aplicação de métodos computacionais para problemas do tipo Sturm-Liouville (COTTA, 1993; COTTA, 1994; COTTA & MIKHAILOV 1997). O problema dado pelas eqs. (5.5) e (5.6) permite, através da propriedade de ortogonalidade das autofunções, definição dos seguintes pares de transformação integral:

Transformada:

$$\bar{T}_{k,i}(t) = \int_{v^*} w_k(x^*) \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) T_k(x^*, t) dv \quad (5.7)$$

Inversa:

$$T_k(x^*, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) \bar{T}_{k,i}(t) \quad (5.8)$$

onde os núcleos simétricos $\tilde{\psi}_{k,i}(x^*)$ são dados por

$$\tilde{\psi}_{k,i}(x^*) = \frac{\psi_{k,i}(x^*)}{N_{k,i}^{1/2}} \quad (5.9)$$

Onde a integral de normalização é dada por:

$$N_{k,i} = \int_{v^*} w_k(x^*) \psi_{k,i}^2(x^*) dv \quad (5.10)$$

A transformação integral de (5.1) é conseguida através da aplicação do operador $\int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) dv$ que fornece, após empregar as condições de contorno eqs. (5.3) e (5.6)

$$\frac{d\bar{T}_{k,i}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kij}(t, T_\ell) \bar{T}_{k,j}(t) = \bar{g}_{k,i}(t, T_\ell), \quad i=1,2,\dots, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1,2,\dots, n \quad (5.11)$$

As condições iniciais eq. (5.2) são também transformadas através do operador

$$\int_{v^*} w_k(x^*) \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) dv \text{ para obter}$$

$$\bar{T}_{k,i}(0) = \bar{f}_{k,i} \equiv \int_{v^*} w_k(x^*) \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) f_k(x^*) dv \quad (5.12)$$

onde,

$$\bar{g}_{k,i}(t, T_\ell) = \int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) P_k(x^*, t, T_\ell) dv + \int_{s^*} K_k(x^*) \left[\tilde{\psi}_{k,i}(x^*) \frac{\partial T_k(x^*, t)}{\partial \mathbf{n}} - T_k(x^*, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_{k,i}(x^*)}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \quad (5.13)$$

e

$$a_{kij}(t, T_\ell) = \delta_{ij} \mu_{ki}^2 + a_{kij}^*(t, T_\ell) \quad (5.14)$$

com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j \end{cases} \quad (5.15)$$

$$a_{kij}^*(t, T_\ell) = \int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(x^*) [u(x^*, t, T_\ell) \cdot \nabla \tilde{\psi}_{k,i}(x^*)] dv \quad (5.16)$$

As eqs. (5.11) a (5.16) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas para os potenciais transformados, $\bar{T}_{k,i}$. Para fins computacionais, o sistema (5.11) a (5.16) é truncado na N -ésima linha e coluna, com N suficientemente grande para a convergência requerida. Os aspectos formais referentes à análise da convergência para a solução do sistema infinito com o aumento da ordem de truncamento N foram investigados anteriormente (COTTA, 1993). O problema de valor inicial não-linear definido pelas eqs. (5.11) a (5.16) é provável de pertencer a uma classe de sistemas diferenciais ordinários rígidos, *stiff systems*, especialmente para

valores crescentes de N . Felizmente, vários integradores numéricos especiais foram desenvolvidos nas últimas décadas para essa classe de sistemas (COTTA, 1993; COTTA, 1994; COTTA & MIKHAILOV, 1997). Uma vez que os potenciais transformados tenham sido computados pela solução numérica do sistema (5.11) a (5.16), a fórmula de inversão eq. (5.8) é empregada para reconstruir os potenciais originais $T_k(x^*, t)$, em forma explícita.

- Transformação Parcial

Uma estratégia de solução híbrida alternativa à transformação integral total acima descrita é de particular interesse no tratamento de problemas de convecção-difusão transiente com uma direção convectiva preferencial. Nesses casos, a transformação integral parcial em todas, menos uma, coordenada espacial, pode oferecer uma combinação interessante de vantagens relativas entre a técnica de expansão em autofunções e o método numérico selecionado para tratar o sistema acoplado de equações diferenciais parciais unidimensionais que resulta do procedimento de transformação. Como ilustração do procedimento de transformação integral parcial, novamente um problema de convecção-difusão transiente para n potenciais acoplados (velocidade, temperatura, concentração, etc) é considerado, mas desta feita separando a direção preferencial que não sofrerá a transformação integral. Assim, o vetor y agora inclui as coordenadas espaciais que serão eliminadas via transformação integral, aqui representadas pelo vetor \bar{y} , como também a variável espacial a ser retida no sistema parcialmente transformado, x^* . O termo fonte P_k inclui todas as outras contribuições não mostradas explicitamente na formulação abaixo, como os termos convectivos nas demais direções como também a difusão na direção x^* e as componentes não-lineares e dependentes do tempo nos termos convectivos, não mostrados aqui explicitamente para maior clareza:

$$w_k(\bar{y}) \frac{\partial T_k(x^*, \bar{y}, t)}{\partial t} + u(\bar{y}) \frac{\partial T_k(x^*, \bar{y}, t)}{\partial x^*} + L_k T_k(x^*, \bar{y}, t) = P_k(x^*, \bar{y}, t, T_\ell), \quad (5.17)$$

$$x_0^* \leq x^* \leq x_1^*, \quad \bar{y} \in V^*, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

com condições iniciais e de contorno dadas, respectivamente, por:

$$T_k(x^*, \bar{y}, 0) = f_k(x^*, \bar{y}), \quad x_0^* \leq x^* \leq x_1^*, \quad \bar{y} \in V^* \quad (5.18)$$

$$\left[\alpha_k(\bar{y}) + \beta_k(\bar{y})K_k(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] T_k(x^*, \bar{y}, t) = \phi_k(x^*, \bar{y}, t, T_\ell), \quad \bar{y} \in S^*, \quad t > 0 \quad (5.19)$$

onde o operador da equação é dado por

$$L_k \equiv -\nabla \cdot K_k(\bar{y}) \nabla + d_k(\bar{y}) \quad (5.20)$$

e \mathbf{n} representa a normal à superfície S^* no sentido saindo do meio. As condições de contorno introduzidas pela variável x^* são dadas como

$$B_{k,r} T_k(x^*, \bar{y}, t) = \varphi_{k,r}(x^*, \bar{y}, t, T_\ell), \quad x^* = x_r^*, \quad r=0 \text{ e } 1, \quad \bar{y} \in S^*, \quad t > 0 \quad (5.21)$$

onde o operador da condição de contorno pode incluir diferentes combinações de condições de primeiro a terceiro tipo nas posições x_r^* , $r=0$ e 1 .

Logo, o problema auxiliar alternativo é agora definido na região V^* , com contorno S^* , formado pelas coordenadas espaciais a serem eliminadas:

$$L_k \psi_{k,i}(\bar{y}) = \mu_{k,i}^2 w_k(\bar{y}) \psi_{k,i}(\bar{y}), \quad \bar{y} \in V^* \quad (5.22)$$

com condições de contorno

$$\left[\alpha_k(\bar{y}) + \beta_k(\bar{y})K_k(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi_{k,i}(\bar{y}) = 0, \quad \bar{y} \in S^* \quad (5.23)$$

onde os autovalores, $\mu_{k,i}$, e autofunções correspondentes, $\psi_{k,i}(\bar{y})$, são assumidos conhecidos. Os seguintes pares de transformação integral são agora definidos:

Transformada:

$$\bar{T}_{k,i}(x^*, t) = \int_{v^*} w_k(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) T_k(x^*, \bar{y}, t) dv \quad (5.24)$$

Inversa:

$$T_k(x^*, \bar{y}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) \bar{T}_{k,i}(x^*, t) \quad (5.25)$$

onde os núcleos simétricos $\tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y})$ são dados por

$$\tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) = \frac{\psi_{k,i}(\bar{y})}{N_{k,i}^{1/2}} \quad (5.26)$$

$$N_{ki} = \int_{v^*} w_k(\bar{y}) \psi_{ki}^2(\bar{y}) dv \quad (5.27)$$

A transformação integral da eq. (5.17) é obtida pela aplicação do operador $\int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) dv$ fornecendo, após usar as condições de contorno eqs. (5.19) e (5.23)

$$\frac{\partial \bar{T}_{k,i}(x^*, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kij}(x^*, t, T_\ell) \frac{\partial \bar{T}_{k,j}(x^*, t)}{\partial x^*} = -\mu_i \bar{T}_{k,i}(x^*, t) + \bar{g}_{ki}(x^*, t, T_\ell), \quad (5.28)$$

$i=1,2,\dots, \quad t>0, \quad k,\ell=1,2,\dots,n$

Observa-se que com a escolha da função $w_k(\bar{y})$ como função peso no problema de autovalor, o termo transiente é transformado exatamente, enquanto o termo

convectivo na direção x^* resulta em uma matriz de coeficientes acoplando o sistema. As condições iniciais da eq. (5.18) são também transformadas através do operador

$$\int_{v^*} w_k(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) dv \text{ para fornecer}$$

$$\bar{T}_{k,i}(x^*, 0) = \bar{f}_{k,i}(x^*) \equiv \int_{v^*} w_k(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) f_k(x^*, \bar{y}) dv \quad (5.29)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{k,i}(x^*, t, T_\ell) = & \int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) P_k^*(x^*, \bar{y}, t, T_\ell) dv + \\ & \int_{S^*} K_k(\bar{y}) \left[\tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) \frac{\partial T_k(x^*, \bar{y}, t)}{\partial \mathbf{n}} - T_k(x^*, \bar{y}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y})}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

e

$$a_{kij} = \int_{v^*} \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) u(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,j}(\bar{y}) dv \quad (5.31)$$

com as condições de contorno em x^* transformadas

$$\begin{aligned} \int_{v^*} w_k(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) B_{k,r} T_k(x^*, \bar{y}, t) dv = \bar{\varphi}_{k,r,i}(x^*, t, T_\ell), \\ x^* = x_r^*, \quad r = 0 \text{ e } 1, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{y} \in S^*, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde

$$\bar{\varphi}_{k,r,i}(x^*, t, T_\ell) = \int_{v^*} w_k(\bar{y}) \tilde{\psi}_{k,i}(\bar{y}) \varphi_{k,r}(x^*, \bar{y}, t, T_\ell) dv, \quad (5.33)$$

$$x^* = x_r^*, \quad r = 0 \text{ e } 1, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{y} \in S^*, \quad t > 0$$

As eqs. (5.28) a (5.33) formam um sistema infinito de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para os potenciais transformados, $\bar{T}_{k,i}(x^*, t)$. Para fins de computação, o sistema (5.28) a (5.33) é também truncado na N -ésima linha e coluna, com N suficientemente grande para a convergência requerida. Alguns integradores numéricos automáticos para essa classe de sistemas diferenciais parciais unidimensionais encontram-se disponíveis, como aqueles baseados no Método das Linhas (WOLFRAM, 1999; IMSL, 1987). Uma vez que os potenciais transformados tenham sido computados pela solução numérica do sistema (5.28) a (5.33), a fórmula de inversão, eq. (5.25), é empregada para reconstruir os potenciais originais $T_k(x^*, \bar{y}, t)$, em forma explícita ao longo das variáveis \bar{y} .

Sendo o foco deste trabalho o estudo do problema térmico envolvido na convecção forçada externa, optou-se por resolver o problema hidrodinâmico utilizando o Método da Similaridade (solução de Blasius), transformando o sistema de equações diferenciais parciais em uma equação diferencial ordinária. Em seguida, aplica-se o método da transformação integral total no problema térmico em regime permanente, resultando em um sistema diferencial ordinário para o potencial transformado, na verdade um sistema algébrico, como será verificado a seguir. Já o caso em regime transiente, utilizou-se a estratégia mais recentemente introduzida de transformação integral parcial, fornecendo um sistema acoplado de equações diferenciais parciais unidimensionais a ser numericamente integrado.

5.2. Determinação do Campo de Velocidade

Na solução pelo Método de Similaridade os perfis de velocidade são interpretados como “similares”, ou seja, diferem apenas por um fator de escala de alongamento em y , que depende da posição longitudinal x . Propõe-se então que:

$$u = f(y^* g(x^*)) \quad (5.34)$$

onde $g(x^*)$ é o fator de escala e então uma variável independente de similaridade η , que agrupa as demais variáveis independentes do problema:

$$\eta \equiv y^* g(x^*) \quad (5.35)$$

Tal que:

$$u = f(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^*} = \frac{\partial f}{\partial x^*} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x^*} = f' y g' \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y^*} = \frac{\partial f}{\partial y^*} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y^*} = f' g$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right) = f'' g^2$$

e por sua vez:

$$\frac{\partial v}{\partial y^*} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y^*} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot g \quad (5.37)$$

Substituindo as relações dadas por (5.36) e (5.37) nas equações governantes (3.1) e (3.2) tem-se que:

$$\frac{1}{f} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{f''}{f'} \right) = \frac{1}{v} \frac{g'}{g^3} \quad (5.38)$$

Como o lado esquerdo da equação acima é função apenas de η e o lado direito função apenas de x^* , para que a igualdade seja válida, só se ambos forem iguais a uma constante dimensional arbitrária, λ :

$$\underbrace{\frac{1}{f} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{f''}{f'} \right)}_{\text{função apenas de "}\eta\text{"}} = \underbrace{\frac{1}{v} \frac{g'}{g^3}}_{\text{função apenas de "x^*"}} = -\lambda \quad (5.39)$$

Resolvendo o problema na variável x^* , tem-se que:

$$g(x^*) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda v x^*}} \quad (5.40)$$

e conseqüentemente:

$$\eta = \frac{y^*}{\sqrt{2\lambda v x^*}} \quad (5.41)$$

e

$$u = f(\eta) = f\left(\frac{y^*}{\sqrt{2\lambda v x^*}}\right)$$

Resolvendo o problema na variável η , tem-se que:

$$\frac{f''}{f'} = -\lambda \int_0^\eta f d\eta \quad (5.42)$$

Definindo:

$$\xi'(\eta) \equiv \frac{u}{u_\infty} = \frac{f}{u_\infty} \quad (5.43)$$

de modo que:

$$\frac{f''}{f'} = \frac{\xi'''}{\xi''} \quad (5.44)$$

Substituindo as eqs. (5.43) e (5.44) em (5.42) tem-se a bem conhecida equação de Blasius.

$$\xi'''' + \lambda u_\infty \xi \xi'' = 0 \quad (5.45)$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &\rightarrow u = 0, & f = 0 &\rightarrow \xi' = 0 \\ \eta = \infty &\rightarrow u = u_\infty, & f = \infty &\rightarrow \xi' = 1 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Através da obtenção da equação de Blasius, observa-se que o Método de Similaridade transforma o sistema de equações diferenciais parciais em uma equação diferencial ordinária mantendo ainda a não-linearidade original do problema.

Fazendo $\lambda = \frac{1}{2u_\infty}$, resolve-se numericamente a eq. (5.45) para ξ e em seguida

tem-se as componentes do campo de velocidade. $u(x^*, y^*)$ é obtida a partir da própria definição de ξ , dada em (5.43), e pela equação da continuidade tem-se o campo normal à parede, $v(x^*, y^*)$:

$$\frac{v}{u_\infty} = \frac{\eta \xi'(\eta) - \xi(\eta)}{\sqrt{2 \text{Re}_{x^*}}} \quad (5.47)$$

Prontamente verifica-se que v é menor do que u e u_∞ , da ordem de $\text{Re}_{x^*}^{-1/2}$.

Uma possibilidade para a definição da espessura da camada limite hidrodinâmica é dizer que em $y^* = \delta^*$ tem-se $u = 0.99u_\infty$, com isso, dos valores

tabelados para $\frac{u}{u_\infty} = \xi' = 0.99$ tem-se $\eta \approx 4.96$, o que define uma expressão bastante usual para a camada limite hidrodinâmica dada por:

$$\delta^*(x^*) = 4.96 \sqrt{\frac{\nu x^*}{u_\infty}} = 4.96 x^* Re_{x^*}^{-1/2} \quad (5.48)$$

Adota-se comumente uma expressão para a espessura da camada limite térmica a partir da correlação de Blasius, encontrada na literatura (ÖZISIK, 1985), para o presente caso de um escoamento bidimensional, estacionário, laminar de um fluido incompressível, e propriedades constantes:

$$\frac{\delta_t^*(x^*)}{\delta^*(x^*)} = 0.976 Pr^{1/3} \quad (5.49)$$

logo,

$$\delta_t^*(x^*) = 4.841 x^* Pr^{1/3} Re_{x^*}^{-1/2} \quad (5.50)$$

A expressão acima oferece uma representação para a região termicamente afetada em regime permanente, possibilitando ser empregado na solução por transformada integral para delimitar a região de interesse, ou como uma primeira aproximação da extensão do domínio na direção transversal.

5.3. Regularização do Domínio

Embora o domínio transversal seja semi-infinito, a partir da interface, na formulação original do problema há uma nítida vantagem no uso da GITT, em termos

de taxas de convergência, em se utilizar um domínio restrito à região termicamente afetada, aqui representado pela função $\delta_t^*(x^*)$ da eq. (5.50) (ALMEIDA & COTTA, 1999). Um domínio excessivamente grande para um dado problema, gera um espectro de autovalores mais próximos, com menor afastamento entre si, resultando em convergência mais lenta.

Na seqüência, a fim de se evitar as inconveniências de um problema de autovalor dependente de x , considerou-se a seguinte transformação de coordenadas para regularização do domínio transversal:

$$\eta_t = \frac{y}{\delta_t(x)}$$

$$\chi = x$$
(5.51)

e, as respectivas derivadas são mostradas abaixo, onde o ponto denota derivação com respeito a χ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta_t(\chi)} \frac{\partial}{\partial \eta_t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta_t^2(\chi)} \frac{\partial^2}{\partial \eta_t^2}$$
(5.52)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \chi} - \eta_t \frac{\dot{\delta}_t(\chi)}{\delta_t(\chi)} \frac{\partial}{\partial \eta_t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - \eta_t^2 \frac{\dot{\delta}_t^2(\chi)}{\delta_t^2(\chi)} \frac{\partial^2}{\partial \eta_t^2}$$

Aplicou-se a transformação de variável independente apresentada em (5.51) e (5.52) ao sistema de equações diferenciais parciais adimensionalizado dado pelas equações (3.33) a (3.40), resultando no novo sistema com domínio regularizado dado por:

equação de energia no fluido adimensionalizada e regularizada:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2},$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$
(5.53)

onde

$$U^*(\chi, \eta_t) = U(\chi, \eta_t) \delta_t^2(\chi) \tag{5.54}$$

e

$$V^*(\chi, \eta_t) = \eta_t U(\chi, \eta_t) \delta_t(\chi) \dot{\delta}_t(\chi) + V(\chi, \eta_t) \delta_t(\chi) \tag{5.55}$$

Vale lembrar que pela similaridade discutida na seção anterior e como $\eta_t = C_1 \eta$, onde C_1 é constante, tem-se:

$$U(\chi, \eta_t) = \frac{u(\chi, C_1 \eta)}{u_\infty} = \xi'(C_1 \eta) \rightarrow U(\chi, \eta_t) = U(\eta_t) \tag{5.56}$$

e

$$V(\chi, \eta_t) = \frac{v(\chi, C_1 \eta)}{u_\infty} = \frac{C_1 \eta \xi'(C_1 \eta) - \xi(C_1 \eta)}{\sqrt{2\chi Re_L}} \rightarrow V^*(\chi, \eta_t) = \frac{\eta_t \xi'(\eta_t) - \xi(\eta_t)}{\sqrt{2\chi Re_L}} \tag{5.57}$$

Logo, a equação (5.54) pode ser reescrita na forma:

$$U^*(\chi, \eta_t) = U(\eta_t) \delta_t^2(\chi) \tag{5.58}$$

e substituindo em (5.55) a eq. (5.57), a função $\delta_t^*(x^*)$, aqui representado pela eq. (5.50) e a sua derivada, tem-se:

$$V^*(\chi, \eta_t) = \eta_t U(\eta_t) \left[C_2 \chi^{1/2} \right] \left[C_3 \chi^{-1/2} \right] + \frac{\eta_t \xi'(\eta_t) - \xi(\eta_t)}{\sqrt{2\chi} \text{Re}_L} \left[C_2 \chi^{1/2} \right] \quad (5.59)$$

tal que

$$V^*(\chi, \eta_t) = V^*(\eta_t) \quad (5.60)$$

A condição inicial, adimensionalizada e regularizada, da equação (5.53) é dada por:

$$\theta_f(\chi, \eta_t, 0) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.61)$$

e as condições de contorno e de interface reformuladas e adimensionalizadas dadas por:

$$\theta_f(0, \eta_t, \tau) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.62)$$

$$\theta_f(\chi, 1, \tau) = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.63)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = \frac{3\delta_t(\chi)}{K.R} [\theta_f(\chi, 0, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau)] - \delta_t(\chi) Q_w(\tau), \quad (5.64)$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$

Equação de energia no sólido adimensionalizada:

$$\frac{\partial \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{R}{Pe_s} \frac{\partial^2 \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} + \frac{3}{Pe_s.R} [\theta_f(\chi, 0, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau)] , \quad (5.65)$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$

com condição inicial adimensionalizada:

$$\theta_{av}(\chi, 0) = 0, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.66)$$

e condições de contorno adimensionalizadas e regularizadas:

$$\left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.67)$$

5.4. Convecção Externa sem Conjugação em Regime Permanente

Analisou-se primeiramente o caso particular de convecção externa forçada sobre a placa plana em regime permanente desconsiderando a participação da parede no processo de transferência de calor. Sendo assim o sistema de equações diferenciais parciais derivado anteriormente para um problema transiente conjugado, dado pelas eqs. (5.53) a (5.67), reduz-se a:

$$U^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t^2}, \quad (5.68)$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1$$

com condições de contorno dadas por:

$$\theta_f(0, \eta_t) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1 \quad (5.69)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\delta_t(\chi), \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.70)$$

$$\theta_f(\chi, 1) = 0, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.71)$$

Ao problema descrito pelas eqs. (5.68) a (5.71) aplicou-se o método da transformação integral total descrito anteriormente de forma mais detalhada na seção 5.1 do presente trabalho. Sendo assim, o problema auxiliar apropriado é dado por:

$$\frac{d^2 \psi(\eta_t)}{d\eta_t^2} + \mu^2 \psi(\eta_t) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1 \quad (5.72)$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=0} = 0 \quad \psi(1) = 0,$$

O problema de autovalor apresentado acima tem como solução as seguintes autofunções:

$$\psi_i(\eta_t) = \text{Cos}[\eta_t \mu_i], \quad 0 < \eta_t < 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.73)$$

onde os autovalores, μ_i são calculados por:

$$\mu_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.74)$$

e a integral de normalização tem a seguinte forma:

$$N_i = \int_0^1 \psi_i(\eta_t) \cdot \psi_i(\eta_t) d\eta_t = 1/2 \quad (5.75)$$

Por sua vez, a autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\psi}_i(\eta_t) = \frac{\tilde{\psi}_i(\eta_t)}{N_i^{1/2}} = \sqrt{2} \text{Cos}[\eta_t \mu_i], \quad 0 < \eta_t < 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.76)$$

Todavia, o problema descrito pelas eqs. (5.68) a (5.71) não apresenta uma forma conveniente para a etapa computacional da solução por envolver uma não-homogeneidade na condição de contorno em $\eta_t = 0$. Conseqüentemente, a expansão em autofunções pode apresentar um processo de convergência lenta, especialmente nos pontos próximos ao contorno onde a condição de contorno original não é satisfeita pelo problema auxiliar. A fim de se contornar essa dificuldade adotou-se o procedimento de filtragem do problema original. Esta abordagem acelera a convergência da expansão em autofunções uma vez que elimina ou ao menos reduz a influência do termo fonte do problema original.

