



**COPPE/UFRJ**

**PROBLEMAS INVERSOS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS  
HETEROGÊNEOS: ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL VIA  
TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL, INFERRÊNCIA BAYESIANA E  
TERMOGRAFIA POR INFRAVERMELHO**

Carolina Palma Naveira Cotta

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE,  
da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como  
parte dos requisitos necessários à obtenção do  
título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande  
Renato Machado Cotta

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2009

PROBLEMAS INVERSOS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS  
HETEROGÊNEOS: ANALISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL VIA  
TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL, INFERÊNCIA BAYESIANA E TERMOGRAFIA  
POR INFRAVERMELHO

Carolina Palma Naveira Cotta

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

---

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

---

Prof. Manuel Ernani de Carvalho Cruz, Ph.D.

---

Prof. Dani Gamerman, Ph.D.

---

Prof. Carlos Alberto de Alencar Mota, D.Sc.

---

Prof. Olivier Fudym, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
DEZEMBRO DE 2009

Cotta, Carolina Palma Naveira

Problemas Inversos de Condução de Calor em Meios Heterogêneos: Análise Teórico-Experimental via Transformação Integral, Inferência Bayesiana e Termografia por Infravermelho/Carolina Palma Naveira Cotta. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XXXI, 257p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Renato Machado Cotta

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 248-257.

1. Condução de Calor. 2. Métodos Híbridos. 3. Transformação Integral. 4. Inferência Bayesiana. 5. Termografia por Infravermelho. I. Orlande, Helcio Rangel Barreto *et al* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título

*“A morte não é nada.  
Apenas passei ao outro mundo.  
Eu sou eu. Tu és tu.  
O que fomos um para o outro ainda o somos.*

*Dá-me o nome que sempre me deste.  
Fala-me como sempre me falaste,  
não mudes o tom a um triste ou solene.  
Continua rindo com aquilo que nos fazia rir juntos.*

*Reza, sorri, pensa em mim, reza comigo.  
Que meu nome se pronuncie em casa como sempre se  
pronunciou, sem nenhuma ênfase, sem rosto de sombra.  
A vida continua significando o que significou, continua  
sendo o que era.*

*O cordão da união não se quebrou.  
Porque eu estaria fora de teus pensamentos,  
apenas porque estou fora de tua vista?*

*Não estou longe,  
sómente estou do outro lado do caminho.  
Já verás, tudo está bem.  
Redescubrirás o meu coração,  
e nele redescobrirás a ternura mais pura.  
Seca tuas lágrimas e, se me amas, não chores mais.”*

Oração de Santo Agostinho

Aos nossos filhos,  
Bianca, Victor e Clara.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu filho Victor, meu anjinho, luz da minha vida, por ter cedido, sem muita escolha, parte do seu tempo comigo para este trabalho.

Ao meu grande amor, meu companheiro, meu amigo, minha fortaleza, meu exemplo de vida e dedicação ao trabalho, meu marido e co-orientador Renato Cotta. Obrigada, pelo incessante carinho, incondicional companheirismo e incansáveis discussões. Pela sua sua excelência acadêmica, que a todo o tempo me norteia e motiva.

Em especial à minha mãe, minha referência, dedicada e carinhosa avó, incondicionalmente ao meu lado dando-me sempre apoio nas horas que mais precisei, deixando de lado os seus próprios afazeres. A essa grande e amada mãe, insuperável avó, o meu muitíssimo obrigado. Ao meu querido pai, exemplo de ser humano e dignidade, pelo constante incentivo, incessante amor e dedicação à família. Às minhas irmãs, Lilia e Vanessa, que mesmo de longe sempre me apoiaram. Aos meus sogros, Claudette e Eneas, e cunhados, Renata, Eneas e Suely, por se tornarem minha família e nos cercarem de carinho durante todo esse arduo período.

Ao meu orientador e amigo Helcio Rangel Barreto Orlande, pelo constante incentivo, motivação e orientação durante todo o curso deste trabalho e, principalmente, pela confiança depositada nos momentos mais críticos da sua execução.

Ao Prof. Olivier Fudym, da École des Mines d'Albi – França, por ter motivado, acompanhado e participado neste trabalho desde seu início, no contexto de cooperação internacional em que se insere este doutorado, sob financiamento conjuto CNPq/CNRS.

Aos Profs. Olivier Fudym, Dani Gamerman, João Quaresma, Manuel Cruz e ao Dr. Carlos Mota, o meu agradecimento sincero pela atenção dispensada nas correções e sugestões na qualificação, bem como na versão final do presente texto. Aos Profs. Dani Gamerman e José Carlos Pinto pela atenção dispensada na fase de realização de disciplinas e amadurecimento deste tema de tese.

Ao amigo Jeziel Nunes pelas valiosas sugestões ao longo do desenvolvimento experimental e inestimável ajuda na etapa final da montagem do experimento.

Aos técnicos Paulo César da Silva e Paulo Veiga, pela grande ajuda na montagem da bancada experimental.

Aos bolsistas de Iniciação Ciêntífica do LTTC, William, Bernardo e Maycon, pela prestimosa colaboração durante a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**PROBLEMAS INVERSOS DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS  
HETEROGÊNEOS: ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL VIA  
TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL, INFERNÊNCIA BAYESIANA E  
TERMOGRAFIA POR INFRAVERMELHO**

Carolina Palma Naveira Cotta

Dezembro/2009

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Renato Machado Cotta

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho apresenta uma análise teórico-experimental de problemas de condução de calor em meios heterogêneos, visando a construção de ferramentas para identificação de propriedades termofísicas e condições de contorno. Meios heterogêneos envolvem variações espaciais de propriedades termofísicas em diferentes formas funcionais, dependendo do tipo da heterogeneidade. O método de transformação integral clássico foi empregado na solução analítica do problema direto, desenvolvendo-se uma solução híbrida numérico-analítica para o problema auxiliar de autovalores através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Utilizou-se inferência Bayesiana na estimativa das propriedades espacialmente variáveis e das condições de contorno, empregando o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) com o algoritmo de Metropolis-Hastings. As propriedades variáveis foram expressas como expansões em autofunções, o que permitiu a estimativa de um número significativamente reduzido de parâmetros. Outro avanço do presente estudo foi a solução do problema inverso no campo transformado, a partir da transformação integral dos dados experimentais de temperatura, assim colapsando os dados experimentais nas variáveis espaciais em alguns poucos campos transformados. Adotou-se a termografia por câmera de infravermelho como técnica não-intrusiva para medidas de temperatura em experimentos de placas em sanduíche de materiais conhecidos, total ou parcialmente aquecidas, para demonstração das técnicas de solução desenvolvidas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN HETEROGENEOUS MEDIA:  
THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS VIA INTEGRAL  
TRANSFORMS, BAYESIAN INFERENCE AND INFRARED THERMOGRAPHY

Carolina Palma Naveira Cotta

December/2009

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande

Renato Machado Cotta

Department: Mechanical Engineering

This work presents a theoretical-experimental analysis of heat conduction problems in heterogeneous media, aimed at constructing tools for the identification of thermophysical properties and boundary conditions. Heterogeneous media involve spatial variations of thermophysical properties in different functional forms, depending on the type of heterogeneity. The classical integral transform method was employed in the analytical solution of the direct problem, and a hybrid numerical-analytical solution was developed for the auxiliary eigenvalue problem through the Generalized Integral Transform Technique (GITT). Bayesian inference was utilized in the estimation of the spatially variable properties and boundary conditions, by employing the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method with the Metropolis-Hastings algorithm. The variable properties were expressed as eigenfunction expansions, which permitted the estimation of a significantly reduced number of parameters. Another advancement of the present study was the solution of the inverse problem in the transformed field, from the integral transformation of the experimental temperature data, thus collapsing the experimental measurements in the space variables into a few transformed fields. Infrared camera thermography was adopted as a non-intrusive technique for temperature measurements in experiments of sandwiched plates of known materials, totally or partially heated, in order to demonstrate the developed solution techniques.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	x
<b>LISTA DE TABELAS</b>	xxv
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	xxix
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	1
<b>1.1. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS</b>	1
<b>1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO</b>	5
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	6
<b>2.1. MEIOS HETEROGÊNEOS: PROBLEMA DIRETO E MODELO FÍSICO</b>	6
<b>2.2. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL PARA CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS HETEROGÊNEOS</b>	8
<b>2.3. PROBLEMAS INVERSOS EM CONDUÇÃO DE CALOR</b>	10
<b>2.4. PROBLEMAS INVERSOS VIA INFERÊNCIA BAYESIANA</b>	12
<b>2.5. TERMOGRAFIA EM PROBLEMAS INVERSOS</b>	14
<b>3. PROBLEMA DIRETO</b>	17
<b>3.1. MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL</b>	18
<b>3.2. SOLUÇÃO FORMAL PARA O PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM MEIOS HETEROGÊNEOS</b>	26
<b>3.3. EXPANSÃO DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS</b>	31
<b>3.4. APLICAÇÕES</b>	33
<b>4. PROBLEMA INVERSO</b>	38
<b>4.1. ESTIMATIVA DE PARÂMETROS</b>	40
<b>4.2. ESTIMATIVA DE FUNÇÃO</b>	44
<b>4.3. ANALISE DOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDADE</b>	46
<b>4.4. PROJETO ÓTIMO DO EXPERIMENTO</b>	49
<b>4.5. INFERÊNCIA BAYESIANA</b>	51

<b>5. EXPERIMENTOS COM TERMOGRAFIA POR CÂMERA DE INFRAVERMELHO</b>	59
<b>5.1. FUNDAMENTOS DA TERMOGRAFIA POR CÂMERA DE INFRAVERMELHO</b>	59
<b>5.2. APARATO EXPERIMENTAL E MODELOS FÍSICOS</b>	64
<b>5.3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL</b>	68
<b>5.4. TRATAMENTO DE DADOS</b>	70
<b>6. RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	74
<b>6.1. PROBLEMA DIRETO – TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL</b>	74
<b>6.2. PROBLEMA INVERSO – INFERÊNCIA BAYESIANA</b>	94
<b>6.3. EXPERIMENTOS COM TERMOGRAFIA POR CÂMERA DE INFRAVERMELHO</b>	191
<b>7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	245
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	248

# **Lista de Figuras**

Figura 5.1 –	Câmera ThermoVision A10 (fonte:Flir Systems);	62
Figura 5.2 –	Bancada experimental para identificação de propriedades termofísicas com termografia por câmera de infravermelho;	64
Figura 5.3 –	Experimento de placa horizontal, com detalhe do dispositivo de posicionamento vertical da câmera e do porta-amostras.	65
Figura 5.4 –	Experimentos de placa vertical, com detalhe do dispositivo de posicionamento horizontal da câmera e do porta-amostras;	65
Figura 5.5.a –	Detalhe das placas de baquelite (4x8cm) com os termopares tipo K afixados;	67
Figura 5.5.b –	Detalhe da face interna das placas de baquelite, com depósito de cobre (4x4cm);	67
Figura 5.6 –	Detalhe da resistência elétrica (4 x 4cm) com isolamento em filme kapton;	67
Figura 5.7 –	Detalhe da fixação do conjunto placa-resistencia-placa no experimento vertical;	67
Figura 5.8 –	Sistema de aquisição de dados de temperatura e voltagem – Agilent 34970-A;	68
Figura 5.9 –	Painel frontal do programa de aquisição construído na plataforma LabView 7.0;	68
Figura 5.10.a –	Imagen antes de ligar a fonte, no experimento horizontal aquisitada pela câmera;	69
Figura 5.10.b –	Imagen antes de ligar a fonte, no experimento vertical aquisitada pela câmera;	69
Figura 5.11.a –	Imagen no momento seguinte ao ligamento da fonte, no experimento horizontal aquisitada pela câmera;	70
Figura 5.11.b –	Imagen no momento seguinte ao ligamento da fonte, no experimento vertical aquisitada pela câmera;	70
Figura 5.12.a –	Imagen do experimento horizontal aquisitada pela	70

	câmera de infravermelho, durante o aquecimento;	
Figura 5.12.b –	Imagen do experimento vertical aquisitada pela câmera de infravermelho, durante o aquecimento;	70
Figura 6.1 –	Comportamento do coeficiente de difusão $k(x)$ para o caso do FGM eq.(3.70) para: $\beta = -3, -1, 1$ e $3$ ;	75
Figura 6.2.a –	Comportamento físico e validação (GITT x Solução Exata) da distribuição de temperatura para o exemplo do FGM com $\beta=3$ ;	77
Figura 6.2.b –	Comportamento físico e validação (GITT x Solução Exata) da distribuição de temperatura para o exemplo do FGM com $\beta= -3$ ;	78
Figura 6.3 –	Comportamento do coeficiente de difusão $k(x)$ para o caso de duas camadas com região de transição, para $\gamma = 10, 20, 100, 500$ e $1000$ ;	79
Figura 6.4 –	Convergência da décima autofunção para exemplo de duas camadas com região de transição, para $\gamma = 1000$ ;	81
Figura 6.5 –	Convergência do perfil de temperatura para exemplo de duas camadas com região de transição, para $\gamma = 1000$ ;	82
Figura 6.6.a –	Comportamento do coeficiente de difusão variável $k(x)$ e sua expansão em autofunções para o caso de duas camadas com $\gamma=20$ ;	83
Figura 6.6.b –	Comportamento do coeficiente de difusão variável $k(x)$ e sua expansão em autofunções para o caso de duas camadas com $\gamma=200$ ;	84
Figura 6.7.a –	Comportamento do coeficiente difusivo variável $k(x)$ e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com $G=0.2$ ;	86
Figura 6.7.b –	Comportamento do coeficiente difusivo variável $k(x)$ e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com $G=0.8$ ;	86
Figura 6.8.a –	Comportamento do coeficiente capacitivo variável $w(x)$ e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com $G=0.2$ ;	87

Figura 6.8.b –	Comportamento do coeficiente capacitivo variavel $w(x)$ e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com $G=0.8$ ;	87
Figura 6.9.a –	Distribuição de temperatura no tempo $t=0.05$ para o caso de propriedades randomicas com $G=0, 0.2, 0.5, 0.8$ e $1$ ;	93
Figura 6.9.b –	Distribuição de temperatura no tempo $t=0.1$ para o caso de propriedades randomicas com $G=0, 0.2, 0.5, 0.8$ e $1$ ;	93
Figura 6.10.a –	Condição inicial randômica adimensional para $CI_0 = 0.5$ e $G = 0.8$ ;	95
Figuras 6.11 –	Comportamento espacial da concentração de particulas (a) e a capacidade térmica adimensional resultante (b), de acordo com os dados da tabela 6.7;	97
Figura 6.12 –	Comportamento da condutividade térmica efetiva de diferentes modelos.	100
Figura 6.13. –	Analise da convergencia da expansão da condutividade térmica para três diferentes ordens de truncamento da série: a) $Nk=4$ , b) $Nk=7$ , c) $Nk=10$ ;	102
Figura 6.14.–	Evolução do determinante da matriz de sensibilidade.;	105
Figura 6.15.–	Condutividade térmica exata, chute inicial, limites máximo e minimos e a comparação entre a função exata e as funções estimadas para os 5 casos considerados;	112
Figura 6.16 –	Evolução da cadeia de Markov para os 9 parametros no CASO 1;	113
Figura 6.17 –	Evolução da cadeia de Markov para os 9 parametros no CASO 2;	114
Figura 6.18 –	Esquema representative de um aparato experimental para determinação de propriedades termofísicas;	116
Figura 6.19 –	Variação espacial da (a) concentração de particulas na matriz, (b) capacidade térmica, (c) condutividade térmica, de acordo com os parametros apresentados na tabela 6.10;	121
Figura 6.20 –	Analise da convergência das expansões da	122

<p>condutividade e da capacidade térmicas (linha solida – função exata, linha pontilhada – função expandida)</p> <p>a) <math>N_w</math> e <math>N_k=4</math>, b) <math>N_w</math> e <math>N_k =7</math>, c) <math>N_w</math> e <math>N_k =10</math>;</p> <p>Figura 6.21 – Evolução do determinante da matriz de informação para diferentes números de medidas espaciais, temporais e número de parâmetros envolvidos nas estimativas:</p> <p>(a) <math>N_x=40</math> sensores, <math>\Delta t=10s</math>, (<math>N_P=13</math>, 19 e 25 parâmetros);</p> <p>(b) <math>N_P=19</math> parâmetros, <math>\Delta t =10 s</math> e <math>N_x =4, 40</math>, e 160 sensores;</p> <p>Figura 6.22 – Distribuições <i>a priori</i>: (a) distribuição da concentração para um desvio padrão de 20% 128</p> <p>(b) capacidade térmica e (c) condutividade térmica (Linha solida) propriedade calculada a partir de (a) e (Linha pontilhada) propriedade expandida.;</p> <p>Figuras 6.23.a-d – CASO 1: 132</p> <p>a) <math>k(x)</math> e <math>c) w(x)</math> Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 4 termos (linha solida vermelha), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul);</p> <p>b) <math>k(x)</math> e <math>d) w(x)</math> Função exata (linha sólida preta), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;</p> <p>Figuras 6.24.a-d – CASO 2: 133</p> <p>a) <math>k(x)</math> e <math>c) w(x)</math> Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 4 termos (linha solida vermelha), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul);</p> <p>b) <math>k(x)</math> e <math>d) w(x)</math> Função exata (linha sólida preta), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;</p>	<p>124</p> <p>128</p> <p>132</p> <p>133</p>
--	---

Figuras 6.25.a-d –	CASO 3:	134
	a) $k(x)$ e c) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha solida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);	
	b) $k(x)$ e d) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;	
Figuras 6.26.a-d –	CASO 4:	135
	a) $k(x)$ e c) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha solida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);	
	b) $k(x)$ e d) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;	
Figuras 6.27.a-d –	CASO 5:	136
	a) $k(x)$ e c) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha solida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);	
	b) $k(x)$ e d) $w(x)$ Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;	
Figura 6.28 –	Modelo físico estudado na estimativa simultânea no campo transformado;	138
Figura 6.29 -	Análise da dependência temporal do fluxo de calor;	139
Figura 6.30.-	Comportamento espacial do coeficiente de transferência de calor efetivo e do número adimensional de Biot;	140
Figura 6.31.-	Comportamento espacial do propriedades termofísicas	142

	(a)condutividade térmica; (b)capacidade térmica; (c)difusividade térmica;	
Figura 6.32.a –	Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa	144
Figura 6.32.b –	Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos;	144
Figura 6.33 –	Analise da convergência da temperatura via Transformação Integral e Método das Linhas ( <i>NDSolve</i> ) para (a) $t=36s$ ; (b) $t=360s$ ; (c) $t=3600s$	148
Figura 6.34.a –	Análise qualitativa da convergência da expansão da Condutividade Térmica $k(x)$ ;	151
Figura 6.34.b –	Análise qualitativa da convergência da expansão da Capacidade Térmica $w(x)$ ;	151
Figura 6.34.c –	Análise qualitativa da expansão de $d(x)$ ;	152
Figura 6.35.a-c –	Comportamento dos coeficientes em função do número de parâmetros adotados na analise de sensibilidade;	154
Figura 6.36.a –	Analise grafica do determinante da matriz de informação, Curva azul: 481 sensores; Curva cyan: 241 sensores; Curva preta: 121 sensores; Curva vermelha: 61 sensores;	155
Figura 6.36.b –	Analise grafica do determinante da matriz de informação, Curva azul: 11 parâmetros; Curva vermelha: 15 parâmetros; Curva cyan: 19 parâmetros	156
Figura 6.37 –	Analise de sensibilidade para a estimativa no campo transformado, Curva azul: $NT=40$ ; Curva preta: $NT=20$ ; Curva vermelha: $NT=10$	160
Figura 6.38.a –	incerteza $0.01^\circ\text{C}$	162
	Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa;	
Figura 6.38.b –	incerteza $0.01^\circ\text{C}$	162
	Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos;	

Figura 6.39.a –	incerteza 0.5°C Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa;	163
Figura 6.39.b –	incerteza 0.5°C Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos;	163
Figura 6.40 –	erro 0.01°C Distribuição de temperatura transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série;	164
Figura 6.41 –	erro 0.5°C Distribuição de temperatura transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série;	165
Figura 6.42 -	Condutividade térmica estimada $k(x)$ – curva preta, limites máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata;	174
Figura 6.43 -	Capacidade térmica estimada – $w(x)$ – curva preta, limites máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata;	176
Figura 6.44 -	Coef. transferência de calor estimado – $h(x)$ – curva preta, limites máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata;	178
Figura 6.45 -	Partição do fluxo de calor no tempo – $f(t)$ – curva preta, limites máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata;	180
Figura 6.46 –	CASO1: Comparação entre a temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta), para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm, para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;	181
Figura 6.47–	CASO2: Comparação entre a temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm, para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f)	182

