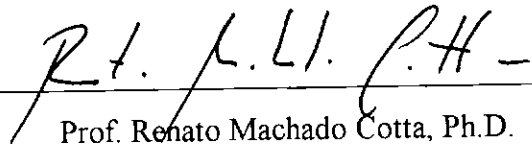


**TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS:
DESENVOLVIMENTO HIDRODINÂMICO EM DUTOS ANULARES.**

Luiz Mariano Pereira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

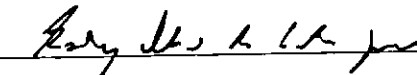


Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

(Presidente)



Prof. Gustavo Cesar Rachid Bodstein, Ph.D.



Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1995

MARIANO PEREIRA, Luiz

Transformação Integral das equações de Navier-Stokes em Coordenadas cilíndricas: Desenvolvimento Hidrodinâmico em Dutos Anulares [Rio de Janeiro] 1995.

xv, 72 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1995)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Transformação Integral.
2. Equações de Navier-Stokes.
3. Desenvolvimento Hidrodinâmico.

I. COPPE/UFRJ

II. Título(série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

**TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS:
DESENVOLVIMENTO HIDRODINÂMICO EM DUTOS ANULARES.**

Luiz Mariano Pereira

Agosto de 1995

Orientador: Prof. Renato Machado Cotta

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho, a solução das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para escoamento laminar incompressível em regime permanente é obtida utilizando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). As características hidrodinâmicas do escoamento na região de entrada de dois tubos concêntricos são determinadas para ilustrar a utilização e validar a técnica.

Para facilitar a aplicação da GITT, as equações de Navier-Stokes são formuladas em termos da função corrente apenas, eliminando-se o gradiente de pressão que é a priori desconhecido e atua como um termo fonte nas equações de *Momentum*.

Resultados para os campos de velocidade são apresentados para diversas razões de aspecto, dadas pela relação entre o raio do tubo interno e o raio do tubo externo, e para vários números de Reynolds. Em seguida, são feitas comparações com resultados obtidos a partir da solução das equações de Camada Limite, que constituem uma simplificação das equações de Navier-Stokes, estabelecendo-se limites de aplicabilidade desta formulação simplificada.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UF RJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

**INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE NAVIER-STOKES
EQUATIONS IN CYLINDRICAL COORDINATES:
HYDRODYNAMIC DEVELOPMENT IN ANNULAR DUCTS**

Luiz Mariano Pereira

August, 1995

Thesis Supervisor: Prof. Renato Machado Cotta

Department : Mechanical Engineering

In this work, the solution of the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates for laminar incompressible steady-state flow is obtained by employing the Generalized Integral Transform Technique (GITT). The hydrodynamic features of the flow in the entry region of two concentric tubes are determined to illustrate and validate the technique.

In order to facilitate the application of the GITT, the Navier-Stokes equations are handled in the stream function-only formulation, eliminating the pressure term that is a priori unknown and acts as a source term in the *Momentum* equations.

Results for the velocity fields are presented for various aspect ratios, that is, the relation between the internal and the external tube radius, and for various Reynolds numbers. Then, comparisons are made with results obtained from solution of the Boundary Layer equations, which are a simplification of the Navier-Stokes equations, and applicability limits for this simplified formulation are established.

“Quando alguém encontrar seu caminho, não pode ter medo. Precisa ter coragem suficiente para dar passos errados. As decepções, as derrotas, o desânimo são ferramentas que Deus utiliza para mostrar a estrada.”

(Paulo Coelho)

Aos meus Pais, Mariano e Espedita.

A todos os meus irmãos.

À minha companheira de todos os momentos, Lucília.

Agradecimentos

Ao CNPq, pelo suporte financeiro dispensado.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) e ao Núcleo de Atendimento de Computação em Alto Desempenho (NACAD/UFRJ) pela utilização de seus recursos computacionais.

Ao Prof. Renato Machado Cotta, pela confiança em mim depositada, apoio e orientação.

Aos funcionários do programa de Engenharia Mecânica e do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC), pela colaboração dispensada.

À minha irmã, Maria Auxiliadora, que sempre me apoiou e não se absteve, em nenhum momento, de me estender sua mão fraterna.

À minha companheira, Lucília, pela paciência e apoio nos momentos mais críticos dessa jornada.

Aos meus Pais, que mesmo à distância, torcem pelo meu sucesso.

A todos os meus amigos que, de uma forma ou de outra, me auxiliaram em todo o desenrolar deste projeto.

À Deus, de uma forma muito especial, por ter me concedido o dom da sabedoria, sem a qual nada disso seria possível.

Nomenclatura

A_{ijk}	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.a)
$A_{ij\infty}$	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.d)
A_{ij}	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.f)
B_{ijk}	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.b)
$B_{ij\infty}$	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.e)
B_{ij}	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.g)
C_{ijk}	Coeficiente Integral, definido pela equação (4.12.b)
D_h	Diâmetro Hidráulico [L], equação (3.2.g)
E	Operador definido pela equação (3.7.b)
F	Matriz de coeficientes no problema de autovalor, equação (4.5.b)
I_λ	Função de Bessel Modificada de primeiro tipo e de ordem λ
J_λ	Função de Bessel de primeiro tipo e de ordem λ
K_λ	Função de Bessel Modificada de segundo tipo e de ordem λ
N_i	Norma da autofunção definida pela equação (4.7)
NT	Número de termos na expansão em autofunções, equação (4.13)
P	Pressão [$M L^{-1} T^{-2}$]
p	Pressão (adimensional)
R	Coordenada radial [L]
R_1	Raio do tubo interno [L]
R_2	Raio do tubo externo [L]
Re	Número de Reynolds, equação (3.2.f)
r	Coordenada radial (adimensional)
r^*	Razão de aspecto, equação (3.4.a)
r_m	Posição radial de velocidade axial máxima, equação (3.4.c)
U	Componente axial da velocidade [$L T^{-1}$]
U_o	Velocidade axial na entrada do duto [$L T^{-1}$]

U_{∞}	Perfil de velocidade no escoamento completamente desenvolvido [L T ⁻¹]
u	Componente axial da velocidade (adimensional)
u_{∞}	Perfil de velocidade no escoamento completamente desenvolvido (adimensional)
V	Componente radial da velocidade [L T ⁻¹]
v	Componente radial da velocidade (adimensional)
X	Coordenada axial [L]
X^+	Coordenada axial (adimensional), equação (5.1.a)
X^{++}	Coordenada axial (adimensional), equação (5.1.b)
x	Coordenada axial (adimensional)
Y_{λ}	Função de Bessel de segundo tipo e de ordem λ
Y	Vetor dos potenciais transformados, equação (4.15)

Letras Gregas:

μ_i	Autovalor do problema auxiliar, equação (4.4.a)
ϕ	Função auxiliar utilizada no filtro, equação (4.1)
β	Coefficiente definido pela equação (3.4.d)
ρ	Densidade do fluido [M L ⁻³]
ν	Viscosidade cinemática do fluido [L ² T ⁻¹]
ψ	Função corrente (adimensional)
ψ_{∞}	Função corrente no escoamento completamente desenvolvido (adimensional)
Γ	Coefficiente integral da condição de contorno, equação (4.12.m)
Ω	Autofunção, equação (4.5.a)
η	Parâmetro de contração de escala, equação (4.17.a)
χ	Variável auxiliar, equação (4.17.a)
ξ	Critério de convergência, equação (4.19)

Subscritos:

i,j,k	índices relativos à ordem dos autovalores
1	referente ao tubo interno
2	referente ao tubo externo
o	valor médio
m	valor máximo
∞	escoamento completamente desenvolvido
λ	ordem das funções de Bessel

Índice de Tabelas

Tabela 5.1 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 0$	34
Tabela 5.2 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 0$	35
Tabela 5.3 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 0$	36
Tabela 5.4 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.9$ e $Re = 0$	36
Tabela 5.5 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	39
Tabela 5.6 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	40
Tabela 5.7 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	41
Tabela 5.8 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	42
Tabela 5.9 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	43
Tabela 5.10 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	44
Tabela 5.11 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	45

Tabela 5.12 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	46
Tabela 5.13 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	47
Tabela 5.14 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	48
Tabela 5.15 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	49
Tabela 5.16 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]	50

Índice de Figuras

Figura 3.1 - Geometria do problema e sistema de coordenadas	11
Figura 5.1 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x=0.54$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$	52
Figura 5.2 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 1.8$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$	53
Figura 5.3 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 3.6$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$	53
Figura 5.4 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 0.3$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$	54
Figura 5.5 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 1.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$	54
Figura 5.6 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 2.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$	55
Figura 5.7 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x=0.54$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$	55
Figura 5.8 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 1.8$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$	56
Figura 5.9 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 3.6$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$	56
Figura 5.10 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 0.3$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$	57
Figura 5.11 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 1.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$	57
Figura 5.12 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 2.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$	58
Figura 5.13 - Desenvolvimento da componente radial da velocidade $v(x,r)$ para $r^* = 0.1$. Comparação com os resultados da formulação em Camada Limite [58].	58

Figura 5.14 - Desenvolvimento da componente radial da velocidade $v(x,r)$ para $r^* = 0.9$. Comparação com os resultados da formulação em Camada Limite [58].	59
Figura 5.15 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.	59
Figura 5.16 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.	60
Figura 5.17 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.	60
Figura 5.18 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.	61

Índice

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	01
1.1 - A Técnica da Transformada Integral Generalizada	04
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	07
CAPÍTULO 3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	11
3.1 - Formulação do Problema em Variáveis Primitivas	12
3.2 - Adimensionalização do Problema	13
3.3 - Formulação em Função Corrente	16
CAPÍTULO 4 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	18
4.1 - Homogeneização das Condições de Contorno	18
4.2 - Escolha do Problema Auxiliar	20
4.3 - Determinação do Par Transformada-Inversa	23
4.4 - Construção do Sistema Diferencial Ordinário	24
4.5 - Solução do Sistema Diferencial Ordinário	26
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	32
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Até a década de 60, os métodos analíticos e experimentais eram largamente empregados na análise e projeto de equipamentos termo-hidráulicos. Desde então, as técnicas de aproximação numérica vêm ganhando espaço sobre a experimentação pura e os métodos analíticos clássicos. Embora os métodos experimentais continuem sendo imprescindíveis, principalmente em situações envolvendo escoamentos complexos, a tendência natural é de cada vez mais se empregar aproximações numéricas na previsão das variáveis de projeto.

Assim, na prática da engenharia moderna, existe uma necessidade crescente de se obter soluções mais acuradas para problemas cada vez mais complexos, no menor intervalo de tempo possível. Nas últimas três décadas, com o desenvolvimento de computadores digitais com velocidades de processamento cada vez maiores, foi dado um grande impulso na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor.

O estudo das características hidrodinâmicas do escoamento de um fluido no interior de dutos tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, devido à sua grande importância prática na engenharia. O conhecimento de parâmetros físicos, como fator de atrito e coeficiente de transferência de calor, é fundamental para o desenvolvimento, otimização e construção de modelos de equipamentos utilizados em diversas áreas.

A modelagem matemática destes escoamentos envolve equações bastante complexas e de difícil solução. As equações de Navier-Stokes constituem-se no modelo mais completo para o escoamento de um fluido e, por sua vez, formam a base de toda a ciência da mecânica dos fluidos.

Para dutos circulares e placas paralelas, o estudo do comportamento hidrodinâmico já foi abordado de maneira exaustiva por muitos estudiosos. Os dutos anulares concêntricos estão presentes em muitos modelos de equipamentos industriais, como por exemplo em trocadores de calor bitubulares, onde um fluido escoava pelo tubo interno e outro flui através da região anular entre os dois tubos, bem como no resfriamento de reatores nucleares. Seu comportamento foi estudado, na maioria das vezes, utilizando-se as equações de Camada Limite [1], as quais formam um conjunto convectivo-difusivo de equações, originadas da simplificação das equações de Navier-Stokes em sua forma completa. Naquelas equações, os termos de difusão axial de *momentum* e o gradiente de pressão na direção normal ao escoamento principal, presentes nas equações de Navier-Stokes, são desprezados. Em consequência disto, as equações de Camada Limite só apresentam resultados consistentes para escoamentos com altos números de Reynolds e para posições não muito próximas à entrada do duto.

Para as situações mais gerais, as características reais do escoamento só são modeladas matematicamente, de forma adequada, pelas equações de Navier-Stokes completas. Porém, a obtenção da solução exata destas equações é impossível, utilizando-se as técnicas convencionais de cálculo existentes, tendo em vista a natureza não-linear dos termos convectivos.

Após os anos 60, aliado ao avanço dos computadores eletrônicos, surgiram novos métodos de solução de natureza puramente numérica, para os problemas convectivo-difusivos mais comuns encontrados na engenharia, tendo conseguido simular problemas físicos de maior complexidade com razoável precisão, como os métodos mais usuais de Diferenças Finitas e Elementos Finitos.

No entanto, os métodos analíticos continuam sendo os que apresentam soluções mais rápidas e precisas, se comparados com os métodos numéricos, para aqueles problemas passíveis de tratamento analítico. Além disso, muitas vezes não se consegue um controle eficaz do erro, na solução obtida através dos métodos puramente numéricos. Por isso, muitas vezes a solução analítica de versões simplificadas do problema é imprescindível para validar o resultado numérico do problema completo.

Em muitas situações, a solução exata de problemas difusivos lineares é prontamente determinada pela técnica da transformação integral clássica [2]. A idéia básica nesta técnica consiste em se transformar o conjunto de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, desacoplado, passível de solução analítica. Entretanto, esta técnica se limita a problemas cuja transformação resulta em um sistema desacoplado e/ou que apresentem problemas auxiliares onde a solução seja obtível analiticamente.

Motivado pelos aspectos acima citados, surgiu uma nova técnica de solução baseada nas idéias da transformação integral clássica, a chamada Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT). Sua concepção híbrida analítico-numérica permite seu emprego em problemas convectivo-difusivos, a priori não transformáveis, ou seja, problemas em que a transformação das equações diferenciais parciais resulta em um sistema diferencial ordinário infinito e acoplado, ou cujo problema auxiliar é de difícil tratamento. Seu sucesso até aqui, no tratamento das equações de Camada Limite e Navier-Stokes, motiva a busca de novos desafios.

Assim, o presente trabalho visa estender a aplicação da Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT) para a solução das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, utilizando, como exemplo prático, o problema do escoamento laminar incompressível de um fluido Newtoniano, na região de entrada hidrodinâmica de dois tubos concêntricos. Os perfis de velocidade axial e transversal são calculados para diversas razões de aspecto e para diferentes números de Reynolds. Em seguida, são feitas comparações dos resultados obtidos a partir da solução das equações de Navier-Stokes com outros resultados existentes na literatura, obtidos utilizando-se as equações de Camada Limite na modelagem deste escoamento.

1.1 — A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Os problemas lineares de difusão de calor e massa são, em algumas classes, prontamente resolvidos a partir do método clássico de transformação integral. Sua idéia básica consiste em transformar as equações originais em um sistema infinito e desacoplado de equações diferenciais ordinárias, cuja solução possa ser facilmente determinada.

Soluções gerais para sete classes distintas de problemas difusivos foram obtidas por MIKHAILOV e ÖZISIK [2], através da utilização da técnica de transformação integral clássica. No entanto, essa técnica se limita a certas classes de problemas lineares de difusão transformáveis, ou seja, problemas cuja transformação resulta em um sistema desacoplado, e/ou nos casos em que o problema auxiliar escolhido apresenta solução analítica.

Para superar essas restrições foi desenvolvida a Técnica de Transformação Integral Generalizada, mais conhecida pelas iniciais da sua denominação em Inglês, GITT, tendo sido estendida a diferentes classes de problemas, com bastante êxito. No trabalho de COTTA [4] são relacionadas diversas aplicações da GITT, e sua comparação com outros métodos de solução para vários tipos de problemas encontrados em mecânica dos fluidos e transferência de calor e massa.

A GITT apresenta como principais vantagens, manter um controle automático sobre o erro relativo global dos resultados e de ser facilmente implementada computacionalmente. Uma outra grande vantagem da técnica é a sua aplicação a problemas multidimensionais, sem um aumento considerável do custo computacional, com relação a problemas que envolvem uma única variável espacial. Este comportamento ocorre devido à característica híbrida da técnica, em que uma solução analítica é determinada para todas as variáveis independentes envolvidas, a menos de uma, na qual a solução é obtida numericamente, a partir da solução do sistema diferencial ordinário, resultante da transformação integral.

Em seu trabalho, COTTA [4] agrupa os problemas resolvidos pela GITT nas seguintes categorias:

— **Problemas com coeficientes variáveis na equação** [5-9]. Tais problemas surgem, por exemplo, na análise transiente de aletas com dissipação dependente do tempo, bem como no escoamento com desenvolvimento simultâneo de velocidade e temperatura, no interior de dutos.

— **Problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno** [10-13]. Nesta categoria incluem-se a condução de calor com número de Biot dependente do tempo, e convecção forçada no interior de dutos externamente aletados.

— **Problemas com fronteiras móveis** [14-18]. Nos casos em que a condição de contorno varia com o tempo, ou quando os domínios definidos são irregulares, com relação ao sistema de coordenadas adotado. Como exemplo de problemas de contornos móveis tem-se a mudança de fase e problemas de oxidação; os casos de domínio irregular estão presentes no escoamento de um fluido com transferência de calor no interior de dutos de forma irregular.