Dentro desta proposta aplicou-se a seguinte estratégia de solução:

$$\theta_f(\chi, \eta_t) = \theta_f^*(\chi, \eta_t) + F(\eta_t; \chi) \quad (5.77)$$

Propôs-se como função filtro $F(\eta_t; \chi)$, onde χ é agora tratado como um parâmetro da solução, um polinômio do segundo grau na mesma forma que a aproximação obtida pelo do Método Integral para o campo de temperatura, ou seja:

$$F(\eta_t; \chi) = c_0(\chi) + c_1(\chi)\eta_t + c_2(\chi)\eta_t^2, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.78)$$

Com as condições de contorno a serem obedecidas

$$F(1; \chi) = 0 \quad \left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\delta_t(\chi) \quad \left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=1} = 0 \quad (5.79)$$

Logo:

$$F(\eta_t; \chi) = \frac{\delta_t(\chi)}{2}(1 - \eta_t)^2, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.80)$$

Aplicando a proposta de representação da solução dada pela eq. (5.77) no problema original dado pelas (5.68) a (5.71), tem-se o seguinte problema filtrado:

$$U^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f^*(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t^2} - G(\chi, \eta_t),$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1$$
(5.81)

onde:

$$G(\chi, \eta_t) = U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi)}{\partial \eta_t^2}$$

com condições de contorno dadas por:

$$\theta_f^*(0, \eta_t) = -F(\eta_t; 0), \quad 0 < \eta_t < 1$$
(5.82)

$$\left. \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = 0, \quad 0 < \chi < 1$$
(5.83)

$$\theta_f^*(\chi, 1) = 0, \quad 0 < \chi < 1$$
(5.84)

O problema auxiliar (5.72) permite a definição do seguinte par Transformada-Inversa:

Transformada:

$$\bar{\theta}_{f,j}^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_j(\eta_t) \theta_f^*(\chi, \eta_t) d\eta_t$$
(5.85)

Inversa:

$$\theta_f^*(\chi, \eta_t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\eta_t) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi)$$
(5.86)

Aplicando o operador $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \dots d\eta_t$ em (5.81) efetua-se a transformação integral,

que fornece:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{ij}(\chi) \frac{d\bar{\theta}_{fj}^*(\chi)}{d\chi} + b_{ij}(\chi) \bar{\theta}_{fj}^*(\chi) \right] = \bar{g}_i(\chi), \quad 0 < \chi < 1, \quad i=1,2,\dots \quad (5.87)$$

A condição de contorno em χ dada pela eq.(5.82), é também transformada através do

operador $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \dots d\eta_t$ para obter-se:

$$\bar{\theta}_{f,i}^*(0) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) F(\eta_t; 0) d\eta_t \quad (5.88)$$

onde

$$a_{ij}(\chi) = \int_0^1 U^*(\chi, \eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t = \delta_{ij}^2(\chi) \int_0^1 U(\eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \quad (5.89)$$

$$b_{ij}(\chi) = \frac{1}{Pe_f} \mu_j^2 \delta_{ij}^2 + \int_0^1 V^*(\chi, \eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \frac{d\tilde{\psi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t = \frac{1}{Pe_f} \mu_j^2 \delta_{ij}^2 + \int_0^1 V^*(\eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \frac{d\tilde{\psi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (5.90)$$

e

$$\overline{g}_i(\chi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) G(\chi, \eta_t) d\eta_t = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \left[U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi)}{\partial \eta_t^2} \right] d\eta_t \quad (5.91)$$

Com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j \end{cases} \quad (5.92)$$

Observa-se que todas as integrais acima podem ser reescritas na forma de coeficientes variáveis em χ , multiplicando-se as integrais na coordenada η_t apenas, o que elimina a necessidade de efetuar integrações para determinação desses coeficientes ao longo da solução numérica do sistema diferencial ordinário, sendo portanto determinados *a priori*.

As eqs. (5.87) a (5.92) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas para os potenciais transformados, $\overline{\theta}_{f,i}^*(\chi)$. Para fins computacionais, o sistema (5.87) a (5.92) é truncado na N -ésima linha e coluna, com N suficientemente grande para a convergência requerida. Os aspectos referentes à análise da convergência para a solução de sistemas infinitos com o aumento da ordem de truncamento N serão investigados posteriormente pelo presente trabalho.

Cabe observar que para o caso especial de regime permanente e distribuição uniforme de fluxo de calor, existe uma transformação da variável $\theta_f(\chi, \eta_t)$ que ao ser utilizada na eq. (5.68), automaticamente elimina a dependência χ , tal transformação é dada por:

$$\theta_f(\chi, \eta_t) = \chi^{1/2} \hat{\theta}_f(\eta_t) \quad (5.93)$$

Assim para esta situação em particular, o problema diferencial parcial reduz-se a um problema diferencial ordinário dado por:

$$\mathbb{C}_4 U(\eta_t) \hat{\theta}_f(\eta_t) + V^*(\eta_t) \frac{\partial \hat{\theta}_f(\eta_t)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \hat{\theta}_f(\eta_t)}{\partial \eta_t^2}, \quad (5.94)$$

$$0 < \eta_t < 1$$

Onde \mathbb{C}_4 é constante.

A eq. (5.94), está sujeita às seguintes condições de contorno também simplificadas:

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_f}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\frac{\delta_t(\chi)}{\chi^{1/2}} = -\frac{\mathbb{C}_2 \chi^{1/2}}{\chi^{1/2}} = -\mathbb{C}_2, \quad (5.95)$$

$$\hat{\theta}_f(1) = 0, \quad (5.96)$$

O novo filtro para esta situação é dado por:

$$\hat{F}(\eta_t) = \frac{\mathbb{C}_2}{2} - \mathbb{C}_2 \eta_t + \frac{\mathbb{C}_2}{2} \eta_t^2, \quad 0 < \eta_t < 1 \quad (5.97)$$

Após a aplicação da transformação integral tem-se agora um problema para os campos transformados reduzido a um sistema de equações algébricas linearmente acopladas na variável η_t .

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \hat{a}_{ij} + \hat{b}_{ij} \right) \hat{\theta}_{f,j}^*(\eta_t) \right] = \bar{g}_i, \quad 0 < \chi < 1, \quad i=1,2,\dots \quad (5.98)$$

Onde:

$$\hat{a}_{ij} = \int_0^1 U(\eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \quad (5.99)$$

$$\hat{b}_{ij} = \frac{1}{Pe_f} \mu_j^2 \delta_{ij} + \int_0^1 V^*(\eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \frac{d\tilde{\psi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (5.100)$$

e

$$\overline{\hat{g}}_i = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \left[U(\eta_t) \hat{F}(\eta_t) + V^*(\eta_t) \frac{\partial \hat{F}(\eta_t)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \hat{F}(\eta_t)}{\partial \eta_t^2} \right] d\eta_t \quad (5.101)$$

Uma vez que os potenciais transformados, $\overline{\hat{\theta}}_f^*(\eta_t)$, tenham sido numericamente computados, a fórmula de inversão, eq. (5.86), é empregada para reconstruir os potenciais originais $\hat{\theta}_f^*(\eta_t)$, em forma explícita. Em seqüência, encontra-se o campo de temperatura adimensional, $\theta_f(\chi, \eta_t)$, na camada limite permanente fazendo-se uso da solução filtro, $\hat{F}(\eta_t)$, e da transformação adotada para a temperatura dadas, respectivamente, pelas relações (5.77) e (5.93).

5.5. Convecção Externa sem Conjugação em Regime Transiente

Para o problema de convecção transiente, ainda desconsiderando a participação do sólido na transferência de calor, optou-se pela estratégia de solução híbrida alternativa à transformação integral total acima descrita para o problema de convecção permanente.

Uma vez que se tem uma direção convectiva preferencial, alinhado ao escoamento, a transformação integral se deu apenas na direção transversal ao escoamento, onde predominava a difusão. O sistema diferencial parcial é então dado por:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2},$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$
(5.102)

com condição inicial adimensionalizada e regularizada:

$$\theta_f(\chi, \eta_t, 0) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1$$
(5.103)

e as condições de contorno reformuladas e adimensionalizadas dadas por:

$$\theta_f(0, \eta_t, \tau) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0$$
(5.104)

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\delta_t(\chi) Q_w(\tau), \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$
(5.105)

$$\theta_f(\chi, 1, \tau) = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$
(5.106)

A possibilidade para o problema auxiliar para o sistema descrito acima é o mesmo considerado para o problema em regime permanente, como definido pelas eqs. (5.72) a (5.76).

Da mesma forma que no problema permanente descrito anteriormente, o problema transiente descrito pelas eqs. (5.102) a (5.106), também apresenta uma não homogeneidade na condição de contorno em $\eta_t = 0$, sendo então indicado a abordagem da solução filtro para uma melhor convergência da expansão em autofunções nas vizinhanças deste contorno.

Dentro desta proposta aplicou-se a seguinte estratégia de solução:

$$\theta_f(\chi, \eta_t, \tau) = \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau) + F(\eta_t; \chi, \tau)$$
(5.107)

Propõe-se um polinômio de segunda ordem para a função filtro $F(\eta_t; \chi, \tau)$, onde χ e τ são tratados como parâmetros da solução:

$$F(\eta_t; \chi, \tau) = d_0(\chi; \tau) + d_1(\chi; \tau)\eta_t + d_2(\chi; \tau)\eta_t^2, \quad 0 < \chi < 1, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0$$

$$F(1; \chi, \tau) = 0 \quad \left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\delta_t(\chi)Q_w(\tau) \quad \left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=1} = 0 \quad (5.108)$$

Logo:

$$F(\eta_t; \chi, \tau) = \frac{\delta_t(\chi)}{2} Q_w(\tau) (1 - \eta_t)^2, \quad 0 < \chi < 1, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.109)$$

Aplicando a proposta de representação de solução dada pela eq. (5.107) no problema transiente descrito anteriormente pelas eqs. (5.102) a (5.106), tem-se o seguinte problema filtrado:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2} - G(\chi, \eta_t, \tau),$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.110)$$

onde

$$G(\chi, \eta_t, \tau) = \delta_t^2(\chi) \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t^2} \quad (5.111)$$

com condições inicial e de contorno dadas por:

$$\theta_f^*(\chi, \eta_t, 0) = -F(\eta_t; \chi, 0), \quad 0 < \chi < 1, \quad 0 < \eta_t < 1 \quad (5.112)$$

$$\theta_f^*(0, \eta_t, \tau) = -F(\eta_t; 0, \tau), \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.113)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.114)$$

$$\theta_f^*(\chi, 1, \tau) = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.115)$$

O par Transformada-Inversa é definido como:

Transformada:

$$\bar{\theta}_{f;j}^*(\chi, \tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_j(\eta_t) \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau) d\eta_t \quad (5.116)$$

Inversa:

$$\theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\eta_t) \bar{\theta}_{f;j}^*(\chi, \tau) \quad (5.117)$$

Aplicando o operador $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \dots d\eta_t$ em (5.110), e nas condições inicial, eq.

(5.112), e de contorno em χ , eq. (5.113), efetua-se a transformação integral, fornecendo-se:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, \tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{ij}(\chi) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau)}{\partial \chi} + b_{ij}(\chi) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau) \right] = \bar{g}_i(\chi, \tau),$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0, \quad i=1,2,\dots$$
(5.118)

e

$$\bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, 0) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) F(\eta_t; \chi, 0) d\eta_t$$
(5.119)

$$\bar{\theta}_{f,i}^*(0, \tau) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) F(\eta_t; 0, \tau) d\eta_t$$
(5.120)

Onde $a_{ij}(\chi)$ e $b_{ij}(\chi)$ são dados pelas eqs. (5.89) e (5.90) e

$$\bar{g}_i(\chi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \left[\delta_t^2(\chi) \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t^2} \right] d\eta_t$$
(5.121)

As eqs. (5.118) a (5.121) formam um sistema infinito de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para os potenciais transformados, $\bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, \tau)$. Para fins computacionais, o sistema. (5.118) a (5.121) é truncado na N -ésima linha e coluna, com N suficientemente grande para a convergência requerida. Os aspectos referentes à análise da convergência para a solução deste sistema infinito com o aumento da ordem de truncamento N serão posteriormente investigados pelo presente trabalho.

Uma vez que os potenciais transformados tenham sido computados pela solução numérica do sistema (5.118) a (5.121), a fórmula de inversão, eq. (5.117), é empregada para reconstruir os potenciais originais $\theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)$, em forma explícita, que

somada a solução filtro, $F(\eta_t; \chi, \tau)$, recupera o campo de temperatura adimensional, $\theta_f(\chi, \eta_t, \tau)$ na camada limite transiente.

Valer observar que a transformação aplicada à temperatura adimensional no regime permanente, eq. (5.93), não se aplica na presente situação transiente, não permitindo portanto, a redução do sistema diferencial parcial para o campo transformado em um sistema ordinário.

5.6. Convecção Externa com Conjugação em Regime Transiente

O sistema de equações diferenciais parciais que descrevem matematicamente o problema conjugado condução-convecção externa em regime transiente adimensionalizado, e agora com o domínio regularizado, é apresentado a seguir:

- Equação de energia no fluido adimensionalizada e regularizada:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2},$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$
(5.122)

com condição inicial adimensionalizada e regularizada:

$$\theta_f(\chi, \eta_t, 0) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1$$
(5.123)

e as condições de contorno e de interface para o fluido são dadas por:

$$\theta_f(0, \eta_t, \tau) = 0, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0$$
(5.124)

$$\theta_f(\chi, 1, \tau) = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.125)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = \frac{3\delta_t(\chi)}{K.R} [\theta_f(\chi, 0, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau)] - \delta_t(\chi) Q_w(\tau),$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.126)$$

- Equação de energia no sólido adimensionalizada:

$$\frac{\partial \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{R}{Pe_s} \frac{\partial^2 \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} + \frac{3}{Pe_s R} [\theta_f(\chi, 0, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau)] ,$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.127)$$

com condição inicial:

$$\theta_{av}(\chi, 0) = 0, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.128)$$

e condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.129)$$

O problema auxiliar aqui adotado foi o mesmo das etapas de solução que desconsideraram a conjugação com o sólido, dado pelas eqs., (5.72) a (5.76), e o par Transformada-Inversa foi o mesmo definido pelas eqs. (5.116) e (5.117).

Filtrando o problema descrito pelas eqs. (5.122) a (5.129) com o objetivo de melhorar a convergência próximo ao contorno não homogêneo em $\eta_t = 0$, adotando a função filtro, $F(\eta_t; \chi, \tau)$, onde τ e χ são parâmetros da solução, com a forma polinomial de segunda ordem dada por:

$$F(\eta_t; \chi, \tau) = e_0(\chi, \tau) + e_1(\chi, \tau)\eta_t + e_2(\chi, \tau)\eta_t^2, \quad 0 < \chi < 1, \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0$$

$$F(1; \chi, \tau) = 0 \quad \left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=1} = 0$$

$$\left. \frac{dF}{d\eta_t} \right|_{\eta_t=0} = 3\delta_t(\chi) \frac{1}{KR} [F(0; \chi, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau)] - \delta_t(\chi) Q_w(\tau)$$

(5.130)

Aplicando então a relação dada por $\theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau) = \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau) + F(\eta_t; \chi, \tau)$ nas eqs. (5.122) a (5.129), tem-se:

- Equação de energia no fluido filtrada:

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} = \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2} + G(\chi, \eta_t, \tau),$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$

(5.131)

onde,

$$G(\chi, \eta_t, \tau) = \delta_t^2(\chi) \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t} - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t^2}$$

(5.132)

com condição inicial filtrada:

$$\theta_f^*(\chi, \eta_t, 0) = -F(\eta_t; \chi, 0), \quad 0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.133)$$

e as condições de contorno e de interface filtradas para o fluido dadas por:

$$\theta_f^*(0, \eta_t, \tau) = -F(\eta_t; 0, \tau), \quad 0 < \eta_t < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.134)$$

$$\theta_f^*(\chi, 1, \tau) = 0, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.135)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = \frac{3\delta_t(\chi)}{KR} \theta_f^*(\chi, 0, \tau), \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.136)$$

- Equação de energia no sólido:

$$\frac{\partial \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{R}{Pe_s} \frac{\partial^2 \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} + \frac{3}{Pe_s R} \left[\theta_f^*(\chi, 0, \tau) - \theta_{av}(\chi, \tau) \right] + \frac{3}{Pe_s R} F(0; \chi, \tau),$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0 \quad (5.137)$$

com condição inicial:

$$\theta_{av}(\chi, 0) = 0, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.138)$$

e condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.139)$$

Em seguida, operando a eq. (5.131) com $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \dots d\eta_t$, encontra-se o

sistema de equações diferenciais parciais acopladas, filtradas e transformadas para o fluido conjugado com a equação diferencial parcial para a temperatura média no sólido.

$$\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, \tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{ij}(\chi) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau)}{\partial \chi} + b_{ij}(\chi) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau) \right] = \bar{g}_i(\chi, \tau),$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0, \quad i=1,2,\dots$$
(5.140)

com condição inicial e de contorno dadas por:

$$\bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, 0) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) F(\eta_t; \chi, 0) d\eta_t$$
(5.141)

$$\bar{\theta}_{f,i}^*(0, \tau) = - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) F(0, \eta_t; \tau) d\eta_t$$
(5.142)

Onde $a_{ij}(\chi)$ é dado pela eq. (5.89), e

$$b_{ij}(\chi) = \frac{6\delta_t(\chi)}{RK} + \frac{1}{Pe_f} \mu_j^2 \delta_{ij} + \int_0^1 V^*(\chi, \eta_t) \tilde{\psi}_i(\eta_t) \frac{d\tilde{\psi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t$$

$$\bar{g}_i(\chi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \delta_t^2(\chi) \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \tau} d\eta_t + \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) U^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \chi} d\eta_t$$

$$+ \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) V^* \frac{\partial F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t} d\eta_t - \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta_t) \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 F(\eta_t; \chi, \tau)}{\partial \eta_t^2} d\eta_t$$
(5.143)

O problema térmico no sólido por sua vez é descrito pela seguinte formulação diferencial parcial acoplada:

$$\frac{\partial \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{R}{Pe_s} \frac{\partial^2 \theta_{av}(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} + \frac{3}{Pe_s R} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left[\tilde{\psi}_j(0) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau) \right] - \theta_{av}(\chi, \tau) \right] + \frac{3}{Pe_s R} F(0; \chi, \tau) \quad ,$$

$$0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$

(5.144)

com condições inicial e de contorno dadas por:

$$\theta_{av}(\chi, 0) = 0, \quad 0 < \chi < 1 \quad (5.145)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \left. \frac{\partial \theta_{av}}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.146)$$

A solução numérica do sistema infinito fluido-sólido descrito acima, truncado para o fluido em sua N -ésima linha e coluna, fornece os potenciais transformados $\bar{\theta}_{f,i}^*(\chi, \tau)$ e a temperatura média adimensional no sólido $\theta_{av}(\chi, \tau)$. A fórmula da inversa é então empregada para reconstruir o potencial original $\theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)$, em forma explícita, que somada a solução filtro, $F(\eta_t; \chi, \tau)$, recupera o campo de temperatura adimensional no fluido, $\theta_f(\chi, \eta_t, \tau)$, no interior da camada limite transiente para o problema conjugado.

5.7. Balanço Integral *a Posteriori*

A condição de interface para o fluido após a filtragem, eq. (5.136), resulta em uma condição de terceiro tipo com coeficiente variável. A sua incorporação no problema de autovalor adotado resultaria em autovalores, autofunções e demais coeficientes relacionados, com dependência em χ , aumentando consideravelmente a complexidade e custo da análise. Neste caso optou-se por utilizar um problema de autovalor mais simples, idêntico das seções anteriores para a situação sem conjugação, que traz uma condição de contorno de segundo tipo na interface, que essencialmente

retrata a situação de fluxo de calor prescrito, mas não acarreta uma dependência em χ na sua solução.