	1200s;	
Figura 6.48 –	CASO3: Comparação entre a temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm, para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;	183
Figura 6.49 –	CASO4: Comparação entre a temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm, para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;	184
Figura 6.50 –	CASO5: Comparação entre a temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm, para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;	185
Figura 6.51.a-d –	CASO1: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	186
Figura 6.51.e-h –	CASO1: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	186
Figura 6.52.a-d –	CASO2: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	187
Figura 6.52.e-h –	CASO2: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	187
Figura 6.53.a-d –	CASO3: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	188
Figura 6.53.e-h –	CASO3: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	188
Figura 6.54.a-d –	CASO4: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as	189

	experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	
Figura 6.54.e-h –	CASO4: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	189
Figura 6.55.a-d –	CASO5: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	190
Figura 6.55.e-h –	CASO5: Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	190
Figura 6.56 a-b –	Experimento com as placas de alumínio, com detalhe do dispositivo de posicionamento horizontal da câmera.	193
Figura 6.56.c-d -	Identificação dos termopares no experimento de placa vertical	193
Figura 6.57.a –	Temperaturas nos termopares da vertical $tp5$ , $tp6$ e $tp3$ (respectivamente as curvas de baixo para cima) – placas de alumínio	194
Figura 6.57.b –	Temperaturas nos termopares da horizontal $tp2$ , $tp6$ e $tp4$ (respectivamente as curvas de baixo para cima) – placas de alumínio	194
Figura 6.57.c –	Comparação entre as temperaturas do termopar do topo da placa de trás ( $tp3$ – curva vermelha) e do topo da placa da frente ( $tp1$ – curva azul) no experimento com as placas de alumínio	194
Figura 6.58.a –	Valores máximos, médios e mínimos de <i>digital level</i> encontrados na placa voltada para a câmera –placas de alumínio	195
Figura 6.58.b –	Valores máximos, médios e mínimos de <i>digital level</i> encontrados na região do termopar de referência–placas de alumínio	195
Figura 6.59.a –	Temperaturas aquisitadas pelo termopar $tp1$ .	195
Figura 6.59.b –	<i>Digital level</i> médio na região próxima ao termopar $tp1$ .	195

Figura 6.60.a –	Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar <i>tp2</i> .	196
Figura 6.60.b –	Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar <i>tp3</i> .	196
Figura 6.60.c –	Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar <i>tp4</i> .	196
Figura 6.60.d –	Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar <i>tp5</i>	196
Figura 6.60.e –	Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar <i>tp6</i>	196
Figura 6.61 –	Analise de sensibilidade dos parâmetros	200
Figura 6.62.a-e –	Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes valores iniciais: Caso 1 (linha preta); Caso2 (linha vermelha) e Caso 3 (linha azul)	202
Figura 6.63.a-e –	Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes <i>prioris</i> : Casos 1 (linha preta) e caso 4 (linha verde)	203
Figura 6.64.a-d –	Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes <i>prioris</i> : Casos 5 (linha rosa) e Caso 6 (linha azul claro)	204
Figura 6.65 -	Analise dos resíduos das estimativas pelo Caso 1	204
Figura. 6.66.	Netzsch Nanoflash LFA 447/1	206
Figura. 6.67.	Netzsch Nanoflash LFA 447/1 operando no UNIMET, LTTC/PEM, COPPE/UFRJ	206
Figura 6.68.a–	Modelo físico da configuração de placa vertical com aquecimento superior	209
Figura 6.68.b –	Modelo físico da configuração de placa vertical com aquecimento inferior	209
Figura 6.68.c –	Modelo físico da configuração de placa horizontal	210
Figura 6.69.a –	Comparação dos termopares nas duas placas: Experimento de placa na vertical com aquecimento superior	212
Figura 6.69.b. –	Comparação dos termopares nas duas placas:	212

	Experimento de placa na vertical com aquecimento inferior	
Figura 6.69.c. –	Comparação dos termopares nas duas placas:	212
	Experimento de placa na horizontal	
Figura 6.70.a –	Repetibilidade experimental: Experimento de placa na vertical com aquecimento superior	213
Figura 6.70.b. –	Repetibilidade experimental: Experimento de placa na vertical com aquecimento inferior	213
Figura 6.70.c. –	Repetibilidade experimental: Experimento de placa na horizontal	213
Figura 6.71 –	Correlação de digital leve e temperatura: Experimento placa na vertical aquecimento superior	214
Figura 6.72 –	Correlação de digital leve e temperatura: Experimento placa na vertical aquecimento inferior	214
Figura 6.73 –	Correlação de digital leve e temperatura: Experimento placa na horizontal	215
Figura 6.74 –	Posições ao longo do comprimento da placa para exportação das temperaturas experimentais	216
Figura 6.75.a –	Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos – Placa Vertical com Aquecimento Superior	217
Figura 6.75.b. –	Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos – Placa Vertical com Aquecimento Superior	217
Figura 6.75.c. –	Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições: ao longo do comprimento da placa – Placa Vertical com Aquecimento Superior	217
Figura 6.76.a –	Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos – Placa Vertical com Aquecimento Inferior	218
Figura 6.76.b. –	Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos – Placa Vertical com Aquecimento Inferior	218

Figura 6.76.c –	Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições ao longo do comprimento da placa – Placa Vertical com Aquecimento Inferior	218
Figura 6.77.a –	Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos – Placa Horizontal	219
Figura 6.77.b. –	Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos - Placa Horizontal	219
Figura 6.77.c. –	Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições ao longo do comprimento da placa – Placa Horizontal	219
Figura 6.78.a –	Placa Vertical Aquecimento Superior: Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta), para as três configurações experimentais	221
Figura 6.78.b –	Placa Vertical Aquecimento Inferior: Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta), para as três configurações experimentais	222
Figura 6.78.c –	Placa com Aquecimento Horizontal: Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta), para as três configurações experimentais	223
Figura 6.79 –	Análise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura para as três configurações experimentais: Placa vertical com aquecimento superior (curva vermelha); Placa vertical com aquecimento inferior (curva verde); Placa horizontal (curva azul);	223
Figura 6.80 –	Análise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura para a placa	224

vertical com aquecimento superior;	
Curva vermelha – $N_P = 10$	
$(k_{x0}, \bar{k}_1, w_{x0}, \bar{w}_1, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b);$	
Curva preta – $N_P = 12$	
$(k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b);$	
Curva verde – $N_P = 14$	
$(k_{x0}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, w_{x0}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b);$	
Curva azul – $N_P = 16$	
$(k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b);$	
Figura 6.81 –	Comparação entre as temperaturas experimentais (curva cyan) e as temperaturas calculados com os valores iniciais da Tabela 6.40 (curva preta), para diferentes tempos experimentais:
	(a) $t=0s$ ; (b) $t=580s$ ; (c) $2900s$ ;
Figura 6.82 -	Incerteza padrão da temperatura experimental ao longo do comprimento da placa para o Experimento com placa Vertical e aquecimento Superior
Figura 6.83 -	Distribuição de temperatura transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série Experimento com placa Vertical e aquecimento Superior
Figura 6.84 -	Incerteza padrão da temperatura experimental transformada para cada campo transformado, para o Experimento com placa Vertical e aquecimento Superior
Figura 6.85 -	CASO1: Condutividade Térmica Estimada $k(x)$
Figura 6.86 –	CASO1: Capacidade Térmica Estimada – $w(x)$
Figura 6.87 –	CASO1: Coef. Transferência de Calor Estimado – $h(x)$
Figura 6.88 –	CASO1: Variação do Fluxo de calor no tempo – $f(t)$
Figura 6.89.a-f -	CASO1: Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm e para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;
	226
	228
	228
	229
	231
	232
	232
	232
	233

Figura 6.90.a-d -	CASO1: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	234
Figura 6.90.e-h -	CASO1: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	234
Figura 6.91 -	CASO2: Condutividade Térmica Estimada $k(x)$	235
Figura 6.92 -	CASO2: Capacidade Térmica Estimada – $w(x)$	236
Figura 6.93 -	CASO2: Coef. Transferência de Calor Estimado – $h(x)$	236
Figura 6.94 -	CASO2: Variação do Fluxo de calor no tempo – $f(t)$	236
Figura 6.95.a-f -	CASO2: Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm e para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;	237
Figura 6.96.a-d -	CASO2: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	238
Figura 6.96.e-h -	CASO2: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes	238
Figura 6.97 -	CASO3: Condutividade Térmica Estimada $k(x)$	240
Figura 6.98 -	CASO3: Capacidade Térmica Estimada – $w(x)$	241
Figura 6.99 -	CASO3: Coef. Transferência de Calor Estimado – $h(x)$	241
Figura 6.100 -	CASO3: Variação do Fluxo de calor no tempo – $f(t)$	241
Figura 6.101.a-f -	CASO3: Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm e para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;	242
Figura 6.102.a-d -	CASO3: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes	243

Figura 6.102.e-h - CASO3: Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes 243

# **Lista de Tabelas**

Tabela 5.1 –	Especificações técnicas da câmera ThermoVision A10	63
Tabela 6.1.a –	Convergência dos dez primeiros autovalores para o caso do FGM ( $\beta=1$ )	76
Tabela 6.1.b –	Convergência dos dez primeiros autovalores para o caso do FGM ( $\beta=3$ )	76
Tabela 6.2.a –	Convergência dos autovalores para o caso de duas camadas com região de transição ( $\gamma=100$ )	80
Tabela 6.2.b –	Convergência dos autovalores para o caso de duas camadas com região de transição ( $\gamma=500$ )	80
Tabela 6.3 –	Convergência da temperatura para o caso de duas camadas com região de transição, para ( $\gamma=1000$ )	82
Tabela 6.4.a –	Influência da ordem da expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o exemplo de duas camadas com $\gamma=20$ .	89
Tabela 6.4.b –	Influencia da ordem da expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o exemplo de duas camadas com $\gamma=200$ .	89
Tabela 6.5 –.	Convergência dos dez primeiros autovalores para o exemplo de propriedades randomicas com $G=1$ e $M=60$ .	90
Tabela 6.6.a –	Influência da ordem na expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o caso de propriedades randomicas com $G=0.2$ e $N=130$ .	91
Tabela 6.6.b –	Influência da ordem na expansão do coeficiente na convergência dos autovalores para o caso de propriedades randomicas com $G=0.8$ e $N=130$ .	92
Tabela 6.7 –	Valores utilizados na geração dos dados experimentais simulados, Kumlutas et.al.(2003)	96
Tabela 6.8 –	Valores exatos, iniciais, passo de procura e limites maximos e minimos para o problema inverso de estimativa de condutividade térmica.	108

Tabela 6.9 –	Parâmetros estimados para os cinco casos analisados (Caso 1: priori Uniforme; Caso 2: priori Normal Lewis-Nielsen c/ 40% desvio padrão; Caso 3: priori Normal Lewis-Nielsen c/ 80% desvio padrão; Caso 4: priori Normal Maxwell c/ 40% desvio padrão; Caso 5: priori Normal Maxwell c/ 80% desvio padrão)	110
Tabela 6.10 –	Valores usados na geração dos dados experimentais simulados	119
Tabela 6.11 –	Valores exatos, iniciais, passo de procura e limites dos intervalos usados na solução inversa.	126
Tabela 6.12 –	Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.	139
Tabela 6.13 –	Parametros estimados para os 5 casos analisado.	130
Tabela 6.14 –	Valores usados na geração dos dados experimentais simulados	143
Tabela 6.15.a –	Analise da convergência da expansão da temperatura para t=360s	145
Tabela 6.15.b –	Analise da convergência da expansão da temperatura para t=1200s	146
Tabela 6.15.c –	Analise da convergência da expansão da temperatura para t=3600s	147
Tabela 6.16 –	Funções e parâmetros a serem estimados	150
Tabela 6.17 –	Filtros utilizados nas expansões das funções	150
Tabela 6.18.a –	Análise quantitativa da convergência da expansão da Condutividade Térmica $k(x)$ ;	151
Tabela 6.18.b –	Análise quantitativa da convergência da expansão da Capacidade Térmica $w(x)$ ;	151
Tabela 6.18.c –	Análise quantitativa da convergência da expansão de $d(x)$ ;	152
Tabela 6.19.a –	Número de sensores e freqüência de medidas no tempo	153
Tabela 6.19.b –	Número de Dados Experimentais	153
Tabela 6.20 –	Número de parâmetros avaliados na analise de sensibilidade do problema	153

Tabela 6.21.a –	Analise quantitativa do determinante da matriz de informação	156
Tabela 6.21.b –	Análise quantitativa do determinante da matriz de informação	156
Tabela 6.22 –	Analise do Erro Relativo na Integração Numérica dos Dados Experimentais	158
Tabela 6.23.a –	Análise do número de dados experimentais na estimativa no campo de temperaturas	159
Tabela 6.23.b –	Análise do número de dados experimentais na estimativa no campo transformado	159
Tabela 6.24 –	Analise quantitativa do determinante da matriz de informação no campo transformado	160
Tabela 6.25. –	Geração dos dados experimentais simulados	161
Tabela 6.26. –	Analise da Temperatura Experimental Transformada para o incerteza experimental 0.01°C	164
Tabela 6.27. –	Analise da Temperatura Experimental Transformada para o incerteza experimental 0.5°C	165
Tabela 6.28-	Estimativas Realizadas	166
Tabela 6.29-	Dados de Entrada e de Saída das Estimativas – CASO1	168
Tabela 6.30-	Dados de Entrada e de Saída das Estimativas – CASO2	169
Tabela 6.31-	Dados de Entrada e de Saída das Estimativas – CASO3	170
Tabela 6.32-	Dados de Entrada e de Saída das Estimativas – CASO4	171
Tabela 6.33-	Dados de Entrada e de Saída das Estimativas – CASO5	172
Tabela 6.34 –	Definição dos dados de entrada para a solução inversa	199
Tabela 6.35 –	Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso	199
Tabela 6.36 –	Resultado das estimativas para os 6 diferentes casos.	201
Tabela 6.37 –	Propriedades termofísicas das amostras de alumínio das placas ensaiadas, em função da temperatura, obtidas com o Nanoflash Netzsch LFA 447/1 e comparadas com valores da literatura a 20 C para alumínio puro [Bejan (1993)].	207
Tabela 6.38 –	Capacidades térmicas do alumínio estimadas,	208

	comparadas com as obtidas pelo Nanoflash Netzsch LFA 447/1 e com valores da literatura a 20 °C para alumínio puro [Bejan (1993)]	
Tabela 6.39.a –	Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, para as três configurações experimentais	221
Tabela 6.39.b –	Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, para as três configurações experimentais	222
Tabela 6.39.c –	Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, para as três configurações experimentais	223
Tabela 6.40 -	Valores iniciais, minimos e máximos para cada parâmetro nas estimativas	225
Tabela 6.41 –	Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.	227
Tabela 6.42 -	Analise das incertezas da Temperatura Experimental Transformada	229
Tabela 6.43 -	Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 1	231
Tabela 6.44 -	Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 2	235
Tabela 6.45 -	Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.	239
Tabela 6.46 -	Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 3	240
Tabela 6.47 -	Análise das propriedades termofísicas das amostras de baquelite das placas ensaiadas;	244

## Lista de Símbolos

$CI(\mathbf{x})$	Condição inicial
$C_{pd}$	Calor específico das partículas dispersas na matriz polimérica
$C_{pm}$	Calor específico da matriz polimérica
$DL$	Nível digital, “ <i>Digital Level</i> ”
$d(\mathbf{x})$	Coeficiente do operador de dissipação linear
$d_f(x)$	Filtro para o coef. do operador de dissipação linear
$f(t)$	Variação temporal do fluxo de calor
$G$	Ganho na amplitude da variação rândomica
$h(\mathbf{x})$	Coeficiente de transferência de calor
$h_c$	Coeficiente de transferência de calor por convecção natural
$h_{ef}$	Coeficiente de transferência de calor efetivo
$h_r$	Coeficiente de transferência de calor por radiação
$k(\mathbf{x})$	Coeficiente do operador difusivo ou condutividade térmica
$k_d$	Condutividade térmica das partículas dispersas na matriz polimérica
$k_f(x)$	Filtro para condutividade térmica
$k_m$	Condutividade térmica da matriz polimérica
$L$	Comprimento adimensional
$L_x$	Comprimento do domínio na direção “ $x$ ”
$L_y$	Comprimento do domínio na direção “ $y$ ”
$L_z$	Comprimento do domínio na direção “ $z$ ”
$N_d$	Ordem de truncamento da expansão do coef. do operador de dissipação linear
$N_{dF}$	Número de parâmetros a serem estimados na função filtro $d_f(x)$
$N_i$	Ordem de truncamento da expansão do problema de autovalor
$N_k$	Ordem de truncamento da expansão do coef. do operador difusivo
$N_{kF}$	Número de parâmetros a serem estimados na função filtro $k_f(x)$
$N_P$	Numero de parâmetros a ser estimados
$N_t$	Numeros de medidas no tempo
$NT$	Ordem de truncamento da expansão da temperatura
$N_w$	Ordem de truncamento da expansão do coef. do operador transiente

$N_{wF}$	Número de parametros a serem estimados na função filtro $w_f(x)$
$N_x$	Número de medidas espaciais (sensores)
<i>Norma</i>	Integral de normalização
$P(\mathbf{x},t)$	Termo fonte da equação de energia
$\mathbf{P}$	Vetor de parâmetros a ser estimado
$q_w(\mathbf{x},t)$	Fluxo de calor
$q_{inf}$	Fluxo de calor oriundo da potência dissipada na resistência
$t$	Variavel tempo
$tp$	Termopar
$T(\mathbf{x},t)$	Temperatura
$w(\mathbf{x})$	Coeficiente do operador transiente ou capacidade térmica
$w_f(x)$	Filtro para capacidade térmica
$\mathbf{x}$	Vetor posição tridimensional ( $x,y,z$ )
$x$	Coordenada longitudinal
$x_{CONT}$	Posição da frente de transição das propriedades termofísicas
$\mathbf{Y}$	Vetor de medidas experimentais

### Letras Gregas

$\alpha$	Difusividade térmica
$\alpha_k, \beta_k$	Coeficientes das condições de contorno presentes na formulação geral
$\beta$	Argumento que define a variação da propriedade termofísica na forma funcional do FGM
$\varepsilon$	Emissividade
$\gamma$	Argumento que define a variação da propriedade termofísica na forma funcional do degrau
$\Gamma$	Autovalores no problema de autovalor dos coeficientes
$\delta$	Parâmetro na variação da concentração de partículas
$\lambda$	Autovalores no problema de autovalor auxiliar
$\mu$	Autovalores no problema de autovalor original
$\nu$	Autovalores no problema de autovalor dos coeficientes
$\phi(x)$	Distribuição de concentração de particulas
$\rho_d$	Massa específica das particulas dispersas na matriz polimérica
$\rho_m$	Massa específica da matriz polimérica
$\sigma$	Desvio padrão

$\psi$	Autofunção no problema de autovalor original
$\Omega$	Autofunção no problema de autovalor auxiliar

### Subscritos e Superescritos

$i,j,k,n,m$	Ordem dos autovalores e autofunções
$amb$	Ambiente
$calc$	Calculada
$exp$	Experimental
$max$	Máximo
$min$	Mínimo
$-$	Trasformada integral
$\sim$	Autofunção normalizada
$\infty$	Ambiente externo

# Capítulo 1

---

## 1. Introdução

### 1.1. Motivação e Objetivos

A análise de problemas difusivos em meios heterogêneos aparece em diferentes contextos da física e da engenharia. No contexto de condução de calor em sólidos heterogêneos, identificam-se algumas diferentes situações que geralmente referem-se a esta terminologia, incluindo compósitos com micro-estrutura não uniforme, compósitos de múltiplas camadas, sólidos com inclusões, materiais porosos não-homogêneos, superfícies soldadas ou coladas, etc. O resultado da heterogeneidade pode ser expresso através da variação espacial das propriedades termofísicas concernentes, seja de forma ordenada ou de forma randômica. Recentemente, renovou-se o interesse na análise de condução de calor em meios heterogêneos sob a luz dos recentes desenvolvimentos na fabricação de novos materiais que têm suas propriedades mudadas de uma forma pré-projetada como os FGM (*functionally graded materials*) e os nano-compósitos, quando as propriedades do material são estabelecidas *a priori* de modo a atenderem uma determinada aplicação térmica, ou mesmo mais de uma função física, em muitos casos associadas a condições de operação e ambientais extremas.

Problemas de condução de calor em meios heterogêneos envolvem variações espaciais das propriedades termofísicas em diferentes formas, dependendo do tipo de heterogeneidade envolvida, como variações em larga escala (FGM), variações abruptas em compósitos laminados, e em variações randômicas devido a flutuações locais de concentração em sistemas dispersos. Em todas essas situações uma representação acurada do processo de transferência de calor requer uma solução local detalhada do comportamento da temperatura, geralmente associada a soluções numéricas discretas com

malhas suficientemente refinadas e com esforço computacional significativo, e/ou abordagens semi-analíticas para formas funcionais específicas ou simplificadas.

No que concerne à solução direta de problemas de condução de calor em meios heterogêneos, o procedimento de transformação integral empregado neste trabalho advém da aplicação da Técnica de Transformação Integral Clássica [Mikhailov & Ozisik (1984)]. A aplicação deste método resulta em um sistema transformado linear e desacoplado, passível de solução analítica. Por outro lado, o problema auxiliar de autovalor requerido por essa solução exata demanda a utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada [Cotta (1993)], que já tem sido aplicada à solução de problemas de autovalor em casos de coeficientes variáveis e domínios irregulares. Uma outra possibilidade aqui explorada é expressar os próprios coeficientes variáveis como expansões em autofunções. Este procedimento pode ser particularmente vantajoso para a avaliação totalmente analítica dos coeficientes do sistema algébrico no campo transformado. Sendo assim, todas as manipulações podem ser expressas em termos de autofunções, permitindo em geral a integração analítica das mesmas, e sua pronta derivação em ambiente de computação simbólica.