— **Problemas que envolvem problemas auxiliares complicados** [19-28] do ponto de vista analítico e/ou computacional. Os seguintes casos são mais comumente encontrados na literatura: problema de Sturm-Liouville com uma variável de Transformada de Laplace; problema de Sturm-Liouville com variáveis complexas; sistemas de Sturm-Liouville não separáveis e problemas de autovalor não clássicos. Estes problemas se aplicam, por exemplo, na convecção forçada interna, periódica e transiente; transferência de calor no escoamento em canais, considerando-se a condução axial; transferência de calor por convecção no interior de dutos regulares; problemas conjugados de transferência de calor; análise de trocadores de calor bitubulares e secagem de meios porosos capilares.

— **Problemas não-lineares** [29-49]. Nesta categoria estão incluídos grande parte dos problemas práticos encontrados na engenharia.

De acordo com COTTA [3], os problemas não-lineares frequentemente encontrados em mecânica dos fluidos e transferência de calor, que já foram solucionados com o emprego da GITT, subdividem-se nas seguintes classes:

- problemas de difusão;
- problemas de convecção-difusão;
- problemas de autovalor;
- problemas modelados pelas equações de Camada Limite;
- problemas modelados pelas equações de Navier-Stokes;

Os passos básicos para aplicação da GITT na solução de um problema, independentemente da classe a que pertencem, são os seguintes [3,4]:

- 1 - Escolha do problema auxiliar baseado na versão homogênea do problema original, de modo que se inclua o máximo de informações possíveis, no que diz respeito aos operadores presentes na formulação original;
- 2 - Desenvolvimento do par Transformada-Inversa, a partir do problema auxiliar selecionado e das suas características de ortogonalidade;
- 3 - Transformação Integral das equações diferenciais parciais, resultando em um sistema diferencial ordinário infinito e acoplado, de modo que se elimine todas as variáveis independentes, a menos de uma;
- 4 - Resolução numérica do sistema diferencial ordinário resultante, truncando-se sua ordem em uma quantidade de termos suficiente para se obter uma precisão preestabelecida nos campos transformados e, em consequência, no potencial original desejado.
- 5 - Cálculo dos potenciais originais a partir da aplicação da fórmula de inversão analítica.

O processo é completado ao se fazer uma análise da convergência dos potenciais, obtidos com ordens crescentes de truncamento da expansão em autofunções.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de escoamento hidrodinamicamente em desenvolvimento no interior de dutos anulares concêntricos já foi abordado por vários pesquisadores, devido à sua grande importância técnica na engenharia.

No entanto, mesmo para o caso laminar, o desenvolvimento do escoamento na região de entrada do duto anular, a partir da solução exata das equações que o descrevem (equações de Camada Limite ou equações de Navier-Stokes) não é possível de ser determinado. A dificuldade na análise se dá pela presença de termos não-lineares nas equações da quantidade de movimento.

A maioria dos trabalhos existentes na literatura relacionados a este tipo de problema, utiliza as equações de Camada Limite para descrever o escoamento e, a partir deste modelo simplificado, determinar suas características hidrodinâmicas.

Segundo SHAH e LONDON [50], os métodos de solução para esta classe de problemas podem ser relacionados em três grupos:

- 1 - Solução a partir das equações de *Momentum* linearizadas;
- 2 - Solução das equações de Camada Limite;
- 3 - Solução das equações de Navier-Stokes.

Um dos primeiros trabalhos referentes ao problema do escoamento na entrada hidrodinâmica de dutos anulares concêntricos foi realizado por MURAKAWA [51]. Nesse trabalho, é obtida uma solução analítica aproximada para o problema utilizando-se uma expansão em funções de Bessel. Entretanto, seus resultados satisfazem as condições de contorno apenas parcialmente.

Mais tarde, surgiram outros trabalhos cujas soluções apresentaram resultados mais confiáveis e precisos.

SUGINO [52] linearizou as equações de quantidade de movimento empregando o método integral de LANGHAAR [67] e apresentou uma solução aproximada, utilizando as funções de Bessel Modificadas, para os campos de velocidade. Duas razões de aspecto foram utilizadas nos cálculos. Nos seus resultados, concluiu ainda que, para uma mesma distância da entrada do duto e para o mesmo número de Reynolds, o comprimento de desenvolvimento hidrodinâmico e a queda de pressão são praticamente constantes, para diferentes valores de r^* .

HEATON et al. [53] empregou um método aproximado de solução por integração das equações de *Momentum*, linearizadas através de um método independente, semelhante ao método de LANGHAAR[67]. Nos exemplos de cálculo foram utilizadas cinco razões de aspecto diferentes.

CHANG e ATABEK [54] utilizaram a técnica de linearização de TARG [68] para as equações de *Momentum*. Assumiram velocidade uniforme na entrada do duto anular e desenvolveram expressões totalmente analíticas para a componente axial da velocidade e para o gradiente de pressão na região de entrada hidrodinâmica.

SPARROW e LIN [55] linearizaram as equações de *Momentum* através da criação de uma coordenada auxiliar expandida, na direção do escoamento. Eles apresentam a solução para o perfil de velocidade em termos de expansões em autofunções. No seu trabalho, é apresentada ainda uma tabela com os trinta primeiros autovalores dessas expansões para sete diferentes razões de aspecto r^* . Perfis da componente axial da velocidade são apresentados graficamente para esses mesmos valores de r^* . Os resultados indicam que o método de linearização por coordenada expandida fornece resultados razoáveis para o problema de entrada hidrodinâmica.

MANOHAR [56] resolveu as equações de Camada Limite utilizando o método de Diferenças Finitas para as razões de aspecto $r^* = 0.1, 0.3, 0.5$ e 0.7 . A não-linearidade presente nos termos convectivos da equação de *Momentum* foi resolvida iterativamente. Perfis de velocidade axial para diversos valores de r^* são mostrados graficamente.

SHAH e FARNIA [57] resolveram as equações de Camada Limite, empregando o método de Diferenças Finitas de PATANKAR e SPALDING [69]. Cálculos para o fator de atrito e velocidade axial máxima foram efetuados para $r^* = 0.05, 0.10, 0.50$ e 0.75 . Estes resultados são considerados de boa precisão dentre os obtidos por métodos puramente numéricos.

CONEY e EL-SHAARAWI [58] empregaram o método de Diferenças Finitas implícito de BODOIA e OSTERLE [70], na formulação de Camada Limite. Seus cálculos foram feitos para quinze diferentes valores de r^* e os perfis das componentes radial e axial da velocidade são apresentados graficamente, e serão utilizados para comparação com os resultados de Navier-Stokes, obtidos pelo presente trabalho. Seus resultados para a componente axial da velocidade em desenvolvimento apresentam-se em boa concordância com os de SPARROW e LIN [5].

KAKAÇ e YÜCEL [59] resolveram o problema do escoamento laminar em desenvolvimento em dutos concêntricos, através do modelo de Camada Limite. Os resultados da componente axial da velocidade para as razões de aspecto $r^* = 0.1, 0.25$ e 0.5 são apresentados em tabela, apresentando-se em excelente concordância com os resultados citados em [50]. Portanto, esses resultados servirão também como base de comparação com os do presente trabalho.

Uma das primeiras tentativas de utilização das equações de Navier-Stokes, para modelar o problema de escoamento em dutos anulares concêntricos, foi feita por FULLER e SAMUELS [38]. Nesse trabalho, as equações de Navier-Stokes são empregadas de forma parcialmente parabolizada. Para evitar a dificuldade com a descontinuidade na entrada do duto as condições de contorno foram adotadas em $x = \pm \infty$, e ainda foram desprezados os termos de difusão axial das equações de *Momentum*. Para

obter a solução do problema, utilizaram o método de Diferenças Finitas para solucionar o sistema de equações diferenciais parciais resultante. Os resultados para os perfis da componente axial velocidade são mostrados em diversas posições ao longo do duto e para vários números de Reynolds, com $r^* = 0.5$.

Na pesquisa bibliográfica realizada, com respeito à solução do problema de escoamento em dutos concêntricos, não foi detectado nenhum trabalho que envolvesse as equações de Navier-Stokes em sua forma completa, para modelar o problema em estudo. Ficamos, portanto restringidos a fazer uma comparação crítica dos resultados deste trabalho apenas com aqueles, obtidos a partir da solução das equações de Camada Limite, já citados acima.

CAPÍTULO 3

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o escoamento de um fluido Newtoniano na região entre dois tubos concêntricos, de comprimento semi-infinito, com condições de entrada e saída conhecidas, conforme mostra a figura 3.1. O nosso propósito é determinar as características hidrodinâmicas desse escoamento imediatamente após a entrada da região anular, ou seja, na região hidrodinamicamente em desenvolvimento.

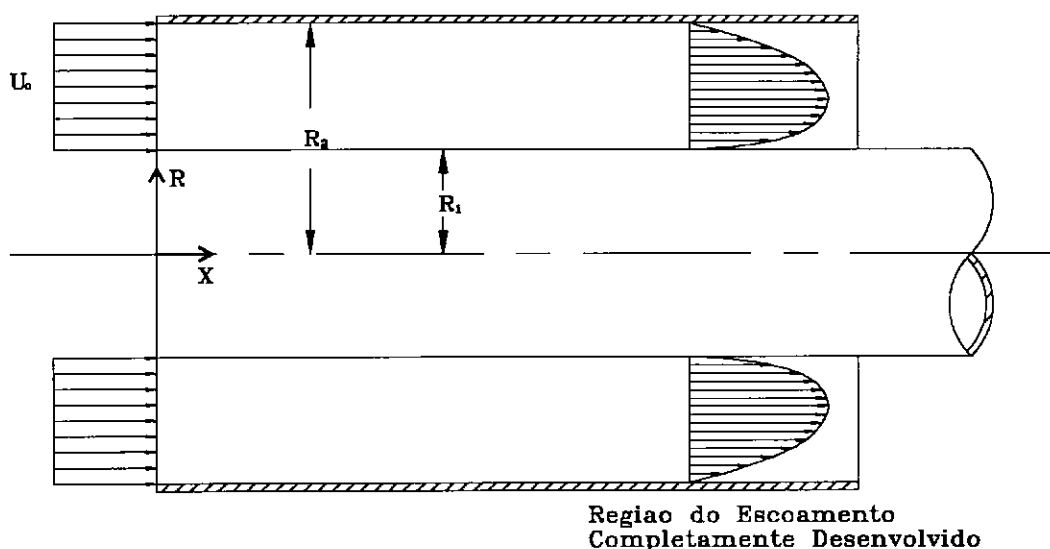


Figura 3.1 - Geometria do problema e sistema de coordenadas

Para simplificar o problema, sem perder generalidade nos objetivos perseguidos, consideraremos as seguintes hipóteses:

- escoamento bidimensional, laminar e permanente;
- simetria axial;
- escoamento incompressível;
- duto de paredes impermeáveis e fixas;
- propriedades físicas do fluido constantes.

3.1 — FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM VARIÁVEIS PRIMITIVAS

O escoamento na região anular de dois tubos concêntricos é governado pelas equações de Navier-Stokes e da continuidade em coordenadas cilíndricas, que em variáveis primitivas, na forma dimensional, são dadas por:

Equação de *Momentum* na direção R:

$$V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial X} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \nu \left(\nabla^2 V - \frac{V}{R^2} \right), \quad \begin{cases} R_1 < R < R_2 \\ 0 < X < \infty \end{cases} \quad (3.1.a)$$

Equação de *Momentum* na direção X:

$$V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \nabla^2 U, \quad \begin{cases} R_1 < R < R_2 \\ 0 < X < \infty \end{cases} \quad (3.1.b)$$

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \begin{cases} R_1 < R < R_2 \\ 0 < X < \infty \end{cases} \quad (3.1.c)$$

onde,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \quad (3.1.d)$$

As condições de contorno são especificadas de acordo com as hipóteses simplificadoras acima.

Para a parede do tubo interno:

$$U(X, R_1) = 0; \quad V(X, R_1) = 0 \quad 0 < X < \infty \quad (3.1.e,f)$$

Para a parede do tubo externo:

$$U(X, R_2) = 0; \quad V(X, R_2) = 0 \quad 0 < X < \infty \quad (3.1.g,h)$$

Na entrada do duto:

$$U(0, R) = U_0; \quad V(0, R) = 0 \quad R_1 \leq R \leq R_2 \quad (3.1.i,j)$$

E na saída da região anular, teremos:

$$U(\infty, R) = U_\infty(R); \quad V(\infty, R) = 0 \quad R_1 \leq R \leq R_2 \quad (3.1.l,m)$$

3.2 — ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

A adimensionalização do conjunto de equações (3.1) é feita, a partir da utilização dos seguintes grupos adimensionais:

$$u = \frac{U}{U_0} \quad ; \quad v = \frac{V}{U_0} \quad (3.2.a,b)$$

$$r = \frac{R}{R_2} \quad ; \quad x = \frac{X}{R_2} \quad (3.2.c,d)$$

$$p = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad ; \quad Re = \frac{U_0 D_h}{\nu} \quad (3.2.e,f)$$

onde,

$$D_h = 2(R_2 - R_1) \quad (3.2.g)$$

Substituindo os grupos adimensionais (3.2.a-f) nas equações (3.1) teremos sua forma adimensional como se segue:

Equação de *Momentum* na direção r:

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2(1-r^*)}{\text{Re}} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \quad \begin{cases} r^* < r < \\ 0 < x < \infty \end{cases} \quad (3.3.a)$$

Equação de *Momentum* na direção x:

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2(1-r^*)}{\text{Re}} (\nabla^2 u) \quad \begin{cases} r^* < r < \\ 0 < x < \infty \end{cases} \quad (3.3.b)$$

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \begin{cases} r^* < r < \\ 0 < x < \infty \end{cases} \quad (3.3.c)$$

De modo idêntico, as condições de contorno são adimensionalizadas:

Na parede do tubo interno:

$$u(x, r^*) = 0 \quad ; \quad v(x, r^*) = 0 \quad 0 < x < \infty \quad (3.3.d,e)$$

Na parede do tubo externo:

$$u(x,1) = 0 \quad ; \quad v(x,1) = 0 \quad 0 < x < \infty \quad (3.3.f,g)$$

Na entrada do duto:

$$u(0,r) = 1 \quad ; \quad v(0,r) = 0 \quad r^* \leq r \leq 1 \quad (3.3.h,i)$$

E na saída da região anular:

$$u(\infty,r) = u_\infty(r); \quad v(\infty,r) = 0 \quad r^* \leq r \leq 1 \quad (3.3.j,l)$$

onde,

$$r^* = \frac{R_1}{R_2} \quad ; \quad u_\infty(r) = \frac{2}{\beta} [1 - r^2 + 2r_m^2 \ln(r)] \quad (3.4.a,b)$$

$$r_m = \left\{ \frac{(1 - r^{*2})}{2 \ln(1/r^*)} \right\}^{1/2} \quad ; \quad \beta = 1 + r^{*2} - 2r_m^2 \quad (3.4.c,d)$$

e r^* é a razão de aspecto entre os dois tubos concêntricos, $u_\infty(r)$ é a velocidade na região completamente desenvolvida do escoamento e r_m é a posição radial onde a velocidade $u_\infty(r)$ é máxima, ou seja, $\left[\frac{du_\infty(r)}{dr} = 0 \right]$.

3.3 — FORMULAÇÃO EM FUNÇÃO CORRENTE

A função corrente é definida em termos das componentes da velocidade como:

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.5.a,b)$$

Com isto a equação da Continuidade dada pela equação (3.3.c) é satisfeita automaticamente.

Portanto, derivando-se a equação (3.3.a) com relação a “x” e a equação (3.3.b) com relação a “r”, em seguida, subtraindo-se uma da outra, ou seja:

$$\frac{\partial(3.3.a)}{\partial x} - \frac{\partial(3.3.b)}{\partial r} \quad (3.6)$$

e aplicando-se as definições (3.5.a,b), teremos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial r} (E^2 \psi) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (E^2 \psi) \right] - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} E^2 \psi = \frac{2(1-r^*)}{Re} (E^4 \psi) \quad (3.7.a)$$

onde,

$$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial^2 r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.7.b)$$

$$E^4 \psi \equiv E^2 (E^2 \psi) \quad (3.7.c)$$

Na nova formulação, a equação (3.7.a) apresenta um operador de quarta ordem, o que aparentemente torna ainda mais difícil a sua solução. No entanto, o gradiente de pressão que atua como um termo fonte nas equações de *Momentum* foi eliminado.

As condições de contorno do problema, após a utilização da definição de função corrente, tomam a forma a seguir:

$$\psi(x, r^*) = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial \psi(x, r^*)}{\partial r} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad (3.7.d,e)$$

$$\psi(x, 1) = C_2 \quad ; \quad \frac{\partial \psi(x, 1)}{\partial r} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad (3.7.f,g)$$

$$\psi(0, r) = C_1 - \int_{r^*}^r \epsilon d\epsilon \quad ; \quad \frac{\partial \psi(0, r)}{\partial x} = 0 \quad r^* \leq r \leq \quad (3.7.h,i)$$

$$\psi(\infty, r) = C_1 - \int_{r^*}^r \epsilon u_\infty(\epsilon) d\epsilon \quad ; \quad \frac{\partial \psi(\infty, r)}{\partial x} = 0 \quad r^* \leq r \leq \quad (3.7.j,l)$$

onde C_1 e C_2 são constantes que determinam o valor da função corrente na parede dos tubos interno e externo, respectivamente.