Por essa diferença entre as condições de contorno do problema a ser transformado e seu problema auxiliar, pode-se antecipar uma convergência mais lenta da expansão em autofunções nas vizinhanças da interface, ou mesmo para um valor errado. Uma técnica de aceleração de convergência bastante adequada para tais situações é a implementação de um balanço integral *a posteriori* (SCOFANO NETO *et al.*, 1990; LEIROZ & COTTA, 1990), que essencialmente gera uma nova forma da expansão, a partir da integração no domínio da equação diferencial parcial antes da transformação, aplicando as condições de contorno e substituindo a fórmula da inversa já determinada nos demais termos de forma integral da equação. Esta técnica baseia-se no conceito de que as integrais de expansões em autofunções sempre apresentam um comportamento de convergência mais favorável do que a própria fórmula de inversa para o potencial original.

Assim a essência deste procedimento está em explicitar a contribuição dos termos fonte da equação e das condições de contorno, e assim melhorar a convergência.

A aplicação desta técnica no presente trabalho é feita operando a eq. (5.131) com

$\int_0^1 \frac{1}{Pe_f} d\eta_t$, o que fornece:

$$\int_0^1 \left[\delta_t^2(\chi) \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \chi} + V^* \frac{\partial \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t} \right] d\eta_t =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{Pe_f} \frac{\partial^2 \theta_f^*(\chi, \eta_t, \tau)}{\partial \eta_t^2} + G(\chi, \eta_t, \tau) \right] d\eta_t, \quad (5.147)$$

$$0 < \eta_t < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \tau > 0$$

Fazendo uso da condição na borda da camada limite térmica $\left. \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=1} = 0$, tem-se que o

lado direito (LD) da expressão acima é dado por:

$$LD = \int_0^1 G(\chi, \eta_t, \tau) d\eta_t - \frac{1}{Pe_f} \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \Big|_{\eta_t=0} \quad (5.148)$$

Ao aplicar a fórmula da inversa dada por (5.117), no lado esquerdo da expressão (5.147), tem-se que:

$$LE = \int_0^1 \left[\delta_t^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \bar{\theta}_{f,j}^* \right] + U^* \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \bar{\theta}_{f,j}^* \right] + V^* \frac{\partial}{\partial \eta_t} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \bar{\theta}_{f,j}^* \right] \right] d\eta_t$$

$$LE = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\delta_t^2 \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_j d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \tau} + \left(\int_0^1 U^* \tilde{\psi}_j d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \chi} + \left(\int_0^1 V^* \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta_t} d\eta_t \right) \bar{\theta}_{f,j}^* \right] \quad (5.149)$$

Fazendo $LD = LE$ tem-se uma nova expressão para o cálculo da derivada do campo de temperatura em $\eta_t = 0$ que é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_f^*}{\partial \eta_t} \Big|_{\eta_t=0} &= Pe_f \int_0^1 G(\chi, \eta_t, \tau) d\eta_t - Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \delta_t^2(\chi) \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \tau} \\ &\quad - Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 U^*(\chi, \eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \chi} \\ &\quad - Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 V^*(\chi, \eta_t) \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta_t} d\eta_t \right) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau) \end{aligned} \quad (5.150)$$

Por sua vez, a temperatura na interface fluido-sólido pode também ser calculada por uma forma alternativa, fazendo uso da expressão acima e da condição de interface dada por (5.136)

$$\begin{aligned}
\theta_f^*(\chi, 0, \tau) = & \frac{KR}{3\delta_t(\chi)} Pe_f \int_0^1 G(\chi, \eta_t, \tau) d\eta_t - \frac{KR}{3\delta_t(\chi)} Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \delta_t^2(\chi) \left(\int_0^1 \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \tau} - \\
& - \frac{KR}{3\delta_t(\chi)} Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 U^*(\chi, \eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta_t) d\eta_t \right) \frac{\partial \bar{\theta}_{f,j}^*}{\partial \chi} - \\
& - \frac{KR}{3\delta_t(\chi)} Pe_f \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 V^*(\chi, \eta_t) \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \eta_t} d\eta_t \right) \bar{\theta}_{f,j}^*(\chi, \tau)
\end{aligned}$$

(5.151)

A expressão acima é esperada oferecer taxas de convergências mais favoráveis do que a fórmula de inversão original, e mesmo corrigir os valores obtidos para a temperatura e fluxo de calor na própria interface. A integração dupla no domínio transversal pode também oferecer expressões para o cálculo com melhores taxas de convergência em qualquer ponto η_t no interior da camada limite, como demonstrado em (SCOFANO NETO *et al.*, 1990; LEIROZ & COTTA, 1990).

Capítulo 6

6. Resultados e Discussão

Neste capítulo apresenta-se os resultados obtidos para o problema transiente de convecção externa sem e com conjugação com uma parede plana. Uma análise da convergência das soluções foi realizada através de um estudo do controle do erro local da rotina utilizada na integração do sistema diferencial parcial transformado, a *NDSolve* do *Mathematica*, e no caso da GITT pode-se ainda, controlar o erro global através do número de termos utilizados na expansão em autofunções.

A validação dos dois métodos estudados pelo presente trabalho, Método Integral e GITT, se deu pela análise dos erros envolvidos com relação a solução exata de Blasius para o campo de temperatura em regime permanente e em seguida, comparou-se os resultados obtidos pelos dois métodos para a situação transiente.

Para a validação da formulação obtida pela CIEA, implementou-se o problema bidimensional de condução de calor na placa, empregou-se a mesma rotina *NDSolve* na solução numérica e utilizando-se a temperatura de interface obtida na solução do problema conjugado como condição de contorno.

Tomando como caso base o experimento descrito no Capítulo 1, tem-se o ar à temperatura ambiente como fluido refrigerante e os valores numéricos dos principais parâmetros usados na simulação foram:

$$\begin{aligned} u_{\infty} = 1 \text{ m/s} \quad T_{\infty} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad \alpha_f = 2.22 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \\ k_f = 0.0262 \text{ W}/(\text{m }^{\circ}\text{C}), \quad \nu = 1.57 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \quad q_{\text{ref}} = 100 \text{ W}/\text{m}^2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$L = 0.1 \text{ m}$$

A análise dos resultados foi efetuada inicialmente para o caso de convecção externa sem a conjugação com a parede na transferência de calor.

6.1. Convecção Externa sem Conjugação

6.1.1. Método Integral

- Análise de Convergência

A análise numérica das metodologias de solução foi conduzida para o caso severo de uma variação em degrau do fluxo de calor, que no tempo $t=0$ assume o valor constante de q_{ref} .

A solução numérica para a espessura da camada limite foi obtida ajustando-se os parâmetros de controle da rotina *NDSolve* (*AccuracyGoal*, *PrecisionGoal* e *MaxSteps*), de modo a garantir que a solução final atingisse uma precisão de 4 dígitos significativos. Uma análise da convergência desta solução foi em seguida realizada, através do estudo do controle de erro local da rotina de integração *NDSolve*.

A tabela 6.1 apresenta esta análise de convergência através da comparação da diferença de temperatura encontrada na interface em $x=0.1m$, para diferentes tamanhos de passo de integração, parâmetro encontrado pela opção *MaxStepSize* da rotina *NDSolve*. Observa-se que com o *MaxStepSize* de 0.000125 consegue-se uma convergência no terceiro dígito nos menores tempos, e no quarto dígito para os tempos maiores.

Tabela 6.1-Análise da convergência dos resultados encontrados para a diferença de temperatura na parede ($T_w - T_\infty$) em $x = 0.1$ m pela rotina numérica NDSolve.

t [s]	MaxStepSize					
	0.005	0.0025	0.00125	0.0005	0.00025	0.000125
0.02	2.9910	3.0473	3.0747	3.0910	3.0964	3.0991
0.04	4.2786	4.3162	4.3349	4.3460	4.3497	4.3516
0.06	5.2219	5.2513	5.2659	5.2747	5.2776	5.2790
0.08	5.9808	6.0050	6.0171	6.0243	6.0267	6.0279
0.1	6.6160	6.6366	6.6469	6.6530	6.6550	6.6561
0.2	8.7210	8.7314	8.7366	8.7397	8.7408	8.7413
0.3	9.8465	9.8517	9.8546	9.8563	9.8569	9.8572

- Validação dos Resultados

Os resultados obtidos pelo Método Integral foram validados com a solução exata de Blasius para o regime permanente sem conjugação, como mostrado a seguir.

A figura 6.1 apresenta a espessura da camada limite térmica transiente para as posições $x = \{0.01\text{m}, 0.02\text{m}, 0.03\text{m}, 0.04\text{m}, 0.05\text{m}, 0.06\text{m}, 0.07\text{m}, 0.08\text{m}, 0.09\text{m}, 0.1\text{m}\}$, onde pode-se concluir na escala gráfica, que os pontos próximos à borda de ataque da placa têm um período transiente curto, menor que 0.25 segundos, e que para o tempo de 1 segundo o regime permanente foi totalmente atingido ao longo de toda a placa.

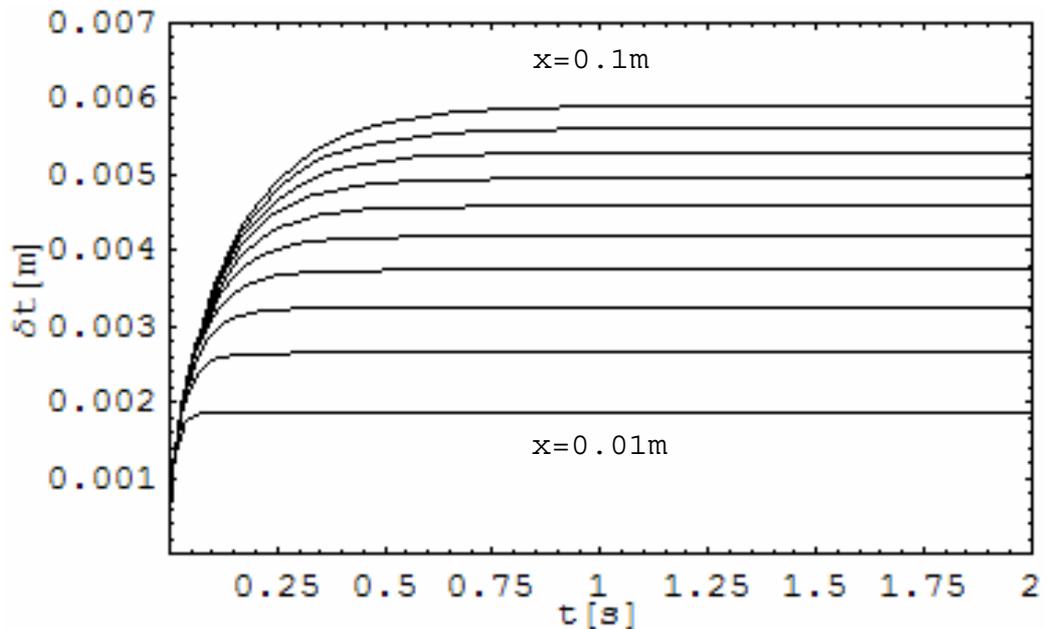


Figura 6.1 - Evolução no tempo da espessura da camada limite térmica para $x=\{0.01m, 0.02m, 0.03m, 0.04m, 0.05m, 0.06m, 0.07m, 0.08m, 0.09m, 0.1m\}$, calculada pelo Método Integral para o caso de fluxo de calor constante.

A comparação gráfica entre a solução exata de Blasius e a solução permanente desenvolvida pelo Método Integral apresentada nas figuras 6.2 e 6.3, visa a validação deste método aproximado. Na figura 6.2 tem-se a solução para a espessura da camada limite, e para este parâmetro encontrou-se um erro relativo entre as duas soluções de até 9% ao longo da placa. Já a figura 6.3 apresenta os resultados encontrados para o número de Nusselt e o desvio entre as duas soluções foi de no máximo cerca de 5%.

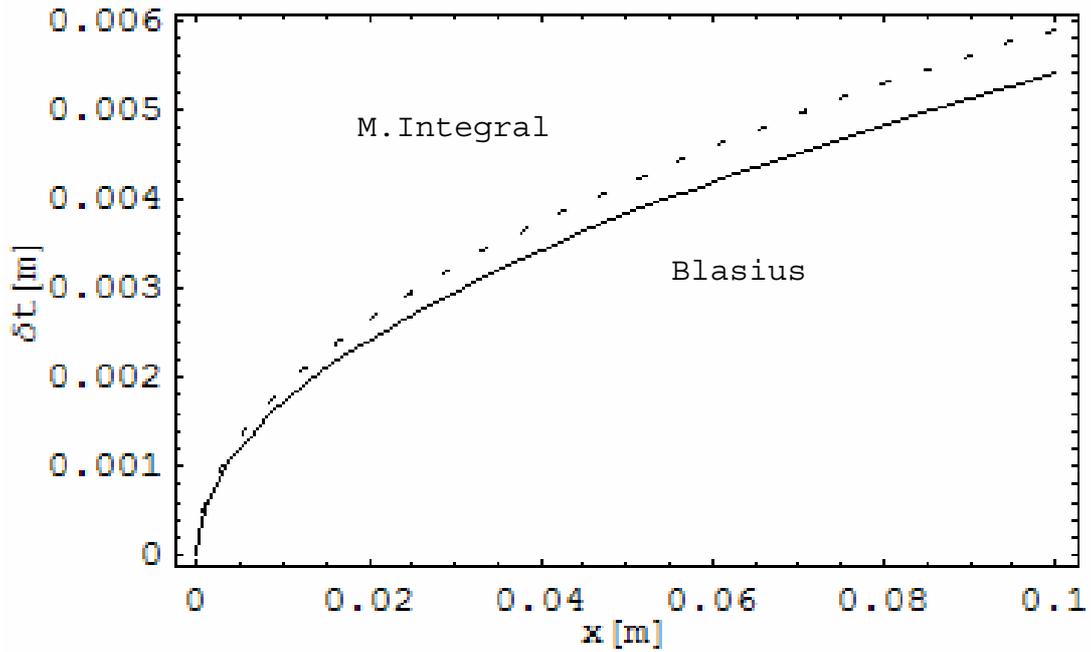


Figura 6.2 - Comparação entre a solução exata de Blasius (contínua) e a aproximada pelo Método Integral (pontilhada) para a espessura da camada limite térmica permanente ao longo da placa ($t=1s$).

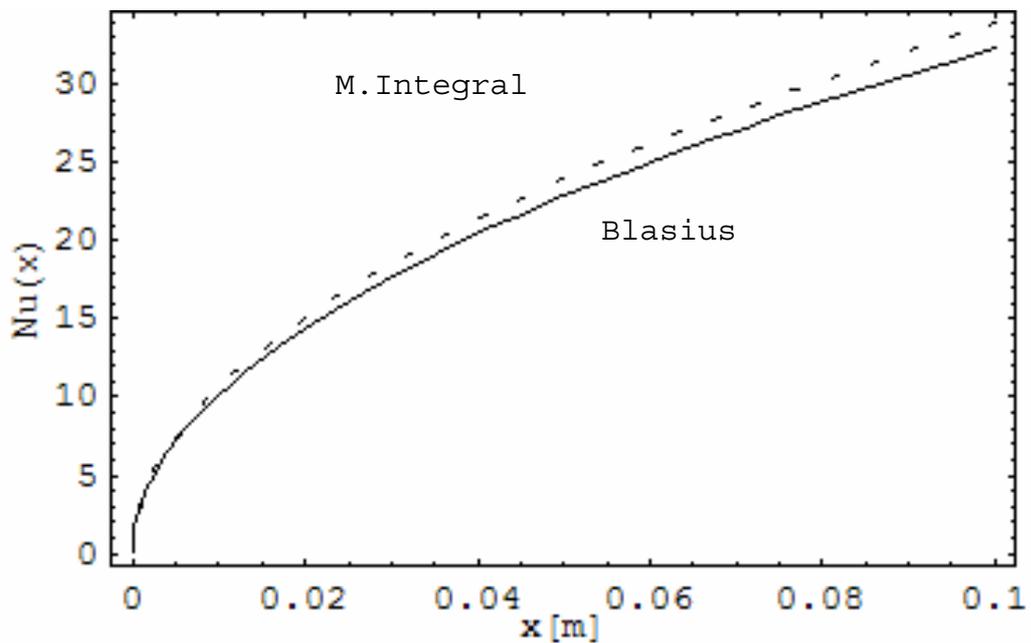


Figura 6.3 - Comparação entre a solução exata Blasius (contínua) e a aproximada pelo Método Integral (pontilhada) para o comportamento do número de Nusselt local ao longo da placa, ($t=1s$).

O resultado para o número de Nusselt tem boa concordância com o erro esperado para o Método Integral, quando aplicado diretamente na formulação permanente, conforme mostrado na tabela 6.2 abaixo. Esta tabela ilustra, resultados para

o coeficiente numérico da expressão do número de Nusselt local para nove possíveis combinações de ordem polinomiais nos campos de velocidade e temperatura. A solução para polinômio de terceira ordem na representação da velocidade e de segunda ordem para a temperatura resultam em expressão para o número de Nusselt local dada por:

$$Nu_x = 0.476 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (6.2)$$

Enquanto que a solução exata de Blasius tem um coeficiente numérico igual a 0.453, ou seja, um erro relativo de cerca de 5%. Pode-se também observar da tabela que a partir da decisão de se utilizar um polinômio de segunda ordem para o perfil de temperatura e lembrando que maiores ordens de aproximação polinomial poderiam ter sido utilizadas, mas foram evitadas por introduzirem mais equações diferenciais ao sistema, tem-se que a representação escolhida (2º grau para a temperatura e 3º grau para velocidade) seria então a mais precisa e que apenas o caso de polinômios de quarto grau para ambos os campos traria uma redução significativa no erro em relação à combinação aqui adotada.

Tabela 6.2 - Comparação entre a solução exata de Blasius e a aproximação polinomial para o número de Nusselt local em convecção externa permanente sobre uma placa plana sujeita a um fluxo uniforme de calor - $Nu_x = c Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$

		T(x,y)		
		2º GRAU	3º GRAU	4º GRAU
U(x,y)	2º GRAU	0.495583 [9.4%]	0.434728 [-4.03%]	0.579637 [27.96%]
	3º GRAU	0.475833 [5.04%]	0.417403 [-7.86%]	0.441724 [-2.49%]
	4º GRAU	0.485223 [7.11%]	0.42564 [-6.04%]	0.450441 [-0.56%]
		EXATA = 0.453		

*[erro relativo percentual]

6.1.2. Transformada Integral Generalizada

- Análise de Convergência

Nesta etapa de análise numérica, primeiramente realizou-se uma estimativa do erro local inerente ao integrador do sistema diferencial e em seguida uma estimativa para o erro global envolvido após a expansão em autofunções.

Como procedimento padrão a *NDSolve* trabalha com um processo adaptativo na determinação do tamanho de passo da integração assim, se a solução apresenta uma rápida variação em uma determinada região, a *NDSolve* reduz o tamanho do passo ou muda de método automaticamente. A rotina *NDSolve* pode controlar tanto o erro absoluto, via o parâmetro de controle *AccuracyGoal*, quanto o erro relativo da solução, via *PrecisionGoal*, sendo o valor automático destas opções igual a 8 dígitos, para o computador aqui utilizado.

De modo a promover uma análise numérica da solução obtida pelo presente trabalho com o uso da rotina *NDSolve*, prescreveu-se alguns tamanhos máximos para o passo de integração utilizando a opção *MaxStepSize*. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 6.3

Tabela 6.3 – Taxas de convergência da solução numérica para a temperatura na interface dada pela *NDSolve* para $x=0.01m$ e $x=0.1m$.

TEMP. DA INTERFACE [°C]: $x = 0.01m$				
t [s]	MaxStepSize			
	Automático	0.009	0.006	0.004
0.02	23.0019	22.9923	22.9943	22.9952
0.04	23.8802	23.7130	23.7074	23.7035
0.06	24.0154	23.7266	23.7214	23.7178
0.08	23.8881	23.7266	23.7214	23.7178
0.1	23.8058	23.7266	23.7214	23.7178
0.2	23.8763	23.7266	23.7214	23.7178
0.3	23.8835	23.7266	23.7214	23.7178

TEMP. DA INTERFACE [°C]: x = 0.1m				
t [s]	MaxStepSize			
	Automático	0.009	0.006	0.004
0.02	22.8895	22.8713	22.8721	22.8723
0.04	24.0841	24.0696	24.0698	24.0699
0.06	25.0105	24.9971	24.9972	24.9972
0.08	25.7953	25.7887	25.7887	25.7887
0.1	26.4981	26.4975	26.4975	26.4975
0.2	29.4729	29.4729	29.4727	26.4726
0.3	31.2684	31.2264	31.2254	31.2247

A princípio, a solução com controle de erro *default* da rotina, leva a conclusão errônea que o regime permanente não teria ainda sido atingido nas regiões próximas à borda de ataque da placa ($x=0.01m$) na faixa da variável tempo considerada. Todavia, ao se restringir o tamanho máximo do passo, nas duas variáveis independentes, claramente observa-se que esta região já se encontra em regime permanente para tempos maiores que 0.06 segundos.

Para as posições mais ao final da placa ($x=0.1m$), observa-se uma convergência no quarto dígito significativo ao se reduzir o tamanho máximo do passo sucessivamente em 1.5 vezes.