Para o tratamento e simulação de problemas de difusão em meios heterogêneos não é, entretanto, suficiente desenvolver um técnica de solução do problema direto que capte essas diferentes formas de variação espacial dos coeficientes na formulação. Como os materiais característicos dessas aplicações apresentam infinitas possibilidades de concepção, fabricação e mesmo auto-estruturação, a caracterização de suas propriedades físicas locais deve ser feita praticamente caso a caso, na ausência de um caminho universal para identificação de morfologia e propriedades. Nesse sentido, faz-se essencial o desenvolvimento simultâneo de uma metodologia para identificação das propriedades físicas com suas variações espaciais, via solução do problema inverso correspondente, para realimentar a solução do problema direto na desejada simulação do fenômeno físico correspondente.

Dentre as várias técnicas de solução de problemas inversos disponíveis, uma abordagem bastante comum está relacionada à minimização de uma função objetivo que geralmente envolve a diferença quadrática entre os valores medidos e estimados, como por

exemplo o funcional de mínimos quadrados, assim como algumas variantes do mesmo, que incluem termos de regularização.

A despeito do fato da minimização do funcional de mínimos quadrados ser indiscriminadamente utilizada, ela só coincide com as estimativas de máxima verossimilhança se forem válidas as hipóteses estatísticas de: erros de medidas aditivos, não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio padrão constante, e que somente as variáveis medidas que aparecem na função objetivo contêm erro e não se tem informação *a priori* dos parâmetros e das suas incertezas. Embora muito popular e útil em muitas situações, a minimização do funcional de mínimos quadrados é um estimador dito frequentista. Em contraposição, o presente trabalho propõe a utilização de uma abordagem dita Bayesiana na estimativa dos parâmetros. Um estimador Bayesiano está basicamente relacionado com a análise estatística de uma densidade de probabilidade *a posteriori*, que é a probabilidade condicional dos parâmetros dadas as medidas, enquanto que a verossimilhança é a probabilidade condicional das medidas dados os parâmetros.

Supondo que os parâmetros e as medidas são independentes, com distribuição Gaussiana, médias e matrizes de covariância conhecidas, e que os erros de medidas são aditivos, uma expressão em forma fechada pode ser derivada para a densidade de probabilidade *a posteriori*. Nesse caso, o estimador que maximiza esta densidade de probabilidade *a posteriori* pode ser expresso na forma de um problema de minimização envolvendo a função objetivo *Maximum a Posteriori*.

Por outro lado, se diferentes densidades de probabilidade *a priori* são assumidas para os parâmetros e/ou a distribuição *a posteriori* torna-se não diferenciável, consequentemente não permitindo tratamento analítico, deve-se empregar métodos numéricos de amostragem da distribuição *a posteriori*, como por exemplo, o Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), e assim a inferência sobre a probabilidade *a posteriori* é obtida através das amostras desta distribuição de interesse.

Este trabalho ilustra a utilização da inferência Bayesiana na estimativa de coeficientes variáveis espacialmente em problemas de condução de calor em meios heterogêneos, empregando o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC). Este procedimento de amostragem da distribuição *a posteriori* em geral é a tarefa computacional mais custosa na solução de um problema inverso via inferência Bayesiana, uma vez que o

problema direto é calculado a cada estado da Cadeia de Markov. Neste contexto a utilização de uma solução direta rápida, precisa e de fácil implementação computacional, é de extrema relevância. Sendo assim, a abordagem via transformação integral anteriormente discutida mostra-se bastante interessante e oportuna uma vez que todas as etapas no método são feitas analiticamente uma única vez, via computação simbólica, e a única tarefa numérica repetitiva consiste na solução de um problema de autovalor matricial.

Na combinação dessas metodologias de solução dos problemas direto e inverso foram aqui introduzidos dois aspectos bastante originais. Em primeiro lugar, como discutido anteriormente, as propriedades variáveis foram expressas como expansões em autofunções na solução do problema direto, o que permitiu a estimativa de um número significativamente reduzido de parâmetros na solução do problema inverso, em comparação com outras formas mais comuns de parametrização. Outro avanço do presente estudo foi a proposição da solução do problema inverso no campo transformado, a partir da transformação integral dos dados experimentais de temperatura, assim colapsando os dados experimentais nas variáveis espaciais em alguns poucos campos transformados. Assim, a estimativa no campo transformado oferece uma alternativa ao procedimento usual de estimativa no campo de temperaturas, de forma particularmente atraente para situações experimentais em que se tem um grande número de medidas espaciais.

Com o objetivo de estimar propriedades espacialmente variáveis em meios heterogêneos o emprego de uma técnica experimental que permita maximizar a quantidade de informação presente nas medidas é de fundamental importância. Além disso, como a morfologia do meio influencia diretamente o comportamento espacial das propriedades, torna-se crítico não perturbar a estrutura em análise com a introdução de um grande número de sensores individuais intrusivos, como no caso de termopares ou outros sensores de contato. Neste sentido a técnica não-intrusiva de termografia por câmera de infravermelho permite a aquisição de um grande volume de medidas, tanto no tempo quanto espacialmente, abrindo assim novas perspectivas para a identificação local e precisa de propriedades termofísicas e condições de contorno em meios heterogêneos.

O presente trabalho então almeja avançar simultaneamente nessas três frentes, desenvolvendo soluções inovadoras para os problemas direto, inverso e experimental, e com auxílio de computação simbólica, desenvolver ferramentas de análise para

identificação de propriedades e condições de contorno em problemas de condução de calor em meios heterogêneos.

## 1.2. Organização do Trabalho

No capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura disponível referente aos temas abordados, focando principalmente nos métodos de solução direta de problemas de transferência de calor em meios heterogêneos, nas técnicas de solução de problemas inversos em condução de calor e, mais especificamente, soluções via inferência Bayesiana e, por fim, na utilização de termografia por infravermelho para análise de problemas inversos.

No capítulo 3 são apresentados os fundamentos teóricos que embasam a Técnica de Transformação Integral empregada na solução do problema direto de condução de calor com coeficientes variáveis.

No capítulo 4 são apresentados os fundamentos teóricos para a solução de problemas inversos sob a visão freqüentista, e de forma mais detalhada sob a abordagem Bayesiana aqui empregada.

O capítulo 5 apresenta a síntese do aparato experimental aqui proposto para medidas de temperatura em problemas de condução de calor, detalhando o procedimento experimental a partir da técnica de termografia por câmera de infravermelho.

No capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos para problemas diretos e inversos a partir das formulações apresentadas nos capítulos 3 e 4, bem como os resultados experimentais encontrados e as validações necessárias.

No capítulo 7 são apresentadas conclusões e propostas para trabalhos futuros na técnica de solução do problema direto, na técnica de estimativa dos coeficientes e na identificação experimental de propriedades termofísicas via termografia por infravermelho.

# Capítulo 2

---

## 2. Revisão Bibliográfica

A seguir apresenta-se a revisão de literatura que norteou o presente trabalho, em seus mais diferentes aspectos, quais sejam: meios heterogêneos, o método de transformação integral, a solução de problemas inversos de condução de calor, aplicação de inferência Bayesiana em transferência de calor e o uso de termografia por câmera de infravermelho na identificação de propriedades termofísicas.

### 2.1. Meios Heterogêneos: Problema Direto e Modelo Físico

A revisão da literatura referente aos estudos de condução de calor em meios heterogêneos se concentrou na análise de contribuições anteriores que adotaram modelos teóricos macroscópicos para as propriedades termofísicas efetivas, bem como na identificação experimental desses parâmetros. Alguns poucos trabalhos foram também citados que percorreram o caminho de reconstruir o comportamento macroscópico a partir da análise computacional da transferência de calor na micro-escala.

Lin (1992) relata um estudo numérico em condução de calor unidimensional em meios heterogêneos para o caso de propriedades variando randomicamente na coordenada espacial e determina a adequação do modelo para caso o de se empregar uma propriedade efetiva constante.

Qiulin *et al.* (1999) relatam, para o caso de um material FGM (*functionally graded materials*), um estudo comparativo entre a utilização de uma condutividade térmica

equivalente e da utilização da condutividade térmica efetiva como sendo uma função da composição dos materiais compósitos.

Tavman & Akinci (2000) apresentam modelos e determinações experimentais para as condutividades térmicas transversais de sistemas dispersos de duas fases, na forma de compósitos poliméricos de polietileno de alta densidade e fibra de vidro.

Fudym *et al.* (2002) propõem a extensão do método semi-analítico de quadrupolos térmicos na solução de problemas de difusão de calor em meios heterogêneos. A aplicação deste método é apresentada na solução de um problema de duas camadas com variação unidimensional das propriedades termofísicas.

Sutradhar *et al.* (2002) propõem a utilização do método de funções de Green na solução numérica do problema de difusão de calor tridimensional transiente em materiais FGM (*functionally graded materials*).

Putnam *et al.* (2003) apresentam um estudo experimental da condutividade térmica de compósitos de nano-partículas de alumínio em uma matriz polimérica baseado no método  $3\omega$  e compararam com resultados teóricos de propriedade efetiva.

Danes *et al.* (2003) apresentam modelos para a condutividade térmica de meios heterogêneos, representados por matrizes poliméricas com partículas metálicas, discutindo o desvio crescente dos modelos quando as concentrações de partículas metálicas assumem valores mais elevados.

Fudym *et al.* (2004) estudam a difusão de calor em materiais estratificados onde as camadas são paralelas à direção principal do fluxo de calor. Na solução deste problema foi empregada a técnica semi-analítica de quadrupolos térmicos desenvolvida em trabalhos anteriores.

Sutradhar e Paulino (2004) apresentam a aplicação do método de elemento de contorno usando transformada de Laplace e a aproximação de Galerkin na solução do problema de condução de calor transiente em materiais FGM (*functionally graded materials*).

O trabalho de Zhang et.al. (2005) propõe um modelo baseado em mistura randômica para o cálculo da condutividade térmica efetiva de materiais compósitos e investiga a influência da fração volumétrica das partículas e a razão da condutividade térmica da partícula e da matriz na previsão desta propriedade.

Prasher (2006) apresenta uma perspectiva histórica do desenvolvimento de materiais de interface térmica (TIMs) e discute as vantagens e desvantagens da aplicação de nanopartículas e nanotubos de carbono nestes materiais. Algumas direções para o futuro desta área são apresentadas segundo a visão do autor.

Jiang e Souza (2007) demonstram a utilização de uma nova variante do método numérico sem-malha na predição da condutividade térmica efetiva de materiais envolvendo configuração microscópica complexa de multicomponentes.

Dai et al. (2007) obtém soluções numéricas para condução de calor em FGM's, empregando o método das linhas e diferentes modelos para a variação espacial das propriedades termofísicas.

Ganapathysubramanian e Zabaras (2008) apresentam uma estratégia estocástica alternativa de escalonamento que incorpora os efeitos das variações da condutividade térmica da micro-escala na análise térmica de fenômenos na macro-escala.

Matt e Cruz (2008) apresentam um esquema numérico baseado em elementos finitos com discretização isoparamétrica de segunda ordem da célula unitária do problema de condução de calor, para calcular a condutividade térmica macroscópica efetiva de compósitos com microestruturas gerais tridimensionais e resistência térmica de contato.

Evans *et.al.* (2008) apresentam um modelo de homogeneização em três níveis para predizer a condutividade térmica efetiva de nanofluidos e nano-compósitos.

## **2.2. Transformação Integral para Condução de Calor em Meios Heterogêneos**

A solução analítica de problemas de difusão foi analisada e compilada em Mikhailov e Ozisik (1984), onde sete diferentes classes de formulações em difusão de calor e massa são sistematicamente resolvidos pela Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT). As soluções formais obtidas são aplicáveis a um amplo número de problemas em transferência de calor e massa, parcialmente ilustrados no referido trabalho, incluindo alguns exemplos de difusão em meios heterogêneos. Mais tarde, a abordagem clássica ganhou uma implementação híbrida numérico-analítica e ficou conhecida como Técnica da

Transformada Integral Generalizada (GITT) [Cotta (1990), Cotta (1993), Cotta (1994), Cotta & Mikhailov (1997), Cotta (1998), Santos et al. (2001), Cotta et al. (2005), Cotta & Mikhailov (2006)], oferecendo maior flexibilidade no tratamento de problemas antes tidos como não-transformáveis, incluindo, entre outros, a análise de problemas não-lineares de difusão e convecção-difusão.

A solução do problema de autovalor associado à solução analítica por transformação integral é a principal tarefa computacional deste procedimento, quando se deseja oferecer valores numéricos acurados para os respectivos autovalores e autofunções normalizadas que compõem a expansão inerente ao método de transformação integral. Em algumas situações, dependendo da especificação da forma funcional dos coeficientes, pode-se encontrar uma solução explícita para as autofunções em termos de funções especiais bem documentadas em livros textos, e mais recentemente, disponíveis em pacotes de computação simbólica [Wolfram (2005)]. Por outro lado, para formulações mais gerais do problema de autovalor, algumas abordagens computacionais foram desenvolvidas oferecendo uma aproximação numérica dos autovalores e das autofunções, como o método de Runge-Kutta com transformação de Pruffer [Bailey *et al.* (1978), Bailey *et al.* (1991)], o método de contagem de sinal [Mikhailov & Vulchanov (1983), Cotta & Nogueira (1988)] e a própria GITT [Mikhailov & Cotta (1994), Oliveira *et al.* (1995), Sphaier & Cotta (2000)].

Já inseridos no contexto do presente estudo, o método de transformação integral foi empregado na análise de problemas de condução de calor em meios heterogêneos, incluindo variações de ordens de grandeza, variações abruptas e variações randômicas das propriedades termofísicas [Naveira *et al.* (2008a), Naveira *et al.* (2008b), Naveira-Cotta *et al.* (2009), e Cotta *et al.* (2009a)]. Os problemas de autovalor com coeficientes espacialmente variáveis foram então resolvidos com a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GIIT), e os próprios coeficientes variáveis foram expandidos em autofunções, de forma a permitir uma avaliação totalmente analítica do sistema transformado para determinação dos autovalores e autofunções correspondentes.

Recentemente, Cotta *et al.* (2009b) e Sphaier *et al.* (2009), unificaram os conhecimentos disponíveis na utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) em um ambiente de desenvolvimento construído na plataforma de computação simbólica Mathematica v7.0 [Wolfram (2008)], que gerou o código denominado UNIT

("UNified Integral Transforms") para solução automática de problemas difusivos e convectivo-difusivos por transformação integral.

## 2.3. Problemas Inversos em Condução de Calor

A literatura sobre problemas inversos em condução de calor é muito vasta [Beck & Arnold(1977), Alifanov (1994), Ozisik & Orlande (2000)], e portanto focamos aqui apenas em trabalhos que tratam de estimativas de propriedades termofísicas com variações espaciais, e forneceram subsídios para o estudo aqui apresentado.

Flach e Ozisik (1989) aplicam o método de Levenberg-Marquardt na estimativa simultânea da condutividade e da capacidade térmicas variáveis unidimensionalmente. As propriedades térmicas desconhecidas foram representadas por *B-splines* em cada trecho e o problema inverso foi baseado nas estimativas de um número discreto de parâmetros. Na solução do problema direto os autores fizeram uso da solução analítica pela técnica da transformação integral.

Huang e Ozisik (1990) apresentam uma metodologia de integração direta para determinar estimativas iniciais suficientemente acuradas para o processo de estimativa de parâmetros. Os autores aplicaram o método de diferenças finitas na solução do problema direto e o método de Levenberg-Marquardt para a estimativa simultânea dos coeficientes de uma representação linear unidimensional da variação da condutividade e da capacidade térmicas.

Lesnic *et al.* (1999) investigam a identificação da variação unidimensional da condutividade térmica supondo esta constante em trechos e a localização da descontinuidade desconhecida. Na solução do problema direto os autores adotaram o método de elementos de contorno e utilizaram uma rotina da biblioteca científica NAG na minimização do funcional de mínimos quadrados.

O trabalho de Divo *et al.* (2000) utiliza Algoritmo Genético na minimização do funcional de mínimos quadrados para estimar a variação espacial da condutividade térmica de materiais heterogêneos. Na solução do problema direto os autores utilizam o método de elementos de contorno.

Rodrigues *et al.* (2004) adotam a abordagem de estimativa de função baseada no método do gradiente conjugado para estimar simultaneamente o coeficiente de difusão e o termo fonte, ambos variáveis espacialmente, em um problema unidimensional de difusão de calor.

Remy e Degiovanni (2005) propõem um aparato experimental para medição de difusividade e condutividade térmica de líquidos, empregando o método de quadrupolos térmicos na solução direta/inversa de problemas de condução de calor.

Colaço *et al.* (2006a) apresentam um revisão dos métodos de solução de problemas inversos e de problemas de otimização de uma única função objetivo. São discutidas as vantagens e desvantagens das técnicas estocásticas e determinísticas de minimização e é introduzido um método híbrido. Por fim, os autores apresentam algumas aplicações destes métodos em problemas de transferência de calor.

Colaço *et al.* (2006b) empregaram uma versão do método de soluções fundamentais (MFS) para estimar, usando apenas medidas não intrusivas, o termo fonte variável espacialmente em um problema multidimensional de condução de calor linear.

Huttunen *et al.* (2006) propõem um método para estimar condutividade térmica e coeficiente de perfusão em tecidos heterogêneos usando aquecimento induzido por ultra-som e imagens térmicas por MRI. Os parâmetros desconhecidos foram assumidos variáveis espacialmente e constantes em trechos. Neste trabalho, as estimativas foram baseadas no método de Gauss-Newton para a minimização da função objetivo de *Maximum a Posteriori*.

Huang e Huang (2007) apresentam a estimativa simultânea da variação espacial unidimensional da condutividade e da capacidade térmica sob a forma de estimativa de função adotando a abordagem de nuvens de pontos. Na solução inversa os autores utilizaram o método de Levenberg-Marquardt na minimização do funcional de mínimos quadrados.

Sousa *et al.* (2008) propõem o uso do método de funções de Green e o conceito de sistema dinâmico recursivo como base para o procedimento de solução inversa de problemas de condução de calor multidimensional.

## 2.4. Problemas Inversos via Inferência Bayesiana

Esta seção resume a literatura empregada nos estudos de Inferência Bayesiana para análise de problemas inversos, relevantes à aplicação pretendida em condução de calor em meios heterogêneos, incluindo livros-texto que serviram de base ao entendimento desta metodologia, e artigos técnicos mais direcionados à aplicação aqui tratada.

Migon e Gamerman (1999) em seu livro-testo desenvolveram uma análise detalhada da utilização da abordagem clássica e Bayesiana no processo de estimativa, apresentando importantes resultados e comentando os aspectos positivos e negativos de cada abordagem.

Leonard e Hsu (1999) oferecem uma introdução aos conceitos de inferência, descrevendo e desenvolvendo teoremas e procedimentos que compreendem importantes fundamentos para a abordagem Bayesiana.

Kaipio e Somersalo (2004) dedicam seu livro ao estudo de problemas inversos em que a análise estatística dos erros gerados pela própria modelagem é enfatizada. Este material é também muito importante para a conexão entre a Inferência Bayesiana e a solução de problemas inversos em aplicações na engenharia.

Wang e Zabaras (2004) introduzem a utilização da abordagem Bayesiana, do método de amostragem de Monte Carlo via Cadeia de Markov e da utilização da distribuição *a priori* como regularizadora da solução inversa em problemas de transferência de calor.

Wang e Zabaras (2005) apresentam um estudo da aplicação da abordagem Bayesiana na estimativa dos coeficientes da expansão do fluxo de calor e do termo fonte, variáveis no tempo e no espaço, em termos de uma função de base. Os autores discutem a utilização de modelos hierárquicos para descrever automaticamente os parâmetros de regularização utilizados na distribuição *a priori* de Campos Markovianos Aleatórios (MRFs).

Gamerman & Lopes (2006) em seu livro-texto abordam os conceitos fundamentais da teoria de Probabilidade e Inferência assim como noções de simulação, inferência Bayesiana e cadeias de Markov. Vários exemplos de inferência Bayesiana com

ênfase em modelos dinâmicos e modelos hierárquicos são apresentados e discutidos sobre o ponto de vista de implementações, convergência e limitações dos algoritmos envolvidos.

Zabaras (2006) apresenta uma ampla revisão de problemas inversos em transferência de calor, com ênfase na utilização de métodos estocásticos e um aprofundamento no uso da inferência Bayesiana. São apresentados exemplos da solução inversa de problemas lineares de condução de calor a uma e duas dimensões espaciais, mais especificamente na identificação do fluxo de calor nos contornos.