Uma relação entre essas duas constantes pode ser estabelecida a partir das equações (3.7.f) e (3.7.h) ou (3.7.j):

$$C_2 = \left[C_1 - \int_{r^*}^r \epsilon d\epsilon \right]_{r=1} \quad (3.8)$$

CAPÍTULO 4

MÉTODO DE SOLUÇÃO

As equações (3.7) resultam em um sistema diferencial parcial de quarta ordem, o qual não é passível de solução analítica por meio dos métodos clássicos existentes. Deste modo, utilizaremos a técnica híbrida numérico-analítica de Transformação Integral Generalizada para determinar a solução desse sistema.

4.1 — HOMOGENEIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A escolha do problema de autovalor que servirá como base para a expansão em autofunções do campo de função corrente, será feita após efetuarmos a homogeneização das condições de contorno da equação original (3.7.a), na direção “r”, escolhida para ser eliminada na transformação integral. Para isto, podemos dividir o campo de função corrente em duas parcelas, ou seja:

$$\psi(x, r) = \psi_{\infty}(r) + \phi(x, r) \quad (4.1)$$

onde , $\psi_{\infty}(r)$ representa a função corrente na região do escoamento completamente desenvolvido e $\phi(x, r)$ é uma função auxiliar que compõe o valor da função corrente na região do escoamento em desenvolvimento, a ser determinada.

Substituindo a equação (4.1) na equação (3.7.a) temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_\infty + \phi)}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [E^2(\psi_\infty + \phi)] \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_\infty + \phi)}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [E^2(\psi_\infty + \phi)] \right\} -$$

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial(\psi_\infty + \phi)}{\partial x} E^2(\psi_\infty + \phi) = \frac{2(1-r^*)}{\text{Re}} [E^4(\psi_\infty + \phi)]$$

(4.2)

Após efetuarmos as diferenciações e agruparmos os termos semelhantes, teremos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^2 \partial x} +$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d^3 \psi_\infty}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d^2 \psi_\infty}{dr^2} +$$

$$\frac{3}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d\psi_\infty}{dr} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^2 \partial x} \frac{d\psi_\infty}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial x} \frac{d\psi_\infty}{dr} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{d\psi_\infty}{dr} = \frac{2(1-r^*)}{\text{Re}} [E^4 \phi]$$

(4.3.a)

Procedendo de modo semelhante com as condições de contorno (3.7.d-l), obtem-se:

$$\phi(x, r^*) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi(x, r^*)}{\partial r} = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (4.3.b,c)$$

$$\phi(x, 1) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi(x, 1)}{\partial r} = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (4.3.d,e)$$

$$\phi(0, r) = \int_{r^*}^r \varepsilon [u_\infty(\varepsilon) - 1] d\varepsilon; \quad \frac{\partial \phi(0, r)}{\partial x} = 0, \quad r^* \leq r \leq \quad (4.3.f,g)$$

$$\phi(\infty, r) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi(\infty, r)}{\partial x} = 0 \quad r^* \leq r \leq \quad (4.3.h,i)$$

Portanto, a solução do problema se resume em determinar os campos auxiliares $\phi(x, r)$ e, em seguida, recuperar o campo original através da equação (4.1), uma vez que a parcela $\psi_\infty(r)$ é prontamente obtida analiticamente, a partir da manipulação das equações (3.4) e (3.5.a).

4.2 — ESCOLHA DO PROBLEMA AUXILIAR

A partir de agora, iniciaremos a aplicação da Técnica de Transformação Integral Generalizada. O primeiro passo é a escolha do problema auxiliar adequado à solução do problema original. Este problema auxiliar deve conter informações do operador difusivo do problema original, bem como de suas condições de contorno.

Uma vez homogeneizadas as condições de contorno na direção “r”, o problema de autovalor será determinado para esta direção. Como o presente problema é descrito no sistema de coordenadas cilíndricas, utilizaremos o problema de autovalor proposto por CHANDRASEKHAR e REID [63], no contexto da estabilidade hidrodinâmica em tubos, ou seja:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} \right)^2 \Omega_i(r) = \mu_i^4 \Omega_i(r), \quad r^* < r < 1 \quad (4.4.a)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\Omega_i(r^*) = 0 \quad ; \quad \frac{d\Omega_i(r^*)}{dr} = 0 \quad (4.4.b,c)$$

$$\Omega_i(1) = 0 \quad ; \quad \frac{d\Omega_i(1)}{dr} = 0 \quad (4.4.d,e)$$

onde $\Omega_i(r)$ e μ_i representam as autofunções e os autovalores, respectivamente.

A solução geral para o problema (4.4) é do tipo:

$$\Omega_i(r) = A_{1i} J_\lambda(\mu_i r) + A_{2i} Y_\lambda(\mu_i r) + A_{3i} \frac{I_\lambda(\mu_i r)}{I_\lambda(\mu_i)} + A_{4i} \frac{K_\lambda(\mu_i r)}{K_\lambda(\mu_i r^*)} \quad (4.5.a)$$

onde, para melhor desempenho computacional os dois últimos termos são normalizados.

Após a aplicação da solução (4.5.a) nas condições de contorno (4.4.b-e), resulta em um sistema de equações algébricas simultâneas, cuja matriz de coeficientes é dada por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} J_\lambda(\mu_i r^*) & Y_\lambda(\mu_i r^*) & \frac{I_\lambda(\mu_i r^*)}{I_\lambda(\mu_i)} & 1.0 \\ J_\lambda(\mu_i) & Y_\lambda(\mu_i) & 1.0 & \frac{K_\lambda(\mu_i)}{K_\lambda(\mu_i r^*)} \\ J_{\lambda-1}(\mu_i r^*) & Y_{\lambda-1}(\mu_i r^*) & \frac{I_{\lambda-1}(\mu_i r^*)}{I_\lambda(\mu_i)} & -\frac{K_{\lambda-1}(\mu_i r^*)}{K_\lambda(\mu_i r^*)} \\ J_{\lambda-1}(\mu_i) & Y_{\lambda-1}(\mu_i) & \frac{I_{\lambda-1}(\mu_i)}{I_\lambda(\mu_i)} & -\frac{K_{\lambda-1}(\mu_i)}{K_\lambda(\mu_i r^*)} \end{bmatrix} \quad (4.5.b)$$

O cálculo dos autovalores é então efetuado a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^4 \mathbf{F}_{ij} A_j = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.5.c)$$

A solução não-trivial do sistema (4.5.c) requer que, $\det \mathbf{F} = 0$, ou seja:

$$\det \begin{vmatrix} J_{\lambda}(\mu_i r^*) & Y_{\lambda}(\mu_i r^*) & \frac{I_{\lambda}(\mu_i r^*)}{I_{\lambda}(\mu_i)} & 1.0 \\ J_{\lambda}(\mu_i) & Y_{\lambda}(\mu_i) & 1.0 & \frac{K_{\lambda}(\mu_i)}{K_{\lambda}(\mu_i r^*)} \\ J_{\lambda-1}(\mu_i r^*) & Y_{\lambda-1}(\mu_i r^*) & \frac{I_{\lambda-1}(\mu_i r^*)}{I_{\lambda}(\mu_i)} & -\frac{K_{\lambda-1}(\mu_i r^*)}{K_{\lambda}(\mu_i r^*)} \\ J_{\lambda-1}(\mu_i) & Y_{\lambda-1}(\mu_i) & \frac{I_{\lambda-1}(\mu_i)}{I_{\lambda}(\mu_i)} & -\frac{K_{\lambda-1}(\mu_i)}{K_{\lambda}(\mu_i r^*)} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5.d)$$

Portanto, os autovalores μ_i 's serão as raízes da equação transcendental (4.5.d).

As autofunções correspondentes tornam-se:

$$\Omega_i(r) = J_{\lambda}(\mu_i r) + A_{2i} Y_{\lambda}(\mu_i r) + A_{3i} \frac{I_{\lambda}(\mu_i r)}{I_{\lambda}(\mu_i)} + A_{4i} \frac{K_{\lambda}(\mu_i r)}{K_{\lambda}(\mu_i r^*)} \quad (4.5.e)$$

onde pode-se arbitrar o valor das constantes $A_{1i}=1.0$, por conveniência. As demais constantes, A_{2i} , A_{3i} e A_{4i} , serão determinadas a partir da solução do sistema algébrico resultante para cada autovalor μ_i .

As autofunções do problema (4.4) gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade [63]:

$$\int_r^{\Omega} r \Omega_i(\mu_i; r) \Omega_j(\mu_j; r) dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i, & i = j \end{cases} \quad (4.6)$$

E a integral de normalização é definida por:

$$N_i = \int_{r^*}^1 r [\Omega_i(\mu_i; r)]^2 dr \quad (4.7)$$

Ou, após os cálculos efetuados sobre as autofunções:

$$N_i = [J_\lambda(\mu_i) + A_{2i} Y_\lambda(\mu_i)]^2 - r^{*2} [J_\lambda(\mu_i r^*) + A_{2i} Y_\lambda(\mu_i r^*)]^2 \quad (4.8)$$

4.3 — DETERMINAÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Após a escolha do problema auxiliar adequado para a solução do sistema de equações diferenciais parciais, o próximo passo na aplicação da Técnica de Transformação Integral Generalizada é a determinação do par de fórmulas Transformada-Inversa. De acordo com o problema auxiliar e suas condições de contorno, obtem-se:

$$\bar{\Phi}_i(x) = \int_{r^*}^1 r \tilde{\Omega}_i(r) \phi(x, r) dr \quad (\text{Transformada}) \quad (4.9.a)$$

$$\phi(x, r) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(r) \bar{\Phi}_i(x) \quad (\text{Inversa}) \quad (4.9.b)$$

onde a autofunção normalizada é definida como:

$$\tilde{\Omega}_i(r) = \frac{\Omega_i(r)}{N_i^{1/2}} \quad (4.9.c)$$

4.4 — CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DIFERENCIAL ORDINÁRIO

Determinado o par Transformada-Inversa, utiliza-se essas definições na transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais resultante. Para isto, opera-se as equações (4.3) com o operador $\int_{r^*}^1 r \tilde{\Omega}_i(r) dr$, e utiliza-se a fórmula da Inversa, dada pela equação (4.9.b), resultando em :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{\Phi}_j \bar{\Phi}_k \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\tilde{\Omega}_k''' - \frac{3}{r} \tilde{\Omega}_k'' + \frac{3}{r^2} \tilde{\Omega}_k' \right) - \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_k' \left(\tilde{\Omega}_j'' - \frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr + \right. \\
 & \quad \left. \bar{\Phi}_j \bar{\Phi}_k'' \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\tilde{\Omega}_k' - \frac{2}{r} \tilde{\Omega}_k \right) \right] dr - \bar{\Phi}_j''' \bar{\Phi}_k \int_{r^*}^1 \left(\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k' \right) dr \right\} + \\
 & \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \bar{\Phi}_j' \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\psi_{\infty}''' - \frac{3}{r} \psi_{\infty}'' + \frac{3}{r^2} \psi_{\infty}' \right) - \tilde{\Omega}_i \psi_{\infty}' \left(\tilde{\Omega}_j'' - \frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr - \right. \\
 & \quad \left. \bar{\Phi}_j''' \int_{r^*}^1 \left(\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \psi_{\infty}' \right) dr \right\} = \frac{2(1-r^*)}{\text{Re}} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \bar{\Phi}_j \int_{r^*}^1 \left[r \tilde{\Omega}_i \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \tilde{\Omega}_j \right] dr + \right. \\
 & \quad 2\bar{\Phi}_j'' \int_{r^*}^1 \left(r \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j'' - \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j' \right) dr + 4\bar{\Phi}_j \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \left(\frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j'' - \tilde{\Omega}_j''' - \frac{1}{r^2} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr + \\
 & \quad \left. \bar{\Phi}_j^{IV} \int_{r^*}^1 \left(r \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \right) dr \right\} \\
 & \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Note-se que o operador difusivo do problema de autovalor aparece no integrando do primeiro termo, do lado direito da igualdade. Portanto, aplicando-se a propriedade de ortogonalidade, dada pela equação (4.6), e reordenando convenientemente, teremos:

$$\bar{\Phi}_i^{IV} = -\mu_i^4 \bar{\Phi}_i - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[4A_{ij} \bar{\Phi}_j + 2B_{ij} \bar{\Phi}_j'' \right] + \frac{\text{Re}}{2(1-r^*)} \left[\left(A_{ij\infty} \bar{\Phi}_j' - B_{ij\infty} \bar{\Phi}_j''' \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ijk} \bar{\Phi}_j' \bar{\Phi}_k + B_{ijk} \bar{\Phi}_j' \bar{\Phi}_k'' - C_{ijk} \bar{\Phi}_j''' \bar{\Phi}_k \right) \right] \right\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (4.11)$$

onde os termos não-transformáveis resultam em somatórios infinitos e acoplados, cujos coeficientes são definidos por:

$$A_{ijk} = \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\tilde{\Omega}_k''' - \frac{3}{r} \tilde{\Omega}_k'' + \frac{3}{r^2} \tilde{\Omega}_k' \right) - \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_k' \left(\tilde{\Omega}_j'' - \frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr \quad (4.12.a)$$

$$B_{ijk} = \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\tilde{\Omega}_k' - \frac{2}{r} \tilde{\Omega}_k \right) \right] dr \quad (4.12.b)$$

$$C_{ijk} = \int_{r^*}^1 \left(\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k' \right) dr \quad (4.12.c)$$

$$A_{ij\infty} = \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \left(\psi_\infty''' - \frac{3}{r} \psi_\infty'' + \frac{3}{r^2} \psi_\infty' \right) - \tilde{\Omega}_i \psi_\infty' \left(\tilde{\Omega}_j'' - \frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr \quad (4.12.d)$$

$$B_{ij\infty} = \int_{r^*}^1 \left(\tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \psi_\infty' \right) dr \quad (4.12.e)$$

$$A_{ij} = \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \left(\tilde{\Omega}_j''' - \frac{1}{r} \tilde{\Omega}_j'' + \frac{1}{r^2} \tilde{\Omega}_j' \right) \right] dr \quad (4.12.f)$$

$$B_{ij} = \int_{r^*}^1 \left[\tilde{\Omega}_i \left(\tilde{\Omega}_j' - r \tilde{\Omega}_j'' \right) \right] dr \quad (4.12.g)$$

Os coeficientes integrais dados pelas equações (4.12) são todos calculados numericamente, utilizando-se subrotinas do IMSL [64], baseadas em regras de quadratura, com esquema adaptativo da ordem de integração para controle automático do erro.

De modo semelhante, as condições de contorno são transformadas, resultando em:

$$\bar{\phi}_i(0) = \bar{\Gamma}_i \quad \frac{d\bar{\phi}_i(0)}{dx} = 0 \quad (4.12.h,i)$$

$$\bar{\phi}_i(\infty) = 0 \quad \frac{d\bar{\phi}_i(\infty)}{dx} = 0 \quad (4.12.j,l)$$

onde,

$$\bar{\Gamma}_i = \int_{r^*}^1 \tilde{\Omega}_i(r) \left\{ \int_{r^*}^r \varepsilon [u_\infty(\varepsilon) - 1] d\varepsilon \right\} dr \quad (4.12.m)$$

4.5 — SOLUÇÃO DO SISTEMA DIFERENCIAL ORDINÁRIO

Uma solução analítica para o sistema não-linear (4.12) é impossível de ser estabelecida, e para se obter resultados exatos seria necessário resolver um sistema infinito de equações, o que se torna inviável sob o aspecto computacional. Portanto, a solução para o sistema transformado será determinada a partir de procedimentos numéricos, em uma versão truncada do referido sistema.

Seguindo o que estabelece a Técnica de Transformação Integral Generalizada, o sistema de quarta ordem, infinito e acoplado de equações não-lineares (4.12), deve ser truncado em uma ordem finita NT, suficientemente grande para se obter a convergência

dos potenciais originais, dentro da precisão pré-estabelecida. A garantia de convergência das soluções, para ordens crescentes de truncamento nas séries, é uma característica importante que a técnica apresenta. Portanto, truncando-se o sistema (4.12) em uma ordem NT , temos:

$$\bar{\phi}_i^{IV} = -\mu_i^4 \bar{\phi}_i - \sum_{j=1}^{NT} \left\{ \left[4A_{ij} \bar{\phi}_j + 2B_{ij} \bar{\phi}_j'' \right] + \frac{\text{Re}}{2(1-r^*)} \left[\left(A_{ij\infty} \bar{\phi}_j' - B_{ij\infty} \bar{\phi}_j''' \right) + \sum_{k=1}^{NT} \left(A_{ijk} \bar{\phi}_j' \bar{\phi}_k + B_{ijk} \bar{\phi}_j' \bar{\phi}_k'' - C_{ijk} \bar{\phi}_j''' \bar{\phi}_k \right) \right] \right\},$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, NT) \quad (4.13)$$

A solução para este sistema é obtida numericamente, utilizando-se algoritmos disponíveis no pacote de subrotinas matemáticas IMSL [64], os quais já foram utilizados com êxito na solução de inúmeros problemas elípticos.