No que diz respeito ao controle do erro global estudou-se as ordens de truncamento da expansão em autofunções na direção em que foi efetuada a transformação integral. Desta forma, uma análise da convergência da série é apresentada na tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Taxas de convergência da expansão em autofunções para a temperatura da interface em dois diferentes tempos 0.1 e 1 segundo.

t = 0.1s				t = 1s			
No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]			No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]		
	x=L/10	x=L/2	x=L		x=L/10	x=L/2	x=L
1	23.6402	27.3259	28.2013	1	23.6402	28.1285	31.4936
2	23.5940	26.7158	26.5509	2	23.5940	28.0232	31.3443
3	23.7018	26.7513	26.5471	3	23.7018	28.2650	31.6864
4	23.7039	26.6960	26.4881	4	23.7039	28.2698	31.6932
5	23.7148	26.7045	26.5057	5	23.7148	28.2943	31.7278
6	23.7137	26.6963	26.4940	6	23.7137	28.2917	31.7241
7	23.7168	26.7005	26.5004	7	23.7168	28.2986	31.7339
8	23.7161	26.6974	26.4960	8	23.7161	28.2971	31.7317
9	23.7174	26.6993	26.4989	9	23.7174	28.2999	31.7357
10	23.7170	26.6979	26.4968	10	23.7170	28.2990	31.7345
11	23.7176	26.6989	26.4983	11	23.7176	28.3004	31.7365
12	23.7173	26.6981	26.4971	12	23.7173	28.2999	31.7357
13	23.7177	26.6987	26.4980	13	23.7177	28.3007	31.7368
14	23.7175	26.6982	26.4973	14	23.7175	28.3003	31.7363
15	23.7178	26.6986	26.4979	15	23.7178	28.3008	31.7370
16	23.7177	26.6982	26.4974	16	23.7177	28.3006	31.7367
17	23.7178	26.6985	26.4978	17	23.7178	28.3009	31.7371
18	23.7177	26.6983	26.4975	18	23.7177	28.3007	31.7369
19	23.7178	26.6984	26.4977	19	23.7178	28.3009	31.7372
20	23.7178	26.6983	26.4975	20	23.7178	28.3008	31.7370

Observa-se excelentes taxas de convergência nas séries para a temperatura na interface mesmo para tempos curtos quando se encontra quatro dígitos convergidos com até mesmo apenas cinco termos na série.

- Validação

A solução obtida via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) com 20 termos na expansão foi então validada com a solução exata de Blasius para o regime permanente.

Nas figuras 6.4 e 6.5 vê-se claramente a excelente concordância da solução via GITT com a solução exata de Blasius através das respectivas comparações gráficas da temperatura na interface ao longo da placa, e do número de Nusselt local.

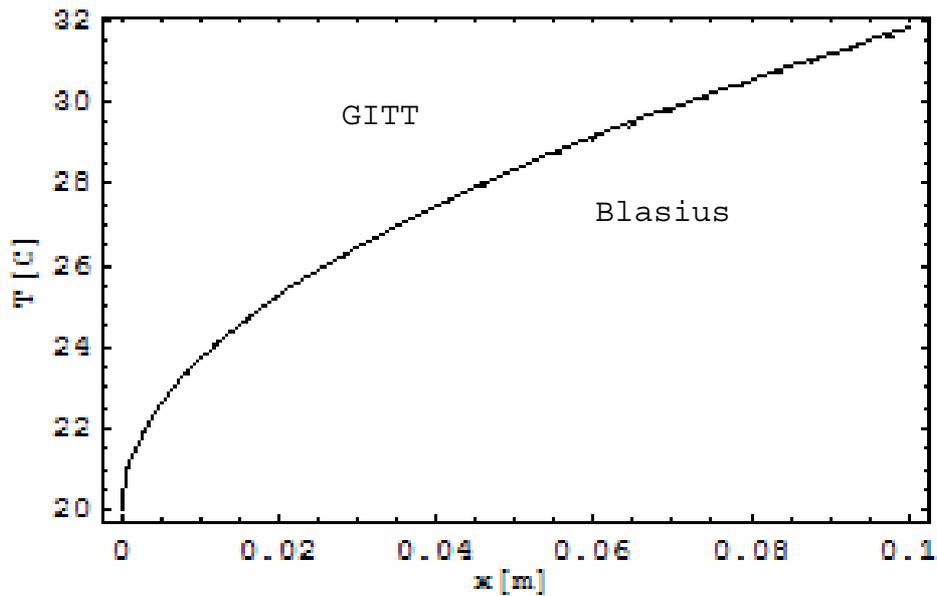


Figura 6.4 - Comparação entre a solução exata de Blasius (contínua) e a solução por GITT (pontilhada) para a temperatura em $y=0m$, ao longo da plac, ($t=1s$).

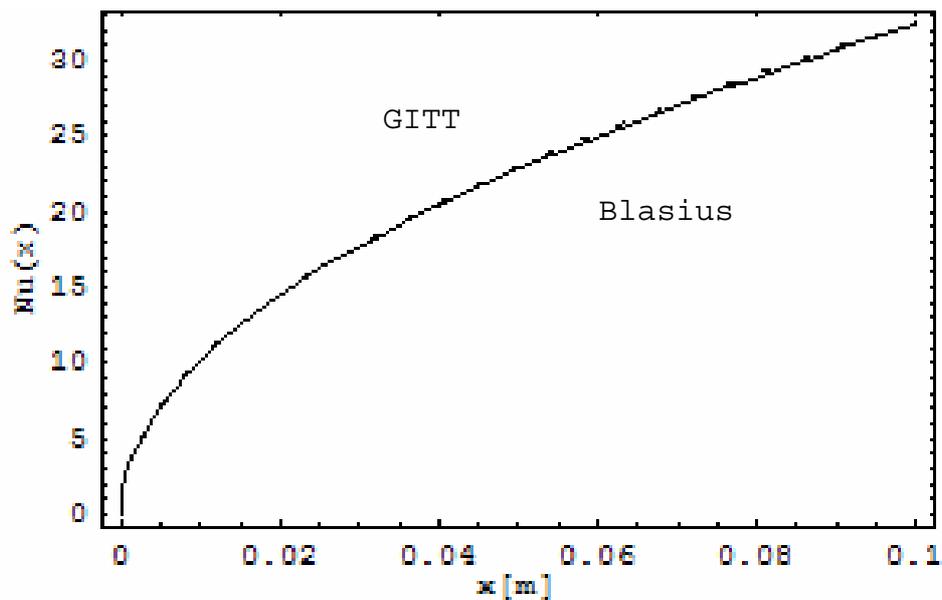


Figura 6.5 - Comparação entre a solução exata de Blasius (contínua) e a solução por GITT (pontilhada) para o comportamento do Nusselt local ao longo da plac, ($t=1s$).

A tabela 6.5 abaixo apresenta os valores da temperatura na interface fluido-sólido encontrados via GITT e pela solução exata de Blasius em regime permanente, para alguns pontos da placa no tempo igual a 1 segundo na solução por GITT. Pode-se observar a aderência de até três dígitos significativos entre as duas soluções. O desvio percentual encontrado entre as duas soluções foi de 0.44% no início da placa ($x=0.01$) e de 0.61% para o final da placa ($x=0.1$), validando assim o método de solução híbrida aqui proposto.

Tabela 6.5 - Comparação entre a solução exata para regime permanente (Blasius) e a solução via GITT, para a temperatura em $y=0$ m no tempo de 1 segundo.

TEMPERATUA DA INTERFACE [°C]					
x [m] =	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1
GITT	23.7178	25.8717	28.3008	30.1652	31.7370
Blasius	23.7343	25.9044	28.3501	30.2267	31.8088

6.1.3. Comparação entre os Métodos

As figuras 6.6 e 6.7 apresentam resultados comparativos para o regime transiente sem conjugação entre os dois métodos de solução estudados pelo presente trabalho, Método Integral e Técnica da Transformada Integral Generalizada respectivamente, para a temperatura na interface e para o coeficiente de transferência de calor local. Observa-se, que a solução via Método Integral apresenta um período em regime transiente mais longo do que a solução via GITT.

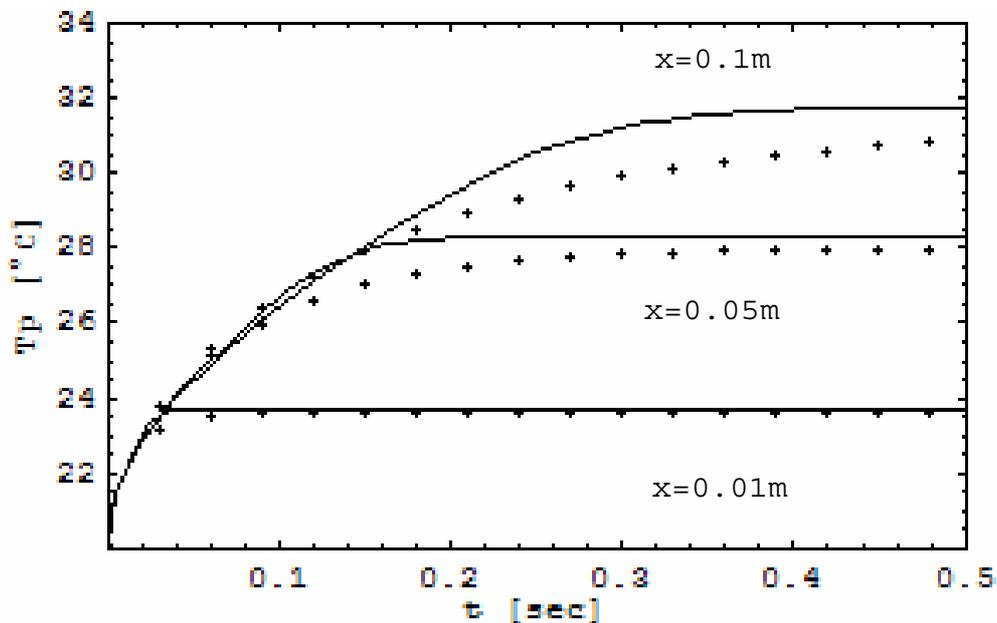


Figura 6.6 - Comportamento da temperatura na interface fluido-sólido ao longo do tempo, para $x=\{0.01m, 0.05m, 0.1m\}$ no caso de fluxo de calor constante - GITT (contínua) e M. Integral (pontilhada).

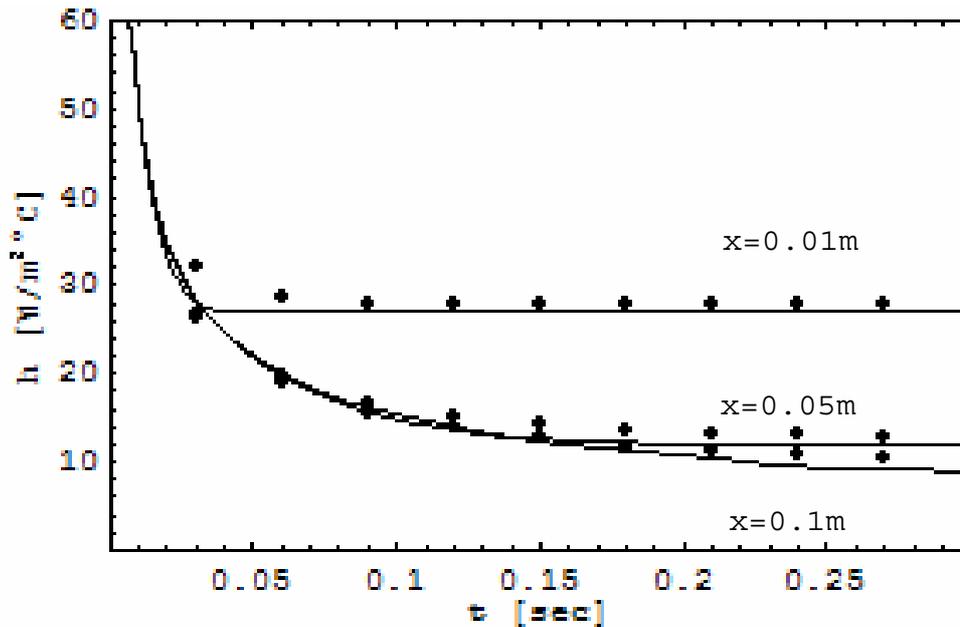


Figura 6.7 - Comportamento do coeficiente de transferência de calor transiente, para $x=\{0.01m, 0.05m, 0.1m\}$ no caso de fluxo de calor constante - GITT (contínua) e M. Integral (pontilhada).

A tabela 6.6 ilustra os desvios percentuais da solução pelo Método Integral em relação à GITT encontrados para a temperatura da interface ao longo do tempo para as três posições apresentadas na figura 6.6. Como o tempo de permanência no regime transiente é diferente pra cada uma das três posições, a tabela foi construída com faixas de tempo diferentes.

Tabela 6.6 – Desvios entre as temperaturas da interface calculadas via GITT e via M. Integral para as posições $x=\{0.01m, 0.05m, 0.1m\}$.

TEMPERATURA DA INTERFACE [°C]										
x = 0.01m										
t[s]	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
M. Integral	22.1019	22.7628	23.1163	23.3132	23.4240	23.4864	23.5217	23.5416	23.5528	23.5591
GITT	22.0537	22.9940	23.5548	23.7074	23.7212	23.7215	23.7215	23.7215	23.7215	23.7215
desvio	0.2%	-1.0%	-1.9%	-1.7%	-1.3%	-1.0%	-0.8%	-0.8%	-0.7%	-0.7%
x = 0.05m										
t[s]	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
M. Integral	22.1895	23.0757	23.7318	24.2615	24.7058	26.1807	26.9699	27.4095	27.6567	27.79611
GITT	22.0296	22.8774	23.5333	24.0931	24.5943	26.6984	27.9390	28.2705	28.3016	28.30238
desvio	0.7%	0.9%	0.8%	0.7%	0.5%	-1.9%	-3.5%	-3.0%	-2.3%	-1.8%
x = 0.1m										
t[s]	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
M. Integral	23.0991	24.3516	25.2790	26.0279	26.6561	28.7413	29.8572	30.4787	30.8282	31.25465
GITT	22.8720	24.0697	24.9972	25.7887	26.4975	29.4727	31.2254	31.6930	31.7369	31.73811
desvio	1.0%	1.2%	1.1%	0.9%	0.6%	-2.5%	-4.4%	-3.8%	-2.9%	-1.5%

Pela tabela acima, para as posições selecionadas, os maiores desvios percentuais encontrados são de 1.9% para o início da placa, 3.5% para o meio e 4.4% para o final, o que representam desvios suficientemente baixos para a maioria das aplicações práticas.

6.1.4. Resultados Físicos

Os resultados aqui apresentados para o comportamento físico do problema de convecção forçada transiente sem conjugação com a parede são para a solução via GITT com até 20 termos nas expansões. Alguns casos particulares de fluxo prescrito foram estudados, de acordo com trabalhos anteriores como:

$$\text{fluxo constante: } q_w(t) = q_{\text{ref}}$$

$$\text{fluxo exponencial: } q_w(t) = q_{\text{ref}}(1 - e^{(-\lambda t)}) \quad (6.3)$$

$$\text{fluxo periódico: } q_w(t) = q_{\text{ref}} + \frac{q_{\text{ref}}}{2} \text{sen}\left[2\pi \frac{t}{0.064}\right]$$

Nas figuras 6.8 e 6.9 tem-se, para duas diferentes posições, meio da placa ($x=0.05\text{m}$) e final da placa ($x=0.1\text{m}$), uma visualização de como a temperatura evolui no tempo, dentro da região termicamente afetada do fluido no caso de fluxo prescrito constante. Como esperado, temperaturas mais altas são encontradas junto à interface sólido-fluido e mais distantes do início da placa. Claramente também pode-se observar os transientes mais lentos na região próxima ao final da placa.

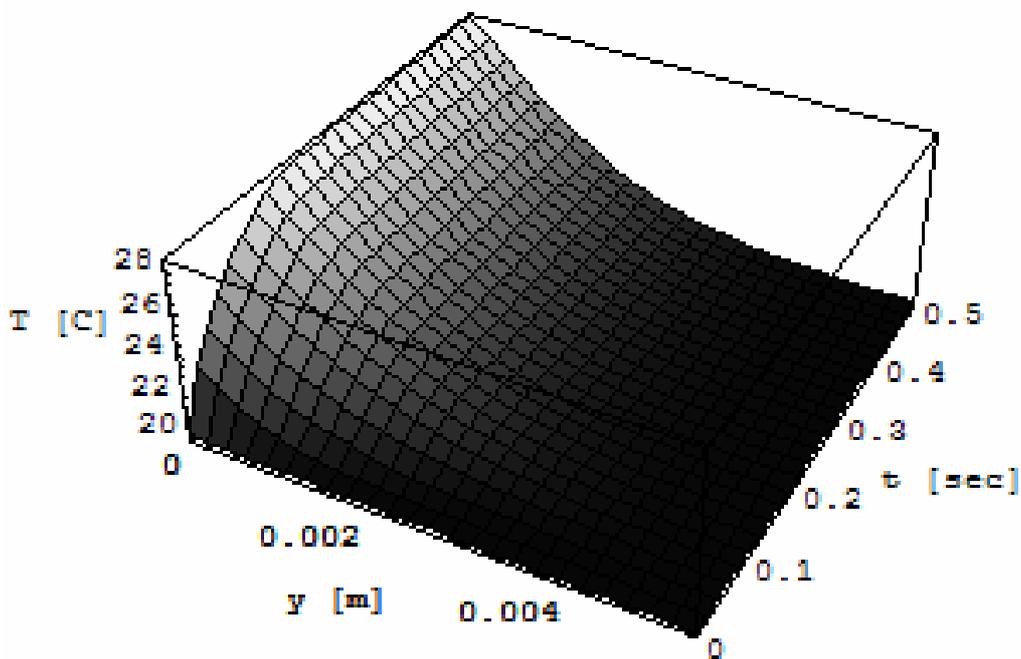


Figura 6.8 - Campo de temperatura no fluido para $x=0.05\text{m}$ no caso de fluxo de calor constante.

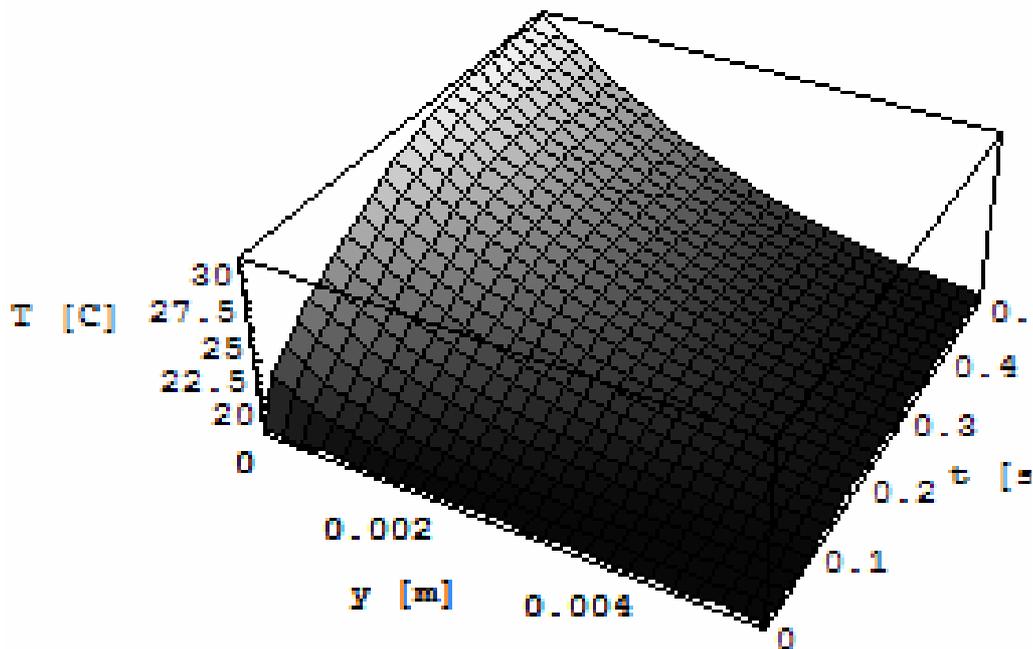


Figura 6.9 - *Campo de temperatura no fluido para $x=0.1m$ no caso de fluxo de calor constante.*

Nas figuras 6.10 e 6.11 tem-se a evolução no tempo da temperatura de interface em diferentes posições $x=\{0.01m, 0.02m, 0.04m, 0.05m, 0.06m, 0.08m, 0.1m\}$, no caso de fluxo de calor exponencial.

Observa-se, que ao utilizar menores valores para argumento, λ , da exponencial o aquecimento no fluido se dá de forma mais lenta e que, à medida que se aumenta este argumento tem-se uma tendência ao comportamento apresentado para o caso de fluxo constante, com transientes caracteristicamente muito rápido.

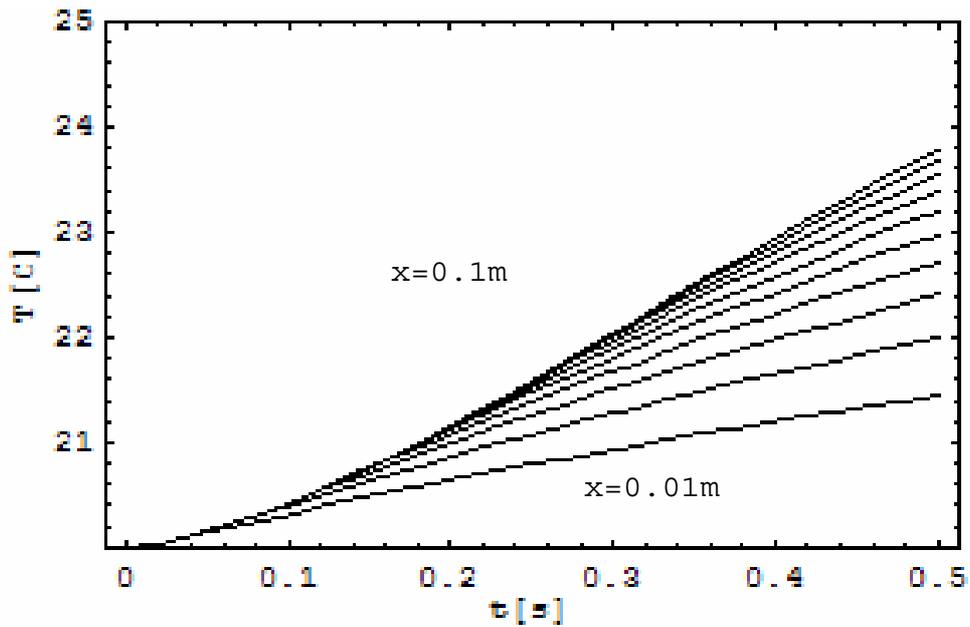


Figura 6.10 - Temperatura na interface fluido-sólido para o caso de fluxo de calor exponencial dado por $q_w(t) = q_{ref}(1 - e^{(-t)})$.