Mota *et al.* (2007) utilizam a abordagem Bayesiana para estimar simultaneamente os coeficientes de uma aproximação exponencial da dependência da condutividade térmica e da capacidade térmica com a temperatura e a variação unidimensional do fluxo de calor sob a forma de nuvem de pontos. A solução do problema inverso foi baseada na utilização do método de Gauss-Newton na minimização da função objetivo de *Maximum a Posteriori*.

Mota et al. (2007) compararam os métodos de Gauss de minimização da função objetivo de *Maximum a Posteriori* e o de Monte Carlo por cadeia de Markov via algoritmo de Metropolis-Hastings, na estimativa simultânea dos coeficientes de uma aproximação exponencial da dependência da condutividade térmica e da capacidade térmica com a temperatura e a variação unidimensional do fluxo de calor sob a forma de nuvem de pontos.

Kolemainen *et al.* (2007) utilizam a abordagem Bayesiana para estimar a variação espacial da condutividade e a capacidade térmica em um problema inverso de tomografia térmica. Os autores utilizam informação *a priori* de Campos Aleatórios Markovianos (MRF's) para os coeficientes de uma aproximação constante em trechos para propriedades desconhecidas, e algoritmo de Newton na solução do problema de otimização de *Maximum a Posteriori*.

Orlande *et al.* (2008) propõem a interpolação da função de verossimilhança em termos de funções de base radial na solução de problemas de estimativa de parâmetros via inferência Bayesiana, utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov.

Parthasarathy e Balaji (2008) tratam de um problema de estimativa de parâmetros, condutividade térmica e coeficiente de transferência de calor, utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings. Os autores investigam o efeito da escolha da distribuição

*a priori* na performance da solução inversa para diferentes níveis de ruídos nos dados experimentais.

Já no contexto do presente trabalho, Cotta *et al.* (2009b) e Cotta *et al.* (2009c), apresentam o uso combinado do método de transformação integral e da inferência bayesiana, na solução de problemas inversos em transferência de calor, incluindo a análise de problemas de condução em meios heterogêneos e convecção de calor em microcanais.

## 2.5. Termografia em Problemas Inversos

Nesta seção faz-se uma síntese dos trabalhos revisados para implementação da técnica de termografia por câmera de infravermelho como coadjuvante na solução de problemas inversos em condução de calor, como aqui pretendido.

Krapez *et al.* (2004) apresentam uma técnica de medida da difusividade térmica de placas não-homogêneas utilizando o método Flash e termografia por infravermelho. Uma máscara em forma de malha é empregada para promover uma irradiação não-uniforme da amostra a partir da fonte térmica (flash) e dessa forma a razão sinal-ruído é magnificada.

Plana *et al.* (2005) apresentam um estudo sobre a identificação simultânea de propriedades termofísicas em problemas de condução de calor de meios ortotrópicos utilizando medidas termográficas.

O trabalho de Fudym (2006) faz uma revisão de desenvolvimentos recentes no processamento de imagens infravermelhas dedicados ao mapeamento de propriedades termofísicas em transferência de calor. Também mostra como o formalismo do método de quadrupolos térmicos pode ser utilizado conjuntamente com o processamento de imagens térmicas na caracterização de meios heterogêneos.

Astarita et al. (2006) também apresentam uma revisão do emprego da termografia por infravermelho como método óptico em transferência de calor e mecânica dos fluidos. A ênfase dessa revisão está na medição de fluxos de calor convectivos, bem como na investigação de campos de escoamento sobre superfícies complexas.

Fudym *et al.* (2007) tratam da estimativa da variação bidimensional da condutividade térmica utilizando um método auto-regressivo, a partir da análise de imagens transientes de infravermelho bidimensionais de um experimento de difusão de calor tridimensional.

Magnani e Silva (2007) apresentam um estudo de caso onde a termografia por infravermelho é utilizada na estimativa de valores constantes da condutividade e da capacidade térmica de um material, via minimização do funcional de mínimos quadrados.

Zmywaczyk *et al.* (2007) tratam da estimativa simultânea da capacidade e da condutividade térmica nas direções radial e axial de uma amostra cilíndrica, empregando o método de Levenberg-Marquardt. Dois aquecedores de filme fino foram empregados simultaneamente, em superfícies radiais e axiais. Uma câmera termográfica foi empregada nas medidas de temperatura, que revelou uma certa heterogeneidade no aquecimento provido pelos aquecedores, o que exigiu a caracterização dos aquecedores antes da solução do problema inverso.

Fan *et al.* (2008) apresentam a utilização do método de volumes finitos em conjunto com um método de correção unidimensional (MODCM) para estimar a distribuição multidimensional da condutividade térmica na camada intermediária de um sanduíche de placas, baseado em medidas termográficas de temperatura.

O trabalho de Bozzoli *et al.* (2008) utiliza imagens de termografia por infravermelho para determinar o coeficiente de transferência de calor local em um problema de convecção forçada sobre uma placa metálica na presença de vapor d'água condensando na sua superfície.

Rainieri *et al.* (2008) apresentam uma análise experimental e um procedimento computacional visando a caracterização de uma câmera de infravermelho microbolométrica. O objetivo é avaliar o equipamento para aplicação em problemas de estimativa de parâmetros de condução de calor, estabelecendo os níveis locais de ruído nas imagens térmicas.

Legiae *et al.* (2008) apresentam um modelo analítico que leva a um problema inverso bem posto de identificação de parâmetros, baseado em transformação integral. Para demonstrar esse procedimento, um aparato experimental é construído para identificação de

propriedades de um sistema composto por uma camada de tinta negra e um filme amorfó de carbono, empregando termografia infravermelha com o método fototérmico.

Fieberg & Kneer (2008) propõem o emprego da termografia por infravermelho na determinação de resistência térmica de contato em condições de altas temperaturas e pressões, a partir das medidas transientes de temperatura. O fluxo de calor no contato entre duas placas semi-infinitas é obtido pela solução do problema inverso correspondente, e com auxílio do salto de temperaturas medido, pode-se estabelecer a resistência térmica no contato.

Bamford et al. (2009) analisam diferentes compósitos de SiC e a partir de experimentos transientes baseados em termografia de infravermelho, conseguem estimar simultaneamente as difusividades térmicas transversais e planares deste material anisotrópico.

# Capítulo 3

---

## 3. Problema Direto

Nas duas últimas décadas, o método clássico da transformada integral [Mikhailov & Ozisik (1984)] foi progressivamente generalizado sob um enfoque híbrido numérico-analítico [Cotta (1990), Cotta (1993), Cotta (1994), Cotta & Mikhailov (1997), Cotta (1998), Santos *et al.* (2001), Cotta & Orlande (2003), Cotta *et.al.* (2005), Cotta & Mikhailov (2006)]. Essa Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) oferece precisão controlada e implementação computacional eficiente para uma grande variedade de problemas não-transformáveis, incluindo as formulações não-lineares mais usuais em aplicações em mecânica dos fluidos e transferência de calor. Além de ser ele próprio um método computacional alternativo, essa técnica híbrida é particularmente adequada para propósitos de *benchmark* (validação). Em face da possibilidade de controle automático do erro, o método retém as mesmas características de uma solução puramente analítica. Além do controle e estimativa de erro bem simples, outro aspecto notável desse método é a extensão direta para situações multidimensionais, com apenas um moderado aumento do esforço computacional. Outra vez, a natureza híbrida é responsável por esse comportamento, uma vez que a parte analítica do procedimento de solução é empregada sobre todas menos uma variável independente, e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário nessa única variável independente restante. Mais recentemente, entretanto, tendo em vista os desenvolvimentos também importantes no controle automático de erro em soluções numéricas de equações diferenciais parciais, em particular para formulações unidimensionais, a GITT foi empregada em combinação com algoritmos bem testados para equações parabólicas e parabólico-hiperbólicas [Cotta *et al.* (2001), Naveira *et al.* (2009a)]. Essa possibilidade abriu novas perspectivas na fusão de

idéias numéricas e analíticas, e em explorar o poder e flexibilidade de sub-rotinas progressivamente mais confiáveis para equações diferenciais parciais, disponíveis tanto comercialmente quanto em domínio público.

O presente capítulo revisa os conceitos da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) como um exemplo de método híbrido em aplicações de difusão e convecção-difusão. A GITT soma-se às ferramentas de simulação disponíveis, seja como instrumento em tarefas de covalidação, seja como técnica alternativa para usuários mais orientados para o tratamento analítico. Primeiramente ilustra-se a aplicação do método na transformação completa de um problema geral de convecção-difusão, até que um sistema diferencial ordinário seja obtido para os potenciais transformados. A seguir, a estratégia mais recentemente introduzida de transformação integral parcial é derivada fornecendo um sistema acoplado de equações diferenciais parciais unidimensionais a ser numericamente integrado. Diferentes aspectos na implementação computacional de cada procedimento são criticamente discutidos. Esta apresentação mais geral da metodologia aqui empregada visa a percepção de futuras extensões do trabalho aqui proposto no tratamento de problemas difusivos ou convectivo-difusivos em meios heterogêneos, incluindo efeitos não-lineares nas propriedades. Finalmente apresenta-se a aplicação específica da transformação integral clássica para a solução analítica do presente problema de condução de calor transiente linear, bem como o emprego da transformada integral generalizada para resolver o problema de autovalor associado.

### **3.1. Método de Transformação Integral**

Como ilustração de procedimento formal de transformação integral, considera-se um problema de convecção-difusão transiente de  $n$  potenciais acoplados (por exemplo, velocidades, temperaturas e concentrações). Esses potenciais são definidos na região  $V$  com superfície de contorno  $S$  e incluindo efeitos não-lineares colapsados nos termos-fonte e convectivos como segue:

$$w_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \cdot \nabla T_k(\mathbf{x}, t) + L_k T_k(\mathbf{x}, t) = P_k(\mathbf{x}, t, T_\ell), \quad (3.1)$$

$\mathbf{x} \in V, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n$

com condições iniciais e de contorno dadas, respectivamente por

$$T_k(\mathbf{x}, 0) = f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.2)$$

$$\left[ \alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] T_k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t, T_\ell), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

onde o operador da equação é escrito como

$$L_k \equiv -\nabla K_k(\mathbf{x}) \nabla + d_k(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

e  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal à superfície  $S$ .

Sem os termos convectivos e para termos fonte lineares, isto é,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \equiv 0$ ,  $P \equiv P(\mathbf{x}, t)$ , e  $\phi \equiv \phi(\mathbf{x}, t)$ , esse exemplo se torna um problema linear de difusão de classe I de acordo com a classificação em [Mikhailov & Ozisik (1984)]. Soluções analíticas exatas foram obtidas nessa situação pela técnica de transformação integral clássica. No caso mais geral, este problema seria a priori não-transformável, e as idéias na técnica da transformada integral generalizada [Cotta (1990), Cotta (1993), Cotta (1994), Cotta & Mikhailov (1997), Cotta (1998), Santos *et.al.* (2001), Cotta & Orlande (2003), Cotta *et.al.* (2005), Cotta & Mikhailov (2006)] podem ser utilizadas para desenvolver soluções híbridas numérico-analíticas para essa classe de problemas. A solução formal do problema não-linear proposto requer a consideração de expansões em autofunções para os potenciais associados. A situação linear acima comentada, que admite solução exata pela técnica de transformação integral clássica, naturalmente leva aos problemas de autovalor a serem preferidos na análise da situação não-linear. Estes surgem da aplicação direta de separação de variáveis à versão linear homogênea e puramente difusiva do problema acima. Assim, o conjunto de problemas auxiliares recomendados é dado por:

$$L_k \psi_{ki}(\mathbf{x}) = \mu_{ki}^2 w_k(\mathbf{x}) \psi_{ki}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.5)$$

com condições de contorno

$$\left[ \alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi_{ki}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.6)$$

onde os autovalores,  $\mu_{ki}$ , e autofunções relacionadas,  $\psi_{ki}(\mathbf{x})$ , são assumidos conhecidos na forma de expressões analíticas exatas ou da aplicação de métodos computacionais para problemas do tipo Sturm-Liouville [Cotta (1993), Cotta & Mikhailov (1997)]. O problema indicado pelas Eqs. (3.5) e (3.6) permite, através da propriedade de ortogonalidade das autofunções, a definição do seguinte par de transformação integral:

$$\bar{T}_{k,i}(t) = \int_V w_k(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dV, \quad \text{transformada} \quad (3.7)$$

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) \bar{T}_{k,i}(t), \quad \text{inversa} \quad (3.8)$$

onde os núcleos simétricos  $\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x})$  e as integrais de normalização são dados respectivamente por

$$\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) = \frac{\psi_{ki}(\mathbf{x})}{Norma_{ki}^{1/2}} \quad (3.9)$$

$$Norma_{ki} = \int_V w_k(\mathbf{x}) \psi_{ki}^2(\mathbf{x}) dV \quad (3.10)$$

A transformação integral de (3.1) é conseguida através da aplicação do operador  $\int_V \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) \_\_ dV$  que fornece, após alguma manipulação algébrica e emprego das condições de contorno (3.3) e (3.6):

$$\frac{d\bar{T}_{k,i}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}(t, T_{\ell}) \bar{T}_{k,j}(t) = \bar{g}_{ki}(t, T_l), \quad i=1,2,\dots, \quad t>0, \quad k,\ell=1,2,\dots,n \quad (3.11)$$

As condições iniciais, Eqs.(3.2), são também transformadas através do operador  $\int_v w_k(x) \tilde{\psi}_{ki}(x) dv$  para obter-se

$$\bar{T}_{k,i}(0) = \bar{f}_{ki} \equiv \int_v w_k(x) \tilde{\psi}_{ki}(x) f_k(x) dv \quad (3.12)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ki}(t, T_l) &= \int_v \tilde{\psi}_{ki}(x) P_k(x, t, T_{\ell}) dv + \\ &+ \int_S K_k(x) \left[ \tilde{\psi}_{ki}(x) \frac{\partial T_k(x, t)}{\partial n} - T_k(x, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_{ki}(x)}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$a_{kj}(t, T_{\ell}) = \delta_{ij} \mu_{ki}^2 + a_{kj}^*(t, T_{\ell}) \quad (3.14)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{for } i \neq j \\ 1, & \text{for } i = j \end{cases} \quad (3.15)$$

$$a_{kj}^*(t, T_{\ell}) = \int_v \tilde{\psi}_{ki}(x) [\mathbf{u}(x, t, T_{\ell}) \cdot \nabla \tilde{\psi}_{ki}(x)] dv \quad (3.16)$$

As eqs. (3.11) a (3.16) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas para os potenciais transformados,  $\bar{T}_{k,i}$ . Para fins computacionais, o sistema (3.11) a (3.16) é truncado na  $N$ -ésima linha e coluna, com  $N$  tomado suficientemente grande para a convergência até a precisão requerida. Os aspectos formais da convergência para a solução do sistema infinito com o aumento da ordem de truncamento  $N$  foram investigados anteriormente [Cotta (1993)]. O problema de valor inicial não-linear definido pelas eqs. (3.11) a (3.16) é passível de pertencer a uma classe de sistemas diferenciais ordinários rígidos, especialmente para valores crescentes de  $N$ . Entretanto,

vários integradores numéricos especiais foram desenvolvidos nas últimas décadas para essa classe de sistemas [Cotta (1993), Cotta (1994), Cotta & Mikhailov (1997)]. Uma vez que os potenciais transformados tenham sido computados pela solução numérica do sistema (3.11) a (3.16), a fórmula de inversão eq.(3.8) é empregada para reconstruir os potenciais originais  $T_k(\mathbf{x}, t)$ , em forma explícita.

Uma estratégia de solução híbrida alternativa à transformação integral completa acima descrita é de particular interesse no tratamento de problemas de convecção-difusão transiente com uma direção convectiva preferencial. Nesses casos, a transformação integral parcial em todas, menos uma, coordenada espacial, pode oferecer uma combinação interessante de vantagens relativas entre a técnica de expansão em autofunções e o método numérico selecionado para tratar o sistema acoplado de equações diferenciais parciais unidimensionais que resulta do procedimento de transformação. Como ilustração do procedimento de transformação integral parcial, novamente um problema de convecção-difusão transiente para  $n$  potenciais acoplados (velocidades, temperaturas, concentrações, etc) é considerado, mas desta feita separando a direção preferencial que não sofrerá a transformação integral. Assim, o vetor posição inclui não apenas as coordenadas espaciais que serão eliminadas via transformação integral, aqui representadas pelo vetor  $\mathbf{x}^*$ , como também a variável especial a ser retida no sistema parcialmente transformado,  $z$ . O termo fonte  $P_k$  inclui todas as outras contribuições não mostradas explicitamente na formulação abaixo, como os termos convectivos nas direções eliminadas, como também a difusão na direção  $z$  e as componentes não-lineares e dependentes do tempo nos termos convectivos, não mostrados aqui explicitamente para maior clareza:

$$w_k(\mathbf{x}^*) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}^*, z, t)}{\partial t} + u(\mathbf{x}^*) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}^*, z, t)}{\partial z} + L_k T_k(\mathbf{x}^*, z, t) = P_k^*(\mathbf{x}^*, z, t, T_\ell), \quad (3.17)$$

$$z_0 \leq z \leq z_1, \mathbf{x}^* \in V^*, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

com condições iniciais e de contorno dadas, respectivamente, por

$$T_k(\mathbf{x}^*, z, 0) = f_k(\mathbf{x}^*, z), \quad z_0 \leq z \leq z_1, \mathbf{x}^* \in V^* \quad (3.18)$$

$$\left[ \alpha_k(\mathbf{x}^*) + \beta_k(\mathbf{x}^*) K_k(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] T_k(\mathbf{x}^*, z, t) = \phi_k(\mathbf{x}^*, z, t, T_\ell), \quad \mathbf{x}^* \in S^*, \quad t > 0 \quad (3.19)$$

onde o operador da equação é dado por

$$L_k \equiv -\nabla K_k(\mathbf{x}^*) \nabla + d_k(\mathbf{x}^*) \quad (3.20)$$

e  $\mathbf{n}$  representa a normal à superfície  $S^*$  no sentido saindo do meio. As condições de contorno introduzidas pela variável  $z$  são dadas como

$$B_{k,l} T_k(\mathbf{x}^*, z, t) = \varphi_{k,l}(\mathbf{x}^*, z, t, T_\ell), \quad z = z_l, l = 0, 1, \mathbf{x}^* \in S^*, \quad t > 0 \quad (3.21)$$

onde o operador da condição de contorno pode incluir diferentes combinações de condições de primeiro a terceiro tipo nas posições  $z_l$ ,  $l = 0, 1$ .

Logo, o problema auxiliar alternativo é agora definido na região  $V^*$ , com contorno  $S^*$ , formado pelas coordenadas espaciais a serem eliminadas:

$$L_k \psi_{ki}(\mathbf{x}^*) = \mu_{ki}^2 u(\mathbf{x}^*) \psi_{ki}(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x}^* \in V^* \quad (3.22)$$

com condições de contorno

$$\left[ \alpha_k(\mathbf{x}^*) + \beta_k(\mathbf{x}^*) K_k(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi_{ki}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \mathbf{x}^* \in S^* \quad (3.23)$$

onde os autovalores,  $\mu_{ki}$ , e autofunções correspondentes,  $\psi_{ki}(\mathbf{x}^*)$ , são assumidos conhecidos. Tem-se aqui uma escolha a ser feita referente à função peso no problema de autovalor, podendo-se adotar o coeficiente do termo transiente da (3.17),  $w_k(\mathbf{x}^*)$ , ou como mostrado abaixo o coeficiente do termo convectivo,  $u(\mathbf{x}^*)$ .

Os seguintes pares de transformação integral são agora definidos:

$$\bar{T}_{k,i}(z,t) = \int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) T_k(\mathbf{x}^*, z, t) dv, \quad \text{transformada} \quad (3.24)$$

$$T_k(\mathbf{x}^*, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) \bar{T}_{k,i}(z, t), \quad \text{inversa} \quad (3.25)$$

onde os núcleos simétricos  $\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*)$  são dados por

$$\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) = \frac{\psi_{ki}(\mathbf{x}^*)}{\text{Norma}_{ki}^{1/2}} \quad (3.26)$$

$$\text{Norma}_{ki} = \int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \psi_{ki}^2(\mathbf{x}^*) dv \quad (3.27)$$

A transformação integral da Eq. (3.17) é obtida pela aplicação do operador  $\int_{v^*} \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) dv$  fornecendo, após usar as condições de contorno Eqs. (3.19) e (3.23)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}(z, t, T_\ell) \frac{\partial \bar{T}_{k,j}(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T}_{k,i}(z, t)}{\partial z} = -\mu_i^2 \bar{T}_{k,i}(z, t) + \bar{g}_{ki}(z, t, T_\ell), \quad i=1,2,\dots, t \geq 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (3.28)$$

As condições iniciais da Eq. (3.18) são também transformadas através do operador  $\int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) dv$  para fornecer

$$\bar{T}_{k,i}(z, 0) = \bar{f}_{ki}(z) \equiv \int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) f_k(\mathbf{x}^*, z) dv \quad (3.29)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ki}(z, t, T_\ell) &= \int_{v^*} \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) P_k^*(\mathbf{x}^*, z, t, T_\ell) dv + \\ &\quad \int_{S^*} K_k(\mathbf{x}^*) \left[ \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}^*, z, t)}{\partial \mathbf{n}} - T_k(\mathbf{x}^*, z, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$a_{kij} = \int_{v^*} w(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{kj}(\mathbf{x}^*) dv \quad (3.31)$$

com as condições de contorno em  $z$  transformadas

$$\int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) B_{k,l} T_k(\mathbf{x}^*, z, t) dv = \bar{\varphi}_{k,l,i}(z, t, T_\ell), \quad (3.32)$$

$$z = z_l, \quad l = 0, 1, \quad \mathbf{x}^* \in S^*, \quad t > 0$$

onde

$$\bar{\varphi}_{k,l,i}(z, t, T_\ell) = \int_{v^*} u(\mathbf{x}^*) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}^*) \varphi_{k,l}(\mathbf{x}^*, z, t, T_\ell) dv, \quad (3.33)$$

$$z = z_l, \quad l = 0, 1, \quad \mathbf{x}^* \in S^*, \quad t > 0$$

As eqs. (3.28) a (3.33) formam um sistema infinito de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para os potenciais transformados,  $\bar{T}_{k,i}$ . Para fins de computação, o sistema (3.28) a (3.33) é também truncado na  $N$ -ésima linha e coluna, com  $N$  suficientemente grande para a precisão requerida. Alguns integradores numéricos automáticos para essa classe de sistemas diferenciais parciais unidimensionais encontram-se disponíveis, como aqueles baseados no Método das Linhas (IMSL, *Mathematica*, etc.). Uma vez que os potenciais transformados tenham sido computados pela solução numérica do sistema (3.28) a (3.33), a formula de inversão eq. (3.25) é empregada para reconstruir os potenciais originais  $T_k(\mathbf{x}^*, z, t)$ , em forma explícita ao longo das variáveis  $\mathbf{x}^*$ .