Os potenciais transformados do sistema (4.13) apresentam taxas de variação muito distintas entre si, o que torna o sistema bastante rígido (*Stiff*). A subrotina **DBVPFD** do IMSL [64] resolve sistemas diferenciais ordinários e não-lineares, com condições de contorno especificadas em dois pontos e que apresentam um alto grau de rigidez.

Para utilizar a **DBVPFD**, o sistema deve ser escrito na forma:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (4.14.a)$$

$$\mathbf{h}[\mathbf{Y}(\mathbf{a}), \mathbf{Y}(\mathbf{b})] = 0 \quad (4.14.b)$$

Esta subrotina utiliza um algoritmo baseado na rotina PASVA3 [65], o qual faz uma discretização sobre uma malha não-uniforme, escolhida adaptativamente, de modo

que o erro local seja praticamente o mesmo em qualquer posição e estimativas do erro global sejam geradas para controle do cálculo. O sistema algébrico não-linear resultante é resolvido utilizando o método de Newton com controle do passo. Finalmente, o sistema adaptativo linearizado é resolvido através de uma versão especial de eliminação de Gauss.

Portanto, para utilizar a **DBVPFD** na solução do nosso problema, o sistema de quarta ordem (4.12) deve ser reescrito na forma de um sistema de primeira ordem. Logo, definindo-se o vetor:

$$\mathbf{Y}' = \{\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_{NT}, \bar{\phi}'_1, \dots, \bar{\phi}'_{NT}, \bar{\phi}''_1, \dots, \bar{\phi}''_{NT}, \bar{\phi}'''_1, \dots, \bar{\phi}'''_{NT}\}^T \quad (4.15.a-d)$$

O sistema resultante tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dx} &= Y_{i+NT} \\ \frac{dY_{i+NT}}{dx} &= Y_{i+2NT} \\ \frac{dY_{i+2NT}}{dx} &= Y_{i+3NT} \\ \frac{dY_{i+3NT}}{dx} &= -\mu_i^4 Y_i + \sum_{j=1}^{NT} \left\{ 4A_{ij} Y_j + 2B_{ij} Y_{j+2NT} + \frac{\text{Re}}{2(1-r^*)} \left[A_{ij\infty} Y_{j+NT} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. B_{ij\infty} Y_{j+3NT} + \sum_{k=1}^{NT} \left(A_{ijk} Y_{j+NT} Y_k + B_{ijk} Y_{j+NT} Y_{k+2NT} - C_{ijk} Y_{j+3NT} Y_k \right) \right] \right\} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, NT) \quad (4.16.a-d) \end{aligned}$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$Y_i(0) = \bar{\Gamma}_i \qquad Y_{i+NT}(0) = 0 \qquad (4.16.e,f)$$

$$Y_i(\infty) = 0 \qquad Y_{i+NT}(\infty) = 0 \qquad (4.16.g,h)$$

Podemos observar que as condições de contorno (4.16.g,h) encontram-se especificadas no infinito. A forma usual utilizada nos procedimentos numéricos para se resolver um problema com essas condições de contorno é considerar posições arbitrárias, suficientemente distantes da entrada do duto. No entanto, não se pode garantir se tal posição reproduz as verdadeiras condições de saída estabelecidas na formulação original do problema. Por este motivo, é necessário resolver o problema várias vezes, para diversas posições, até que a convergência seja atingida nos pontos de interesse.

Uma maneira prática de se evitar esta dificuldade é fazer uma mudança de variável, tal que o domínio de $[0, \infty]$ seja mapeado em $[0, 1]$. Para isto, utilizamos uma mudança de variável independente, como no trabalho de WANG e LONGWELL [66], que em termos de “x” é dada por:

$$\chi = 1 - \frac{1}{1 + \eta x} \quad ; \quad \frac{d\chi}{dx} = \eta(1 - \chi)^2 \qquad (4.17.a,b)$$

onde η é um fator de compressão de escala. A principal vantagem de se utilizar essa mudança de variável é que fica garantida a condição de saída estabelecida na formulação original do problema e possibilita uma melhora significativa no desempenho computacional. A compressão de escala será tanto maior quanto menos significativas forem as variações dos potenciais transformados calculados.

Rescrevendo o sistema nesta nova variável, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{d\chi} &= \frac{Y_{i+NT}}{d\chi/dx} \\ \frac{dY_{i+NT}}{d\chi} &= \frac{Y_{i+2NT}}{d\chi/dx} \\ \frac{dY_{i+2NT}}{d\chi} &= \frac{Y_{i+3NT}}{d\chi/dx} \\ \frac{dY_{i+3NT}}{d\chi} &= \frac{1}{d\chi/dx} \left(-\mu_i^4 Y_i + \sum_{j=1}^{NT} \left\{ 4A_{ij} Y_j + 2B_{ij} Y_{j+2NT} + \frac{Re}{2(1-r^*)} \left[A_{ij\infty} Y_{j+NT} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. B_{ij\infty} Y_{j+3NT} + \sum_{k=1}^{NT} \left(A_{ijk} Y_{j+NT} Y_k + B_{ijk} Y_{j+NT} Y_{k+2NT} - C_{ijk} Y_{j+3NT} Y_k \right) \right] \right\} \right) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, NT) \end{aligned} \quad (4.18.a-d)$$

Com as condições de contorno especificadas no novo domínio:

$$Y_i(0) = \bar{\Gamma}_i \quad Y_{i+NT}(0) = 0 \quad (4.18.e,f)$$

$$Y_i(1) = 0 \quad Y_{i+NT}(1) = 0 \quad (4.18.g,h)$$

Portanto, o próximo passo agora é resolver o sistema (4.18) obtendo os campos transformados $\bar{\Phi}_i(x)$. Em seguida, utilizando a forma de inversão dada por (4.9.b), e a equação (4.1), os campos de função corrente $\psi(x, r)$ serão determinados.

Os perfis das componentes de velocidade axial $u(x, r)$ e transversal $v(x, r)$ são calculados a partir das equações (3.5.a) e (3.5.b).

O teste de convergência dos potenciais originais, calculados em cada posição desejada, é feito utilizando-se a seguinte expressão:

$$\xi = \max_{(x,r)} \left| \frac{\sum_{i=NT+1}^{NT+\Delta NT} \tilde{\Omega}_i(r) \bar{\Phi}_i(x)}{\Psi_\infty(r) + \sum_{i=1}^{NT+\Delta NT} \tilde{\Omega}_i(r) \bar{\Phi}_i(x)} \right| \quad (4.19)$$

onde a ordem de truncamento é acrescida de um ΔNT , até que a convergência da solução final, para todas as posições desejadas, seja atingida. Para diminuir o tempo computacional na solução numérica do sistema, para ordens de truncamento maiores, utiliza-se como aproximação inicial, os resultados obtidos a partir de ordens menores de truncamento, já disponíveis em um esquema de controle automático do erro global, gerando soluções a partir de um procedimento iterativo.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a construção do algoritmo computacional para a solução do problema em estudo, o próximo passo é implementá-lo em uma linguagem de programação para a obtenção dos resultados. A linguagem escolhida foi o FORTRAN 77, por ser mais comumente utilizada no meio científico e de mais fácil interpretação. Os equipamentos utilizados foram o microcomputador 486-DX2, para as ordens de truncamento menores (até $NT=13$), e para ordens de truncamento maiores utilizamos o Cray EL-94 do Núcleo de Atendimento de Computação em Alto Desempenho (NACAD) da COPPE/UFRJ, bem como o Cray Y-MP2E/232 do Centro de Supercomputação (CESUP) da UFRGS, conforme a disponibilidade.

As tarefas numéricas envolvidas foram basicamente:

- cálculo dos autovalores;
- cálculo das condições de contorno transformadas e dos coeficientes integrais, presentes no sistema diferencial ordinário;
- cálculo dos potenciais transformados, a partir da resolução do sistema diferencial ordinário com ordens crescente de truncamento, para posições escolhidas na direção da coordenada transformada.

Para cada uma dessas tarefas utilizamos uma subrotina da biblioteca do IMSL [64], conforme a sua aplicabilidade.

Os autovalores foram obtidos a partir da solução da equação (4.5.d), utilizando-se a subrotina DZBREN (dupla precisão), a qual determina os zeros de uma função real através de uma interpolação linear em combinação com uma interpolação inversa quadrática e uma bissecção, e sua convergência é superlinear. Um erro relativo de 10^{-12} foi adotado como critério de convergência final.

As condições de contorno e os coeficientes integrais do sistema diferencial ordinário foram calculados separadamente e uma única vez para cada razão de aspecto r^* , já que eles não dependem do campo transformado.

Como todos os integrandos dos coeficientes integrais apresentam comportamento oscilatório, a subrotina DQDAG (dupla precisão) foi utilizada para determiná-los, por apresentar um melhor desempenho computacional do que outras subrotinas de integração do IMSL. Esta subrotina utiliza um esquema adaptativo global, baseado nas regras de quadratura de Gauss-Kronrod. Um critério de erro relativo de 10^{-8} foi utilizado para todos os valores de r^* . Este cálculo é responsável pela maior parte do custo computacional envolvido nos cálculos numéricos efetuados para a solução do problema.

Finalmente, para a solução do sistema diferencial ordinário, utilizamos a subrotina DBVPFD (dupla precisão), por ser uma subrotina recomendada para sistemas com alto grau de rigidez (sistemas *Stiff*), e que usa o método de diferenças finitas de ordem e passo variáveis. Uma precisão prescrita relativa de 10^{-4} foi estabelecida em todos os casos de solução do sistema. Sendo assim, consideramos que a convergência foi atingida quando ocorre uma variação de apenas ± 1 no quarto dígito significativo do campo calculado

Inicialmente, apresentamos resultados para descrever o comportamento da convergência do campo de velocidade. As tabelas (5.1-5.4) mostram as características da convergência para a componente axial da velocidade, $u(x,r)$, para o caso em que o escoamento é descrito apenas pelos operadores difusivos da equação, isto é, $Re = 0$. Duas posições axiais diferentes foram escolhidas para os valores de $r^* = 0.1, 0.25, 0.5$ e 0.9 .

Tabela 5.1 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 0$.

NT	$x = 0.250$				
	$r = 0.20$	0.40	0.55	0.70	0.90
3	0.7035	1.328	1.234	1.244	0.7542
5	0.8438	1.238	1.288	1.234	0.7592
7	0.8482	1.244	1.285	1.242	0.7534
9	0.8427	1.244	1.285	1.244	0.7517
11	0.8412	1.247	1.288	1.246	0.7516
13	0.8411	1.247	1.287	1.245	0.7515
15	0.8410	1.247	1.288	1.246	0.7513
17	0.8406	1.247	1.288	1.246	0.7510
19	0.8401	1.247	1.288	1.246	0.7507
21	0.8396	1.247	1.288	1.246	0.7505
23	0.8392	1.247	1.288	1.246	0.7503
25	0.8389	1.247	1.288	1.246	0.7503
NT	$x = 0.500$				
3	0.8540	1.442	1.470	1.263	0.5532
5	0.8642	1.444	1.472	1.264	0.5490
7	0.8597	1.444	1.474	1.263	0.5484
9	0.8579	1.443	1.474	1.264	0.5485
11	0.8573	1.444	1.475	1.264	0.5485
13	0.8570	1.444	1.475	1.264	0.5486
15	0.8569	1.444	1.475	1.264	0.5486
17	0.8569	1.444	1.475	1.264	0.5486
19	0.8568	1.444	1.475	1.264	0.5485
21	0.8568	1.444	1.475	1.264	0.5485
23	0.8567	1.444	1.475	1.264	0.5485
25	0.8567	1.444	1.475	1.264	0.5485

Tabela 5.2 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 0$.

NT	x = 0.250				
	r = 0.30	0.50	0.625	0.70	0.90
3	0.4894	1.312	1.317	1.297	0.8008
5	0.5183	1.286	1.344	1.317	0.7951
7	0.5120	1.288	1.348	1.320	0.7920
9	0.5067	1.288	1.348	1.322	0.7920
11	0.5044	1.290	1.350	1.322	0.7919
13	0.5036	1.290	1.350	1.323	0.7916
15	0.5033	1.290	1.350	1.323	0.7912
17	0.5032	1.290	1.350	1.323	0.7909
19	0.5032	1.290	1.350	1.323	0.7909
NT	x = 0.500				
3	0.4887	1.420	1.492	1.394	0.6391
5	0.4847	1.422	1.493	1.395	0.6375
7	0.4830	1.422	1.494	1.396	0.6376
9	0.4825	1.422	1.494	1.396	0.6377
11	0.4824	1.422	1.494	1.396	0.6377
13	0.4823	1.422	1.494	1.396	0.6377
15	0.4823	1.422	1.494	1.396	0.6377

Tabela 5.3 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 0$.

NT	$x = 0.250$				
	$r = 0.55$	0.65	0.75	0.85	0.95
3	0.6147	1.288	1.447	1.233	0.5502
5	0.6080	1.290	1.451	1.237	0.5449
7	0.6053	1.290	1.454	1.236	0.5434
9	0.6047	1.290	1.454	1.236	0.5432
11	0.6046	1.290	1.455	1.236	0.5432
13	0.6046	1.290	1.455	1.236	0.5432
NT	$x = 0.500$				
3	0.6024	1.324	1.503	1.212	0.5005
5	0.6019	1.324	1.503	1.212	0.5004
7	0.6019	1.324	1.503	1.212	0.5004

Tabela 5.4 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.9$ e $Re = 0$.

NT	$x = 0.05$				
	$r = 0.91$	0.93	0.95	0.97	0.99
3	0.5792	1.261	1.448	1.252	0.5698
5	0.5729	1.264	1.451	1.256	0.5638
7	0.5710	1.264	1.454	1.255	0.5620
9	0.5706	1.264	1.455	1.256	0.5617
11	0.5706	1.264	1.455	1.256	0.5617
NT	$x = 0.10$				
3	0.5478	1.269	1.500	1.252	0.5327
5	0.5476	1.269	1.500	1.252	0.5326
7	0.5476	1.269	1.500	1.252	0.5326

Um aspecto importante a ser observado nos resultados das tabelas (5.1-5.4), é que quando a razão de aspecto r^* aumenta, a convergência para uma mesma posição x é atingida com um número de termos NT cada vez menor. No caso de $r^* = 0.1$ a convergência nas posições r , mais próximas das paredes, para $x = 0.25$, só é atingida para $NT \geq 25$, enquanto que para $r^* = 0.25$, na mesma posição x , com $NT = 19$ a convergência já foi atingida com quatro dígitos, em todas as posições radiais. O mesmo comportamento pode ser verificado para os outros valores de r^* . Isto acontece porque, quando a razão de aspecto aumenta, o comprimento de entrada hidrodinâmico diminui, conseqüentemente, a posição x , onde foram efetuados os cálculos, se aproxima mais ainda do ponto onde o escoamento torna-se completamente desenvolvido.

A seguir, o comportamento da convergência é mostrado, em tabelas, para a componente axial da velocidade $u(x,r)$, para as razões de aspecto $r^* = 0.1, 0.25$ e 0.5 e para $Re = 40, 300, 1000$ e 2000 . Os resultados são então comparados com os da formulação em Camada Limite da referência [59], cuja coordenada longitudinal foi adimensionalizada como:

$$X^+ = \frac{X}{D_h Re} \quad (\text{Ref. [59]}) \quad (5.1.a)$$

oferecendo resultados finais independentes do número de Reynolds, na formulação de Camada Limite.

As tabelas (5.5-5.8) mostram resultados para a razão de aspecto $r^* = 0.1$, em duas posições axiais distintas, sendo que para cada posição x , os cálculos são feitos em cinco posições radiais diferentes. A partir desses resultados, podemos observar que à medida em que o número de Reynolds aumenta, as posições onde os valores convergidos com quatro dígitos para $NT \leq 25$, vão se afastando, gradativamente, da entrada do duto. Isto acontece porque, com o aumento do número de Reynolds, os operadores difusivos vão perdendo sua importância face ao aumento da influência dos termos convectivos, o que torna o sistema cada vez mais rígido (*Stiff*), ocasionando um

aumento do número de termos na série para a solução nas mesmas posições axiais. Com isto os custos e o tempo computacional também crescem significativamente.

Podemos ainda observar, a partir desses resultados, uma convergência mais lenta para posições mais próximas à entrada do duto e a necessidade de um menor número de termos na série, para as posições mais afastadas. Esse comportamento se explica pela utilização da função $\Psi_{\infty}(r)$ como filtro, a qual representa o perfil completamente desenvolvido do escoamento na solução proposta. Logo, ao se avançar para posições mais distantes da entrada do duto o perfil tende para os valores do comportamento completamente desenvolvido do escoamento, com pouca contribuição oriunda da expansão em autofunções. Para as posições próximas das paredes interna e externa a convergência também é mais lenta, pois os gradientes de velocidade são maiores nestas posições, requerendo um número de termos maior para alcançar a precisão desejada.

O mesmo comportamento descrito acima pode ser observados nas tabelas (5.9-5.16) onde é mostrado o comportamento da convergência da componente axial da velocidade para $r^* = 0.25$ e 0.5 , em duas posições axiais distintas, e novamente, os resultados são comparados com os da formulação em Camada Limite [59].