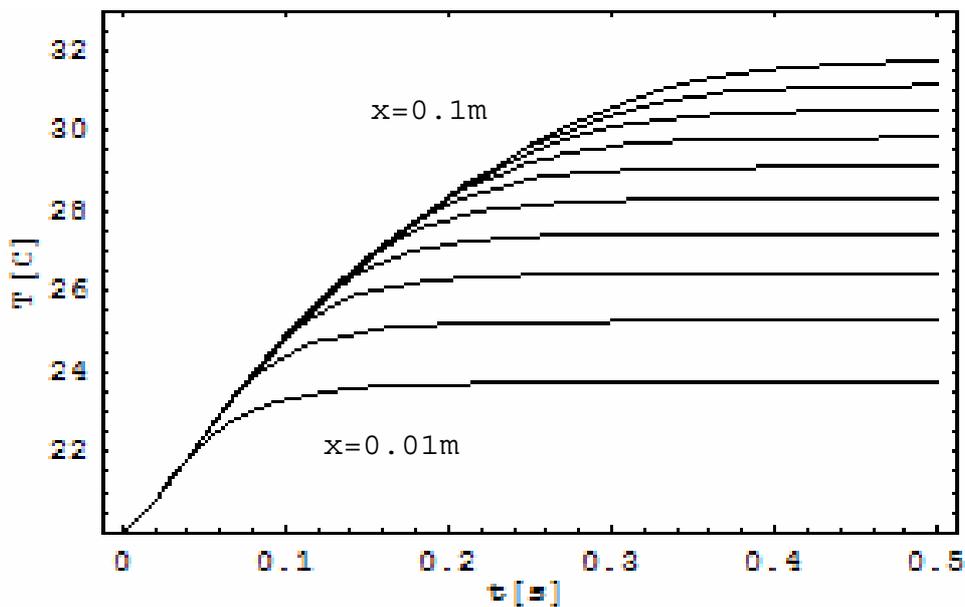


Figura 6.11 - Temperatura na interface fluido-sólido para o caso de fluxo de calor exponencial dado por $q_w(t) = q_{ref}(1 - e^{(-25t)})$.

As figuras 6.12 a 6.17 demonstram como o método GITT pode ser facilmente aplicado para condições arbitrariamente variáveis no tempo. O comportamento

transiente da temperatura na interface e do coeficiente de transferência de calor local são apresentados para os casos de fluxo de calor constante, exponencial e periódico.

Como esperado, para o caso de fluxo exponencial há um evidente retardo do estabelecimento do regime permanente devido a sua variação ao longo do tempo quando comparado ao caso de fluxo de calor constante, enquanto o caso periódico apresenta a variação da amplitude após o transiente inicial, com ângulo de fase crescente ao longo da placa.

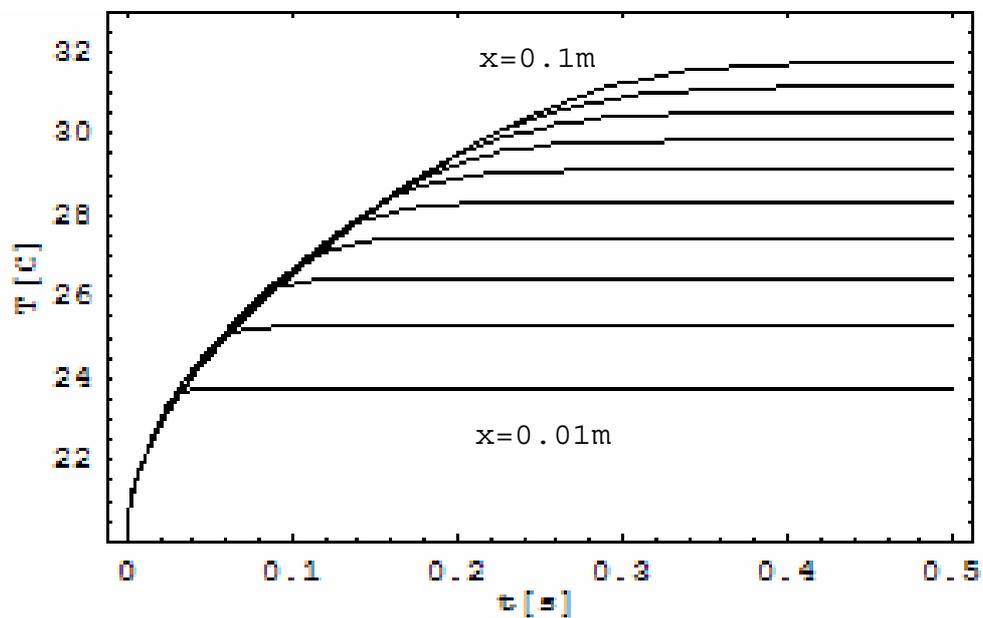


Figura 6.12: Comportamento da temperatura na interface fluido-sólido ao longo do tempo para $x=\{0.01m, 0.02m, 0.04m, 0.05m, 0.06m, 0.08m, 0.1m\}$ no caso de fluxo de calor constante.

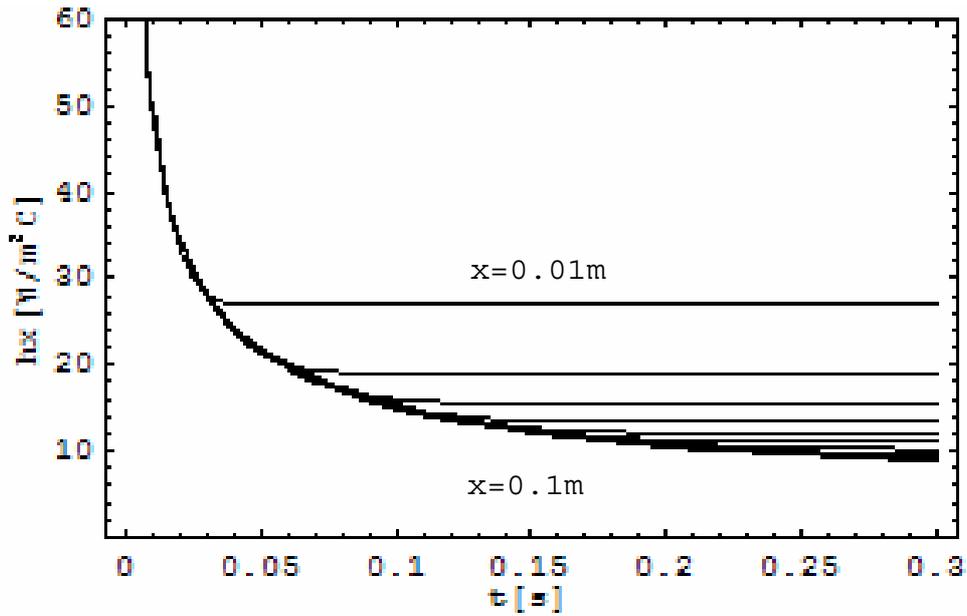


Figura 6.13: Comportamento do coeficiente de transferência de calor transiente, para $x=\{0.01\text{m}, 0.02\text{m}, 0.04\text{m}, 0.05\text{m}, 0.06\text{m}, 0.08\text{m}, 0.1\text{m}\}$ no caso de fluxo de calor constante.

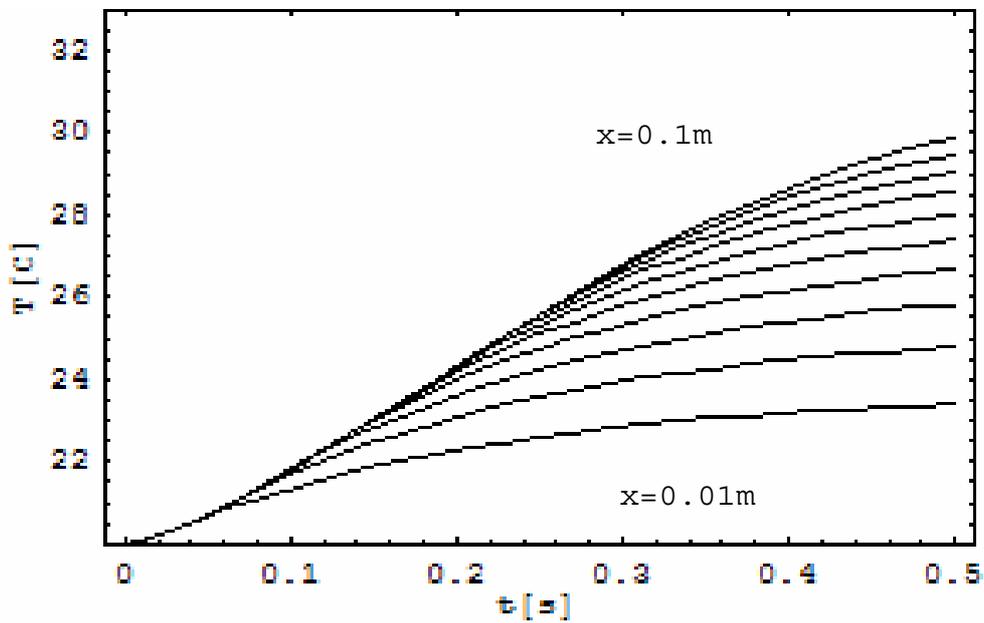


Figura 6.14: Comportamento da temperatura na interface fluido-sólido ao longo do tempo para $x=\{0.01\text{m}, 0.02\text{m}, 0.04\text{m}, 0.05\text{m}, 0.06\text{m}, 0.08\text{m}, 0.1\text{m}\}$ no caso de fluxo de calor exponencial com $\lambda=5$.

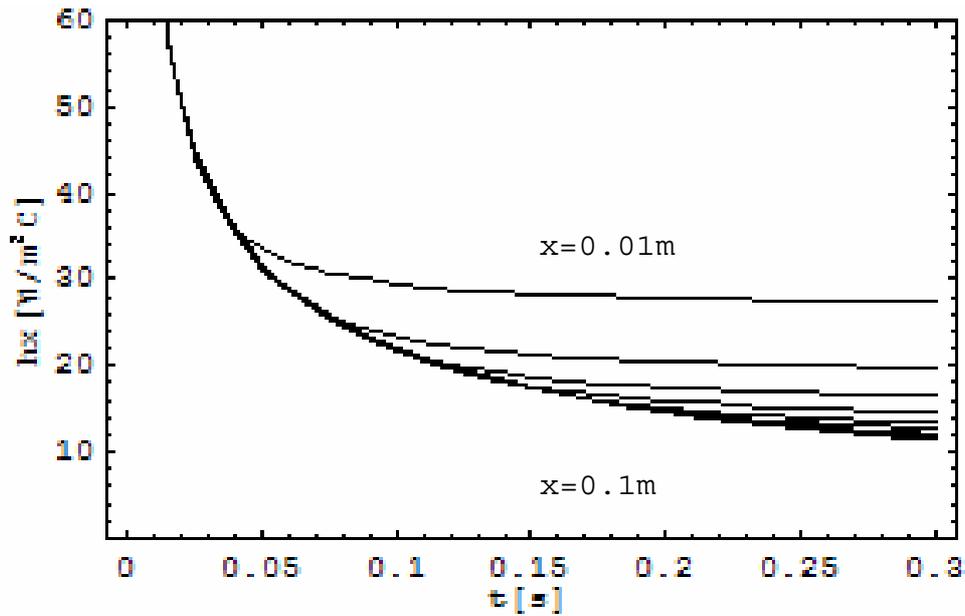


Figura 6.15: Comportamento do coef. de transferência de calor transiente para $x=\{0.01\text{m}, 0.02\text{m}, 0.04\text{m}, 0.05\text{m}, 0.06\text{m}, 0.08\text{m}, 0.1\text{m}\}$ no caso de fluxo de calor exponencial com $\lambda=5$.

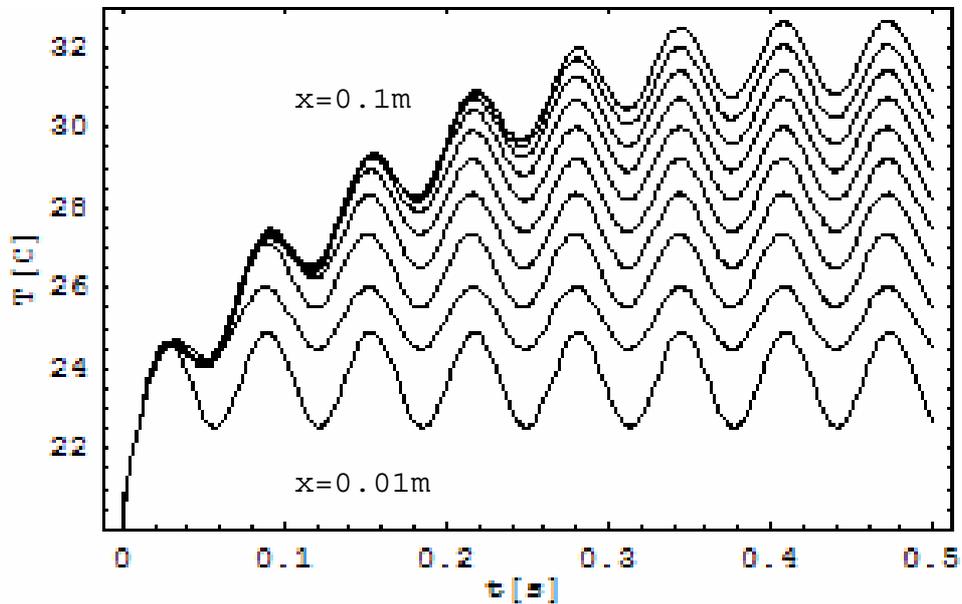


Figura 6.16: Comportamento da temperatura na interface fluido-sólido ao longo do tempo, para $x=\{0.01\text{m}, 0.02\text{m}, 0.04\text{m}, 0.05\text{m}, 0.06\text{m}, 0.08\text{m}, 0.1\text{m}\}$, no caso de fluxo de calor periódico.

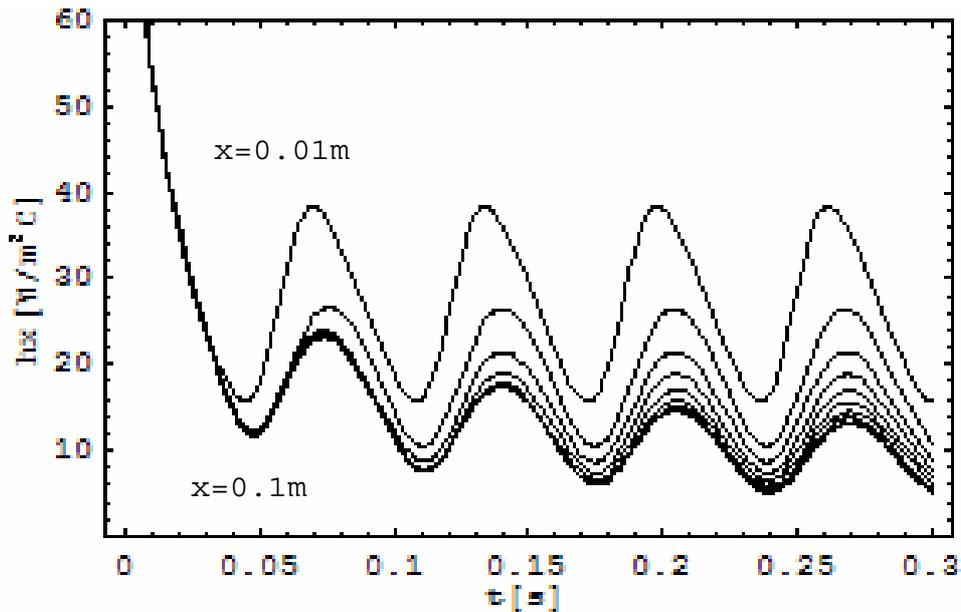


Figura 6.17: Comportamento do coeficiente de transferência de calor transiente, para $x=\{0.01m, 0.02m, 0.04m, 0.05m, 0.06m, 0.08m, 0.1m\}$, no caso de fluxo de calor periódico.

Cabe observar que o Método Integral com proposta de polinômio de segundo grau para a temperatura seria menos preciso para esta situação de fluxo de calor variável, uma vez que o comportamento transversal do campo de temperatura ao longo do transiente poderia apresentar mais de uma mudança de curvatura, o que não seria tão adequadamente representado pela parábola.

6.2. Convecção Externa com Conjugação

A solução do problema conjugado condução-convecção é uma extensão ao problema de convecção forçada externa sobre uma placa de espessura desprezível apresentado anteriormente, que foi cuidadosamente validada e para a qual foi também realizada uma análise numérica da solução obtida pela *NDSolve*. Logo, nesta seção, os esforços foram concentrados na análise do efeito da conjugação com a parede e na avaliação dos erros na formulação aproximada que foi proposta para a temperatura no sólido.

Cinco casos específicos de participação da parede para diferentes materiais (Norcoat, PVC e Alumínio) e espessuras foram estudados (LACHI *et. al.*, 2006;

STOIAN, 2006), onde os dados pertinentes a cada um são mostrados na tabela 6.7 abaixo.

Tabela 6.7 – *Casos-teste estudados e parâmetros governantes.*

CASOS	Material	e (m)	k_s (W/m C)	α_s (m²/s)
1	Norcoat	0.007	0.12	$1.67 \cdot 10^{-4}$
2	Norcoat	0.002	0.12	$1.67 \cdot 10^{-4}$
3	Norcoat	0.012	0.12	$1.67 \cdot 10^{-4}$
4	PVC	0.012	0.15	$0.11 \cdot 10^{-6}$
5	Alumínio	0.012	238	$9.33 \cdot 10^{-5}$

Tendo ainda o ar como fluido refrigerante, os parâmetros comuns aos cinco casos estão apresentados na eq. (6.1).

- Análise de Convergência

Realizou-se a análise numérica das soluções obtidas para a temperatura na interface para uma parede de Norcoat com espessura de 7 mm (caso 1), com uso da rotina *NDSolve*, via Método Integral e via GITT, de modo a estimar o erro local inerente à integração numérica. As tabelas 6.8 e 6.9 ilustram o comportamento das soluções para a temperatura na interface ao se reduzir o tamanho máximo do passo de integração através do controle do *MaxStepSize*. Observa-se que reduções sucessivas no *MaxStepsSize* levaram a uma convergência de pelo menos quatro dígitos significativos para ambas as soluções, M. Integral e GITT.

Tabela 6.8 – *Convergência numérica solução da temperatura na interface via Método Integral.*

TEMP. DA INTERFACE [°C]: x = 0.01m					TEMP. DA INTERFACE [°C]: x = 0.1m				
t [s]	MaxStepSize				t [s]	MaxStepSize			
	Automático	0.001	0.0005	0.00025		Automático	0.001	0.0005	0.00025
0.02	21.3209	21.3087	21.3104	21.3112	0.02	21.3770	21.3706	21.3727	21.3739
0.04	21.5558	21.5498	21.5503	21.5506	0.04	21.7082	21.7045	21.7056	21.7063
0.06	21.7299	21.7226	21.7228	21.7230	0.06	21.9837	21.9808	21.9817	21.9822
0.08	21.8800	21.8680	21.8680	21.8680	0.08	22.2391	22.2365	22.2373	22.2378
0.1	22.0156	21.9972	21.9969	21.9969	0.1	22.4833	22.4810	22.4817	22.4822
0.2	22.5559	22.5019	22.5002	22.4996	0.2	23.6091	23.6075	23.6082	23.6085
0.3	22.9372	22.8504	22.8474	22.8463	0.3	24.6176	24.6170	24.6175	24.6179

Tabela 6.9 – *Convergência numérica da solução da temperatura na interface via GITT.*

TEMP. DA INTERFACE [°C]: x = 0.01m					TEMP. DA INTERFACE [°C]: x = 0.1m				
t [s]	MaxStepSize				t [s]	MaxStepSize			
	Automático	x: 0.002 t: 0.1	x: 0.002 t: 0.05	x: 0.002 t: 0.025		Automático	x: 0.002 t: 0.1	x: 0.002 t: 0.05	x: 0.002 t: 0.025
0.02	21.4953	21.4956	21.4956	21.4958	0.02	21.9869	21.9872	21.9872	21.9873
0.04	21.6597	21.6571	21.6581	21.6591	0.04	22.2751	22.2740	22.2747	22.2753
0.06	21.8133	21.8065	21.8087	21.8103	0.06	22.5556	22.5529	22.5545	22.5555
0.08	21.9569	21.9452	21.9485	21.9505	0.08	22.8284	22.8242	22.8267	22.8282
0.1	22.0911	22.0742	22.0783	22.0807	0.1	23.0939	23.0882	23.0915	23.0934
0.2	22.6437	22.6018	22.6068	22.6097	0.2	24.3173	24.3074	24.3128	24.3159
0.3	23.0432	22.9822	22.9856	22.9876	0.3	25.3834	25.3747	25.3793	25.3820

No caso da solução via GITT pode-se também realizar uma análise do erro global através do controle do número de termos na série e ainda, através da implementação do Balanço Integral *a posteriori*, eqs. (5.147) a (5.151). As tabelas 6.10 e 6.11 ilustram, para dois tempos $t=0.2s$ e $t=2s$, a convergência da série para a temperatura na interface com e sem Balanço Integral para três diferentes posições ao longo da placa.

Tem-se que com o Balanço Integral a convergência da série para

Observa-se ainda que os resultados da fórmula de inversão direta vão se deteriorando por conta do problema de autovalor não obedecer a mesma condição de contorno do problema original, tal fato é corrigido parcialmente com a utilização do Balanço Integral *a posteriori*, que chega a corrigir o terceiro dígito significativo da temperatura da interface, calculada com 20 termos, para a posição $x=L$ no menor tempo (tabela 6.10) e para a posição $x=L/10$ no maior tempo (tabela 6.11).