### 3.2. Solução Formal para o Problema de Condução de Calor em Meios Heterogêneos

As soluções formais apresentadas acima para formulações não-lineares em convecção-difusão são importantes para se vislumbrar as possibilidades de extensão desta metodologia no tratamento de problemas diferenciais parciais em meios heterogêneos. Já nesta seção, ilustra-se o procedimento de transformação integral particularizado para a situação de um problema difusivo linear com coeficientes dependentes apenas da posição. Neste caso o procedimento acima se reduz à aplicação da Técnica de Transformação Integral Clássica [Mikhailov & Ozisik (1984)] e portanto resultando em um sistema transformado linear e desacoplado, passível de solução analítica. Por outro lado, o problema auxiliar de autovalores requerido por essa solução exata, demanda a utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada [Cotta (1993)], como abaixo ilustrado.

Considerou-se uma formulação suficientemente geral para o problema linear transiente de difusão para o potencial  $T(\mathbf{x}, t)$ , dependente da posição  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ , definido na região  $V$  com contorno na superfície  $S$ . A formulação aqui considerada inclui o termo transiente, o operador difusivo, o termo de dissipação linear e o termo fonte, [Mikhailov & Ozisik (1984), Cotta (1993)], como mostrado nas equações (3.34) a (3.36) abaixo. Os coeficientes  $w(\mathbf{x})$ ,  $k(\mathbf{x})$  e  $d(\mathbf{x})$  são responsáveis pela informação relacionada a heterogeneidade do meio. A equação de difusão e as condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) - d(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, t) + P(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, t > 0 \quad (3.34)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.35)$$

$$\alpha(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x})k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.36)$$

A solução exata para o problema (3.34) a (3.36) pode ser obtida através da Técnica da Transformada Clássica – C.I.T.T. [Mikhailov & Ozisik (1984)] e dada por:

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \left( \bar{f}_i e^{-\mu_i^2 t} + \int_0^t \bar{g}_i(t') e^{-\mu_i^2 (t-t')} dt' \right) \quad (3.37)$$

onde os autovalores  $\mu_i$  e autofunções  $\psi_i(\mathbf{x})$ , são obtidos a partir do problema de autovalor associado que contem a informação sobre a heterogeneidade do meio, na forma:

$$\nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla \psi_i(\mathbf{x}) + \left( \mu_i^2 w(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}) \right) \psi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.38)$$

com condições de contorno

$$\alpha(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.39)$$

As demais quantidades que aparecem na solução exata (3.37) são computadas depois de resolvido o problema (3.38) a (3.39), através de :

$$Norma_i = \int_V w(\mathbf{x}) \psi_i^2(\mathbf{x}) dv \quad \text{integral de normalização} \quad (3.40)$$

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) = \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{Norma_i^{1/2}}, \quad \text{autofunção normalizada} \quad (3.41)$$

$$\bar{f}_i = \int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dv, \quad \text{condição inicial transformada} \quad (3.42)$$

$$\bar{g}_i(t) = \int_V P(\mathbf{x}, t) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) dv + \int_S \phi(\mathbf{x}, t) \left[ \frac{\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) - k(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})} \right] ds, \quad \text{termo fonte transformado} \quad (3.43)$$

Para uma aplicação geral de uso automático, desejou-se desenvolver uma abordagem computacional flexível de modo a permitir lidar com problemas de autovalor com coeficientes variáveis arbitrariamente, como o problema apresentado pelas equações

(3.38) e (3.39). Sendo assim, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (G.I.T.T.) é aqui empregada na solução do problema de *Sturm-Liouville*, equações (3.38) e (3.39), através da proposição de um problema de autovalor auxiliar mais simples, e expandindo as autofunções desconhecidas em termos da base escolhida. Além disso, os coeficientes variáveis da equação são eles mesmo expandidos em termos de autofunções conhecidas, de modo a permitir uma implementação completamente analítica da matriz dos coeficientes no sistema transformado. A solução do problema (3.38) e (3.39) é então proposta como uma expansão em autofunções, em termos de um problema de autovalor auxiliar simplificado, dado como:

$$\nabla \cdot k^*(\mathbf{x}) \nabla \Omega_n(\mathbf{x}) + \left( \lambda_n^2 w^*(\mathbf{x}) - d^*(\mathbf{x}) \right) \Omega_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.44)$$

com condição de contorno dada por:

$$\alpha^*(\mathbf{x}) \Omega_n(\mathbf{x}) + \beta^*(\mathbf{x}) k^*(\mathbf{x}) \frac{\partial \Omega_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.45)$$

Os coeficientes  $w^*(\mathbf{x}), k^*(\mathbf{x})$  e  $d^*(\mathbf{x})$ , são formas simplificadas dos coeficientes da equação original, escolhidos de modo a permitir solução analítica do problema auxiliar. A solução do problema (3.44) e (3.45) deve ser conhecida em termos da autofunção “ $\Omega_n(\mathbf{x})$ ” e dos autovalores afins “ $\lambda_n$ ”, oferecendo uma base, ele mesmo, para a expansão do problema de autovalor original, equações (3.38) e (3.39). Além disso, é permitido que os tipos das condições de contorno do problema original e do problema auxiliar possam ser diferentes, no caso para uma maior simplificação da autofunção auxiliar, caso desejado, modificando os coeficientes da condição de contorno, “ $\alpha^*(\mathbf{x})$ ” e “ $\beta^*(\mathbf{x})$ ”.

Uma vez encontradas analiticamente as autofunções auxiliares “ $\Omega_n(\mathbf{x})$ ” e computados os autovalores auxiliares “ $\lambda_n$ ”, a expansão da autofunção original é então proposta como:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{i,n}, \quad \text{inversa} \quad (3.46)$$

$$\bar{\psi}_{i,n} = \int_V w^*(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) dv, \quad \text{transformada} \quad (3.47)$$

A transformação integral é então efetuada operando a equação (3.38) com o operador  $\int_V \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) dv$  e em seguida empregando a 2ª Formula de *Green* de modo a levar em conta as diferenças nas condições de contornos dos dois problemas de autovalor, resultando:

$$\begin{aligned} & \int_V \psi_i(\mathbf{x}) (\nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})) dv + \int_S k(\mathbf{x}) \left( \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \\ & \int_V \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) (\mu_i^2 w(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})) \psi_i(\mathbf{x}) dv = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Combinando as condições de contorno (3.39) e (3.45), a integral de superfície acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_S k(\mathbf{x}) \left( \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = \\ & = \int_S k(\mathbf{x}) \left( \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})k(\mathbf{x})} - \frac{\alpha^*(\mathbf{x})}{\beta^*(\mathbf{x})k^*(\mathbf{x})} \right) (\psi_i(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})) ds \\ & = \int_S k(\mathbf{x}) \left( \frac{\beta^*(\mathbf{x})k^*(\mathbf{x})}{\alpha^*(\mathbf{x})} - \frac{\beta(\mathbf{x})k(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) \left( \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \\ & = - \int_S k(\mathbf{x}) \left( \frac{\beta^*(\mathbf{x})k^*(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})k(\mathbf{x})\alpha^*(\mathbf{x})} - 1 \right) \left( \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \end{aligned} \quad (3.49)$$

e a equação (3.48) pode ser reescrita por exemplo na forma:

$$\begin{aligned} & \int_V \psi_i(\mathbf{x}) (\nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})) dV + \int_S k(\mathbf{x}) \left( 1 - \frac{\beta^*(\mathbf{x}) k^*(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) \alpha^*(\mathbf{x})} \right) \left( \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \\ & + \int_V \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) (\mu_i^2 w(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})) \psi_i(\mathbf{x}) dV = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo a fórmula da inversa chega-se ao seguinte problema algébrico de autovalores:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\psi}_{i,m} \left( \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) (\nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})) dV + \int_S k(\mathbf{x}) \left( 1 - \frac{\beta^*(\mathbf{x}) k^*(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) \alpha^*(\mathbf{x})} \right) (\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}) ds \right. \\ & \left. + \int_V \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) (\mu_i^2 w(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

que em forma matricial é concisamente dado por:

$$(\mathbf{A} - \mu^2 \mathbf{B}) \bar{\Psi} = 0 \quad (3.52)$$

onde,

$$\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_{n,m}\}; \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B} = \{B_{n,m}\}, \quad B_{n,m} = \int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \{A_{n,m}\}, \quad A_{n,m} = & \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) (\nabla \cdot k(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})) dV + \\ & \int_S k(\mathbf{x}) \left( 1 - \frac{\beta^*(\mathbf{x}) k^*(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) \alpha^*(\mathbf{x})} \right) \left( \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds - \int_V d(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \end{aligned} \quad (3.55)$$

Além disso, levando em consideração as informações da formulação do problema auxiliar, os elementos da matriz  $\mathbf{A}$  podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned}
A_{n,m} = & \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \left( \nabla \cdot (k(\mathbf{x}) - k^*(\mathbf{x})) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \right) dv + \\
& + \int_S \left( k(\mathbf{x}) - \frac{\beta^*(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})\alpha^*(\mathbf{x})} k^*(\mathbf{x}) \right) \left( \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds - \\
& - \int_V (d(\mathbf{x}) - d^*(\mathbf{x})) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dv + \lambda_n^2 \delta_{n,m}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

O problema algébrico (3.52) pode ser numericamente solucionado provendo resultados para os autovalores  $\mu^2$  e autovetores  $\bar{\Psi}$  a partir desta análise de problema de autovalor matricial [Wolfram (2005)] que, em seguida combinado com a fórmula da inversa, eq. (3.46), provê a autofunção original desejada.

### 3.3. Expansão das Propriedades Termofísicas

É relevante no presente contexto ressaltar a possibilidade de expressar os próprios coeficientes variáveis como uma expansão em autofunções, em geral não expandido na mesma base auxiliar. Este procedimento pode ser particularmente vantajoso para avaliação analítica das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  do sistema algébrico (3.52). Sendo assim todas as respectivas integrais podem ser expressas em termos de autofunções e, em geral, permitindo a integração analítica das mesmas. Por exemplo, o coeficiente  $w(\mathbf{x})$  pode ser expandido em termos de autofunções juntamente com a aplicação de uma solução filtro,  $w_f(\mathbf{x})$ , de modo a acelerar a convergência, na forma dada por:

$$w(\mathbf{x}) = w_f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \bar{w}_k, \quad \text{inversa} \tag{3.57}$$

$$\bar{w}_k = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}) [w(\mathbf{x}) - w_f(\mathbf{x})] \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{transformada} \tag{3.58}$$

onde  $\hat{w}(\mathbf{x})$  é a função peso da autofunção normalizada escolhida  $\tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x})$ . A autofunção do coeficiente pode ser escolhida empregando-se a mesma equação do problema de autovalor

auxiliar, mas modificando as condições de contorno para 1º tipo, enquanto a função filtro deve ser uma função analítica simples que satisfaça os valores dos contornos para os coeficientes originais e eventualmente incorpore alguma informação adicional disponível. Então, uma vez obtidos os coeficientes transformados através da equação (3.58), pode-se chegar aos coeficientes variáveis originais recorrendo à fórmula de inversão dada pela eq. (3.57). Através deste procedimento, a tarefa de estimativa de função apresentada na seção seguinte passa a ser uma tarefa de estimativa de parâmetros onde os parâmetros são os coeficientes da expansão e os dois valores dos contornos utilizados na função filtro. Os outros dois coeficientes são igualmente expandidos, se necessário, em termos de autofunções, aqui assumidas como sendo iguais apenas por uma questão de simplicidade, dados por:

$$k(\mathbf{x}) = k_f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \bar{k}_k, \quad \text{inversa} \quad (3.59)$$

$$\bar{k}_k = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}) [k(\mathbf{x}) - k_f(\mathbf{x})] \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{transformada} \quad (3.60)$$

$$d(\mathbf{x}) = d_f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \bar{d}_k, \quad \text{inversa} \quad (3.61)$$

$$\bar{d}_k = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}) [d(\mathbf{x}) - d_f(\mathbf{x})] \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{transformada} \quad (3.62)$$

Sendo assim as matrizes **A** e **B** podem ser reescritas em termos dos coeficientes expandidos. Para os elementos da matriz **B**, tem-se:

$$B_{n,m} = \int_V w_f(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{w}_k \int_V \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \quad (3.63)$$

e para os elementos da matriz **A** tem-se :

$$\begin{aligned}
A_{n,m} = & \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \left( \nabla \cdot (k_f(\mathbf{x}) - k^*(\mathbf{x})) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \right) dV + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \left( \nabla \cdot \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \right) dV \right) \bar{k}_k + \\
& + \int_S \left( k_f(\mathbf{x}) - \frac{\beta^*(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})\alpha^*(\mathbf{x})} k^*(\mathbf{x}) \right) \left( \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_S \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \left( \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \right) \bar{k}_k \\
& - \int_V (d_f(\mathbf{x}) - d^*(\mathbf{x})) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_V \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \right) \bar{d}_k + \lambda_n^2 \delta_{n,m}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

E a norma é então computada como:

$$Norma_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\psi}_{i,n} \bar{\psi}_{i,m} \left( \int_V w_f(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_V \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_n(\mathbf{x}) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}) dV \right) \bar{w}_k \right) \tag{3.65}$$

### 3.4. Aplicações

As aplicações consideradas para ilustrar a metodologia de solução direta aqui proposta envolvem a análise de três situações bem distintas. Primeiro é considerado um exemplo onde os coeficientes variáveis sofrem mudanças de algumas ordens de grandeza no domínio espacial. O exemplo mais comumente encontrado na literatura está relacionado a materiais conhecidos como FGM (*Functionally Graded Materials*) [Sutradhar *et al.*, (2002)]. O segundo exemplo de aplicação está relacionado à variação abrupta das propriedades termofísicas, tipicamente na ligação entre duas camadas de diferentes materiais com região de transição [Fudym *et al.*, (2008)], e o terceiro exemplo está associado a materiais com propriedades variando randomicamente no meio, como em materiais compósitos formados por dispersão de fases [Lin (1992)].

Para o exemplo do FGM, a equação de conservação de energia em forma adimensional, e as condições, inicial e de contorno, adotadas foram:

$$w(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}], \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.66)$$

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.67)$$

$$T(0,t) = 0 \quad (3.68)$$

$$T(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.69)$$

onde as propriedades termofísicas variáveis em  $x$  assumem a seguinte forma exponencial [Sutradhar *et.al.* (2002)]:

$$k(x) = k_0 e^{2\beta x}, \quad w(x) = w_0 e^{2\beta x}, \quad \alpha_0 = \frac{k_0}{w_0} = \text{const.} \quad (3.70)$$

Em particular, esta escolha de forma funcional leva a formulação de um problema com solução exata via Técnica da Transformada Integral Clássica, aqui empregada como resultado de referência na análise da solução para este caso de variação do coeficiente. Deste modo, depois de manipular os coeficientes na equação (3.66), encontra-se:

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.71)$$

Além disso, pode-se fazer uma transformação de variável dependente para recuperar a forma usual da equação de calor:

$$T(x,t) = u(x,t) e^{-\beta(x+\beta\alpha_0 t)} \quad (3.72)$$

Então, o problema de condução de calor reescrito com suas condições inicial e de contorno, torna-se:

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.73)$$

$$u(x,0) = f^*(x) = f(x)e^{\beta x}, \quad 0 < x < 1 \quad (3.74)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (3.75)$$

$$u(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.76)$$

Esta primeira aplicação foi resolvida para diferentes valores do parâmetro  $\beta$ , com condição inicial dada por:

$$f(x) = \frac{1 - e^{2\beta(1-x)}}{1 - e^{2\beta}} \quad (3.77)$$

que corresponde a solução permanente para o caso de temperatura prescrita  $T(0,t)=1$  e  $T(1,t)=0$ .

A formulação adotada para os outros dois casos, é dada por [Fudym *et al.* (2008)]:

$$w(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}], \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.78)$$

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.79)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.80)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad t > 0 \quad (3.81)$$

Nesta etapa de demonstração da solução do problema direto a condição inicial foi arbitrariamente escolhida como  $f(x)=1-x^2$ . A variação espacial para o coeficiente com mudança abrupta é governada pelo parâmetro  $\gamma$  da seguinte forma:

$$k(x) = k_1 + (k_2 - k_1)\delta(x) \quad (3.82)$$

$$w(x) = w_1 + (w_2 - w_1)\delta(x) \quad (3.83)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(x-x_c)}} \quad (3.84)$$

onde  $x_c$  indica a posição central da região de transição.

Os coeficientes gerados randomicamente foram obtidos baseados no exemplo do trabalho de [Lin (1992)], primeiramente gerando as posições igualmente espaçadas ao longo do meio e então produzindo randomicamente, no intervalo [0,1], os valores das propriedades em cada posição. Os valores gerados são linearmente interpolados gerando funções contínuas,  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$ , e então normalizadas pela sua média. Através da definição de um fator de escala  $G$  de 0% a 100%, permite-se a análise de diferentes amplitudes de variação das propriedades. Por exemplo, para  $G=1$  obtém-se uma função com padrão aleatório na sua forma plena e, já para  $G=0$ , recupera-se a situação de propriedade termofísica constante (valor médio efetivo). A forma funcional para este caso de variação espacial randômica é então dada por:

$$k(x) = k_0 \left[ 1 + \left( \frac{g_1(x)}{\bar{g}_1} - 1 \right) G \right] \quad (3.85)$$

$$w(x) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{g_2(x)}{\bar{g}_2} - 1 \right) G \right] \quad (3.86)$$

O problema de autovalor a ser resolvido é então dado por:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right] + \mu_i^2 w(x) \psi_i(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.87)$$

$$\left. \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.88)$$

$$\left. \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right|_{x=1} = 0 \quad (3.89)$$

Assim, para demonstrar o potencial de aplicabilidade da presente abordagem, considerou-se a forma mais simples dentre as várias possibilidades para o problema auxiliar a ser considerado, baseando a escolha em coeficientes iguais a  $k^*(x)=1$ ,  $w^*(x)=1$ , e  $d^*(x)=0$ ,

e mantendo as mesmas condições de contorno daquelas dadas pelas equações (3.88) e (3.89) resultando na seguinte solução para o problema de autovalor:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_n(x) &= \sqrt{2} \cos(\lambda_n x), \quad \text{e} \quad \tilde{\Omega}_0(x) = 1, \\ \text{com } \lambda_n &= n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3.90}$$

O problema algébrico resultante (eq. (3.52)) é então numericamente resolvido fornecendo resultados para os autovalores e os autovetores, fazendo uso do *software Mathematica* [Wolfram (2005)] na sua versão 5.2.

# Capítulo 4

---

---

## 4. Problema Inverso

*Problemas inversos* de transferência de calor fazem uso de medidas de temperatura e/ou fluxo de calor, para a estimativa de parâmetros/funções desconhecidos na análise de problemas físicos nesta área de estudo. Problemas inversos de condução de calor são normalmente associados a estimativas do fluxo de calor a que o corpo é submetido e/ou das propriedades termofísicas do material, a partir de medidas de temperatura tomadas em seu interior e/ou em sua superfície. Portanto, enquanto no *problema direto* clássico de condução de calor a *causa* (fluxo de calor/propriedade termofísica) é dada e o *efeito* (temperatura no corpo) é determinado, o *problema inverso* envolve a estimativa da *causa* a partir do conhecimento do *efeito*. O uso de problemas inversos faz parte de um novo paradigma de pesquisa, onde as simulações computacional e experimental não são realizadas isoladamente, mas sim de forma interativa, a fim de que o máximo de informação sobre o problema físico em questão seja obtido com as duas análises.