Nota-se ainda uma diferença marcante entre esses resultados com os resultados da formulação de Camada Limite. Essa diferença, como era de se esperar, ainda é mais acentuada para os valores próximos da entrada do duto, bem como para os números de Reynolds mais baixos, devido as simplificações do modelo de Camada Limite.

Tabela 5.5 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.360$ ($X^+ = 0.005$)				
	$r = 0.145$	0.325	0.550	0.775	0.955
5	0.5694	1.155	1.213	1.218	0.3933
7	0.5168	1.155	1.232	1.223	0.3823
9	0.4875	1.151	1.234	1.222	0.3777
11	0.4760	1.149	1.238	1.223	0.3759
13	0.4711	1.149	1.239	1.224	0.3751
15	0.4689	1.149	1.240	1.224	0.3748
17	0.4678	1.149	1.240	1.224	0.3746
19	0.4672	1.149	1.240	1.224	0.3745
21	0.4669	1.149	1.240	1.224	0.3745
23	0.4667	1.149	1.240	1.224	0.3745
25	0.4666	1.149	1.240	1.224	0.3745
Ref [59]	0.499	1.309	1.415	1.094	0.278
NT	$x = 0.720$ ($X^+ = 0.010$)				
5	0.4935	1.274	1.427	1.102	0.2746
7	0.4756	1.268	1.434	1.102	0.2738
9	0.4714	1.264	1.436	1.102	0.2735
11	0.4699	1.263	1.437	1.102	0.2734
13	0.4693	1.262	1.438	1.102	0.2734
15	0.4690	1.262	1.438	1.103	0.2734
17	0.4689	1.262	1.438	1.103	0.2734
19	0.4689	1.262	1.438	1.103	0.2734
Ref [59]	0.498	1.362	1.487	1.037	0.2500

Tabela 5.6 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.540$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.145$	0.325	0.550	0.775	0.955
5	0.9488	1.089	1.082	1.176	05634
7	0.9055	1.093	1.090	1.186	05441
9	0.7443	1.098	1.092	1.188	05179
11	0.6410	1.097	1.106	1.193	05052
13	0.6039	1.105	1.107	1.199	05007
15	0.5917	1.108	1.109	1.202	04988
17	0.5861	1.110	1.110	1.203	04977
19	0.5829	1.110	1.110	1.204	04970
21	0.5810	1.111	1.110	1.205	04965
23	0.5799	1.112	1.110	1.205	04962
25	0.5791	1.112	1.110	1.205	04960
Ref [59]	0.580	1.202	1.209	1.177	04060
NT	$x = 2.700$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.5283	1.297	1.370	1.120	02909
7	0.5027	1.281	1.383	1.121	02896
9	0.4975	1.276	1.387	1.121	02888
11	0.4953	1.274	1.389	1.121	02884
13	0.4943	1.273	1.390	1.121	02882
15	0.4939	1.272	1.391	1.121	02881
17	0.4937	1.272	1.391	1.121	02881
19	0.4936	1.272	1.391	1.121	02881
21	0.4935	1.272	1.391	1.121	02881
23	0.4935	1.272	1.391	1.121	02881
Ref [59]	0.499	1.309	1.415	1.094	02780

Tabela 5.7 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 1.800$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.145$	0.325	0.550	0.775	0.955
5	1.1332	1.112	1.101	1.181	0.4975
7	0.9588	1.153	1.134	1.186	0.4729
9	0.7258	1.152	1.140	1.185	0.4553
11	0.6273	1.151	1.154	1.189	0.4503
13	0.6087	1.152	1.158	1.192	0.4480
15	0.6008	1.153	1.160	1.194	0.4462
17	0.5954	1.154	1.161	1.195	0.4449
19	0.5921	1.154	1.162	1.196	0.4440
21	0.5900	1.155	1.162	1.197	0.4434
23	0.5887	1.155	1.162	1.198	0.4431
25	0.5879	1.155	1.162	1.198	0.4429
Ref [59]	0.580	1.202	1.209	1.177	0.4060
NT	$x = 9.00$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.5333	1.317	1.377	1.109	0.2874
7	0.5088	1.301	1.391	1.109	0.2857
9	0.5028	1.295	1.396	1.109	0.2847
11	0.5000	1.292	1.399	1.108	0.2842
13	0.4985	1.291	1.401	1.108	0.2839
15	0.4978	1.290	1.402	1.108	0.2837
17	0.4974	1.290	1.402	1.108	0.2836
19	0.4972	1.289	1.402	1.108	0.2836
21	0.4970	1.289	1.402	1.108	0.2836
23	0.4970	1.289	1.402	1.108	0.2836
Ref [59]	0.499	1.309	1.415	1.094	0.2780

Tabela 5.8 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 3.60$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.145$	0.325	0.550	0.775	0.955
5	1.175	1.120	1.106	1.177	0.4862
7	0.9782	1.168	1.141	1.181	0.4626
9	0.7294	1.167	1.148	1.179	0.4484
11	0.6319	1.165	1.163	1.182	0.4437
13	0.6145	1.167	1.168	1.185	0.4404
15	0.6053	1.167	1.172	1.187	0.4379
17	0.5988	1.167	1.173	1.188	0.4361
19	0.5945	1.168	1.175	1.189	0.4349
21	0.5917	1.168	1.175	1.190	0.4340
23	0.5898	1.168	1.175	1.191	0.4334
25	0.5885	1.168	1.175	1.191	0.4331
Ref [59]	0.580	1.202	1.209	1.177	0.4060
NT	$x = 18.00$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.5367	1.324	1.378	1.105	0.2864
7	0.5116	1.308	1.392	1.105	0.2846
9	0.5054	1.302	1.398	1.105	0.2835
11	0.5025	1.299	1.401	1.104	0.2828
13	0.5009	1.298	1.403	1.104	0.2824
15	0.4999	1.297	1.404	1.104	0.2822
17	0.4993	1.296	1.405	1.104	0.2820
19	0.4990	1.296	1.406	1.104	0.2820
21	0.4987	1.295	1.406	1.104	0.2819
23	0.4986	1.295	1.406	1.104	0.2819
25	0.4986	1.295	1.406	1.104	0.2819
Ref [59]	0.499	1.309	1.415	1.094	0.2780

Tabela 5.9 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.300 \quad (X^+ = 0.005)$				
	$r = 0.2875$	0.4375	0.6250	0.8125	0.9625
5	0.4595	1.165	1.222	1.216	0.3956
7	0.4292	1.169	1.239	1.220	0.3835
9	0.4160	1.167	1.241	1.219	0.3786
11	0.4113	1.166	1.244	1.220	0.3767
13	0.4094	1.166	1.244	1.220	0.3759
15	0.4086	1.166	1.245	1.220	0.3756
17	0.4083	1.166	1.245	1.220	0.3754
19	0.4081	1.166	1.246	1.220	0.3753
21	0.4080	1.166	1.246	1.221	0.3753
23	0.4080	1.166	1.246	1.221	0.3752
25	0.4080	1.166	1.246	1.221	0.3752
Ref [59]	0.3970	1.249	1.414	1.106	0.2840
NT	$x = 0.600 \quad (X^+ = 0.010)$				
5	0.3796	1.216	1.433	1.114	0.2804
7	0.3742	1.214	1.439	1.114	0.2790
9	0.3730	1.213	1.440	1.113	0.2786
11	0.3726	1.212	1.441	1.113	0.2785
13	0.3724	1.212	1.441	1.113	0.2784
15	0.3723	1.212	1.441	1.113	0.2784
17	0.3723	1.212	1.441	1.113	0.2784
Ref [59]	0.3840	1.2700	1.4840	1.0580	0.2580

Tabela 5.10 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.450$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.2875$	0.4375	0.6250	0.8125	0.9625
5	0.6845	1.122	1.088	1.175	0.5715
7	0.6573	1.126	1.099	1.184	0.5484
9	0.5837	1.129	1.098	1.185	0.5197
11	0.5449	1.120	1.110	1.190	0.5062
13	0.5332	1.134	1.111	1.195	0.5015
15	0.5297	1.136	1.112	1.197	0.4995
17	0.5281	1.137	1.112	1.198	0.4984
19	0.5272	1.138	1.112	1.199	0.4976
21	0.5266	1.138	1.112	1.200	0.4972
23	0.5263	1.138	1.112	1.201	0.4969
25	0.5261	1.139	1.112	1.201	0.4967
Ref [59]	0.4980	1.196	1.209	1.178	0.4100
NT	$x = 2.250$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.4037	1.235	1.377	1.134	0.2971
7	0.3992	1.232	1.385	1.132	0.2952
9	0.3977	1.230	1.388	1.130	0.2943
11	0.3970	1.230	1.390	1.130	0.2939
13	0.3967	1.229	1.390	1.130	0.2937
15	0.3966	1.229	1.391	1.130	0.2936
17	0.3966	1.229	1.391	1.130	0.2936
Ref [59]	0.3970	1.249	1.414	1.106	0.2840

Tabela 5.11 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 1.500 \quad (X^+ = 0.001)$				
	$r = 0.2875$	0.4375	0.6250	0.8125	0.9625
5	0.5084	0.8687	1.187	1.289	0.5385
7	0.6383	1.166	1.142	1.190	0.4818
9	0.5493	1.163	1.146	1.186	0.4603
11	0.5250	1.162	1.158	1.188	0.4537
13	0.5217	1.163	1.160	1.190	0.4511
15	0.5195	1.164	1.162	1.192	0.4493
17	0.5178	1.165	1.162	1.193	0.4480
19	0.5167	1.166	1.163	1.194	0.4471
21	0.5161	1.166	1.163	1.195	0.4466
23	0.5157	1.166	1.162	1.195	0.4463
25	0.5155	1.167	1.162	1.196	0.4461
Ref [59]	0.4980	1.196	1.209	1.178	0.4100
NT	$x = 7.500 \quad (X^+ = 0.005)$				
	$r=0.2875$	0.4375	0.6250	0.8125	0.9625
5	0.3635	1.146	1.408	1.163	0.2986
7	0.3999	1.241	1.394	1.122	0.2917
9	0.3982	1.240	1.398	1.120	0.2906
11	0.3973	1.239	1.400	1.119	0.2900
13	0.3968	1.239	1.401	1.119	0.2896
15	0.3965	1.238	1.402	1.119	0.2895
17	0.3964	1.238	1.402	1.119	0.2894
19	0.3964	1.238	1.402	1.119	0.2894
Ref [59]	0.3970	1.249	1.414	1.106	0.2840

Tabela 5.12 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 3.00$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.2875$	0.4375	0.6250	0.8125	0.9625
5	0.7248	1.148	1.114	1.182	0.5003
7	0.6342	1.176	1.150	1.186	0.4725
9	0.5440	1.172	1.155	1.182	0.4538
11	0.5236	1.170	1.167	1.183	0.4472
13	0.5205	1.172	1.170	1.185	0.4438
15	0.5175	1.173	1.172	1.186	0.4413
17	0.5152	1.173	1.174	1.187	0.4395
19	0.5136	1.174	1.175	1.188	0.4383
21	0.5125	1.174	1.176	1.189	0.4375
23	0.5118	1.175	1.176	1.190	0.4369
25	0.5113	1.175	1.176	1.190	0.4366
Ref [59]	0.4980	1.196	1.209	1.178	0.4100
NT	$x = 15.00$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.4047	1.246	1.387	1.122	0.2930
7	0.4005	1.244	1.396	1.119	0.2907
9	0.3988	1.243	1.400	1.117	0.2895
11	0.3978	1.242	1.402	1.116	0.2888
13	0.3973	1.242	1.404	1.115	0.2883
15	0.3969	1.242	1.405	1.115	0.2881
17	0.3967	1.242	1.405	1.115	0.2880
19	0.3966	1.241	1.405	1.115	0.2879
21	0.3966	1.241	1.405	1.115	0.2879
Ref [59]	0.3970	1.249	1.414	1.106	0.2840

Tabela 5.13 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 40$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.200$ ($X^+ = 0.005$)				
	$r = 0.525$	0.625	0.750	0.875	0.975
5	0.4210	1.181	1.227	1.210	0.3985
7	0.4001	1.186	1.244	1.214	0.3850
9	0.3920	1.184	1.245	1.213	0.3797
11	0.3891	1.184	1.248	1.213	0.3777
13	0.3880	1.184	1.248	1.213	0.3769
15	0.3875	1.184	1.249	1.214	0.3766
17	0.3873	1.184	1.249	1.214	0.3764
19	0.3872	1.184	1.249	1.214	0.3763
21	0.3872	1.184	1.249	1.214	0.3763
Ref [59]	0.3440	1.199	1.413	1.125	0.2940
NT	$x = 0.400$ ($X^+ = 0.010$)				
5	0.3299	1.177	1.436	1.128	0.2881
7	0.3275	1.176	1.441	1.127	0.2866
9	0.3269	1.176	1.442	1.126	0.2861
11	0.3267	1.175	1.443	1.126	0.2859
13	0.3266	1.175	1.443	1.126	0.2858
15	0.3266	1.175	1.443	1.126	0.2858
Ref [59]	0.3270	1.195	1.482	1.086	0.2700

Tabela 5.14 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 0.300$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.525$	0.625	0.750	0.875	0.975
5	0.6173	1.141	1.090	1.169	0.5794
7	0.5882	1.149	1.103	1.179	0.5531
9	0.5411	1.151	1.101	1.179	0.5217
11	0.5188	1.152	1.112	1.183	0.5072
13	0.5122	1.156	1.113	1.188	0.5024
15	0.5100	1.158	1.114	1.190	0.5004
17	0.5089	1.159	1.114	1.191	0.4993
19	0.5082	1.160	1.114	1.192	0.4985
21	0.5079	1.161	1.114	1.193	0.4981
23	0.5076	1.161	1.114	1.193	0.4978
25	0.5075	1.161	1.114	1.193	0.4977
Ref [59]	0.4570	1.190	1.2085	1.180	0.4170
NT	$x = 1.500$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.3522	1.197	1.337	1.148	0.3058
7	0.3503	1.195	1.386	1.144	0.3039
9	0.3494	1.195	1.388	1.143	0.3030
11	0.3489	1.194	1.390	1.143	0.3026
13	0.3488	1.194	1.390	1.142	0.3025
15	0.3487	1.194	1.390	1.142	0.3024
17	0.3487	1.194	1.390	1.142	0.3024
Ref [59]	0.3440	1.199	1.413	1.125	0.2940

Tabela 5.15 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59].

NT	$x = 1.000$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.525$	0.625	0.750	0.875	0.975
5	0.5978	1.156	1.112	1.181	0.5258
7	0.5470	1.174	1.146	1.189	0.4915
9	0.5001	1.171	1.149	1.184	0.4662
11	0.4884	1.171	1.159	1.185	0.4589
13	0.4864	1.173	1.161	1.187	0.4564
15	0.4848	1.174	1.162	1.188	0.4546
17	0.4835	1.175	1.163	1.190	0.4533
19	0.4827	1.175	1.163	1.190	0.4525
21	0.4822	1.176	1.163	1.191	0.4520
23	0.4819	1.176	1.163	1.192	0.4517
25	0.4818	1.177	1.163	1.192	0.4515
Ref [59]	0.4570	1.190	1.2085	1.180	0.4170
NT	$x = 5.000$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.3509	1.198	1.387	1.141	0.3029
7	0.3489	1.198	1.394	1.137	0.3008
9	0.3478	1.197	1.398	1.136	0.2997
11	0.3472	1.196	1.400	1.135	0.2991
13	0.3469	1.196	1.401	1.134	0.2988
15	0.3467	1.196	1.401	1.134	0.2986
17	0.3467	1.196	1.401	1.134	0.2986
Ref [59]	0.3440	1.199	1.413	1.125	0.2940

Tabela 5.16 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$. Comparação com resultados da formulação em Camada Limite [59]

NT	$x = 2.000$ ($X^+ = 0.001$)				
	$r = 0.525$	0.625	0.750	0.875	0.975
5	0.5943	1.160	1.118	1.181	0.5163
7	0.5402	1.179	1.153	1.187	0.4828
9	0.4946	1.175	1.157	1.182	0.4598
11	0.4848	1.174	1.168	1.182	0.4528
13	0.4824	1.176	1.171	1.184	0.4497
15	0.4801	1.177	1.174	1.185	0.4472
17	0.4783	1.178	1.175	1.186	0.4454
19	0.4770	1.179	1.176	1.186	0.4442
21	0.4762	1.179	1.176	1.187	0.4434
23	0.4757	1.180	1.176	1.188	0.4429
25	0.4753	1.180	1.176	1.188	0.4425
Ref [59]	0.4570	1.190	1.2085	1.180	0.4170
NT	$x = 10.00$ ($X^+ = 0.005$)				
5	0.3507	1.199	1.388	1.140	0.3022
7	0.3488	1.199	1.396	1.136	0.3000
9	0.3477	1.198	1.400	1.134	0.2988
11	0.3470	1.198	1.402	1.132	0.2981
13	0.3466	1.197	1.403	1.132	0.2977
15	0.3463	1.197	1.404	1.132	0.2974
17	0.3462	1.197	1.405	1.131	0.2973
19	0.3461	1.197	1.405	1.131	0.2972
21	0.3461	1.197	1.405	1.131	0.2972
Ref [59]	0.3440	1.199	1.413	1.125	0.2940

O comportamento da convergência para a componente axial $u(x,r)$, para a primeira posição x das tabelas (5.6-5.8) e (5.14-5.16), é plotado nas curvas das figuras (5.1-5.6). Observa-se que, na escala gráfica, todos os resultados numéricos estão praticamente convergidos para $NT \geq 17$, ao contrário do que acontece nos valores tabelados, que para a mesma posição x , existem pontos próximos das paredes que ainda não atingiram a convergência completa em quatro dígitos, com $NT = 25$.