Tabela 6.10 – Taxas de convergência da expansão para a temperatura na interface com e sem Balanço Integral no tempo $t = 0.2s$.

t = 0.2s							
sem Balanço Integral				com Balanço Integral			
No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]			No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]		
	x=L/10	x=L/2	x=L		x=L/10	x=L/2	x=L
1	22.4877	23.6604	23.9495	1	22.5450	23.7543	24.0676
2	22.5448	23.7305	24.0118	2	22.6227	23.7818	24.0905
3	22.5959	23.8107	24.1349	3	22.6016	23.7642	24.0696
4	22.5965	23.8211	24.1753	4	22.6028	23.7704	24.0794
5	22.6029	23.8384	24.2139	5	22.6008	23.7668	24.0753
6	22.6034	23.8447	24.2340	6	22.6012	23.7687	24.0777
7	22.6057	23.8523	24.2520	7	22.6006	23.7675	24.0764
8	22.6060	23.8560	24.2633	8	22.6008	23.7683	24.0773
9	22.6071	23.8603	24.2736	9	22.6006	23.7677	24.0767
10	22.6073	23.8627	24.2808	10	22.6006	23.7681	24.0771
11	22.6080	23.8654	24.2875	11	22.6005	23.7678	24.0768
12	22.6082	23.8671	24.2925	12	22.6006	23.7681	24.0771
13	22.6086	23.8690	24.2972	13	22.6005	23.7679	24.0769
14	22.6087	23.8702	24.3008	14	22.6006	23.7680	24.0770
15	22.6090	23.8716	24.3043	15	22.6005	23.7679	24.0769
16	22.6091	23.8726	24.3071	16	22.6005	23.7680	24.0770
17	22.6094	23.8736	24.3098	17	22.6005	23.7679	24.0769
18	22.6095	23.8744	24.3120	18	22.6005	23.7680	24.0770
19	22.6096	23.8752	24.3141	19	22.6005	23.7679	24.0770
20	22.6097	23.8758	24.3159	20	22.6005	23.7680	24.0770

Tabela 6.11 – Taxas de convergência da expansão para a temperatura na interface com e sem Balanço Integral no tempo $t = 2s$.

t = 2s							
sem Balanço Integral				com Balanço Integral			
No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]			No. TERMOS	TEMP. INTERFACE [C]		
	x=L/10	x=L/2	x=L		x=L/10	x=L/2	x=L
1	23.8229	28.2655	31.0743	1	23.8715	28.6060	31.5838
2	23.9176	28.5094	31.4093	2	24.0351	28.7891	31.7553
3	24.0101	28.7596	31.6968	3	23.9839	28.7394	31.7803
4	24.0172	28.7913	31.7044	4	23.9931	28.7450	31.7329
5	24.0303	28.8288	31.7320	5	23.9875	28.7404	31.7508
6	24.0326	28.8392	31.7315	6	23.9894	28.7416	31.7374
7	24.0373	28.8535	31.7405	7	23.9878	28.7403	31.7436
8	24.0386	28.8590	31.7408	8	23.9885	28.7408	31.7388
9	24.0409	28.8664	31.7453	9	23.9879	28.7403	31.7415
10	24.0417	28.8699	31.7457	10	23.9882	28.7405	31.7393
11	24.0431	28.8744	31.7484	11	23.9879	28.7403	31.7406
12	24.0437	28.8769	31.7489	12	23.9881	28.7404	31.7395
13	24.0446	28.8799	31.7506	13	23.9879	28.7403	31.7402
14	24.0450	28.8817	31.7510	14	23.9880	28.7403	31.7395
15	24.0456	28.8839	31.7522	15	23.9879	28.7403	31.7400
16	24.0460	28.8853	31.7526	16	23.9880	28.7403	31.7396
17	24.0465	28.8869	31.7535	17	23.9879	28.7402	31.7399
18	24.0467	28.8880	31.7538	18	23.9880	28.7403	31.7396
19	24.0471	28.8893	31.7545	19	23.9879	28.7402	31.7399
20	24.0473	28.8902	31.7548	20	23.9879	28.7403	31.7396

- Validação da Formulação via CIEA para o Sólido

Para validação da distribuição da temperatura média no sólido obtida pela formulação aproximada unidimensional de parâmetros concentrados melhorada, CIEA (*Coupled Integral Equations Approach*), resolveu-se numericamente o problema de condução de calor bidimensional transiente no sólido, eqs. (3.8) a (3.12), utilizando como condição de contorno a temperatura da interface fluido-sólido encontrada pela solução aqui obtida para o problema conjugado, empregando para tal a rotina *NDSolve* da plataforma *Mathematica*. Nesta validação o Método Integral foi utilizado para resolver o problema conjugado e fornecer a distribuição de temperatura na interface.

Em seguida, a temperatura transversal média da solução bidimensional foi computada, de modo a permitir uma comparação direta com a temperatura média obtida via CIEA. A tabela 6.12 ilustra os desvios entre os valores transversais médios encontrados para a temperatura no sólido pelas duas formulações, para uma parede de Norcoat com espessura de 7 mm (caso 1). Observa-se que para diferentes posições longitudinais e em diferentes tempos, a solução bidimensional e a solução via CIEA concordam de forma razoavelmente uniforme em todo o domínio em pelo menos três dígitos significativos.

Tabela 6.12 – Comparação entre as temperaturas médias transversais calculadas via formulação de parâmetros concentrados melhorada, CIEA, (*Tav 1D*) e via formulação bidimensional (*Tav 2D*) para o caso 1.

t [s]	0.25		0.5		0.75		1	
x [m]	Tav 1D	Tav 2D						
0.01	22.159	22.172	23.122	23.144	23.563	23.575	23.765	23.77
0.02	22.549	22.556	23.878	23.903	24.536	24.553	24.855	24.864
0.04	22.86	22.856	24.752	24.776	25.882	25.903	26.513	26.527
0.05	22.925	22.918	24.985	25.007	26.312	26.332	27.105	27.119
0.06	22.967	22.958	25.148	25.168	26.634	26.654	27.578	27.594
0.08	23.018	23.007	25.357	25.375	27.076	27.095	28.274	28.291
0.1	23.045	23.029	25.469	25.478	27.323	27.329	28.684	28.684

Uma comparação similar foi construída na tabela 6.13, considerando o mesmo material Norcoat contudo, variando a sua espessura. A temperatura média para os três casos, 1, 2 e 3, são apresentados para o tempo de 1segundo em diferentes posições.

Tabela 6.13 – Comparação entre as temperaturas médias transversais calculadas via formulação de parâmetros concentrados melhorada, CIEA, (Tav 1D) e via formulação bidimensional (Tav 2D) para o casos 1, 2 e 3.

CASOS	2 (e=2mm)		1 (e=7mm)		3 (e=12mm)	
	Tav 1D	Tav 2D	Tav 1D	Tav 2D	Tav 1D	Tav 2D
x [m]						
0.01	23.796	23.795	23.765	23.77	23.081	23.136
0.02	25.166	25.169	24.855	24.864	23.802	23.851
0.04	27.288	27.291	26.513	26.527	24.842	24.895
0.05	28.154	28.157	27.105	27.119	25.185	25.237
0.06	28.935	28.938	27.578	27.594	25.449	25.501
0.08	30.338	30.341	28.274	28.291	25.827	25.875
0.1	31.478	31.46	28.684	28.684	26.041	26.071

As três situações demonstram a boa concordância entre as duas formulações; todavia, percebe-se uma ligeira perda na acurácia da solução via parâmetros concentrados melhorada com o aumento da espessura para 12 mm. Assim como para a análise clássica de parâmetros concentrados, também é esperado para a presente formulação melhorada uma perda na precisão com o aumento do gradiente de temperatura na direção transversal. Mas de fato, a formulação via CIEA não é tão influenciada por uma distribuição não uniforme da temperatura, uma vez que esta variação espacial é de alguma forma levada em consideração na fórmula das integrais de Hermite.

A figura 6.18 ilustra a variação da temperatura na interface fluido-sólido (linha contínua) calculada pelo problema conjugado e da temperatura transversal média (linha pontilhada) via CIEA ao longo da placa, para 5 diferentes tempos $t = \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ e $1.25\}$ s}. Pode-se notar que os maiores coeficientes de transferência de calor próximo à borda de ataque da placa podem levar a temperaturas da interface mais baixos do que os valores de temperatura média no sólido. Tem-se também que, com a evolução do tempo a diferença entre os valores locais e médio tende a diminuir favorecendo a presente formulação aproximada à medida que aproxima-se o regime permanente.

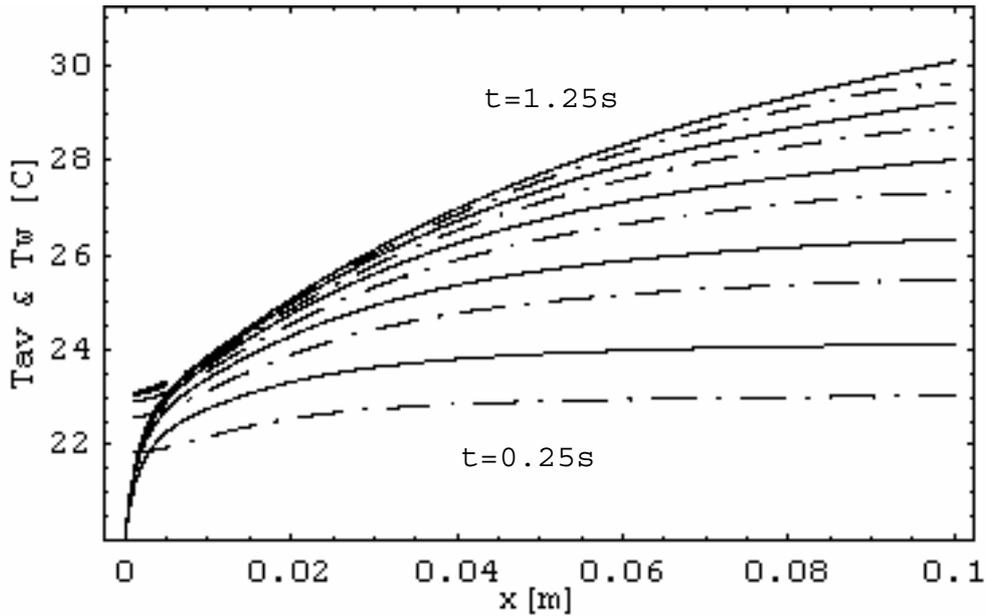


Figura 6.18 - Comparação entre a temperatura média no sólido (pontilhada) e a temperatura na interface fluido-sólido (contínua) ao longo da placa para $t=\{0.25, 0.5, 0.75, 1.0 \text{ e } 1.25 \text{ s}\}$ - (caso 1).

- Comparação entre os Métodos Integral e Transformada Integral

Com o objetivo de comparar os dois métodos de solução estudados no presente trabalho para o problema conjugado, utilizou-se como caso ilustrativo a parede de Norcoat com espessura de 7 mm (caso 1). Os resultados encontrados via M. Integral e via GITT com uso do Balanço Integral, para a temperatura na parede e para o coeficiente de transferência de calor ao longo do tempo e para as posições $x=\{0.01, 0.05, 0.1\text{m}\}$, são apresentados nas figuras 6.19 e 6.20, respectivamente. Observou-se que o coeficiente de transferência de calor pode apresentar, para tempos pequenos, uma ligeira instabilidade numérica para posições do início da placa. Tal instabilidade pode ser explicada devido ao fato de haver derivadas de funções interpolantes no cálculo deste coeficiente, que sofrem uma variação acentuada para $t \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 0$. Para eliminar estas instabilidades para x e $t \rightarrow 0$, é necessário refinar suficientemente a malha nas imediações dessa região onde ocorrem as singularidades do problema.

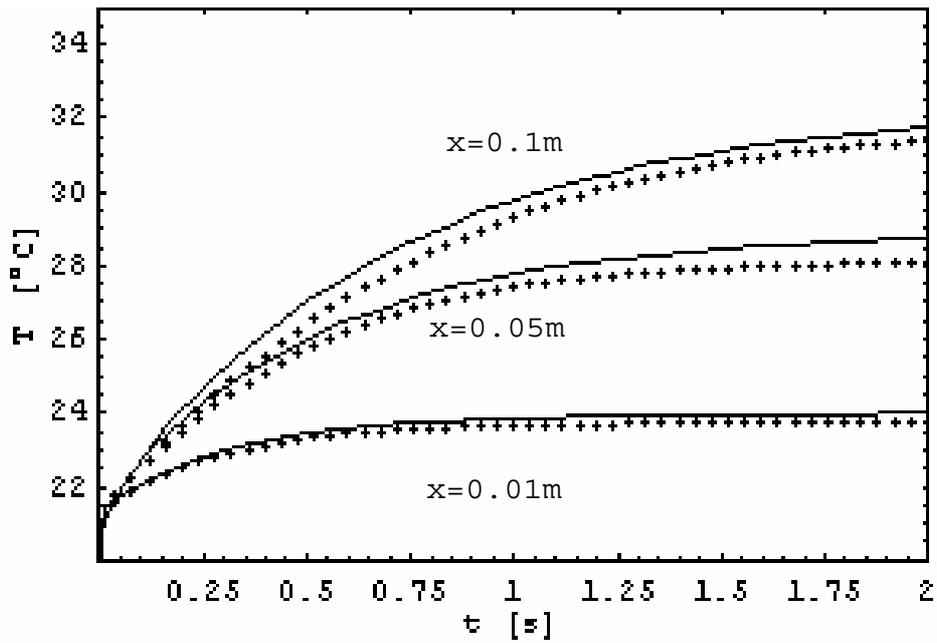


Figura 6.19 - Comparação entre as temperaturas na interface via GITT com Balanço Integral (contínua) e via Método Integral (pontilhada) ao longo do tempo para $x=\{0.01, 0.05, 0.1m\}$ - (caso 1).

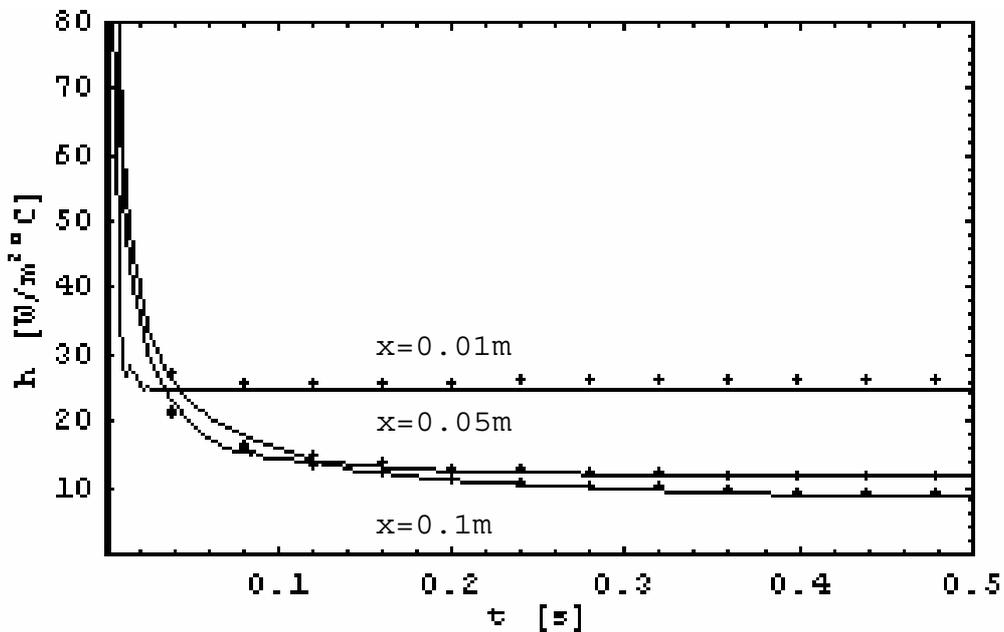


Figura 6.20 - Comparação entre os coef. transferência de calor via GITT com Balanço Integral (contínua) e via Método Integral (pontilhada) ao longo do tempo para $x=\{0.01, 0.05, 0.1m\}$ - (caso 1).

Observa-se que a solução via GITT apresenta temperaturas na interface um pouco mais elevadas do que as calculadas pelo Método Integral. A tabela 6.14 apresenta, em três diferentes posições ao longo da placa, o desvio percentual encontrado no cálculo da temperatura da interface entre as duas soluções, para alguns valores de tempo.

Tabela 6.14 – Comparação entre as temperaturas na interface calculadas via Método Integral e via GITT com Balanço Integral (caso 1).

TEMPERATURA DA INTERFACE [°C]										
x = 0.01m										
t[s]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
M. Integral	21.9969	22.5002	22.8474	23.0909	23.2631	23.3856	23.4732	23.5362	23.5817	23.6146
GITT + B.I.	22.0748	22.6005	22.9726	23.2386	23.4309	23.5714	23.6749	23.7519	23.8096	23.8531
desvio	-0.4%	-0.4%	-0.5%	-0.6%	-0.7%	-0.8%	-0.9%	-0.9%	-1.0%	-1.0%
x = 0.05m										
t[s]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2
M. Integral	22.4345	23.4633	24.3318	25.0621	25.6691	26.7448	27.3637	27.7051	27.9857	28.0361
GITT + B.I.	22.6891	23.7680	24.6572	25.3915	25.9981	27.0928	27.7737	28.1987	28.6335	28.74027
desvio	-1.1%	-1.3%	-1.3%	-1.3%	-1.3%	-1.3%	-1.5%	-1.8%	-2.3%	-2.5%
x = 0.1m										
t[s]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2
M. Integral	22.4817	23.6082	24.6175	25.5264	26.3432	28.0254	29.2637	30.1393	31.1138	31.3505
GITT + B.I.	22.7201	24.0770	25.1974	26.1656	27.0034	28.6361	29.7709	30.5582	31.4799	31.73963
desvio	-1.0%	-1.9%	-2.3%	-2.4%	-2.4%	-2.1%	-1.7%	-1.4%	-1.2%	-1.2%

- Resultados Físicos

Iniciou-se o estudo do comportamento físico do problema conjugado pela análise da partição do fluxo de calor na interface entre o fluido e o sólido, para um fornecimento constante e uniforme de calor, $q_w(t) = q_{ref}$, calculado via GITT.

As figuras 6.21 e 6.22 apresentam respectivamente, a evolução no tempo dos fluxos de calor para o fluido e para o sólido ao longo de uma parede de Norcoat com 7 mm de espessura (caso 1). Observa-se que ao longo do tempo, o fluxo de calor no fluido aumenta enquanto que no sólido o fluxo de calor diminui devido à suavização dos gradientes transversais de temperatura.

Contudo, ao longo do comprimento da placa tem-se que o fluxo de calor no fluido decresce à medida que o coeficiente de transferência de calor diminui e por sua vez, o fluxo de calor no sólido aumenta devido ao uniforme fornecimento de energia na interface. Vale dizer que a soma dos dois resultados de fluxo de calor embora não mostrados por questões de clareza, resulta sempre no valor q_{ref} , como esperado.

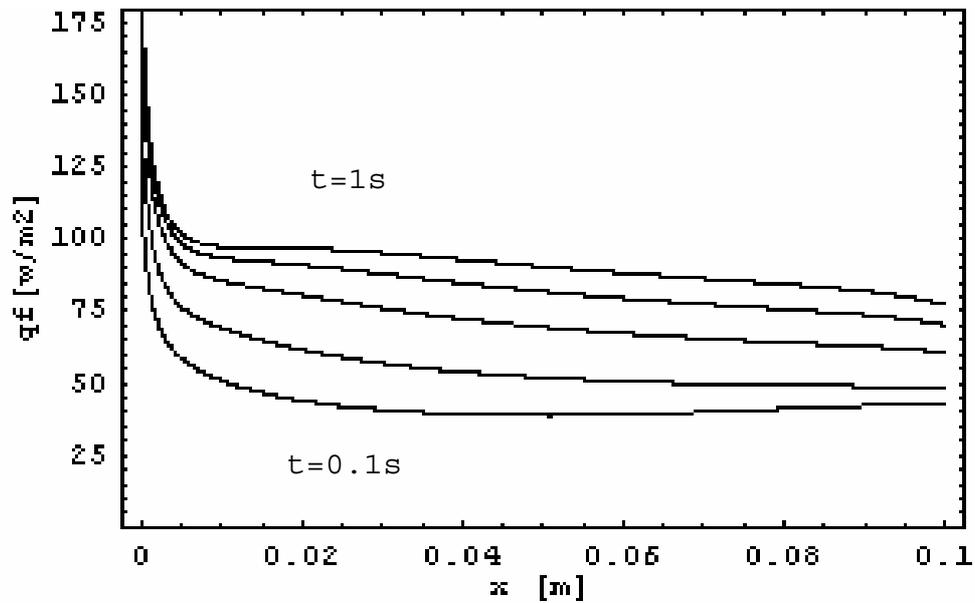


Figura 6.21 - Fluxo de calor no fluido ao longo da superfície da placa para os tempo $t=\{0.1s, 0.25s, 0.5s, 0.75s, 1s\}$ - (caso 1).

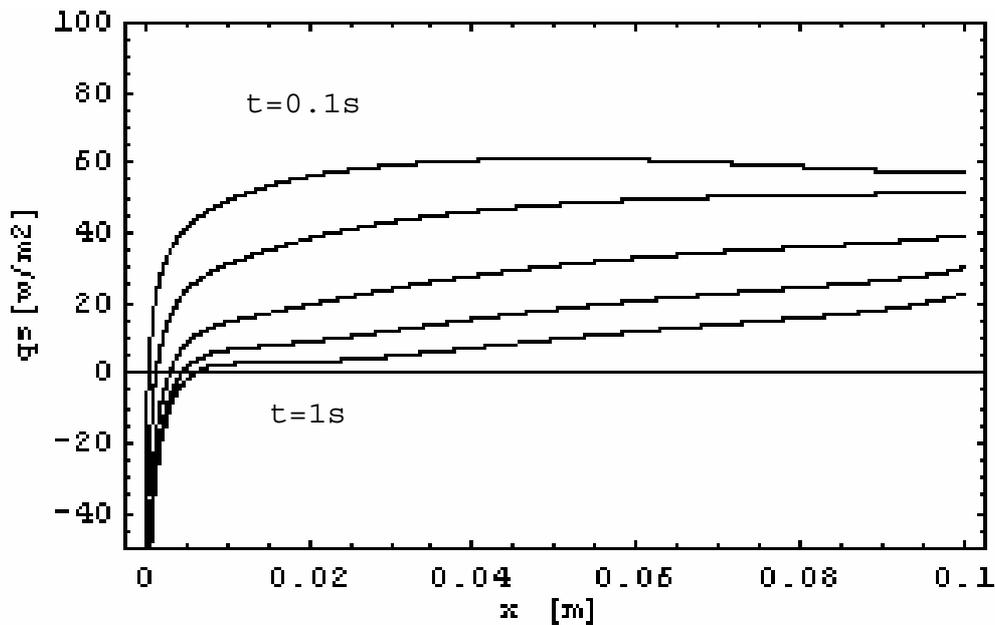


Figura 6.22 - Fluxo de calor no sólido ao longo da superfície da placa para os tempo $t=\{0.1s, 0.25s, 0.5s, 0.75s, 1s\}$ - (caso 1).