Problemas inversos são matematicamente classificados como mal-postos, enquanto os problemas diretos são bem-postos [Beck & Arnold(1977), Alifanov (1994), Ozisik & Orlande (2000)]. Para um problema envolvendo uma equação diferencial ser considerado bem-posto, sua solução deve existir, ser única e ser estável com relação aos dados de entrada. De um modo geral a solução do problema inverso existe e tal fato é justificado através da existência do fenômeno físico do qual o problema aparece. No entanto, só existe demonstração matemática da unicidade da solução do problema inverso para alguns casos especiais e geralmente este critério não é satisfeito. Além disso, a solução

do problema inverso é normalmente instável, o que significa que pequenas oscilações nos dados de entrada (por exemplo, temperaturas contendo erros experimentais) causam grandes oscilações na solução final [Beck & Arnold(1977), Alifanov (1994), Ozisik & Orlande (2000)]. Por um longo período pensou-se que, se as condições para o problema ser bem-posto fossem violadas, o problema não teria solução ou não teria importância prática. Com o desenvolvimento do procedimento de regularização de Tikhonov, da técnica de regularização iterativa de Alifanov e da técnica de especificação de função de Beck, que o interesse na solução de problemas inversos foi revitalizado.

Um procedimento de solução para um problema inverso geralmente requer sua reformulação em termos de um problema aproximado bem-posto, que utiliza algum tipo de técnica de regularização (estabilização). Em muitos métodos, a solução é obtida em termos de mínimos-quadrados. No procedimento de regularização de Tikhonov, por exemplo, a norma de mínimos-quadrados é modificada pela adição de termos que reduzem as oscilações causadas pelo caráter mal-posto do problema. Na técnica de regularização iterativa, o critério de parada para o procedimento iterativo é escolhido de modo que a solução seja estável com relação aos erros nos dados de entrada do problema. Na técnica de especificação de função, a norma de mínimos quadrados envolve medidas tomadas no tempo em questão, assim como em tempos futuros, a fim de se obter soluções estáveis.

Problemas inversos podem ser resolvidos como estimativa de parâmetros ou estimativa de função. Se alguma informação é disponível a respeito da forma funcional da variável desconhecida, o problema inverso pode ser reduzido à estimativa de alguns parâmetros. Por outro lado, se nenhuma informação é disponível *a priori* a respeito da forma funcional da variável desconhecida, o problema inverso é resolvido com técnicas de estimativa de função em um espaço de dimensão infinita. Técnicas para a solução de problemas inversos como estimativa de parâmetros e estimativa de função, são apresentadas nas seções seguintes.

## 4.1. Estimativa de Parâmetros

Em problemas de estimativa de parâmetros, considera-se que existe alguma informação a respeito da forma funcional da função desconhecida. Supõe-se aqui, como exemplo, que o problema inverso de interesse é relativo à estimativa de uma função  $f(\mathbf{x})$ , que pode representar, por exemplo, o comportamento espacial de uma propriedade termofísica variável no meio, como condutividade térmica e capacidade térmica volumétrica, e que  $f(\mathbf{x})$ , possa ser escrita na seguinte forma geral linear:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{par}} P_j C_j(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

onde  $P_j$ ,  $j=1, \dots, N_{par}$ , são os parâmetros desconhecidos e  $C_j(\mathbf{x})$  são funções de base conhecidas. Portanto, o problema inverso de estimativa da função  $f(\mathbf{x})$  é reduzido a estimativa de um número finito de parâmetros  $P_j$ , onde o número de parâmetros,  $N_{par}$ , é suposto conhecido. Uma simplificação natural desse problema de estimativa de parâmetros seria por exemplo, a identificação de propriedades termofísicas constantes.

Problemas de estimativa de parâmetros são, de um modo geral, resolvidos através da minimização de uma função objetivo. Supõe-se válidas as seguintes hipóteses [Ozisik & Orlande (2000)]: os erros das variáveis medidas são aditivos, não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio-padrão constante; somente as variáveis medidas que aparecem na função objetivo contém erros; e não existe informação *a priori* a respeito do valor e da incerteza dos parâmetros. Neste caso, a norma de mínimos-quadrados torna-se uma função objetivo que resulta em parâmetros com variância mínima. A norma de mínimos-quadrados pode ser escrita como:

$$S(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o vetor de parâmetros desconhecidos e

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T = (\vec{Y}_1 - \vec{T}_1, \vec{Y}_2 - \vec{T}_2, \dots, \vec{Y}_I - \vec{T}_I) \quad (4.3)$$

O vetor  $[\vec{Y}_i - \vec{T}_i(\mathbf{P})]$  contém a diferença entre as variáveis medidas e estimadas para cada um dos  $M$  sensores no tempo  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , isto é,

$$(\vec{Y}_i - \vec{T}_i) = (Y_{i1} - T_{i1}, Y_{i2} - T_{i2}, \dots, Y_{iM} - T_{iM}) \quad \text{para } i=1, \dots, I \quad (4.4)$$

Apesar de ser bastante útil e permitir a solução de uma série de problemas práticos, a utilização da função de mínimos quadrados pode ser considerada limitada, uma vez que admite implicitamente que todas as variáveis analisadas pertencem a um mesmo conjunto amostral, ou seja, são medidas de uma mesma variável, obtidas com a mesma precisão em qualquer condição experimental. Nem uma coisa nem outra são necessariamente verdadeiras, sendo importante observar que nem todo instrumento fornece um erro de medida aproximadamente constante em toda a faixa de utilização. Sendo assim uma maneira alternativa e bastante comum de se formular a função objetivo, de modo a contemplar a variância dos erros experimentais é a chamada função de mínimos-quadrados ponderados. Neste caso, o fator de ponderação é o inverso da variância do erro de medida. Um dos grandes méritos da função de mínimos-quadrados ponderados é permitir a extensão natural da função objetivo para distintas condições de experimentação de acordo com a estrutura da matriz de covariância. Cabe aqui observar, que a função mínimos-quadrados ponderados reduz-se a função de mínimos-quadrados quando os erros nas medidas são considerados Gaussianos, não correlacionados e com desvio padrão constante. A função-objetivo de mínimos-quadrados ponderados é definida como:

$$S(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] \quad (4.5)$$

onde,  $\mathbf{W}$  é o inverso da matriz de covariância das medidas. A minimização da função objetivo (4.5) resulta em estimativas de máxima verossimilhança, supondo que os erros são, não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio-padrão constante, a

matriz  $\mathbf{W}$  torna-se uma matriz diagonal com elementos dados pelo inverso das covariâncias dos erros [Ozisik e Orlande (2000)].

Todavia, considerando-se que existe informação *a priori* para os parâmetros na forma de uma distribuição Gaussiana e que  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{P}$  são independentes, pode-se utilizar a função objetivo de *maximum a posteriori* no procedimento de minimização [Ozisik & Orlande (2000)]. Esta função-objetivo é definida como:

$$S(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P}) \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{P}$  é um vetor randômico com média  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de covariância conhecida  $\mathbf{V}$ . Portanto, a média  $\boldsymbol{\mu}$  e a matriz de covariância  $\mathbf{V}$  introduzem no procedimento de minimização informação *a priori* a respeito do vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$  a ser estimado. Esta informação pode estar disponível a partir de resultados obtidos anteriormente com o mesmo aparato experimental, ou a partir de dados da literatura.

Na solução de problemas de estimativa de parâmetros onde se faz necessário a utilização de procedimentos numéricos de minimização, o papel do método de otimização é encontrar estes parâmetros desconhecidos. Basicamente, este tipo de problema de otimização é resolvido num espaço de dimensão finita, que é igual ao número de parâmetros desconhecidos  $N_{par}$

Todavia, esta tarefa pode ser muito difícil. Pode haver uma quantidade muito grande de dados experimentais, os modelos podem ter comportamentos complexos, a função objetivo pode ter múltiplos mínimos locais, os parâmetros podem ser correlacionados, o número de parâmetros pode ser elevado, etc. Devido a estas dificuldades, foi proposta na literatura uma infinidade de métodos diferentes de otimização, cada qual com suas particularidades, e a eficiência desses métodos pode variar muito de problema para problema. Assim, não existe um único método de otimização que seja capaz de resolver todos os problemas de estimação. Alguns métodos são muito eficientes em certos problemas, mas não são capazes de solucionar um outro problema com características um pouco diferentes.

Dentre os métodos de minimização encontrados na literatura tem-se os métodos determinísticos, que geralmente se baseiam em procedimentos iterativos e

utilizam-se das derivadas de primeira e segunda ordem da função objetivo [Ozisik & Orlande 2000].

Métodos como o de Newton, que é baseado na aproximação quadrática da função objetivo, e o método de Gauss-Newton, que é o método de Newton quando utilizado a aproximação de Gauss para a matriz Hessiana, requerem a inversão da matriz Hessiana ao longo das iterações, o que pode ser computacionalmente ineficiente em problemas de grande porte.

Outros métodos utilizam apenas a informação disponível na primeira derivada da função objetivo (isto é, o vetor gradiente). Como o vetor gradiente indica a direção e o sentido em que a função aumenta com maior taxa, a busca numérica deve seguir o seu sentido contrário para que a função seja minimizada. Métodos como o método de Levenberg-Marquardt, tem a vantagem de evitar o cômputo da matriz Hessiana e a sua inversão, o que torna as iterações mais rápidas.

Uma outra classe são os métodos estocásticos de otimização, que são caracterizados pela realização de um grande número de avaliações da função objetivo em toda a região de busca, de forma a aumentar a probabilidade de encontrar o ótimo global da função objetivo. Além disso, estes métodos não precisam de uma estimativa inicial muito precisa da solução e não utilizam as derivadas para chegar ao ponto ótimo, evitando assim muitas das dificuldades associadas aos métodos mais tradicionais. São portanto, algoritmos adequados para lidar com funções objetivo fortemente não-lineares e para problemas onde não estão disponíveis boas estimativas iniciais para os parâmetros. Dentre os métodos estocásticos, encontram-se o método de Monte Carlo, o Algoritmo Genético e o algoritmo de Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), o Enxame de Partículas, etc [Colaço *et al.* (2006)].

Além disso, Colaço *et al.* (2006) chamam a atenção para uma terceira classe de métodos conhecida como métodos híbridos que combinam os métodos determinísticos e os métodos estocásticos a fim de aproveitar as vantagens específicas de cada um. Os métodos híbridos geralmente empregam os métodos estocásticos para localizar a região de mínimo global e então mudam para os métodos determinísticos para encontrar a solução mais rapidamente.

## 4.2. Estimativa de Função

Os métodos descritos anteriormente são aplicados à minimização de uma função objetivo num espaço paramétrico de dimensão finita. Vários problemas inversos e de otimização baseiam-se em estimativas de funções, ao invés de parâmetros. Nesses casos a minimização necessita ser realizada num espaço de função de dimensão infinita, onde nenhuma hipótese *a priori* é fornecida sobre a forma funcional da função desconhecida, exceto pelo espaço funcional a que ela pertence. Uma escolha geralmente adotada é o espaço de Hilbert de funções com quadrado integrável no domínio de interesse.

O procedimento de solução de problema inverso geralmente requer sua reformulação em termos de um problema bem-posto e utiliza algum tipo de técnica de regularização (estabilização). Em muitos métodos para estimativa de propriedade, onde a solução é obtida em termos de mínimos-quadrados, o procedimento de regularização se dá pela adição de termos à norma de mínimos-quadrados de modo a reduzir as oscilações causadas pelo caráter mal-posto do problema, como no procedimento de regularização de Tikhonov, onde o parâmetro de regularização é escolhido baseado no resíduo entre as medidas e as temperaturas estimadas.

De fato, se o problema inverso envolve a estimativa de poucos parâmetros, como por exemplo, a estimativa de uma propriedade constante de um meio a partir de medidas transientes de temperatura neste meio, a minimização das funções objetivos dadas acima pode ser estável. Todavia, se o problema inverso envolve a estimativa de um grande número de parâmetros, como a recuperação das componentes desconhecidas do fluxo de calor nos tempos  $t_i, f(t_i) \equiv f_i, i = 1, \dots, I$ , oscilações na solução podem acontecer. Uma abordagem possível para reduzir estas instabilidades é a utilização de procedimentos chamados de Regularização de Tikhonov, que modificam a norma de mínimos quadrados adicionando um termo como:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I (Y_i - T_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^I f_i^2 \quad (4.7)$$

onde  $\alpha (> 0)$  é o parâmetro de regularização e o segundo somatório da direita é o termo de regularização de ordem-zero. A escolha do parâmetro de regularização influencia a estabilidade da solução durante a minimização. Para  $\alpha \rightarrow 0$ , concordância entre os valores medidos e estimados é obtida no processo de minimização da função objetivo e a solução inversa exibe um comportamento oscilatório e instável. No entanto, para valores muito grandes de  $\alpha$  a solução é então amortecida, se afastando da solução exata [Colaço *et al.* (2006)]. A instabilidade na solução pode ser aliviada através da escolha apropriada do valor de  $\alpha$ . Tikhonov sugere que  $\alpha$  deve ser escolhido de modo que o menor valor da função objetivo deve ser igual a soma dos erros quadráticos das medidas, o que é conhecido como Princípio da Discrepância.

O procedimento de regularização de Tikhonov de primeira-ordem por sua vez envolve a minimização da seguinte forma modificada da norma de mínimos quadrados:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I (Y_i - T_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^I (f_{i+1} - f_i)^2 \quad (4.8)$$

Uma técnica de solução de problemas inversos de estimativa de função, alternativa àquela descrita anteriormente da regularização de Tikhonov, é o Método do Gradiente Conjugado desenvolvido por Alifanov [Ozisik & Orlande (2000)]. Esse é um método iterativo, cujo critério de parada também envolve o princípio da discrepância. Na verdade, o procedimento iterativo é parado quando a diferença entre as temperaturas medidas e estimadas torna-se da ordem dos erros experimentais esperados, dando ao método do gradiente conjugado um caráter de regularização iterativa.

O critério de parada baseado no princípio da discrepância, requer, todavia, um conhecimento *a priori* do desvio padrão dos erros de medidas. No entanto, existem várias situações práticas em que esta informação não é disponível. Para estas situações um critério alternativo de parada baseado em medidas adicionais pode ser empregado, mantendo ainda assim o caráter de regularização iterativa do método de gradiente conjugado [Ozisik & Orlande (2000)].

### 4.3. Análise dos Coeficientes de Sensibilidade

A matriz de sensibilidade, eq. (4.9), tem um importante papel no problema de estimativa de parâmetros. Sendo assim, apresenta-se aqui uma breve discussão sobre a significância matemática e física dos coeficientes de sensibilidade e os métodos para calculá-los [Ozisik & Orlande (2000)].

O coeficiente de sensibilidade  $J_{ij}$ , como definido na equação (4.10), é uma medida da sensibilidade da temperatura estimada  $T_i$  com respeito às variações no parâmetro  $P_j$ . Pequenos valores de magnitude de  $J_{ij}$  indicam que grandes variações em  $P_j$  causam pequenas mudanças em  $T_i$ . Nestes casos a estimativas dos parâmetros  $P_j$  pode ser extremamente difícil, basicamente porque um mesmo valor de temperatura pode ser obtido para uma grande faixa de valores de  $P_j$ . De fato, quando os coeficientes de sensibilidade são pequenos tem-se que o determinante de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  é aproximadamente zero  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$ , e neste caso o problema inverso é considerado mal-condicionado [Ozisik & Orlande (2000)]. Pode ainda ser mostrado que  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  é nulo quando uma coluna de  $\mathbf{J}$  pode ser expressa como uma combinação linear de outras colunas. Sendo assim, é desejável ter coeficientes de sensibilidade linearmente independentes e de grandes magnitudes, para que uma estimativa acurada dos parâmetros possa ser obtida.

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \quad (4.9)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \quad (4.10)$$

Em problemas que envolvem parâmetros com diferentes ordens de magnitude, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos vários parâmetros podem ser diferentes em ordens de grandeza, criando assim dificuldades na comparação e identificação da

dependência linear. Esta dificuldade pode ser aliviada através de uma análise dos coeficientes de sensibilidade reduzidos, definidos como:

$$J_{P_j} \equiv P_j \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \quad (4.11)$$

A maximização de  $|J^T J|$  é geralmente utilizada em projetos ótimos de experimentos para estimativa de parâmetros, porque a região de confiança das estimativas é minimizada [Ozisik & Orlande (2000)]. Uma abordagem mais detalhada sobre projeto ótimo do experimento será apresentada na próxima seção deste trabalho.

Geralmente a variação temporal dos coeficientes de sensibilidade e do determinante de  $J^T J$  deve ser examinada antes de se iniciar o procedimento de solução do problema inverso propriamente dito. Tais análises dão, por exemplo, indicações das melhores localizações para os sensores e número de medidas no tempo necessárias na análise inversa, que correspondam a coeficientes de sensibilidade linearmente independentes com grandes valores absolutos e grandes magnitudes do determinante de  $J^T J$  [Ozisik & Orlande (2000)].

Existem diferentes abordagens no cálculo dos coeficientes de sensibilidade. Ozisik & Orlande (2000) ilustram três diferentes abordagens incluindo: solução direta analítica, o problema de valor de contorno, e a aproximação por diferenças finitas.

Se o problema direto de condução de calor é linear e a sua solução direta está analiticamente disponível para o campo de temperatura, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros desconhecidos  $P_j$  podem ser determinados pela diferenciação da solução direta com respeito a  $P_j$ .

A abordagem do problema de valor de contorno para determinação dos coeficientes de sensibilidade pode ser empregada através da diferenciação do problema direto original com respeito aos parâmetros desconhecidos. Se o problema direto de condução de calor for linear, a construção do problema de sensibilidade correspondente é relativamente simples [Ozisik & Orlande (2000)].

A aproximação por diferenças finitas pode ser empregada na determinação dos coeficientes de sensibilidade aproximando as derivadas de primeira ordem que aparecem na própria definição dos coeficientes de sensibilidade eq. (4.10). Se uma aproximação por diferença avançada for usada, tem-se os coeficientes de sensibilidade aproximados segundo a equação (4.12). Se a aproximação de primeira ordem não for suficientemente acurada, o coeficiente de sensibilidade pode ser aproximado por diferença centrada na forma dada pela equação (4.13) abaixo [Ozisik & Orlande (2000)]:

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_{Npar}) - T_i(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_{Npar})}{\varepsilon P_j} \quad (4.12)$$

$$J_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_{Npar}) - T_i(P_1, P_2, \dots, P_j - \varepsilon P_j, \dots, P_{Npar})}{2\varepsilon P_j} \quad (4.13)$$

Vale notar que a aproximação dos coeficientes de sensibilidade dada pela equação (4.12) requer o cálculo adicional de  $Npar$ -vezes da solução do problema direto, enquanto a equação (4.13) requer o cálculo adicional de  $2Npar$ -vezes da solução do problema direto. Sendo assim, a computação dos coeficientes de sensibilidade através da aproximação por diferenças finitas pode muitas vezes ser dispendiosa computacionalmente.