O comportamento da convergência para a componente radial $v(x,r)$, é mostrado nas figuras (5.7-5.12), para as mesmas posições das figuras (5.1-5.6). Observa-se alguma separação das curvas em relação aos resultados convergidos, para os números de termos menores, tornando-se cada vez mais concordantes com o aumento gradativo do número de termos e atingindo, graficamente, a convergência a partir de $NT \geq 21$.

Os perfis da componente radial da velocidade radial $v(x,r)$ são mostrados para $r^* = 0.1$ e 0.9 , respectivamente, para duas diferentes posições axiais, e é feita ainda uma comparação com os resultados da formulação em Camada Limite [58], onde a coordenada axial é adimensionalizada como:

$$X^{++} = \frac{2X(1-r^*)}{R_2 Re}, \quad (5.2.b)$$

A figura (5.13) mostra o desenvolvimento da componente radial da velocidade $v(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$. Já a figura (5.14) apresenta o desenvolvimento da componente radial para $r^* = 0.9$ e $Re = 300$. Nos dois casos, podemos observar que os resultados do modelo de Camada Limite, se afastam bastante dos resultados obtidos a partir das equações de Navier-Stokes. Isto acontece devido às simplificações na formulação de Camada Limite, onde são desprezados os termos de difusão longitudinal das equações de *Momentum* e o gradiente de pressão transversal.

A curvas das figuras (5.15) a (5.18) representam a distribuição da componente axial da velocidade ao longo do duto, em nove posições radiais distintas, para as razões de aspecto $r^* = 0.1, 0.25, 0.5$ e 0.9 e $Re = 2000$. Nota-se que quando a razão de aspecto

aumenta, a distribuição da velocidade em posições igualmente distantes das paredes interna e externa do duto, com relação ao centro, vai se sobrepondo, tornando o escoamento cada vez mais simétrico e se aproximando do perfil relativo à placas paralelas ($r^* \rightarrow 1$). A acentuada assimetria dos perfis de velocidade para as razões de aspecto menores, é causada pela diferença da espessura das camadas limite formadas nas paredes interna e externa do duto, a partir da entrada. Geralmente a camada limite que se forma sobre a parede externa, para a mesma razão de aspecto e para o mesmo número de Reynolds, é mais espessa do que aquela formada sobre a parede interna, devido a diferença entre seus raios de curvatura. No caso de placas paralelas essas camadas são de igual espessura, pois os raios de curvatura são iguais, tornando o escoamento simétrico com relação ao centro do canal.

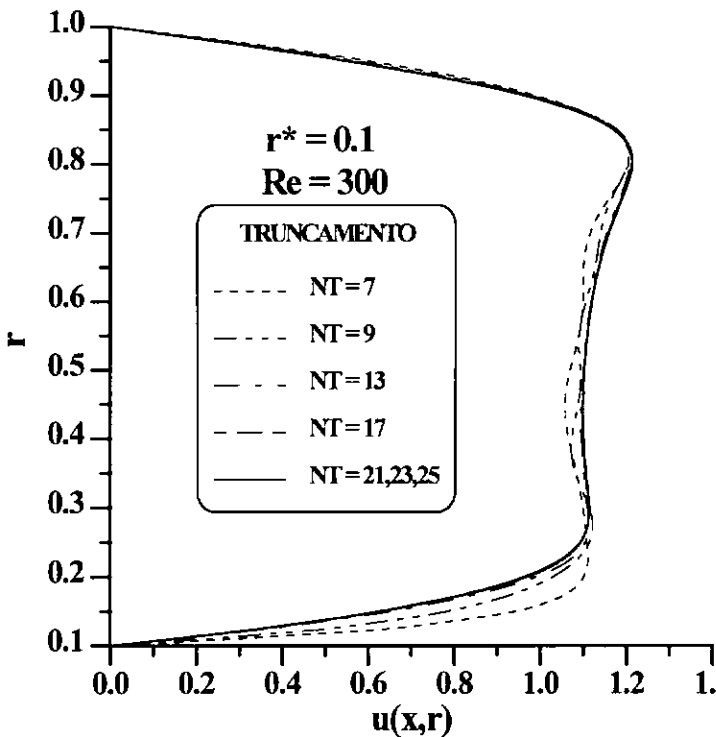


Figura 5.1 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 0.54$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$.

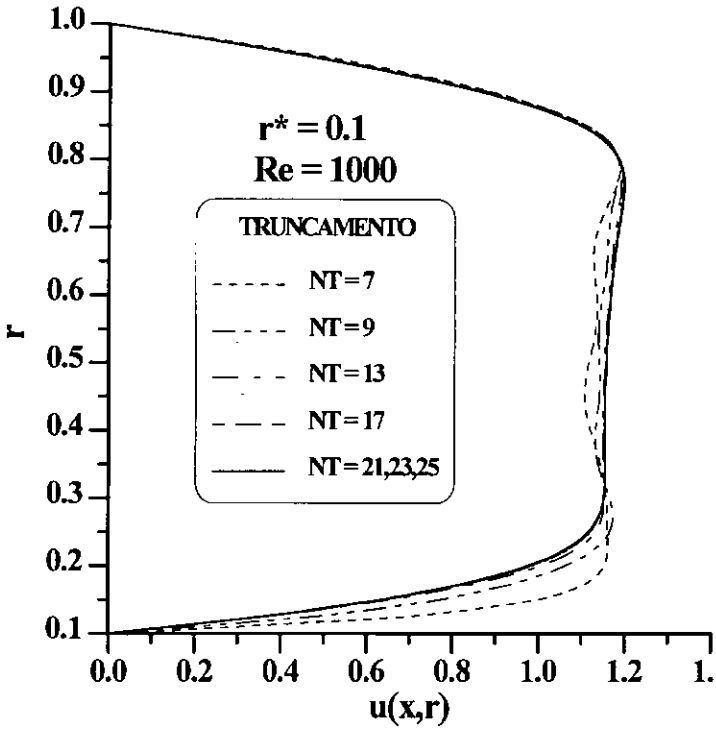


Figura 5.2 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 1.8$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$.

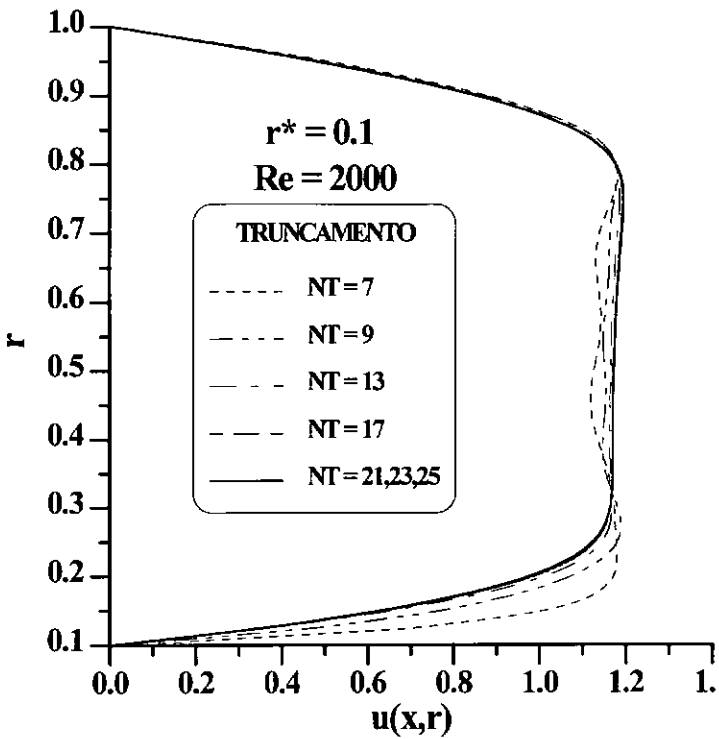


Figura 5.3 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 3.6$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$.

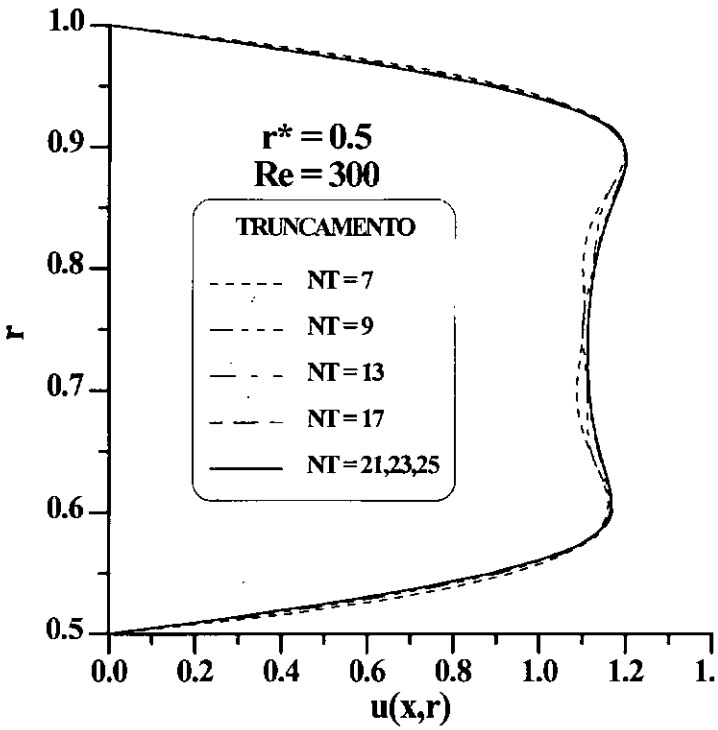


Figura 5.4 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 0.3$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$.

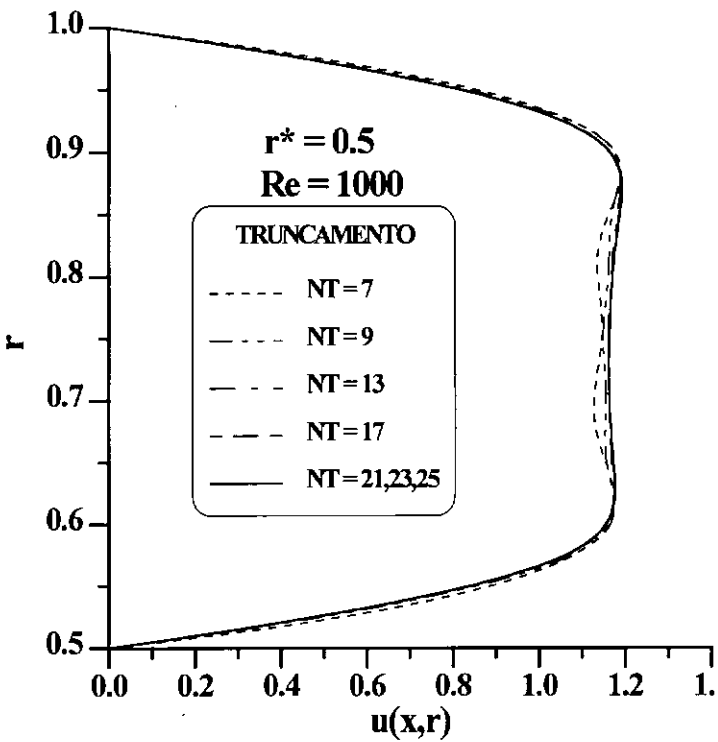


Figura 5.5 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 1.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$.

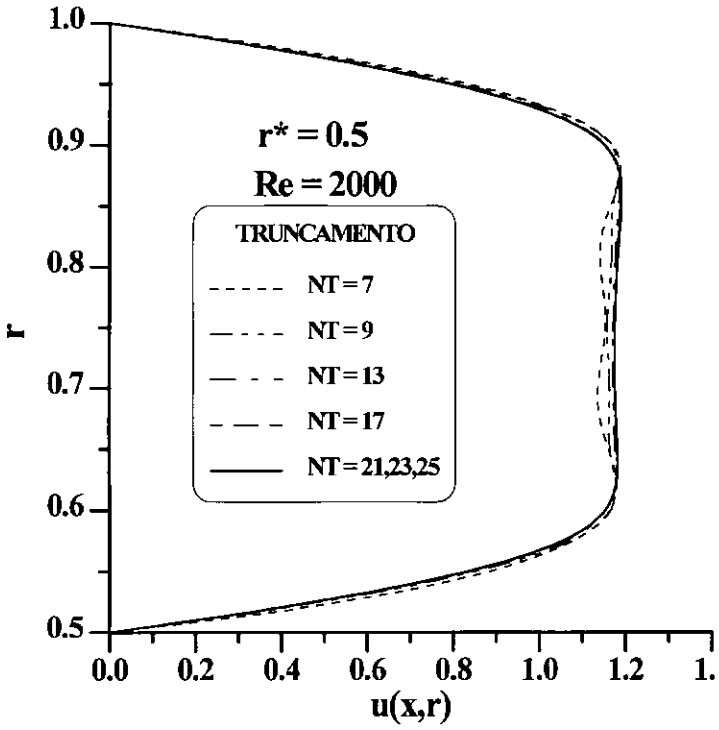


Figura 5.6 - Convergência da componente axial da velocidade $u(x,r)$ em $x = 2.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$.

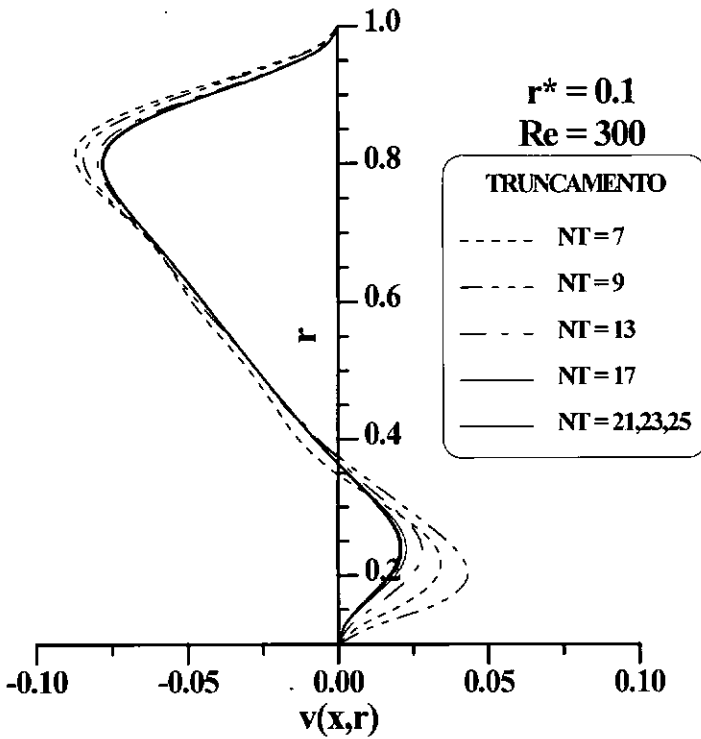


Figura 5.7 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 0.54$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 300$.

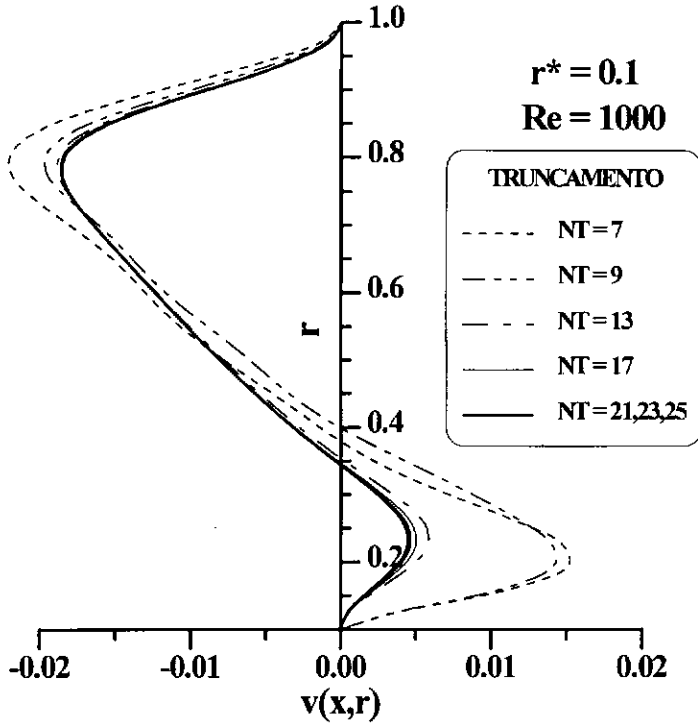


Figura 5.8 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 1.8$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 1000$.