A figura 6.23 fornece uma ilustração da partição do fluxo de calor na interface da placa entre o sólido e o fluido, em um tempo no início do transiente, $t=0.1s$. Pode-se observar que, para algumas posições da placa, a curva de fluxo de calor no sólido cruza acima da curva de fluxo de calor no fluido, ou seja, para tempos pequenos a partição do fluxo de calor pode resultar em maior proporção para o sólido, uma vez que os demais contornos estão isolados. A figura 6.24 ajuda a visualizar o comportamento do fluxo de calor pela interface e ao longo do sólido com o sólido fornecendo calor para o fluido para x pequeno, em adição ao calor incidente naquela região, e podendo retirar uma proporção maior de calor para x grande, com a condução longitudinal no sentido da extremidade para o início da placa.

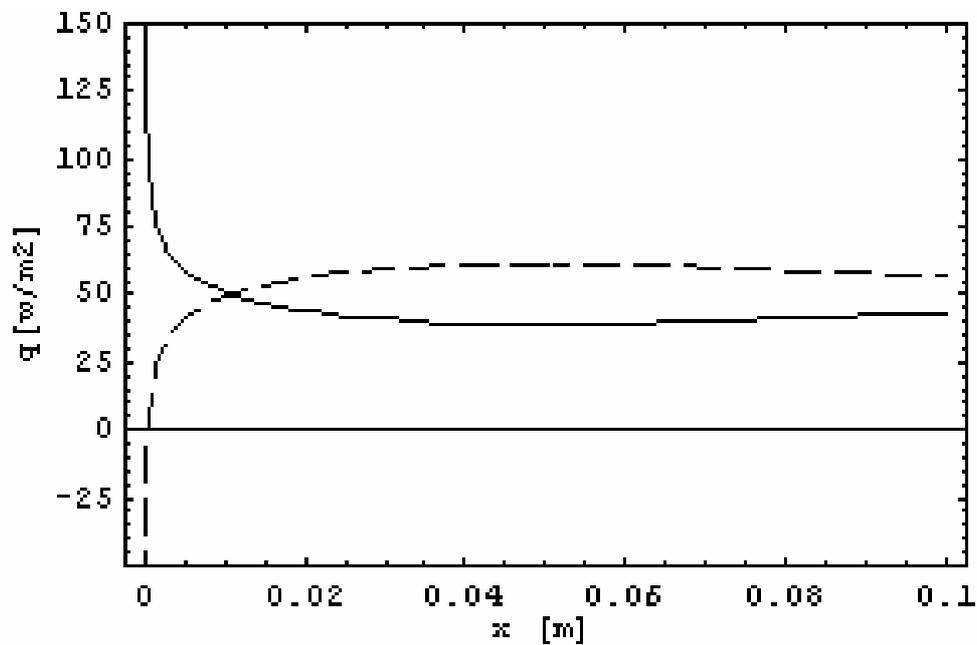


Figura 6.23 - Fluxo de calor no fluido (contínua) e no sólido (pontilhada) ao longo da superfície da placa para o tempo $t=0.1s$ - (caso 1).

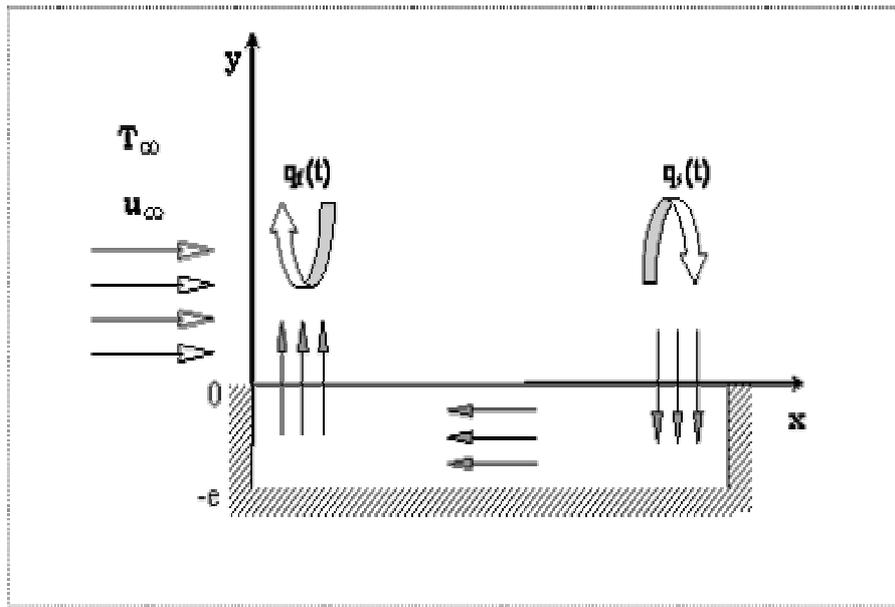


Figura 6.24 - Partição do fluxo de calor no fluido e no sólido ao longo da superfície da placa para tempos pequenos - (caso 1).

Os resultados apresentados anteriormente para o sólido foram obtidos com a formulação unidimensional de parâmetros concentrados melhorada (CIEA), que somente fornece informações de quantidades médias e de contorno, temperatura e fluxo de calor. Todavia, se o conhecimento local da temperatura é por alguma razão necessário, uma análise bidimensional do problema de condução de calor deve ser realizada. Sendo assim, fazendo uso da solução numérica bidimensional utilizada na validação da CIEA realizou-se uma investigação do comportamento local da temperatura no sólido no problema conjugado para diferentes espessuras de material e para diferentes materiais.

As figuras 6.25 a 6.28 apresentam para uma dada posição fixa, $x=0.05\text{m}$, o perfil transversal da temperatura no sólido e no fluido para diferentes valores de tempo. Claramente observa-se a redução com o tempo do gradiente de temperatura na interface, em conjunto com a progressiva suavização do perfil de temperatura no sólido.

O efeito da variação da espessura da parede pode ser analisada pelas figuras 6.25 a 6.27, que são respectivamente para o Norcoat com 7 mm (caso 1), 2 mm (caso 2) e 12 mm (caso 3). Comparando estes três primeiros casos, pode-se notar que a temperatura de interface mais elevada acontece para o caso de menor espessura de parede, figura 6.26. Tem-se ainda que, para este caso (figura 6.26) o regime permanente é atingido mais rapidamente do que para os outros dois, isso porque maiores espessuras da parede oferecem maiores capacitâncias e resistências térmicas, resultando em maiores

gradientes de temperaturas no sólido e a evoluções mais lentas para o regime permanente.

O efeito da variação do material da parede é ilustrado comparando-se as figuras 6.27 e 6.28. A figura 6.28 apresenta o perfil de temperatura para um material com difusividade térmica consideravelmente mais baixa, aqui representado pelo PVC (caso 4), em comparação ao material Norcoat (caso 3), ambos com espessura de parede de 12 mm. Observa-se claramente a diferença marcante entre as escalas de tempo necessárias para a visualização destes dois conjuntos de perfis e, como de esperado, um transiente muito mais rápido para o caso da parede de Norcoat. E ainda para a placa de PVC, têm-se temperaturas mais altas na interface devido a sua menor difusividade térmica quando comparada ao Norcoat.

Finalmente, na figura 6.29 tem-se a partição do fluxo de calor para o fluido (linha contínua) e para o sólido (linha pontilhada) ao longo do comprimento de uma placa de alumínio de 12mm de espessura (caso 5), para diferentes valores de tempo. Neste caso, a resistência térmica reduzida oferecida pela parede muito condutiva, praticamente fornece uma distribuição uniforme da temperatura na interface, e durante uma boa porção do período transiente, o fluxo de calor favorece o sólido.

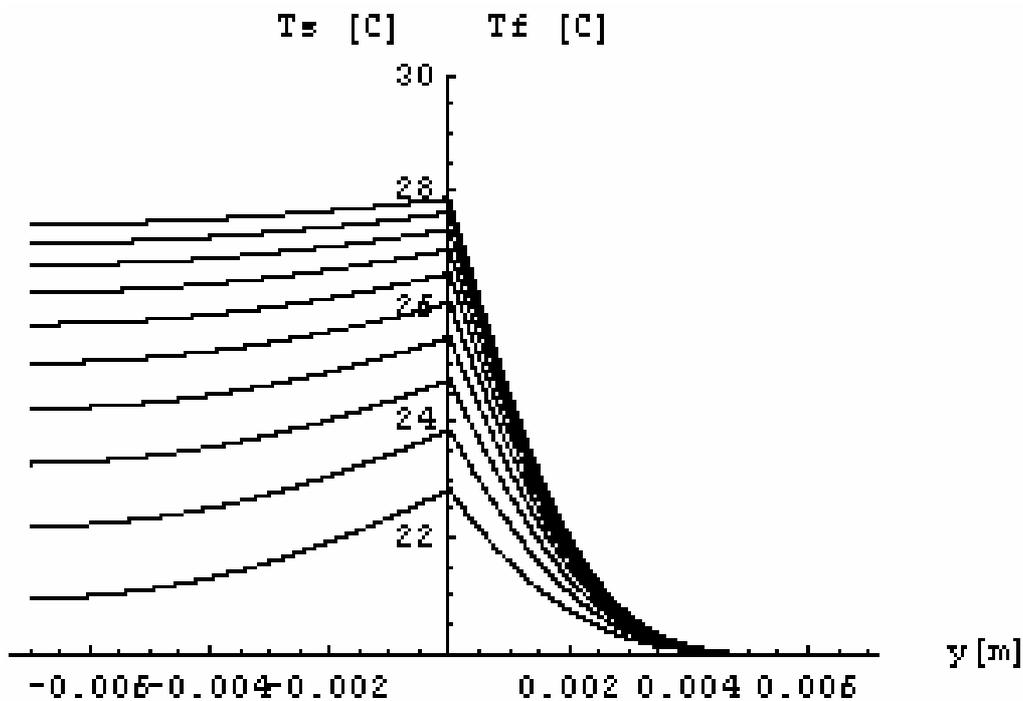


Figura 6.25 - Distribuição da temperatura no sólido (esquerda) e no fluido (direita) em $x=L/2$ para diferentes tempos $t=\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 \text{ e } 1.0s\}$ – Norcoat (caso 1).

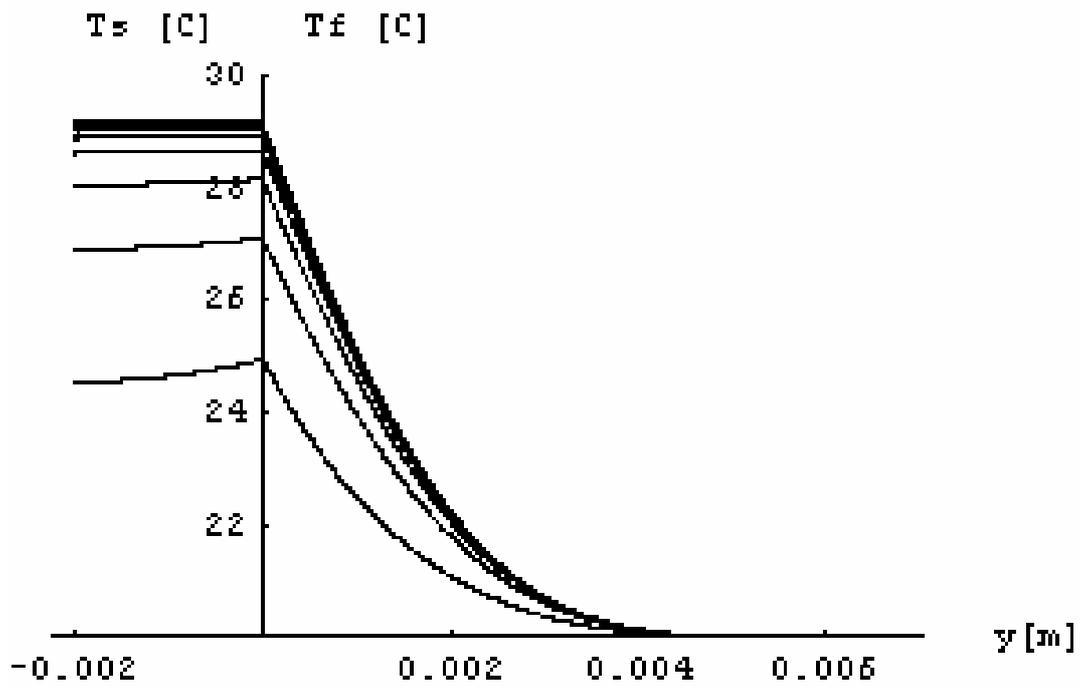


Figura 6.26 - Distribuição da temperatura no sólido (esquerda) e no fluido (direita) em $x=L/2$ para diferentes tempos $t=\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 \text{ e } 1.0s\}$ – Norcoat (caso 2).

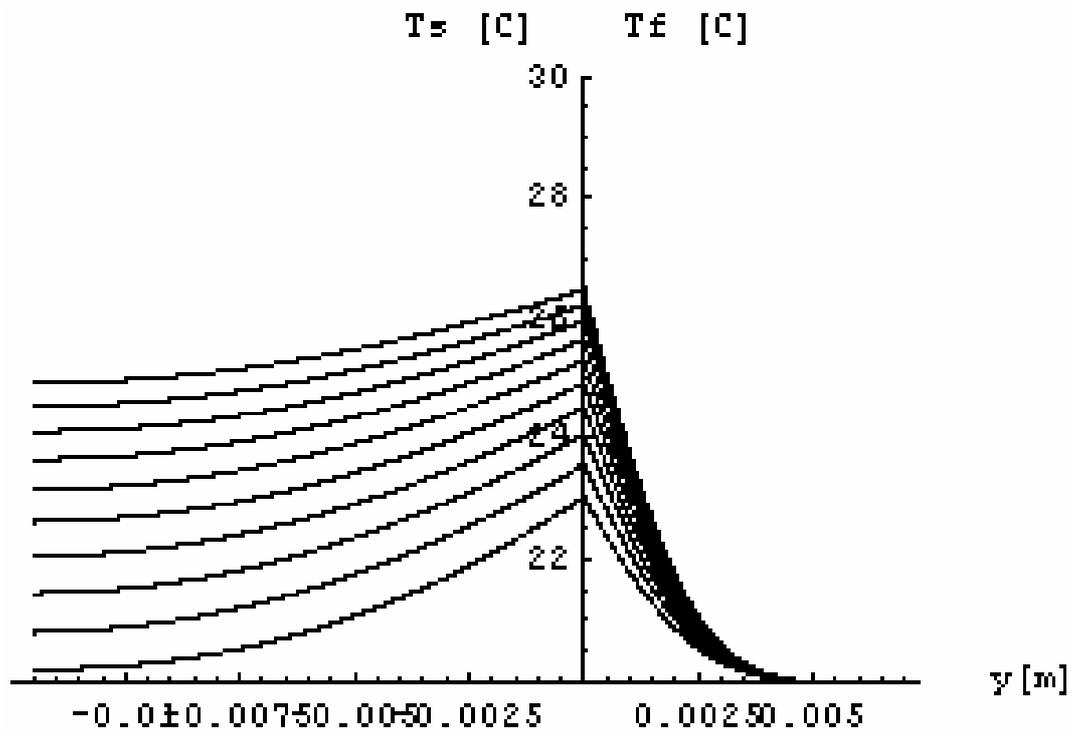


Figura 6.27: Distribuição da temperatura no sólido (esquerda) e no fluido (direita) em $x=L/2$ para diferentes tempos $t=\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 \text{ e } 1.0s\}$ – Norcoat (caso 3).

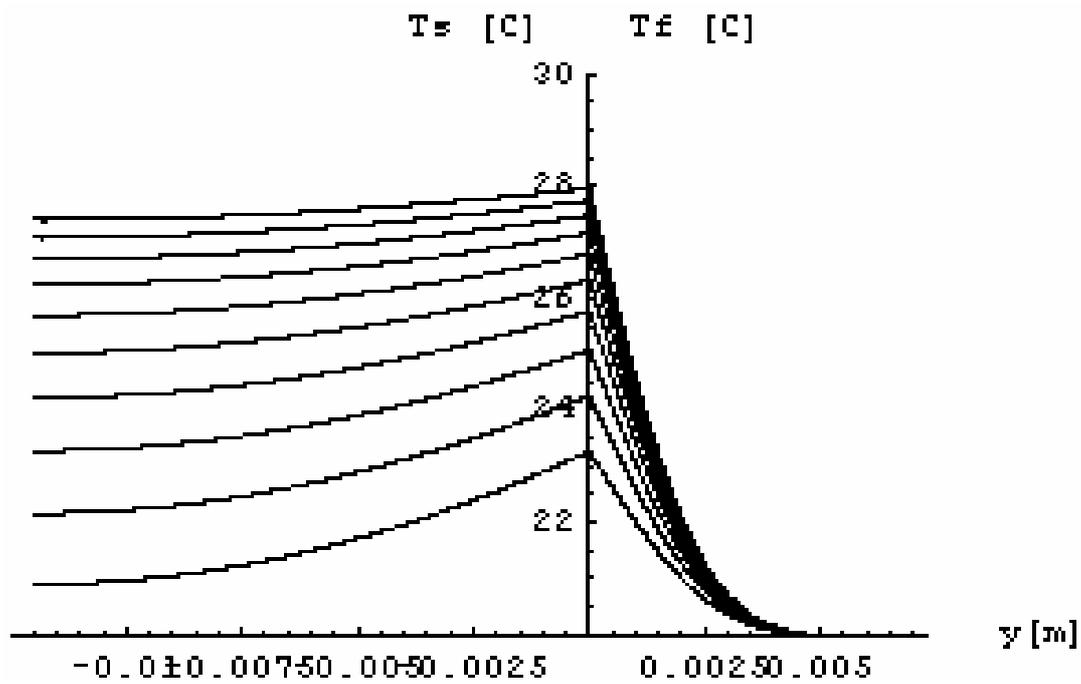


Figura 6.28: Distribuição da temperatura no sólido (esquerda) e no fluido (direita) em $x=L/2$ para diferentes tempos $t=\{360, 720, 1080, 1440, 1800, 2160, 2520, 2880, 3240, 3600\}$ s – PVC (caso 4).

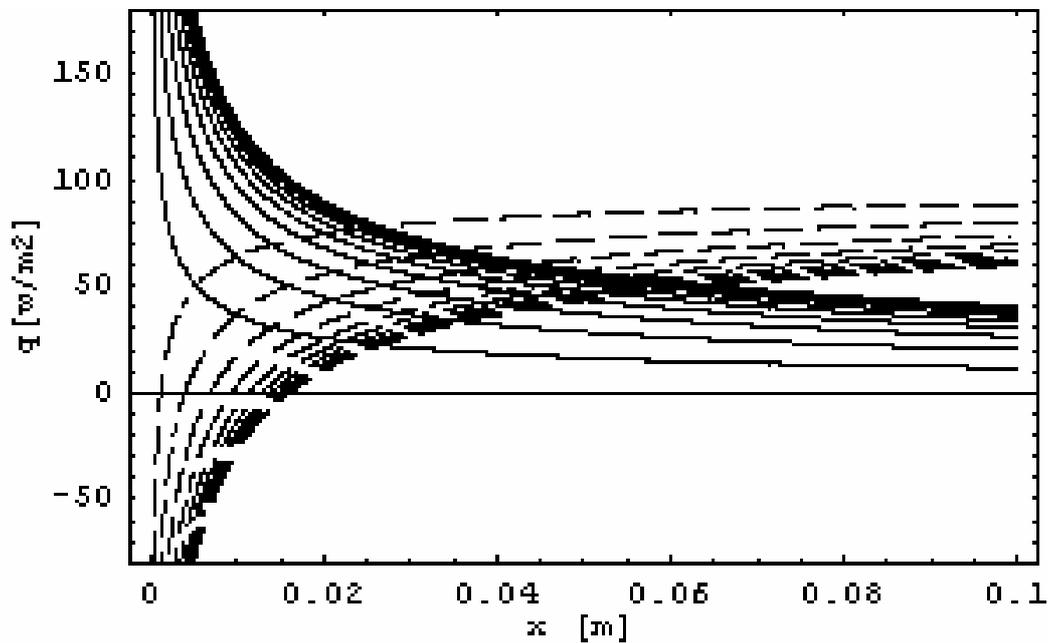


Figura 6.29: Partição do fluxo de calor no fluido (contínua) e no sólido (pontilhada) ao longo da placa para diferentes tempos $t=\{720, 1440, 2160, 2880, 3600, 4320, 5040, 5760, 6480, 7200\}$ s – Alumínio (caso 5).

7. Conclusões e Sugestões

O presente trabalho estudou o problema conjugado transiente condução-convecção externa sobre uma placa plana de espessura finita enfocando a análise na metodologia de solução. Sendo assim, eliminando a coordenada transversal da formulação no sólido pelo emprego da formulação de parâmetros concentrados melhorada (CIEA), o problema de transferência de calor por condução na parede sólida foi reformulado de forma aproximada. Na resolução do problema térmico no fluido, estudou-se a aplicação de dois diferentes métodos de solução: a aproximação Integral de Karman-Pohlhausen e a Técnica da Transformada Integral Generalizada, sob a sua forma de transformação parcial.