No caso de se tratar de medidas de múltiplos sensores, algumas modificações na forma da matriz de sensibilidade  $\mathbf{J}$  são necessárias. Sendo assim a matriz de sensibilidade pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{T}_1^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{T}_1^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \vec{T}_1^T}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{T}_1^T}{\partial P_{Npar}} \\ \frac{\partial \vec{T}_2^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{T}_2^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \vec{T}_2^T}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{T}_2^T}{\partial P_{Npar}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial \vec{T}_I^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{T}_I^T}{\partial P_2} & \frac{\partial \vec{T}_I^T}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial \vec{T}_I^T}{\partial P_{Npar}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde

$$\frac{\partial \bar{T}_i^T}{\partial P_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{i1}^T}{\partial P_j} \\ \frac{\partial T_{i2}^T}{\partial P_j} \\ \dots \\ \frac{\partial T_{iM}^T}{\partial P_j} \end{bmatrix}, \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, N_{par} \quad (4.15)$$

sendo  $I$  é o número de medidas transientes por sensor,  $M$  é o número de sensores, e  $N_{par}$  igual o número de parâmetros desconhecidos. Os elementos da matriz de sensibilidade podem então ser rescritos na forma dada por:

$$J_{kj} = \frac{\partial T_k}{\partial P_j} \quad (4.16)$$

onde os sub-escritos  $k$  e  $j$  referem-se ao número de linhas e ao número de colunas da matriz de sensibilidade, respectivamente. A  $k$ -ézima linha está então relacionada à medida no tempo  $t_i$  e ao sensor  $m$  pela expressão [Ozisik & Orlande (2000)]:

$$k = (i-1)M + m \quad (4.17)$$

## 4.4. Projeto Ótimo do Experimento

Uma análise estatística possibilita a estimativa da incerteza de  $\hat{P}_j$ , que são os valores estimados para os parâmetros  $P_j, j=1, \dots, N_{par}$ . Supondo válidas as hipóteses descritas anteriormente para os erros de medida (não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio-padrão constante), a matriz de covariância para as estimativas correspondentes à função objetivo de máxima verosimilhança (ver eq. (4.5)) é dada por [Ozisik & Orlande (2000)]:

$$\mathbf{V} = \text{cov}(\hat{\mathbf{P}}) = [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}]^{-1} \quad (4.18)$$

Sendo assim, os desvios-padrão para as estimativas dos parâmetros são obtidos da diagonal de  $\text{cov}(\hat{\mathbf{P}})$  como:

$$\sigma_{\hat{P}_j} \equiv \sqrt{\text{cov}(\hat{P}_j, \hat{P}_j)} = \sqrt{V_{jj}} \quad \text{para } j=1, \dots, N_{par} \quad (4.19)$$

A equação (4.20) apresenta os intervalos para um nível de confiança requerido de 99%. Todavia, o intervalo de confiança não fornece uma boa aproximação da região de confiança conjunta dos parâmetros estimados. De fato, o intervalo de confiança é obtido para cada parâmetro, sem levar em conta as estimativas dos outros parâmetros. A região de confiança construída a partir dos intervalos de confiança pode acabar por incluir áreas fora da verdadeira região de confiança ou deixar de incluir áreas que pertençam a verdadeira região [Ozisik & Orlande (2000)].

$$\hat{P}_j - 2.576 \sigma_{\hat{P}_j} \leq P_j \leq \hat{P}_j + 2.576 \sigma_{\hat{P}_j} \quad \text{para } j=1, \dots, N_{par} \quad (4.20)$$

A região de confiança conjunta para os parâmetros estimados é então dada pela equação (4.18) e refere-se ao interior do hiper-elipsóide centrado na origem e com coordenadas  $(\hat{P}_1 - P_1), (\hat{P}_2 - P_2), \dots, (\hat{P}_{N_{par}} - P_{N_{par}})$ . A superfície do hiper-elipsóide tem densidade de probabilidade constante dada por uma distribuição chi-quadrada para um determinado nível de confiança [Ozisik & Orlande (2000)].

$$(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P}) \leq \chi_N^2 \quad \text{para } j=1, \dots, N_{par} \quad (4.21)$$

A otimização dos experimentos se dá minimizando o hiper-volume da região de confiança, de modo que as estimativas dos parâmetros tenham variância mínima. A minimização da região de confiança pode ser feita maximizando o determinante de  $\mathbf{V}^{-1}$ .

Uma vez que  $\mathbf{V}^{-1}$  é dado pela inversa de (4.18), tem-se que projetar o experimento ótimo significa maximizar o determinante da matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , também conhecida como *matriz de informação de Fischer*. Este critério é o chamado *critério D-Ótimo* [Colaço *et.al.* (2006a)].

Usando a definição da matriz de sensibilidade envolvendo um único sensor a matriz de informação de Fischer pode ser escrita como na expressão (4.22). Se a restrição de que existe um grande, porém fixo, número de medidas de  $M$  sensores, os experimentos podem ser otimizados utilizando-se uma forma alternativa da matriz  $\mathbf{F}$ , cujos elementos são dados pela expressão (4.23), onde  $t_f$  é a duração do experimento [Ozisik & Orlande, (2000)]:

$$[\mathbf{F}_I^*]_{m,n} = \sum_{i=1}^I \left( \frac{\partial T_i}{\partial P_m} \right) \left( \frac{\partial T_i}{\partial P_n} \right) \quad \text{para } m, n = 1, \dots, N_{par} \quad (4.22)$$

$$[\mathbf{F}_I^*]_{m,n} = \frac{1}{M t_f} \sum_{s=1}^M \int_{t=0}^{t_f} \left( \frac{\partial T_s}{\partial P_m} \right) \left( \frac{\partial T_s}{\partial P_n} \right) dt \quad \text{para } m, n = 1, \dots, N_{par} \quad (4.23)$$

## 4.5. Inferência Bayesiana

Segundo Gamerman & Lopes (2006), o desenvolvimento da estatística como ciência de tratamento e análise de dados sempre esteve atrelado às capacidades computacionais do momento, tendo sido então alavancado nas últimas décadas com a disseminação de meios de computação cada vez mais velozes. Ainda segundo Gamerman & Lopes (2006), a área que talvez tenha se beneficiado mais com esse avanço foi a de inferência Bayesiana. Embora essa abordagem encontre a simpatia de usuários pela sua flexibilidade, ela obriga a incorporação de todas as fontes de informação em um dado problema.

Segundo Zabaras (2006), a recente aplicação da inferência Bayesiana a partir da propagação de métodos eficientes de amostragem, como o Método de Monte Carlo via

Cadeia de Markov (MCMC) empregados na solução de problemas inversos em transferência de calor, acrescentou novas perspectivas a esta frente de estudos.

Assim como na inferência frequentista, a inferência Bayesiana trabalha na presença de observações  $\mathbf{Y}$  cujos valores são inicialmente incertos e descritos através de uma distribuição de probabilidade com densidade ou função de probabilidade  $f(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ . Gamerman & Lopes (2006) acrescentam que a situação canônica é aquela onde uma amostra aleatória simples  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  é extraída de uma população que se distribui de acordo com a densidade  $f(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ . Tipicamente neste caso as observações  $Y_n$ 's são identicamente distribuídas e independentes (condicionalmente ao conhecimento de  $\mathbf{P}$ ).

A quantidade  $\mathbf{P}$  serve como indexador da família de distribuições das observações representando características de interesse que se deseja conhecer. Todavia, a quantidade  $\mathbf{P}$  pode ser mais do que um simples indexador, podendo ser a própria razão da tomada de medições uma vez que o interesse principal de estudo seja a determinação do seu valor. Além disso, Gamerman & Lopes (2006) ressaltam que é bastante provável que se tenha, ou se saiba, como caracterizá-la, sendo nestes casos possível, e até recomendável, que esse conhecimento prévio a respeito da quantidade seja incorporado à análise e é nesse ponto que o método Bayesiano se diferencia do frequentista. Enquanto o segundo não admite essa forma de informação por não ser observável, e portanto não ser passível de comprovação empírica, o primeiro sempre incorpora essa informação à análise através de uma distribuição  $p(\mathbf{P})$ , mesmo que esta informação não seja muito precisa.

Como descrito acima, a inferência Bayesiana contém dois ingredientes: a distribuição das observações  $f(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$  e a distribuição  $p(\mathbf{P})$ . Olhando para o primeiro como função de  $\mathbf{P}$  obtém-se a função de verosimilhança de  $\mathbf{P}$ ,  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$  que fornece informação sobre a chance de cada valor de  $\mathbf{P}$  ter levado àquele valor observado para  $\mathbf{Y}$ . O segundo ingrediente é chamado de densidade *a priori*, pois contém a distribuição de probabilidade de  $\mathbf{P}$  antes da observação do valor de  $\mathbf{Y}$ . Colocado desta forma é razoável que o processo de inferência seja baseado na distribuição de probabilidade de  $\mathbf{P}$  após observar o valor de  $\mathbf{Y}$ , que passa a fazer parte do conjunto de informação disponível. Essa distribuição,  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ , é chamada de distribuição *a posteriori* em direta oposição a *a priori* e pode ser obtida através do teorema de Bayes, equação (4.24). Uma vez obtida a distribuição *a posteriori*, pode-se procurar summarizar a informação nela contida através de algumas medidas, em particular

podem ser calculadas medidas de localização para fornecer uma idéia de possíveis valores centrais e de dispersão, para dar uma idéia da variabilidade associada à situação descrita pela posteriori. As principais medidas de posição são a média, a moda e a mediana, e as principais medidas de dispersão são a variância, o desvio-padrão, a precisão e a curvatura na moda. Uma relação dessas medidas e a relação delas com regras de decisão é dada por Migon & Gamerman (1999):

$$p(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y}|\mathbf{P})p(\mathbf{P})}{p(\mathbf{Y})} = \frac{1}{const} p(\mathbf{Y}|\mathbf{P})p(\mathbf{P}) \quad (4.24)$$

Assim, a função de densidade de probabilidade *posteriori* pode ser escrita como sendo proporcional ao produto da verossimilhança e da distribuição *a priori*:

$$p(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\mathbf{P})p(\mathbf{P}) \quad (4.25)$$

Sendo assim, assumindo que os dados de temperatura são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), a verossimilhança pode ser escrita como:

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{-\frac{N}{2}}} \text{Exp}\left[\frac{(\mathbf{Y} - T(\mathbf{P}))^T (\mathbf{Y} - T(\mathbf{P}))}{2\sigma_Y^2}\right] \quad (4.26)$$

onde  $T(\mathbf{P})$  é a temperatura calculada em função dos parâmetros a serem estimados, e  $\mathbf{Y}$  é a temperatura medida. Nesta etapa do presente trabalho as temperaturas experimentais foram obtidas através de dados experimentais simulados, perturbados por um erro com média centrada no valor exato da temperatura e variância constante e conhecida.

A quantidade desconhecida no problema de condução de calor aqui abordado é a condutividade térmica do meio, representado na seção anterior como  $k(x)$ . Lembre-se, todavia, que a abordagem adotada na solução do problema direto optou por expandir as propriedades termofísicas em termo de autofunções; tem-se então que em

último plano as quantidades desconhecidas são os coeficientes da expansão e os dois valores da propriedade nos contornos utilizados na solução filtro.

Quando não é possível a obtenção das correspondentes distribuições marginais analiticamente tem-se a necessidade de fazer uso de algum método baseado em simulação. Gamerman & Lopes (2006) descrevem algumas das principais técnicas como: linearização e aproximação pela normal, aproximação de Laplace, aproximação via quadratura Gaussiana e a técnica de simulação estocástica baseada no princípio de reamostragem, e ressaltam que, com exceção desta ultima técnica, as demais citadas estão atreladas a resultados assintóticos (quando o tamanho da amostra cresce) e à normalidade.

A inferência baseada em técnicas de simulação utiliza amostras da *posteriori*  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$  para extrair informação a seu respeito de  $\mathbf{P}$ . Obviamente, como uma amostra é sempre um substituto parcial da informação contida em uma densidade, métodos baseados em simulação são inherentemente aproximados e devem apenas ser utilizados quando for constada a impossibilidade de extração analítica de informação da *posteriori*, como é o caso no presente estudo. Infelizmente, segundo Gamerman & Lopes (2006), para a maioria dos problemas de relevância prática é complicado fazer uma geração da *posteriori*  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ . Portanto, são necessários métodos mais sofisticados que permitam a obtenção de uma amostra de  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ , como por exemplo, a técnica baseada em simulação via cadeias de Markov. O método numérico mais utilizado para explorar o espaço de estados da *posteriori* é a simulação de Monte Carlo. A simulação de Monte Carlo é baseada em uma grande amostra da função densidade de probabilidade (neste caso, a função de densidade de probabilidade da *posteriori*  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ ). Várias estratégias de amostragem são propostas na literatura, entre elas, o Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), adotado pelo presente trabalho, onde a idéia básica é simular um “passeio aleatório” no espaço de  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$  que converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição de interesse no problema.

#### 4.5.1. Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov - MCMC

A teoria dos processos estocásticos, onde a cadeia de Markov está inserida, é geralmente definida como a parte dinâmica da teoria das probabilidades, onde se estuda uma coleção de variáveis aleatórias, sob o ponto de vista de suas interdependências e de seu comportamento limite. O método de Monte Carlo via Cadeia de Markov é uma versão iterativa dos métodos de Monte Carlo tradicionais. A idéia é obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais das características desta distribuição usando técnicas de simulação iterativa, baseadas em cadeias de Markov.

Uma cadeia de Markov é um processo estocástico  $\{P_0, P_1, \dots\}$  tal que a distribuição de  $P_i$ , dados todos os valores anteriores  $P_0, \dots, P_{i-1}$ , depende apenas de  $P_{i-1}$ . Ou seja, interpreta-se o fato de um processo satisfazer a propriedade de Markov (eq. (4.27)) como que, dado o presente, o passado é irrelevante para se prever a sua posição num instante futuro [Gamerman & Lopes (2006)].

$$p(\mathbf{P}_i \in A | \mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{i-1}) = p(\mathbf{P}_i \in A | \mathbf{P}_{i-1}) \quad (4.27)$$

Uma cadeia de Markov é mais precisamente definida pela sua probabilidade de transição  $p(i,j) = p(i \rightarrow j)$ , a qual define a probabilidade de que o processo, estando no estado  $s_i$  move-se para o estado  $s_j$  em um único passo, conforme segue:

$$p(i, j) = p(i \rightarrow j) = p(\mathbf{P}_{t+1} = s_j | \mathbf{P}_t = s_i) \quad (4.28)$$

Os métodos MCMC requerem, para que se obtenha uma única distribuição de equilíbrio, que a cadeia de Markov seja [Ehlers (2003)]:

- homogênea, isto é, as probabilidades de transição de um estado para outro sejam invariantes;
- irredutível, isto é, cada estado pode ser atingido a partir de qualquer outro em um número finito de iterações;

- aperiódica, isto é, não haja estados absorventes;

Assim, uma condição suficiente para se obter uma única distribuição estacionária é que o processo atenda à seguinte equação de balanço:

$$p(i \rightarrow j)p_i(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = p(j \rightarrow i)p_j(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) \quad (4.29)$$

onde  $p(\mathbf{P}_i|\mathbf{Y})$  e  $p(\mathbf{P}_j|\mathbf{Y})$  são as probabilidades dos estados distintos da distribuição de interesse.

Uma questão importante de ordem prática é como os valores iniciais influenciam o comportamento da cadeia. A idéia é que conforme o número de iterações aumente, a cadeia gradualmente converge para uma distribuição de equilíbrio. Assim, em aplicações práticas é comum que os estados iniciais sejam descartados, como se formassem uma *amostra de aquecimento*. O problema então consiste em construir algoritmos que gerem cadeias de Markov cuja distribuição converge para a distribuição de interesse. Os algoritmos MCMC mais comumente utilizados são o Metropolis-Hastings (aqui empregado) e o Amostrador de Gibbs [Ehlers (2004)].

#### 4.5.2. MCMC – Algoritmo Metropolis-Hastings

A cadeia de Markov segundo o nome genérico de Metropolis-Hastings advém dos artigos de Metropolis *et.al.* (1953) e Hastings (1970). Esses trabalhos foram considerados básicos para a identificação do método embora, na opinião de Gamerman & Lopes (2006), os trabalhos de Barker (1995) e Peskun (1973) tenham trazidos contribuições relevantes.

O algoritmo de Metropolis-Hastings usa a mesma idéia dos métodos de rejeição, i.e. um valor é gerado de uma distribuição auxiliar e aceito com uma dada probabilidade. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio. Ou seja, o algoritmo agora inclui uma etapa adicional, aonde o mecanismo de transição depende de uma proposta de transição e de uma etapa posterior de

avaliação da densidade de equilíbrio, mas esta está representada na transição global através da probabilidade de aceitação.

O algoritmo de Metropolis-Hastings faz uso de uma função densidade de probabilidade auxiliar,  $q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})$ , da qual seja fácil obter valores amostrais. Supondo que a cadeia esteja em um estado  $\mathbf{P}$ , um novo valor candidato,  $\mathbf{P}^*$ , será gerado da distribuição auxiliar  $q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})$ , dado o estado atual da cadeia  $\mathbf{P}$ , onde  $\mathbf{P}$  é o vetor dos parâmetros em estudo.

O novo valor  $\mathbf{P}^*$  é aceito com probabilidade dada pela equação (4.30), onde a razão que aparece nesta equação é chamada por Hastings (1970) de razão de teste, hoje chamada de razão de Hastings “ $RH$ ”:

$$RH(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*) = \min \left[ 1, \frac{p(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y})q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})}{p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})q(\mathbf{P}|\mathbf{P}^*)} \right] \quad (4.30)$$

onde  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$  é a distribuição *a posteriori* de interesse. Uma observação importante é que só precisamos conhecer  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$  a menos de uma constante, uma vez que estamos trabalhando com razões entre densidades, e a constante de normalização se cancela.

Em termos práticos, isto significa que a simulação de uma amostra de  $p(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$  usando o algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser esquematizado da seguinte forma [Ehlers (2004)]:

1. Inicializa-se o contador de iterações da cadeia  $i = 0$  e arbitra-se um valor inicial  $\mathbf{P}^{(0)}$ .
2. Gera-se um valor candidato  $\mathbf{P}^*$  da distribuição  $q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P})$ .
3. Calcula-se a probabilidade de aceitação  $RH(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$  do valor candidato através da eq. (4.30).
4. Gera-se um número randômico  $u$  com distribuição uniforme, isto é  $u \sim U(0, 1)$ ,
5. Se  $u \leq RH(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$  então aceita-se o novo valor e faz-se  $\mathbf{P}^{(i+1)} = \mathbf{P}^*$ . Caso contrário rejeita-se e faz-se  $\mathbf{P}^{(i+1)} = \mathbf{P}^{(i)}$ .
6. Incrementa-se o contador de  $i$  para  $i + 1$  e volta-se ao passo 2.

O núcleo de transição  $q$  define apenas uma proposta de movimento que pode ou não ser confirmada por  $RH(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$ . Por este motivo  $q$  é normalmente chamado de proposta e, quando olhado como uma densidade (ou distribuição) condicional  $q(\mathbf{P}^* | \cdot)$ , chamado de densidade (ou distribuição) proposta.

O sucesso do método depende de taxas de aceitação não muito baixas e de propostas fáceis de simular. O método substitui uma geração difícil de  $p(\mathbf{P} | \mathbf{Y})$  por várias gerações propostas de  $q$ .

O presente trabalho optou por adotar cadeias simétricas ou seja, para o algoritmo de Metropolis-Hastings, a noção de cadeia simétrica é aplicada sobre a transição proposta  $q$ . Sendo assim,  $q$  define uma transição uniforme em torno das posições anteriores na cadeia, isto é,  $q(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}) = q(\mathbf{P} | \mathbf{P}^*)$ , para todo  $(\mathbf{P}^*, \mathbf{P})$ . Neste caso a expressão (4.30) reduz-se apenas a razão entre as densidades calculadas nas posições, anterior e proposta, da cadeia, e não depende de  $q$ .

Nota-se também que a cadeia pode permanecer no mesmo estado por muitas iterações, e na prática sugere-se monitorar isto calculando a taxa de aceitação, ou seja, a porcentagem média de iterações para as quais novos valores gerados são aceitos. Sendo assim, uma cadeia que não se move, isto é, com baixas taxas de aceitação, deve ser evitada. Para que se tenha convergência para a distribuição de equilíbrio, a cadeia deve ser capaz de percorrer todo o seu domínio. Uma forma de se resolver as baixas taxas de aceitação é fazer com que a cadeia caminhe muito lentamente, isto é se desloque através de movimentos diminutos. Todavia, cadeias com taxas de aceitação muito altas também são indesejadas, uma vez que a cadeia levará muitas iterações para percorrer todo o domínio  $p(\mathbf{P})$ . Assim, os movimentos da cadeia, determinados por  $q$ , devem ser dosados de forma a fazê-la ter deslocamentos grandes, mas que tenham chances reais, determinados pela eq. (4.30), de ser aceitos.

# Capítulo 5

---

## 5. Experimentos com Termografia por Câmera de Infravermelho

Este capítulo tem como objetivo apresentar a utilização da técnica não-intrusiva de medição de temperatura por termografia de infravermelho na realização de experimentos em transferência de calor visando a identificação de propriedades termofísicas, conjugada à técnica de Inferência Bayesiana na solução dos respectivos problemas inversos. Neste sentido, dois experimentos envolvendo condução de calor transiente foram montados em uma bancada experimental projetada para este fim, e as medidas de temperatura foram obtidas com uma câmera de infravermelho, *ThermoVision A-10* da *Flir Systems Inc.* As imagens termográficas aquisitadas ao longo do transiente térmico foram tratadas e alimentaram o algoritmo de solução do problema inverso, construído na plataforma *Mathematica 5.2*, como mais tarde ilustrado no capítulo de resultados.

### 5.1. Fundamentos da Termografia por Câmera de Infravermelho

Medidas de temperatura com sensores de contato, como por exemplo termopares, são por vezes de difícil execução uma vez que a introdução de um sensor no meio a ser caracterizado pode causar uma perturbação significativa no mesmo. Tal perturbação requer que o sensor seja modelado como parte do sistema, causando dificuldades adicionais na análise do problema térmico. A resolução espacial das câmeras termográficas na faixa do infravermelho já atinge hoje valores inferiores a 20  $\mu\text{m}$ . Portanto,

a termografia por câmera de infravermelho se apresenta como uma técnica não-intrusiva, de alta definição e pequena incerteza, e vasta aplicabilidade.

A radiação na faixa do infravermelho (IR, do inglês “infrared”) é uma parte da radiação eletromagnética cujo comprimento de onda é maior que o da luz visível ao olho humano. O infravermelho é uma frequência eletromagnética naturalmente emitida por qualquer corpo, com intensidade proporcional à sua temperatura. A Termografia é a técnica que possibilita a medição de temperaturas e a formação de imagens térmicas de um objeto, a partir da radiação infravermelha que emana da superfície.

Os infravermelhos se subdividem em infravermelhos curtos ( $0.7 - 5 \mu\text{m}$ ), infravermelhos médios ( $5 - 30 \mu\text{m}$ ) e infravermelhos longos ( $30 - 1000 \mu\text{m}$ ). Entretanto, esta classificação não é precisa porque em cada área de utilização, se tem uma idéia diferente dos limites dos diferentes tipos.