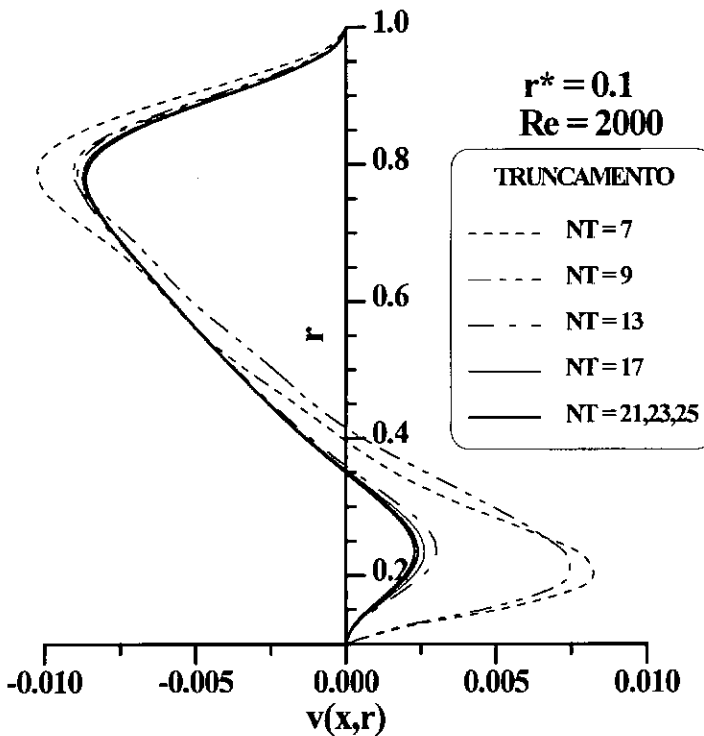


Figura 5.9 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 3.6$, para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$.

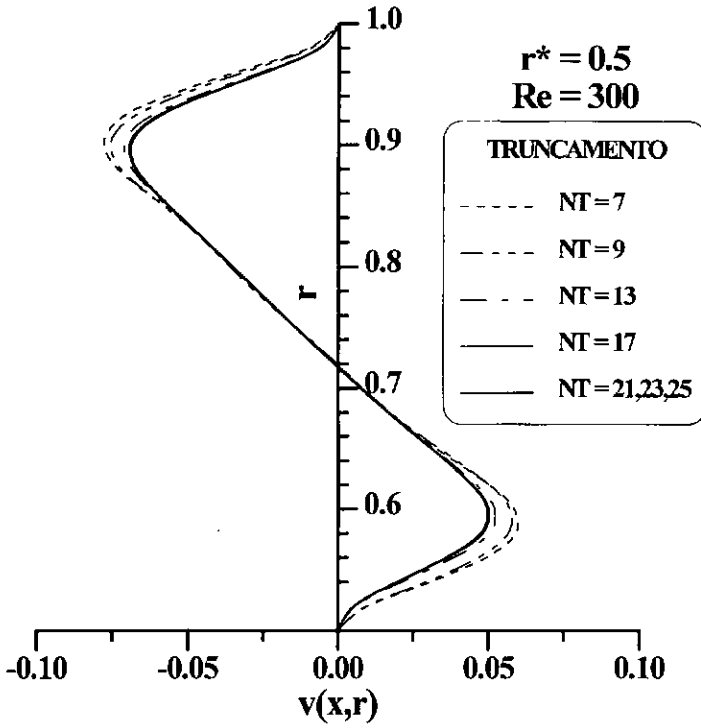


Figura 5.10 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 0.3$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 300$.

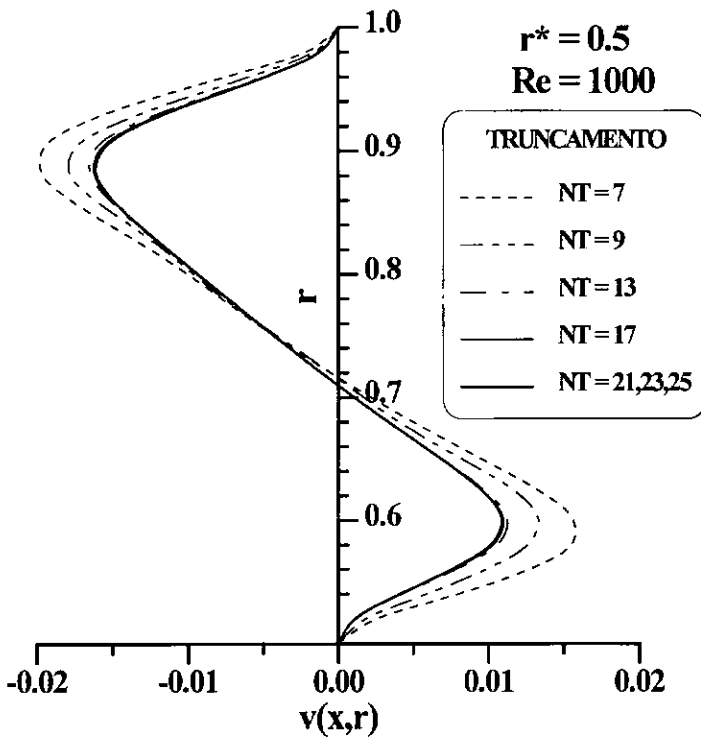


Figura 5.11 - Convergência da componente radial da velocidade $v(x,r)$ em $x = 1.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 1000$.

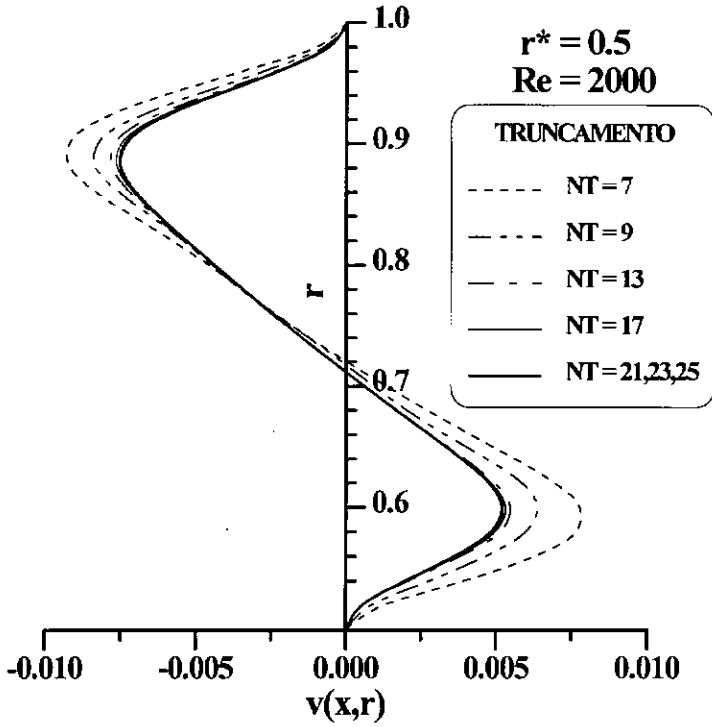


Figura 5.12 - Convergência do perfil de velocidade radial $v(x,r)$ em $x = 2.0$, para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$.

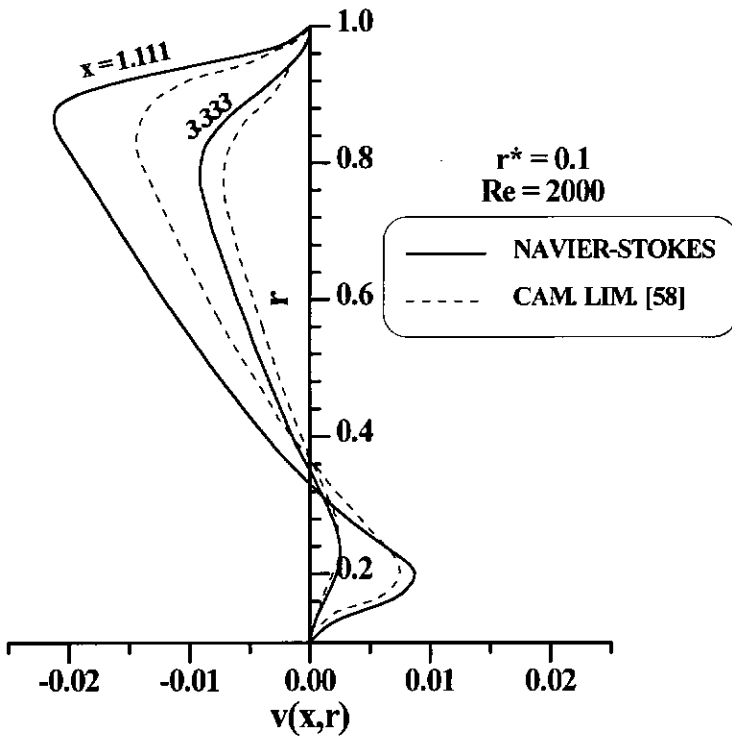


Figura 5.13 - Desenvolvimento da componente radial da velocidade $v(x,r)$ para $r^* = 0.1$. Comparação com os resultados da formulação em Camada Limite [58].

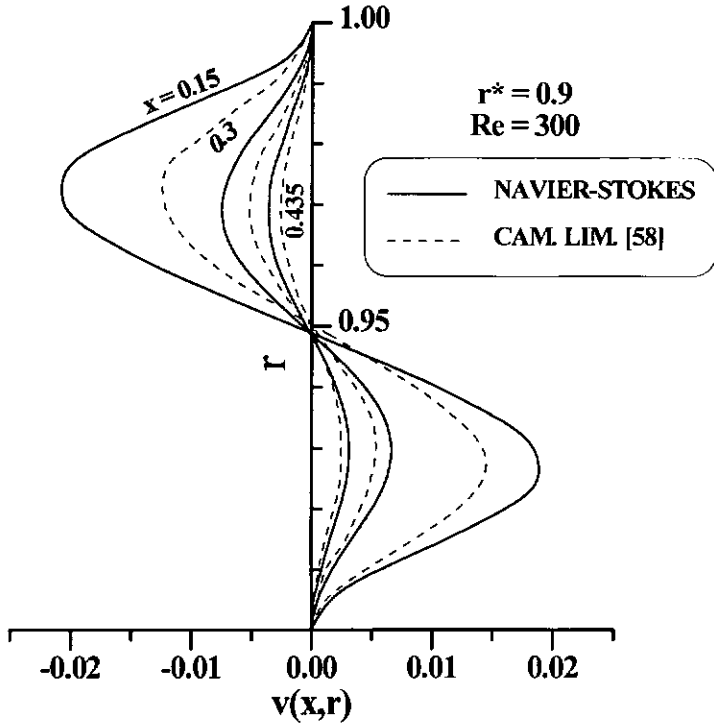


Figura 5.14 - Desenvolvimento da componente radial da velocidade $v(x,r)$ para $r^* = 0.9$. Comparação com os resultados da formulação em Camada Limite [59].

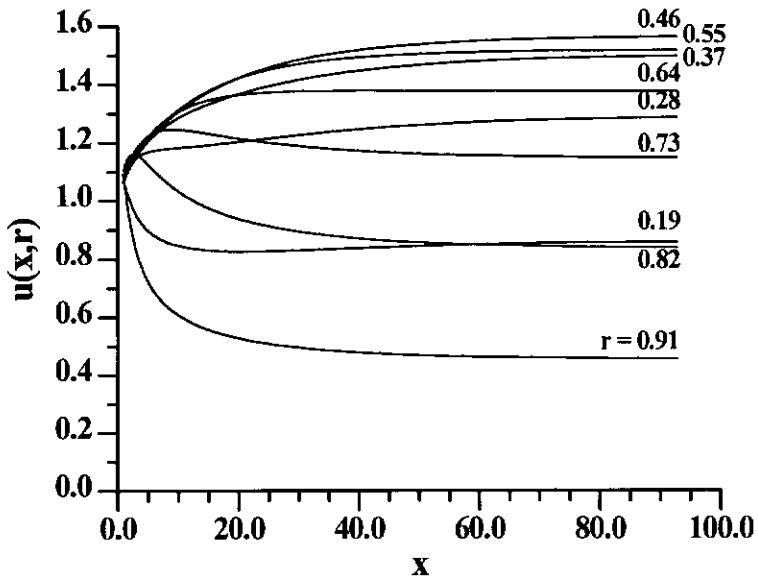


Figura 5.15 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.1$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.

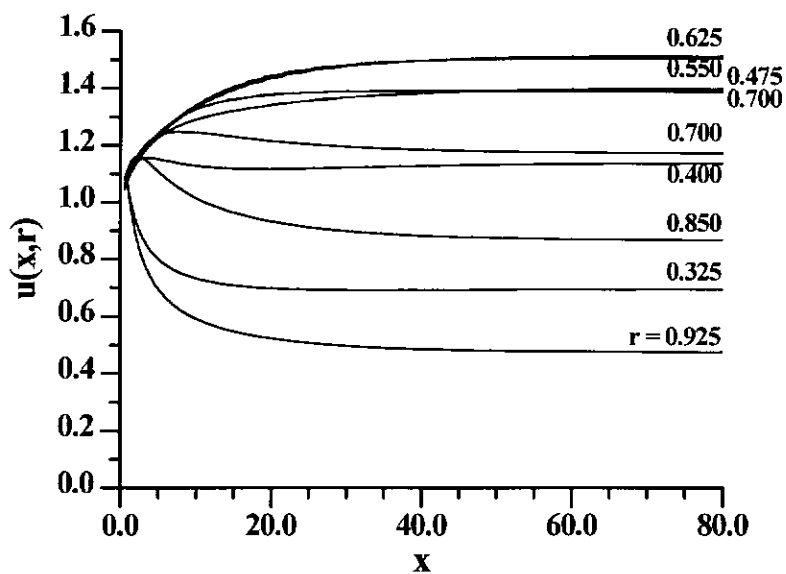


Figura 5.16 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.25$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.

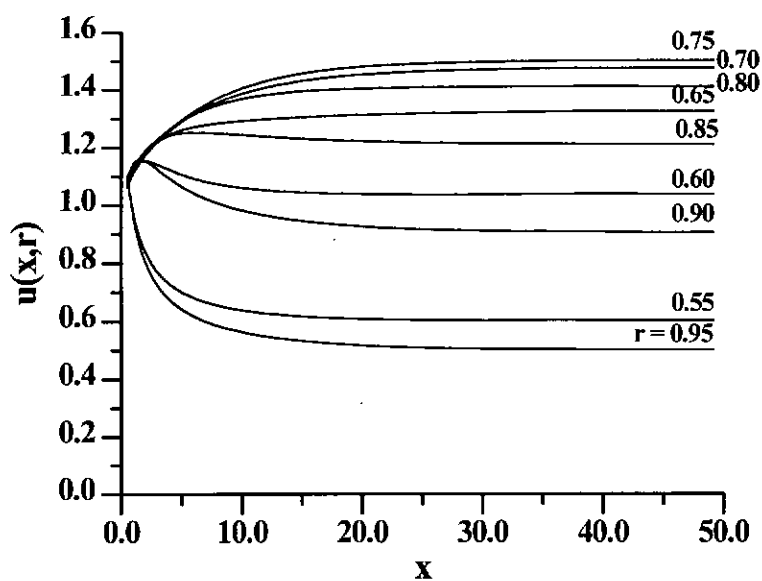


Figura 5.17 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.5$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.

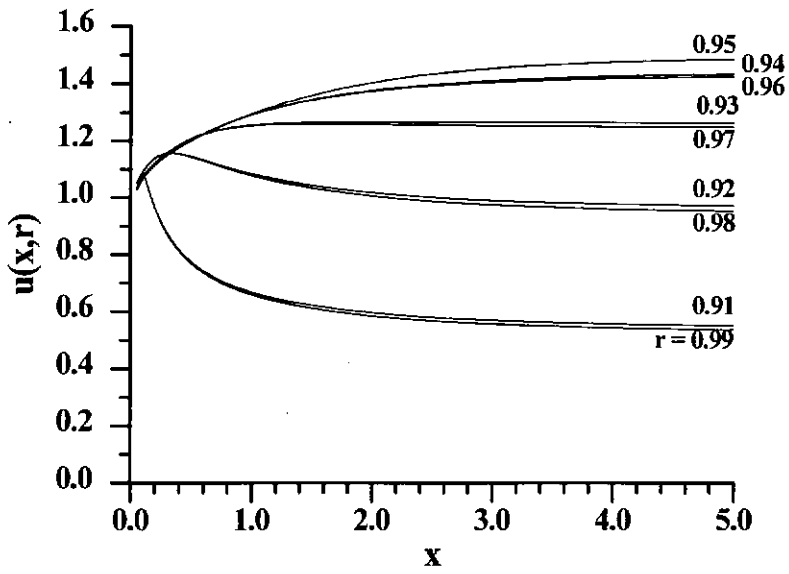


Figura 5.18 - Desenvolvimento da componente axial da velocidade $u(x,r)$ para $r^* = 0.9$ e $Re = 2000$, em várias posições radiais.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Ao término do presente trabalho, conseguimos mostrar que as equações de Navier-Stokes completas, utilizadas para modelar o escoamento no interior de dutos anulares concêntricos, foram resolvidas com sucesso, utilizando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Os resultados obtidos podem ser utilizados para validação de outras soluções propostas para essa mesma classe de equações.