Implementou-se o desenvolvimento das soluções na plataforma *Mathematica* eliminando as inúmeras manipulações, em geral associadas à abordagem analítica, a partir da computação simbólica. As equações diferenciais parciais resultantes para a espessura da camada limite (Método Integral) ou para os campos transformados da distribuição de temperatura no fluido (GITT), acopladas com a equação para a temperatura média transversal no sólido, foram então numericamente integradas pelo Método das Linhas, ao longo da coordenada longitudinal e da variável tempo, fazendo uso da rotina *NDSolve*, interna à plataforma *Mathematica*.

Inicialmente, as soluções transientes, para o meio fluido sem conjugação, foram validadas para tempos longos com a solução clássica de Blasius para a camada limite térmica em regime permanente, e em seguida os dois métodos, Integral e GITT, foram comparados entre si. A solução aproximada da condução de calor no sólido foi validada com a solução numérica da formulação bidimensional e algumas diferentes situações físicas foram examinadas, para diferentes materiais e espessuras.

O Método Integral apresentou-se de simples dedução e emprego, sendo aplicável a uma gama de situações em aplicações na engenharia. Todavia, por ser um método

aproximado, apresenta limitações, uma vez que o modelo parabólico adotado na aproximação da distribuição de temperatura não consegue reproduzir uma mudança de curvatura no comportamento ao longo da coordenada transversal. Por sua vez a Técnica da Transformada Integral Generalizada mostrou-se uma ferramenta poderosa para o estudo do problema conjugado transiente, ao permitir a solução de um amplo espectro de condições de contorno variáveis no tempo e/ou no espaço.

No escopo das soluções híbridas numérico-analíticas aqui propostas, observou-se a necessidade de recomendar uma atenção especial ao controle de precisão no emprego da *NDSolve* em seu modo automático de uso, uma vez que foram constatadas oscilações numéricas para tempos pequenos e posições próximas ao início da placa, que foram eliminados ao se exigir mais precisão da rotina.

Como sugestões para otimização do método da Transformada Integral, recomenda-se a implementação do Balanço Integral duplo ainda *a posteriori* ou a aplicação do Balanço Integral *a priori*, como alternativa à utilização de um problema de autovalor variável com a coordenada longitudinal e , eventualmente, também com o tempo, caso se deseje implementar a solução para uma região termicamente afetada também variável com o tempo.

Os algoritmos desenvolvidos podem ser imediatamente estendidos para o tratamento de outras geometrias bidimensionais e situações físicas mais complexas, como no caso de escoamentos turbulentos e/ou em regime hipersônico, como discutido na seção introdutória. Um passo também muito relevante no avanço tanto da metodologia de transformação integral quanto na generalização do modelo físico do problema conjugado, seria a consideração da variação local da temperatura no sólido, a partir de um problema de autovalor em duas camadas, sem e com variações da geometria do sólido com o tempo por mudança de fase ou ablação.

As metodologias aqui desenvolvidas são parte integrante de um esforço conjunto com o LTM/Université de Reims, França, e permitirão, portanto, comparações críticas com os resultados experimentais em obtenção pelo grupo de pesquisa francês, em trabalhos de tese recém-concluídos ou em andamento (STOIAN, 2006), bem como seu emprego da solução dos problemas inversos para determinação dos coeficientes de transferência de calor em regime transiente.

Capítulo 8

8. Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, A.R. & COTTA, R.M., 1999, "On the Solution of Convection-Diffusion Problems Within Unbounded Domains Through Integral Transformation", *J. of the Franklin Institute*, v.336, pp.821-832.
- APARECIDO, J.B. & COTTA, R.M., 1989, "Improved One-Dimensional Fin Solutions", *Heat Transf. Eng.*, v. 11, no. 1, pp. 49-59.
- BOLIVAR, M.A.H., LAGE, P.L.C., & COTTA, R.M., 1996, "Generalized Integral Transform Solution to the Laminar Thermal Boundary Layer Problem for Flow Past a Cylinder", Proc. of the *6th National Thermal Sciences Meeting*, ENCIT-96, Florianópolis, SC, Brasil, November.
- BOLIVAR, M.A.H., LAGE, P.L.C & COTTA, R.M., 1998, "Integral Transform Solution of the Laminar Thermal Boundary Layer Problem for Flow Past Two-Dimensional and Axisymmetric Bodies", *Num. Heat Transfer, Part A - Applications*, v.33, no.7, pp.779-797.
- CARVALHO, T.M.B., COTTA, R.M., & MIKHAILOV, M.D., 1993, "Flow Development in the Entrance Regions of Ducts", *Comm. Num. Meth. Eng.*, v.9, pp. 503-509.
- CASTELLÕES, F.V. & COTTA, R.M., 2005, "Analysis of Transient and Periodic Convection in Microchannels via Integral Transforms", *Proc. of the 4th Int. Conf. Computational Heat and Mass Transfer, 4th ICCHMT*, vol.1, pp.465-470,

Paris-Cachan, France, May; also, *Progress in Computational Fluid Dynamics*, V.6, no.6, pp.321-326, 2006.

CHAO, B.T. & CHEEMA, L.S., 1968, "Unsteady Heat Transfer in Laminar Boundary Layer over a Flat Plate", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 11, no. 9, pp.1311-1324.

CHEN, C.H & CHIOU, J.S., 1996, "Periodic Heat Transfer in a Vertical Plate Fin Cooled by a Forced Convective Flow", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 39, no 2, pp.429-435.

CHEN, H.-T. & CHANG, S.-M., 1996, "Numerical Simulation for Conjugate Problem of Natural Convection on both Sides of a Vertical Wall", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 39, no 2, pp.383-390.

CHENG, W.T. & LIN, H.T., 2002, "Non-similarity Solution and Correlation of Transient Heat Transfer in Laminar Boundary Layer Flow over a Wedge", *Int. Journal of Engineering Sciences*, v. 40, pp. 531-548.

CHIDA, K., 2000, "Surface Temperature of a Flat Plate of Finite Thickness under Conjugate Laminar Forced Convection Heat Transfer Condition", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, pp.639-642.

COLE, K.D., 1997, "Conjugate Heat Transfer from a Small Heated Strip", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, no. 11, pp.2709-2719.

CORREA, E.J.& COTTA, R.M., 1998, "Enhanced Lumped-Differential Formulations of Diffusion Problems", *Appl. Math. Modeling*, v.22, pp.137-152.

COSSALI, G.E., 2005, "Periodic Heat Transfer by Forced Laminar Boundary Layer Flow over a Semi-infinite Flat Plate", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, pp. 4846-4853.

- COTTA, R.M, 1990, "Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems", *Num. Heat Transfer, Part B*, v. 127, pp. 217-226.
- COTTA, R.M & CARVALHO, T.M.B, 1991, "Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems", In: *7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar & Turbulent Flow*, Part 1, pp. 106-115, Stanford CA, July.
- COTTA, R.M, 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- COTTA, R.M., 1994, "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method", *Int J. Heat & Mass Transfer* (Invited Paper), v. 37, Suppl. 1, pp. 381-394, March.
- COTTA, R.M & GERK, J.E.V, 1994, "Mixed Finite Difference/Integral Transform Approach for Parabolic-Hyperbolic Problems in Transient Forced Convection", *Numerical Heat Transfer - Part B: Fundamentals*, v. 25, pp. 433-448.
- COTTA, R.M & MIKHAILOV, M.D., 1997, *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*, New York, John Wiley & Sons.
- COTTA, R.M, 1998, *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*, Begell House, New York.
- COTTA, R.M. & PIMENTEL, L.C.G., 1998, "Developing Turbulent Duct Flow: - Hybrid Solution Via Integral Transforms and Algebraic Models", *Int. J. Num. Meth. in Heat & Fluid Flow*, v.8, no.1, pp.10-26.
- COTTA, R. M. & ORLANDE, H.R.B., 2003, "Hybrid Approaches in Heat and Mass Transfer:- A Brazilian Experience with Applications in National Strategic Projects", *Heat Transfer Eng.*, Invited Editorial, v.24, no.4, pp.1-5.
- COTTA, R.M., RUPERTI Jr., N., FALKENBERG, C.V. & SU, J., 2004, "Engineering Analysis of Ablative Thermal Protection for Atmospheric Reentry:- Improved

Lumped Formulations and Symbolic-Numerical Computation”, *Heat Transfer Engng.*, v.25, no.6, pp.1-12.

COTTA, R.M., SANTOS, C.A.C., QUARESMA, J.N.N. & PEREZ-GUERRERO, J.S., 2005, “Hybrid Integral Transforms in Convection-Diffusion: Recent Applications in Internal Flow Simulation”, Invited Lecture, *Proc. of the 4th Int. Conf. Computational Heat and Mass Transfer, 4th ICCHMT*, Paris-Cachan, France, May 2005

COTTA, R.M & MIKHAILOV, M.D., 2006, “Hybrid Methods and Symbolic Computations”, in: *Handbook of Numerical Heat Transfer*, 2nd edition, Chapter 16, Eds. W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, and J.Y. Murthy, John Wiley, New York, pp.493-522.

FAGHRI, M. & SPARROW, E.M., 1980, “Simultaneous wall and fluid axial conduction in laminar pipe-flow heat transfer”, *J. Heat Transfer*, No 102, pp. 58-63

FIGUEIRA DA SILVA, E. & COTTA, R.M., 1996, "Benchmark Results for Internal Forced Convection Through Integral Transformation", *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, Vol.23, no.7, pp.1019-1029.

FIGUEIRA DA SILVA, E. & COTTA, R.M., 1998, “Mixed Convection Within Vertical Parallel-Plates:- Hybrid Solution by Integral Transforms”, *Num. Heat Transfer, part A - Applications*, v.33, pp.85-106.

FIGUEIRA DA SILVA, E., PEREZ-GUERRERO, J.S. & COTTA, R.M., 1999, "Integral Transform Solution of Boundary Layer Equations in Streamfunction-only Formulation", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, v.34, pp.51-61.

GUEDES, R.O.C., COTTA, R.M. & BRUM, N.C.L. 1989, "Conjugated Heat Transfer in Laminar Flow Between Parallel-Plates Channel", *10th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, X COBEM*, pp. 285-288, Rio de Janeiro, Dezembro

- GUEDES, R.O.C, & COTTA, R.M., 1991, “Periodic Laminar Forced Convection within Ducts Including Wall Heat Conduction Effects”, *Int. J. Engng. Sciences*, v.29, pp. 535-547
- GUEDES, R.O.C, & ÖZISIK, M.N., 1992, “Conjugated Turbulent Heat Transfer with Axial Conduction in Wall and Convection Boundary Conditions in a Parallel-Plate Channel”, *Int. J. Heat & Fluid Flow*, v.13, pp. 322-328
- GUEDES, R.O.C, COTTA, R.M. & ÖZISIK, M.N., 1994, “Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection in a Parallel Plate Channel”, *J. Heat Transfer*, v.116, pp. 40-46
- GUEDES, R.O.C, & SCOFANO NETO, F., 1995, “Conjugated Heat Transfer in Laminar Forced Convection of non-Newtonian Fluids in Ducts”, In: *Proc. of the 13th Brazilian Congress of Mechanical Engineering – COBEM 95*, CD-ROM, Belo Horizonte, Brazil, Dezembro.
- HARRIS, S.D., INGHAM, D.B., POP, I., 2001, “Transient Boundary-Layer Heat Transfer from a Flat Plate Subjected to a Sudden Change in Heat Flux”, *Eur. J. Mech. B-Fluids*, v. 20, pp187-204
- HERMITE, M.Ch., 1878, “Sur la Formule d’Interpolation de Lagrange”, *J. Crelle*, v.84.
- IMSL, MATH/LIB, Houston, TX, 1987.
- JILANI, G. JAYARAJ, S. & AHMAD, M.A., 2002, “Conjugate Forced Convection-Conduction Heat Transfer Analysis of a Heat Generating Vertical Cylinder”, *Heat and Mass Transfer*, v.45, pp. 331-341.
- JUNCU, GH., 2005, “Unsteady forced convection heat/mass transfer from a flat plate”, *Heat Mass Transfer*, v. 41: pp.1095-1102.

- KANNA, P.R. & DAS, M.K., 2005, "Conjugate Forced Convection Heat Transfer from a Flat Plate by Laminar Plane Wall Jet Flow", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, pp. 2896-2910.
- KARVINEN, R., 1981, "Natural and Forced Convection Heat Transfer from a Plate Fin", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v.24, no.5, pp. 881-885.
- KAYS, W.M. & CRAWFORD, M.E., 1980, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York.
- LACHI, M., POLIDORI, G., CHITOU, N. & PADET, J., 1997, "Theoretical Modelisation in Transient Convective Heat Transfer for a Laminar Boundary Layer Flow", *Int. Center Heat Mass Transfer*, Begell House, Inc., New York, pp. 27-36.
- LACHI, M., POLIDORI, G., REBAY, M. & PADET, J., 1998, "Convection Forcée Instationnaire sur une Plaque soumise a une Perturbation Temporelle de Flux Thermique et Environnement", *Congrès SFT 1998, Société Française de Thermique*, pp.15-19.
- LACHI, M., MLADIN, E., REBAY, M. & PADET, J, 2002, "Modélisation du Couplage Conduction-Convection entre un Écoulement et une Plaque Plane", In: *Congrès Français de Thermique, SFT*, pp. 1-6, Vittel, June.
- LACHI, M., REBAY, M., MLADIN, E. & PADET, J, 2003, "Integral Approach of the Transient Coupled Heat Transfer over a Plate Exposed to a Variation in the Input Heat Flux", *ICHMT Int. Symp. Transient Convective Heat and Mass Transfer in Single & Two-Phase Flows*, August, Cesme, Turkey.
- LACHI, M., REBAY, M., MLADIN, E. & PADET, J, 2004a, "Alternative Models for Transient Convection Heat Transfer in External Flows over a Plate Exposed to a Variable Heat Flux", *Int. Journal of Thermal Sciences*, v.43, no 8, pp. 809-816.

- LACHI, M., REBAY, M., PADET, J. & COTTA, R.M., 2004b, “Numerical Solution for Transient Thermal Interaction between a Laminar Boundary Layer Flow and a Flat Plate”, In: *Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT*, Rio de Janeiro, Brazil - November.
- LACHI, M., COTTA, R.M., NAVEIRA, C.P. & PADET, J., 2006, “Improved Lumped-Differential Formulation of Transient Conjugated Conduction-Convection in External Flow”, In: *Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT*, Curitiba, Brazil - December.
- LEIROZ, A.J.K. & COTTA R.M., 1990, "Convergence Enhancement of Eigenfunction Expansions for Nonhomogeneous Elliptic Diffusion Problems", *III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, ENCIT 90, V. 1, pp. 335-340, Itapema, SC, December .
- LUIKOV, A.V., ALEKSASHENKO, V.A. & ALEKSASHENKO, A.A, 1971, “Analytical Methods of Solution of Conjugated Problems in Convective Heat Transfer”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 14, pp. 1047-1056
- LUIKOV, A.V., 1974, “Conjugate Convective Heat Transfer Problems”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 17, no.2, pp. 257-265
- LUIKOV, A.V., 1980, *Heat and Mass Transfer*, Mir Publishers, Moscow.
- MACHADO, H.A. & COTTA, R.M., 1995, "Integral Transform Method for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, v. 5, pp. 225-237.
- MACHADO, H.A. & COTTA, R.M., 1999, “Integral Transform Computation of Compressible Boundary Layers”, *Hybrid Meth. Eng.*, v.1, no.2, pp.139-160.
- MAYALL, M.C.M., 2004, “*Análise de Aquecimento Aerodinâmico em Satélites durante Reentrada Atmosférica*”, Tese de Mestrado, PEM/COPPE/UFRJ.

- MIKHAILOV, M.D. & ÖZISIK, M.N., 1984, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley, New York; also, Dover Publications, 1994.
- MENNIG, J., AUERBACH, T. & HÄLG, W., 1983, “Two Point Hermite Approximation for the Solution of Linear Initial Value and Boundary Value Problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 39, pp.199-224.
- MORI, S., SAKAKIBARA, M., & TANIMOTO, A., 1974, “Steady Heat Transfer to Laminar Flow in a Circular Tube with Conduction in the Tube Wall”, *Heat Transfer - Japanese Research*, v. 3, pp. 37-46.
- MOSSAD, M., 1999, “Laminar Forced Convection Conjugate Heat Transfer over a Flat Plate”, *Heat and Mass Transfer*, v.35, pp 371-375.
- NAGENDRA, H.R., 1973, “Transient Forced Convection Heat Transfer from an Isothermal Flat Plate”, *AIAA Journal*, v. 11, no. 6, pp 876-878.
- ÖZISIK, M. N., 1985, *Heat Transfer: A Basic Approach*, McGraw-Hill, Inc.
- PADET, J., 2005, “Transient Convective Heat Transfer”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v.27, no1 (Jan-Mar), pp. 74-95.
- PERELMAN, Y.L., 1961, “On Conjugate Problems of Heat Transfer”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 3, pp.293-303.
- PETIT, D., DARD, J. & DEGIOVANNE, A., 1981, “Détermination du Coefficient d’Échange entre un Fluide et une Paroi”, *Revue Générale de Thermique (Fr.)*, v. 238, pp. 719.
- POLIDORI, G., LACHI, M. & PADET, J., 1998a, “Unsteady Convective Heat Transfer on a Semi-infinite Flat Surface Impulsively Heated”, *Heat and Mass Transfer*, v.38, pp. 301-307.

- POLIDORI, G., LACHI, M. & PADET, J., 1998b, “Comportement d’une Couche Limite Thermique en Écoulement Cisailé avec Chauffage Spatio-périodique à la Paroi” *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.326, Série II b, pp. 429-432.
- POLIDORI, G. & PADET, J., 2002, “Transient Laminar Forced Convection with Arbitrary Variation in the Wall Heat Flux”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 25, no 1, pp. 33-42.
- POZZI, A. & TOGNACCINI, R., 2000, “Coupling of Conduction and Convection past an Impulsively Started Semi-infinite Flat Plate”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, pp. 1121-1131.
- POZZI, A. & TOGNACCINI, R., 2005, “Influence of the Prandtl Number on the Unsteady Thermo-fluid Dynamic Field around a Thick Plate”, *Meccanica*, v. 40, pp. 251-266.
- REBAY, M., LACHI, M. & PADET, J., 2002, “Mesure de Coefficients de Convection par Méthode Impulsionnelle. Influence de la Perturbation de la Couche Limite”, *Int. Journal of Thermal Sciences*, no. 11, v. 41, pp. 1161-1175
- REBAY, M. & PADET, J., 2004, “Transient Laminar Forced Convection from a Wedge Flow”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 31, no4, pp. 537-548.
- REBAY, M. & PADET, J., 2005, “Parametric Study of Unsteady Forced Convection with Pressure Gradient”, *Int. Journal of Engineering Sciences*, v. 43, pp. 655-667.
- REMY B., DEGIOVANNI, A. & MAILLET, D., 1995, “Mesure de Coefficient d’Échange pour des Écoulements à Faible Vitesse”, *Revue Générale de Thermique (Fr.)*, v. 397, pp. 28.
- SANTOS, C.A.C, QUARESMA, J.N.N. & LIMA, J.A., 2001, *Benchmark Results for Convective Heat Transfer in Ducts: - The Integral Transform Approach*, ABCM Mechanical Sciences Series, Editora E-Papers, Rio de Janeiro.

- SCHLICHTING, H., 1968, *Boundary Layer Theory*, 6th ed., McGraw-Hill, New York
- SCOFANO NETO, F., COTTA, R.M. & MIKHAILOV, M.D., 1990, "Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems", *Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, v. 1, pp. 39-50, Southampton, UK, July.
- SHAH, R.K. & LONDON, A.L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York.
- SIAS, D.F., N. RUPERTI JR., & R.M. COTTA, 2005, "Otimização de Algoritmo de Transformação Integral em Problemas de Ablação na Plataforma *Mathematica*", Proc. of the 4th *Workshop on Integral Transforms and Benchmark Problems – IV WIT*, CNEN, Rio de Janeiro, RJ, Agosto.
- SOCIO, L.M. & MARINO, L., 2002, "Slip Flow and Temperature Jump on the Impulsively Started Plate", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, pp. 2169-2175.
- STOIAN, M., 2006, "*Couplage Thermique Convection-Conduction en Régime Non Stationnaire*", These de Doctorat, Co-Tutelle, Université de Reims Champagne-Ardenne e Université Politehnica de Bucarest, Outubro.
- SU, J., 1999, "On the Integral Transform Solution of Laminar Boundary Layers with Distributed Suction", *Hybrid Methods in Eng.*, v.1, no.2, pp.103-118.
- SUNDEN, B., 1989, "Analysis of Conjugated Laminar and Turbulent Forced Convection-Conduction Heat Transfer of a Plate Fin", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 16, no 6, pp. 821-831
- VYNNYCKY, M., KIMURA, S., KANEV, K. & POP, I., 1998, "Forced Convection Heat Transfer from a Flat Plate: The Conjugate Problem", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v.41, pp. 45-59.

WANG, T.-Y., 1997, "The Analysis of Conjugate Problems of Conduction and Convection for non-Newtonian Fluids pasta a Flat Plate", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 24, no 3, pp. 337-348

WIJEYSUNDERA, N.E., 1986, "Laminar Forced Convection in Circular and Flat Ducts with Axial Conduction and External Convection", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v.29, pp. 797-807.

WHITE, F.M., 1974, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York .

WOLFRAM, S., 1999, *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media, Cambridge

ZARIFFEH, E.K., SOLIMAN, N.M. & TRUPP, A.C., 1982, "The Combined Effects of Wall and Fluid Axial Conduction on Laminar Heat Transfer in Circular Tubes", *Proc. of 7th Int. Heat Transfer Conf.*, Munich, Germany, v.3, 131-136