Infelizmente, não foram encontrados na revisão da literatura, dados experimentais disponíveis para esse tipo de problema e soluções das equações de Navier-Stokes completas resolvidas por outros métodos numéricos existentes, com os quais possamos comparar os resultados do presente trabalho. No entanto, a validação desses resultados pode ser estabelecida levando-se em conta que os valores numéricos calculados pela GITT, para o campo de velocidade em posições mais afastadas da entrada do duto, tendem assintoticamente para o perfil completamente desenvolvido, em todos os casos de razão de aspecto estudados.

O caso limite $r^* = 0$, correspondente ao escoamento em dutos circulares, não segue como uma extensão natural desses resultados, uma vez que uma das condições de contorno ($u = 0$ em $r = 0$) não corresponderia à condição original do problema em tubos e deveria ser substituída pela condição de simetria imposta pelas características do problema ($\partial u / \partial r = 0$). Por outro lado, para $r^* \rightarrow 1$, correspondente ao escoamento em placas paralelas, o problema pode ser tratado de maneira mais simples ao se utilizar o sistema de coordenadas retangulares em vez das coordenadas cilíndricas, aqui empregadas, e usando as condições de simetria.

Grande parte do custo computacional envolvido na solução do problema aqui estudado deve-se ao cálculo dos coeficientes integrais, definidos pelas equações (4.12). Um estudo minucioso desses coeficientes, buscando determinar soluções analíticas, constitui um bom ponto de partida para tentar minimizar esses custos.

Os resultados obtidos por este trabalho estabelecem os limites de aplicabilidade do modelo simplificado de Camada Limite, uma vez que este modelo não consegue representar, de forma confiável, as características do escoamento para valores baixos do número de Reynolds, em particular para posições próximas da entrada do duto.

Dando continuidade ao presente trabalho, outras condições de contorno podem ser testadas para o problema, verificando-se a sua influência na taxa de convergência dos resultados para os perfis de velocidade, bem como a sua concordância com as soluções de Camada Limite, como no caso de paredes deslizantes ou injeção/sucção no contorno.

O problema de autovalor utilizado na solução do problema original apresenta um tratamento numérico complicado devido a presença das funções de Bessel modificadas. Outros problemas de autovalor podem ser testados como base para a expansão de autofunções utilizada na solução, visando um melhor desempenho analítico e computacional.

As futuras investigações do problema de escoamento em dutos anulares, podem ser direcionadas para o estudo da transferência de calor no escoamento de fluidos Newtonianos (como o caso aqui estudado) e não-Newtonianos, os quais estão presentes em diversas situações na engenharia. Outro passo importante na continuação desse trabalho é tratar o problema do escoamento turbulento em dutos anulares com modelos diferenciais de turbulência bem estabelecidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SCHLICHTING, H., "Boundary-Layer Theory", Sétima Edição, McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [2] MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N., "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, Nova York, 1984.
- [3] COTTA, R. M., "The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow.", 10th Int. Heat Transfer Conference, Brighton, UK, Agosto 1994.
- [4] COTTA, R. M., "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL, EUA, 1993.
- [5] MIKHAILOV, M. D., "On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 18, pp. 344-345, 1975.
- [6] COTTA, R.M. and OZISIK, M. N. "Diffusion Problems with General Time-Dependent Coefficient", J. Braz. Assoc. Mech. Sciences, v. 9, nº 4, pp. 269-292, 1987.
- [7] COTTA, R.M., LEIROZ, A. J. K. and APARECIDO, J. B. "Steady-State Diffusion Problems with Variable Equation Coefficients", Int. J. Heat & Technology, v. 10, nº 3-4, pp. 104, 1992.
- [8] CAMPOS SILVA, J.B., COTTA, R. M. and APARECIDO, J.B. "Analytical Solutions to Simultaneously Developing Flow Inside Parallel-Plates Channel", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 35, nº 4, pp. 887-895, 1992.

- [9] COTTA, R. M., SANTOS, C. F. M. and APARECIDO, J. B. "Transient Fin Analysis with Time Dependent Surface Dissipation", Latin Amer. Appl. Research, v. 22, pp. 11-18, 1993.
- [10] ÖZISIK, M.N. and MURRAY, R. L., "On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters", J. Heat Transfer, v. 96c, pp. 48-51, 1974.
- [11] COTTA, R. M., and SANTOS, A. C. C., "Transient Diffusion Problems with Time-Dependent Boundary Condition Coefficients", Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, v. 61, nº 5, pp. 829-837 (em Russo): também, J. Eng. Physics v. 61, nº 5, pp.1411-1418, 1992.
- [12] SANTOS, C. A. C., COTTA, R. M. and ÖZISIK, M. N., "Laminar Forced Convection Inside Externally Finned Tubes", Proc. of the 2nd National Thermal Sciences Meeting, ENCIT - 88, pp. 87-90, São Paulo, Brasil, Dezembro 1988.
- [13] COTTA, R. M., "Steady-State Diffusion with Space-Dependent Boundary Condition Parameters", Proc. of the 1st National Thermal Sciences Meeting, ENCIT - 86, pp. 163-166, Rio de Janeiro, Brasil, Dezembro 1986.
- [14] ÖZISIK, M. N. And GÜÇERİ, S. I., "A Variable Eingevalue Approach to the Solution of Phase-Change Problems", Can. J. Chem. Eng., v. 55, pp. 145-148, 1977.
- [15] COTTA, R. M., "Diffusion in Media with Prescribed Boundaries: -Application to Metals Oxidation at High Temperatures", Proc. of the 2nd Latin American Congress of Heat & Mass Transfer, v. 1, pp. 502-513, São Paulo, Brasil, Maio 1986.

- [16] DINIZ, A. J., APARECIDO, J. B. and COTTA, R. M., "Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab", Int. J. Heat & Technology, v. 8, pp. 30-43, 1990.
- [17] APARECIDO, J. B. And COTTA, R. M., "Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts", Comp. Mechanics, v. 6, pp. 93-100, 1990.
- [18] APARECIDO, J. B., COTTA, R. M. And ÖZISIK, M. N., "Analytical Solutions to Two -Dimensional Diffusion Type Problems in Irregular Geometries", J. Franklin Inst., v. 326, pp. 421-434, 1989.
- [19] KIM, W. S., COTTA, R. M. and ÖZISIK, M. N., "Laminar Internal Forced Convection with Periodically Varying, Arbitrarily Shaped Inlet Temperature", Proc. of the 9th Int. Heat Transfer Conf., Paper # 16-TR-17, pp. 383-388, Israel, Agosto 1990.
- [20] COTTA, R. M. and ÖZISIK, M. N., "Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature", Can. J. Chem. Eng., v. 64, pp. 734-742, 1986.
- [21] COTTA, R. M., BAOHUA C. and HEILBRON FILHO, P. F. L., "Analytical Solutions to Transient Convective Mass Transfer within Porous Media", Proc. of the NATO Advanced Study Inst. - Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, v. 196, pp. 525-540, Turquia, Agosto 1990.
- [22] GUEDES, R. O. C. and COTTA, R. M., "Periodic Laminar Forced Convection within Ducts Including Wall Heat Conduction Effects", Int. J. Eng. Science, v. 29, nº 5, pp. 535-547, 1991.
- [23] KIM, W. S. and ÖZISIK, M. N., "Turbulent Forced Convection Inside a Parallel-Plate Channel with Periodic Variation of Inlet Temperature", J. Heat Transfer, v. 111, pp. 882-888, 1989.

- [24] COTTA, R. M. and ÖZISIK, M. N., "Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 29, n^o 10, pp. 1495-1501, 1986.
- [25] APARECIDO, J. B. and COTTA, R. M., "Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 33, pp. 341-347, 1990.
- [26] GUEDES, R. O. C., COTTA, R. M. and BRUM, N. C. L., "Heat Transfer in Laminar Tube Flow with Axial Conduction Effects", J. Thermophysics & Heat Transfer., v. 5, n^o 4, pp. 508-513, 1991.
- [27] SCOFANO NETO, F. and COTTA, R. M., "Dynamic Analysis of Double-Pipe Heat Exchangers Subjected to Periodic Inlet Temperature Disturbances", Wärme-und Stoffübertr., v. 28, pp. 497-503, 1993.
- [28] RIBEIRO, J. W., COTTA, R. M. and MIKHAILOV, M. D., "Integral Transform Solution of Luikov's Equations for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 36, n^o 18, pp. 4467-4475, 1993.
- [29] COTTA, R. M., "Hybrid Numerical Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems", Num. Heat Transfer, part B - Fundamentals, v. 17, pp. 217-226, 1990.
- [30] SERFATY, R. and COTTA, R. M., "Integral Transform Solutions of Diffusion Problems with Nonlinear Equation Coefficients", Int. Comm. Heat & Mass Transfer, v. 17, pp. 852-864, 1990.
- [31] SERFATY, R. and COTTA, R. M., "Hybrid Analysis of Transient Nonlinear Convection-Diffusion Problems", Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow, v. 2, pp. 55-62, 1992.

- [32] COTTA, R. M. and SERFATY, R., "Integral Transform Algorithm for Parabolic Diffusion Problems with Nonlinear Boundary and Equation Source Terms", Proc. of the 7th Int. Conf. on Num. Meth. for Thermal Problems, Parte 2, pp. 916-926, Stanford, CA, Julho 1991.
- [33] COTTA, R. M. and CARVALHO, T. M. B., "Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems", Proc. of the 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar & Turbulent Flow, Parte 1, pp. 106-115, Stanford, CA, Julho 1991.
- [34] CARVALHO, T. M. B., COTTA, R. M. and MIKHAILOV, M. D., "Flow Development in the Entrance Region of Ducts", Comm. Num. Meth. Eng., v. 9, pp. 503-509, 1993.
- [35] MACHADO, H. A. and COTTA, R. M., "Integral Transform Method for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow, v. 5, pp. 225-237, 1995.
- [36] MIKHAILOV, M. D. and COTTA, R. M., "Unified Integral Transform Method", J. Braz. Assoc. Mech. Sciences, RBCM (Invited Paper), v. 12, nº 3, pp. 301-310, 1990.
- [37] LEIROZ, A. J. K. and COTTA, R. M., "On the Solution of Nonlinear Elliptic Convection-Diffusion Problems Through the Integral Transform Method", Num. Heat Transfer - part B: Fundamentals, v. 23, pp. 401-411, 1993.
- [38] BAOHUA, C. and COTTA, R. M., "Integral Transform Analysis of Natural Convection in Porous Enclosures", Int. J. Num. Meth. In fluids, v. 17, pp. 787-801, 1993.

- [39] PEREZ GUERRERO, J. S. and COTTA, R. M., “Integral Transform Method for Navier-Stokes Equations in Streamfunction - Only Formulation”, Int. J. Num. Meth. Fluids, v. 15, pp. 399-409, 1992.
- [40] COTTA, R. M., PEREZ GUERRERO, J. S. and SCOFANO NETO, F., “Hybrid Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations via Integral Transformation”, Proc. of the 2nd. Int. Conf. Advanced Computational Methods in Heat Transfer, “Heat Transfer 92”, v. 1, pp. 735-750, Milão, Itália, Julho 1992.
- [41] PEREZ GUERRERO, J. S. and COTTA, R. M., “Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation”, Int. J. Num. Meth. in Fluids, v. 20, pp. 1203-1213, 1995.
- [42] RIBEIRO, J. W. and COTTA, R. M., “Numerical - Analytical Study of Nonlinear Drying Problems with Radiative Boundaries”, 6th International Symposium on Transport Phenomena, v. 1, pp. 209-214, Seul, Coreia, Maio 1993.
- [43] COTTA, R. M., “Computational Integral Transform Approach in Nonlinear Diffusion and Convection-Diffusion Problems”, Laboratório di Ingegneria Nucleare di Montecuccolino, Série Científica (Invited Lecture), LIN-1202, Università degli Studi di Bologna, Itália, 1992.
- [44] COTTA, R. M., “A Review of the Integral Transform Method in Non-Linear Heat and Fluid Flow Problems”, Proc. of the 1st. Iberoamerican Congress of Mechanical Engineereng, (Invited Lecture), v. 1, pp. 35-64, Madri, Espanha, Setembro 1993.
- [45] COTTA, R. M., “Benchmark Results in Computacional Heat and Fluid Flow:-The Integral Transform Method”, Int. J. Heat Mass Transfer, (Invited Paper), v. 37, Sup. 1, pp. 381-394, Março 1994.

- [46] RAMOS, R., “Análise Bidimensional e Não-Linear de Aletas Longitudinais de Perfil Variável via Técnica de Transformada Integral Generalizada”, COPPE/UFRJ, M.Sc., Tese, Rio de Janeiro, 1993.
- [47] PIMENTEL, L. C. G., “Simulação do Escoamento em Dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral”, COPPE/UFRJ, M.Sc., Tese, Rio de Janeiro, 1993.
- [48] FIGUEIRA DA SILVA, E., “Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Função de Corrente e Variáveis Primitivas”, COPPE/UFRJ, M.Sc., Tese, Rio de Janeiro, 1994.
- [49] MACHADO, H. A., “Solução Híbrida Numérico-Analítica para as Equações de Camada Limite em Convecção Interna”, COPPE/UFRJ, M.Sc., Tese, Rio de Janeiro, 1992.
- [50] SHAH, R. K. and LONDON, A. L., “Laminar Flow Forced Convection in Ducts”, *Advances in Heat Transfer*, Supl. 1, Academic Press, Nova York, 1978.
- [51] MURAKAWA, K., “Theoretical Solutions of Heat Transfer in the Hydrodynamic Entrance Length of Double Pipes”, *Bull. JSME*, v. 3, nº 11, pp. 340-345, 1960.
- [52] SUGINO, E., “Velocity Distribution and Pressure Drop in Laminar Inlet of a Pipe with Annular Space”, *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, v. 5, nº 20, pp.651-655, 1962.
- [53] HEATON, H. S., REYNOLDS, W. C. and KAYS, W. M., “Heat Transfer in Annular Passages. Simultaneous Development of Velocity and Temperature Fields in Laminar Flow”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 7, pp. 763-781, 1964.

- [54] CHANG, C. C. and ATABEK, H. B., "Flow Between Two Co-Axial Tubes Near the Entry", ZAMM, v. 42, pp. 425-430, 1962.
- [55] SPARROW, E. M. and LIN, S. H., "The Developing Laminar Flow and Pressure Drop in the Entrance Region of Annular Ducts", J. of Basic Eng., Trans. ASME, v. 86, pp. 827-834, 1964.
- [56] MANOHAR, R., "An Exact Analysis of Laminar Flow in the Entrance Region of an Annular Pipe", Z. Angew. Math. Mech., v. 45, pp. 171-176, 1965.
- [57] SHAH, V. L. and FARNIA, K., "Flow in the Entrance of Annular Tubes", Computers and Fluids, v. 2, pp. 285-294, 1974.
- [58] CONEY, J. E. R. and EL-SHAARAWI, M. A. I., "Finite Difference Analysis for Laminar Flow Heat Transfer in Concentric Annuli with Simultaneously Developing Hydrodynamic and Thermal Boundary Layers", Int. J. Num. Meth. Eng., v. 9, pp. 17-38, 1975.
- [59] KAKAÇ, S., and YÜCEL, O., "Laminar Flow Heat Transfer in an Annulus with Simultaneous Development of Velocity and Temperature Fields", Technical and Scientific Council of Turkey, TUBITAK, ISITEK, n^o 19, Ankara, Turquia, 1974.
- [60] FULLER, R. E. and SAMUELS, M. R., "Simultaneous Development of the Velocity and Temperature Fields in the Entry Region of an Annulus", Chem. Eng. Prog. Symposium Series, v. 67, n^o 113, pp. 71-77, 1970.
- [61] CONEY, J. E. R. and EL-SHAARAWI, M. A. I., "Developing Laminar Radial Velocity Profiles and Pressure Drop in the Entrance Region of Concentric Annuli", Int. J. Num. Meth. Eng., v. 9, pp. 17-38, 1975.

- [62] MURAKAWA, K., "Heat Transfer in Entry Length of Double Pipes", Int. J. Heat Mass Transfer, v. 2, pp. 240-251, 1961.
- [63] CHANDRASEKHAR, S. and REID, W. H., "On the Expansion of Functions which Satisfy Four Boundary Conditions", Proc. Nat. Acad. Sci., v. 43, pp. 521-527, 1957.
- [64] IMSL Library - MATH/LIB., Houston, Texas, 1989.
- [65] PEREYRA, V., "PASVA3 - An Adaptative Finite-Difference FORTRAN Program for First Order NonLinear Boundary Value Problems", Lec. Notes in Comp. Science, v. 76, pp. 67-88, Spring-Verlag, Berlin, 1978.
- [66] WANG, Y. L. e LONGWELL, P. A., "Laminar Flow in the Inlet Section of Parallel Plates", A. I. Ch. E. Journal, v. 10, pp. 323-329, 1964.
- [67] LANGHAAR, H. L., "Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube", J. Appl. Mech., v. 9, A55-A58, 1942.
- [68] TARG, S. M., "Osnovnye Zadachi Teorii Laminarykh Tehenyi", Gostekhizdat, Moscou, 1951.
- [69] PATANKAR, S. V. and SPALDING, D. B., "Heat and Mass Transfer in Boundary Layers", 2^o Ed., Intertext Books, Londres, 1970.
- [70] BODOIA, J. R. and OSTERLE, J. F., "Finite Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette Flow Developments", Appl. Sci. Res., Sect. A10, pp. 265-276, 1961.