Um detector ou sensor de radiação infravermelha é um transdutor de energia eletromagnética, isto é, um dispositivo que converte a energia radiante incidente sobre o mesmo em alguma outra forma conveniente de sinal mensurável, geralmente, um sinal elétrico. Analisando-se o mecanismo físico envolvido no processo de detecção pode-se estabelecer duas categorias distintas de detectores: os Detectores Quânticos e os Detectores Térmicos.

Os detectores quânticos se baseiam no efeito fotoelétrico, onde o material exposto a uma radiação eletromagnética de freqüência suficientemente alta, emite elétrons, ou seja, estes detectores utilizam a conversão direta dos fótons incidentes em portadores de carga via transição eletrônica em um material semicondutor. Neste caso, os fótons absorvidos acarretam um aumento na população de portadores de carga fazendo com que a resistência elétrica do dispositivo diminua. Um portador de carga refere-se a uma partícula livre portadora de uma carga elétrica. Na física de semicondutores, os buracos produzidos pela falta de elétrons são tratados também como portadores de carga. Esses dispositivos podem ser construídos e operados sob duas formas diferentes:- Fotocondutor ou Fotoresistor; e Fotovoltaico (Fotodiodo).

No caso dos detectores térmicos, a energia eletromagnética absorvida provoca o aquecimento do dispositivo. Isto provoca a alteração de alguma propriedade do material que é função da temperatura e pode ser mensurada por uma das seguintes formas:

- Medida direta da temperatura (calorimetria)
- Mudança na resistência elétrica do material
- Um sinal de corrente ou tensão termoelétrica
- Alteração de carga ou capacidade do dispositivo

Este tipo de detector apresenta uma resposta proporcional à energia incidente, sendo praticamente independente do comprimento de onda da radiação. Devido à inércia térmica dos processos de absorção e troca de calor, este tipo de sensor apresenta tempos de resposta relativamente longos ( $>10$  ms). Em geral esses detectores não precisam de refrigeração, facilitando o seu uso em diversas aplicações de campo com menor custo operacional. Os principais tipos de detectores térmicos são: a Termopilha, o Detector Piroelétrico e o Bolômetro.

Detectores do tipo bolômetro tratam-se basicamente de um termoresistor, isto é, de um dispositivo cuja resistência elétrica varia com a temperatura. Pode ser construído tanto a partir de metais (dispositivos clássicos) quanto com semicondutores (dispositivos modernos) que apresentem dependência significativa da resistência elétrica com a temperatura. Existe ainda uma terceira categoria de materiais conhecidos como termistores que são compostos por óxidos mistos e vem sendo utilizados com sucesso na construção de bolômetros.

#### **A Câmera ThermoVision-A10:**

A câmera utilizada em nosso experimento, mostrada na figura 5.1, é o modelo *ThermoVision® Micron/A10* fabricada pela *Índigo/Flir Systems* para comprimentos de onda longa (entre 7,5 à 13,5  $\mu\text{m}$ ), com temperatura de trabalho da câmera entre -40 e 50C°. A medição da temperatura pela câmera é baseada na conversão da radiação infra-vermelha em um sinal elétrico, que faz com que a imagem termográfica seja gerada. A *ThermoVision-A10* utiliza detectores de microbolômetros de óxido de vanádio arranjados em malha de 51x 51 microns.

Os modos de saída de vídeo da *ThermoVision-A10* podem ser em digital (em 8 ou 14bits) ou em analógico (8bits), para o formato de vídeo em escala de cinza *RS-170A* (com taxa de 30 quadros por segundo com fonte de codificação analógica *NTSC* padrão nos EUA) ou de vídeo em escala cinza *CCIR* (com fonte de codificação analógica *PAL* própria

e padrão na Europa e em outros países, com taxa de 25 quadros por segundo) por interface RS-232.

A lente da *ThermoVision-A10* tem padrão de distância focal de 11mm com campo visual de 40° por 30° (resolução 640 por 480 pixels e resolução espacial em torno de 0,22mm/pixel para o ensaio de 200mm de distância).

Seu ruído equivalente, mais conhecido pela sigla *NETD* (*noise equivalent temperature difference*), é menor que 85mK em baixas temperaturas inferiores a 150°C e considerando temperatura ambiente em torno de 25°C (*Low temperature state – High Sensitivity*), e menor que 350mK em altas temperaturas, temperaturas superiores a 500°C e ambiente em torno de 25°C (*High temperature state – Low Sensitivity*).

Com consumo nominal de 1,5 Watts, massa de apenas 107 gramas, sendo uma das menores câmeras disponíveis no mercado (dimensões de 1,35" por 1,45" por 1,9") e montagem simples pela base padrão para câmeras (furação com rosca de 5/16"), ela se apresenta como uma opção bastante versátil e de baixo custo para aplicações científicas. A tabela 5.1 a seguir apresenta algumas das especificações técnicas da *ThermoVision-A10*.



**Fig. 5.1– Câmera ThermoVision A10 (fonte:Flir Systems)**

**Tabela. 5.1 – Especificações técnicas da câmera ThermoVision A10**

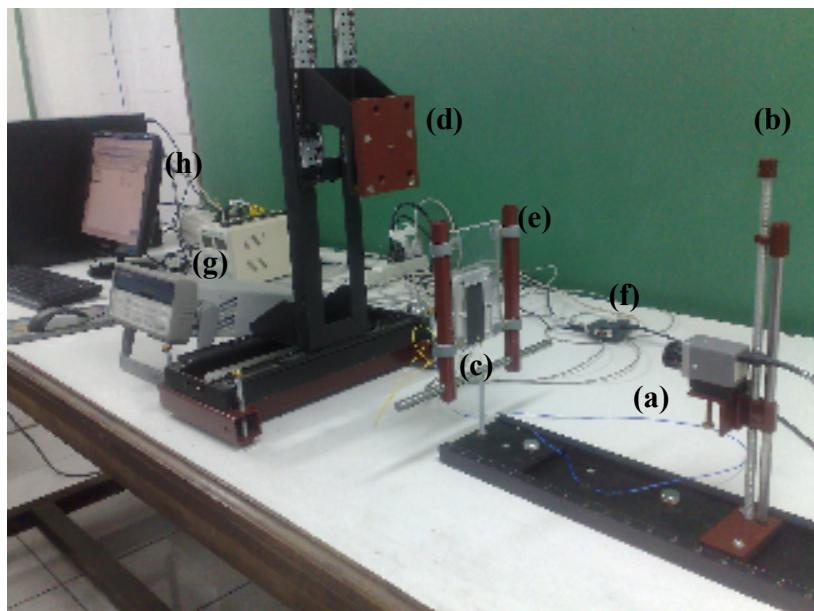
Thermo Vision A10			
Vídeo	Disposição Plana Focal	Detector	Microbolômetro de Óxido de Vanadio (não refrigerado)
		Resposta Espectral	7.5 – 13.5 $\mu\text{m}$
		Sensibilidade Térmica	< 40mK para f/1.0 < 80mK para f/1.6
	Performance da Imagem Térmica	Tempo para Primeira Imagem	< 2 segundos
	Sistema Ótico	Foco Fixo	Ajuste Manual
	Sinal de Saída do Vídeo	Analógico : 30Hz para RS-170A ou 25Hz para CCIR Suporte de Saída Digitais de 14-bit	
	Tamanho Pixel	51 x 51 $\mu\text{m}$	
Sistema	Formato da Matriz de Saída	160H x 120V (RS-170A) 160H x 128V (CCIR)	
	Temperatura de Operação	0°C a +40°C	
Informações Gerais	Temperatura Máxima da Amostra	150°C - modo padrão 400°C - modo de auto-ganho	
	Tamanho	1.35”W x 1.45”H x 1.90”D	
	Peso	120 g	

O processamento dos sinais (imagens) fornecidos pela camera *ThermoVision A10* pode ser feito de forma analógica ou digital. O sinal analógico é um tipo de sinal contínuo que varia em função do tempo e é obtido de forma direta sem passar por qualquer decodificação complexa. Já o sinal digital é um sinal com valores discretos (descontínuos) no tempo e amplitude. As informações obtidas pelos microbolômetros de óxido de vanádio da *ThermoVision A-10* fornecem informações discretas na escala de 14 bits (0 a 16383, ( $2^{14}$ -1)) a um módulo conversor. Este módulo transmite tanto as informações digitais (discretas) quanto converte e transmite de forma analógica (contínua). Por termos uma placa de recepção analógica da *National Instruments* disponível, acabamos por capturar as informações analógicas deste módulo. Porém, tais informações são recebidas pela placa da *National Instruments* como uma imagem na escala de cinzas comum, o que a faz retornar ao processador do computador informações digitais na escala do *Graylevel* de 8 bits (0 a 255). O software no computador interage com a placa através de controles ActiveX (fornecidos pela *National Instruments* junto com a placa) mediante programação orientada

a objetos. Uma otimização da captação das informações estaria na aquisição de uma nova placa, só que de recepção digital, a fim de se obter toda a amplitude da escala de 14 bits oferecida pela câmera, obtendo uma escala 64 vezes mais detalhada ( $2^{(14-8)}$ ).

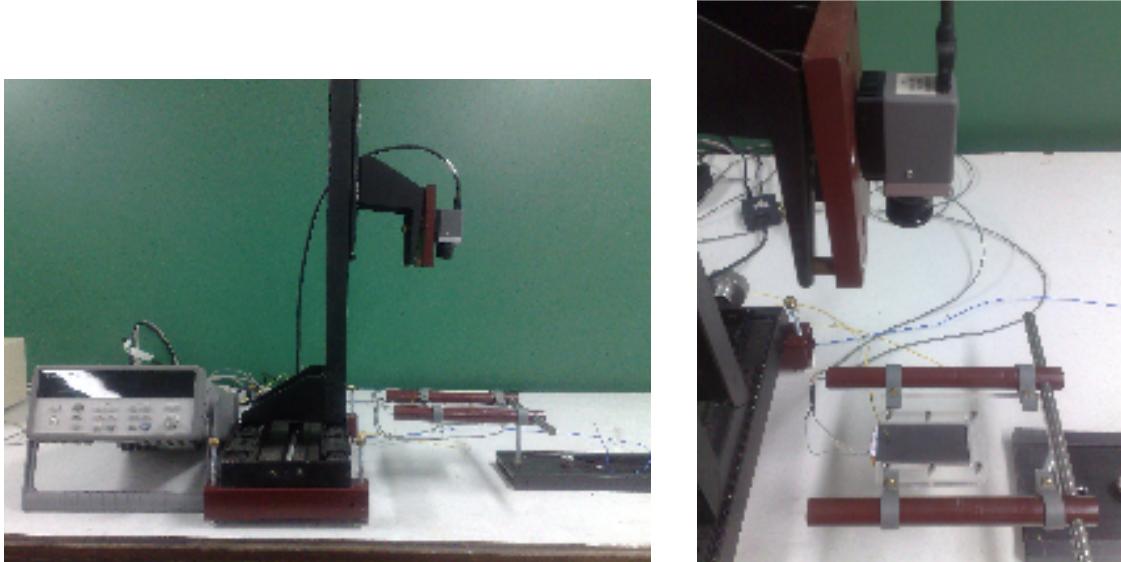
## 5.2. Aparato Experimental e Modelos Físicos

A bancada experimental apresentada na figura 5.2 foi projetada, construída e testada para realização do presente estudo de identificação de propriedades termofísicas usando medidas de temperatura obtidas com a câmera de infravermelho. Os principais componentes da bancada são: a) câmera ThermoVision A10; b) suporte para câmera em experimento vertical; c) amostra com placas aquecidas em sanduiche; d) suporte para câmera em experimento horizontal; e) suporte das amostras; f) conversor digital-analógico; g) sistema de aquisição de dados (Agilent 34970-A); h) microcomputador de aquisição e tratamento de dados.

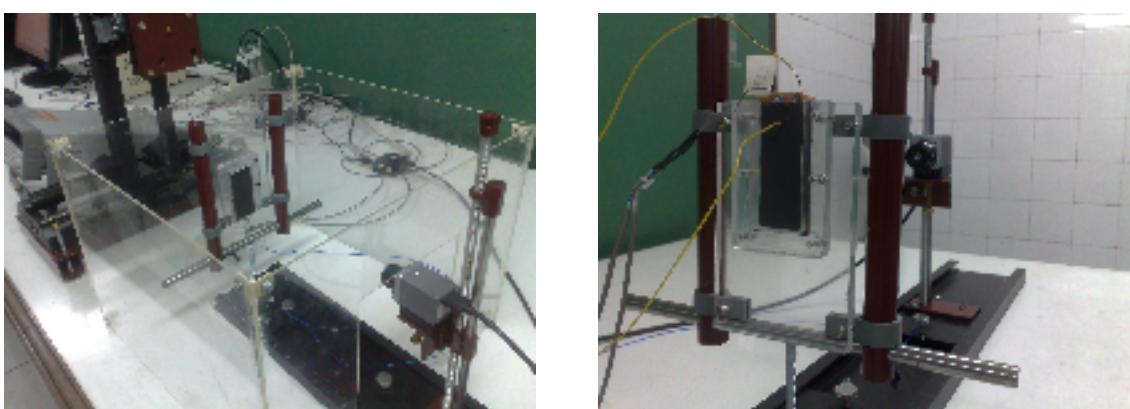


**Fig. 5.2. – Bancada experimental para identificação de propriedades termofísicas com termografia por câmera de infravermelho.**

A bancada foi idealizada para duas configurações experimentais distintas: um experimento de placa aquecida na horizontal com as imagens de termografia sendo tomadas na direção normal à placa (aparato da esquerda – Figs. 5.3) e experimentos feitos em placa vertical com as imagens feitas com a câmera ajustada horizontalmente (Figs. 5.4). Neste últimos casos, pode-se distinguir a posição da resistência aquecedora em dois casos distintos, uma vez que as placas em sanduíche sejam mais longas que a resistência. Observa-se também na Fig.5.4 a cúpula em acrílico confeccionada para reduzir as perturbações externas no processo de convecção natural que ocorre junto às placas aquecidas.



**Figs. 5.3– Experimento de placa horizontal, com detalhe do dispositivo de posicionamento vertical da câmera e do porta-amostras.**



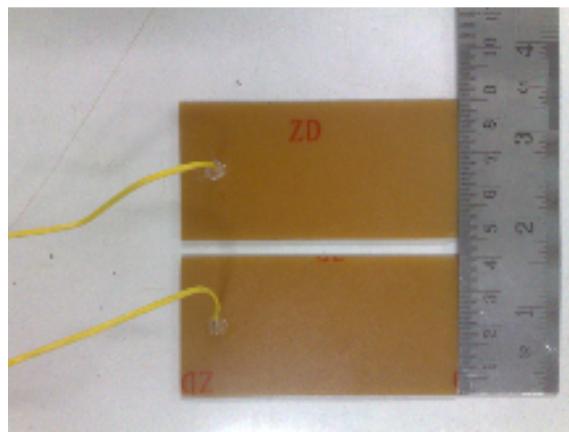
**Figs. 5.4. – Experimentos de placa vertical, com detalhe do dispositivo de posicionamento horizontal da câmera e do porta-amostras.**

Para os experimentos foram escolhidos dois conjuntos de corpos de prova diferentes, um par de placas de alumínio com espessura de 3 mm e de dimensões 4 por 4 cm e um par de placas de baquelite de 1.58 mm e dimensões 4 por 8 cm (Figs.5.5). As superfícies receberam uma pintura em grafite (Graphit 33, Kontakt Chemie) para que sua emissividade fosse aproximadamente uniforme e relativamente alta em toda a placa ( $\varepsilon \approx 0.97$ ), minimizando os erros nas variações da emissividade. Nos experimentos com as placas de alumínio, apenas a face voltada para a câmera foi pintada com a tinta de graphite, enquanto a face oposta foi deixada com a textura original do alumínio polido. Nos experimentos com baquelite, ambas as placas foram pintadas com grafite, visando obter-se uma situação mais próxima à simetria. Observa-se também da Fig.5.5 que as placas de baquelite, na face em contato com a resistência elétrica, tem um filme de cobre depositado, também com dimensões 4x4 cm.

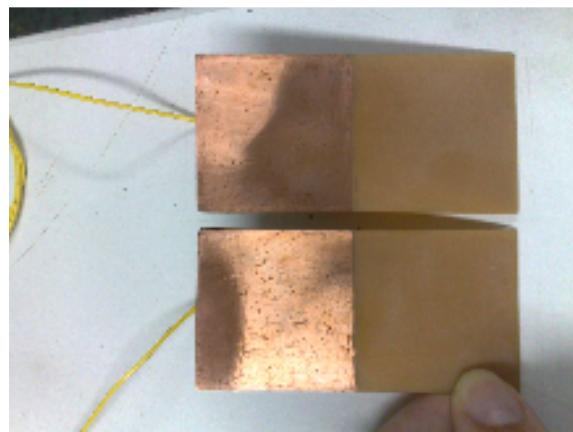
Como referência para as medidas da câmera, bem como para validação da técnica experimental, utilizou-se de medidas de temperatura com termopares do tipo-K, afixadas com adesivo especial (Loctite com ativador) na superfície de cada placa, como mostrado em detalhe na Fig.5.5a. Em todos os casos foi utilizado um termopar de referência no topo da superfície exposta à câmera, método este preferido na correlação dos níveis digitais da câmera com a temperatura, tendo em visto a dificuldade de controlar a saturação da câmera quando se emprega um calibrador de corpo negro. Foram também fixados termopares do tipo-K na face oposta à câmera de modo a possibilitar comparações com as temperaturas medidas pela câmera, sendo um total de 5 termopares adicionais para o experimento com placas de alumínio e apenas 1 termopar para os experimentos com placas de baquelite. A Fig. 5.5b. mostra em detalhe a face interna das placas de baquelite, com um depósito de cobre de mesmas dimensões da resistência elétrica que será utilizada no aquecimento da placa com o objetivo de uniformizar o fluxo de calor fornecido.

Utilizou-se no aquecimento das placas uma resistência com dimensões 4x4 cm e de  $38.18\Omega$  (medida com 4 fios e multímetro de 7 dígitos Agilent) isolada eletricamente com fita kapton (preparada pelo Prof. Saulo Gunths, UFSC), como mostrado na figura 5.6. Na montagem, a resistência foi colocada entre as duas placas untadas com pasta térmica para uniformizar o contato térmico. A resistência está ligada a uma fonte de corrente contínua eletronicamente controlada (marca INSTRUTHERM). A fixação deste conjunto

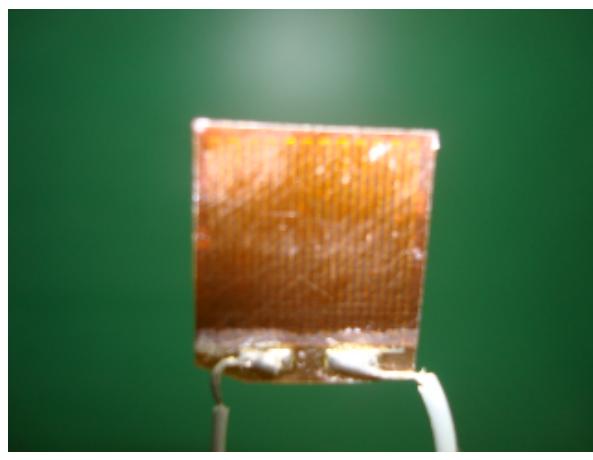
placa-resistência-placa se deu através de uma moldura em acrílico com aperto por parafusos, com braçadeiras nas extremidades da moldura para sustentação no suporte, como mostrado no detalhe da figura 5.7. Os corpos de prova de alumínio, como têm as mesmas dimensões da resistência e alta condutividade térmica, foram empregados para experimentos sem variação significativa espacialmente de temperatura, enquanto as placas de baquelite, com o dobro do comprimento da resistência e baixa condutividade térmica, oferecem experimentos com variação apreciável de temperatura ao longo do seu comprimento.



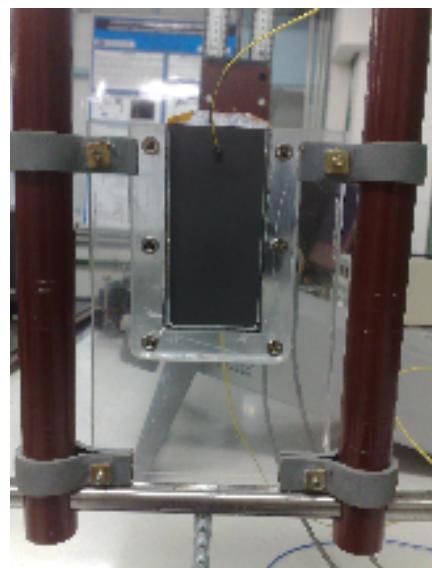
**Fig.5.5a. – Detalhe das placas de baquelite (4x8cm) com os termopares tipo K afixados.**



**Fig.5.5b. – Detalhe da face interna das placas de baquelite, com depósito de cobre (4x4cm).**



**Fig. 5.6. – Detalhe da resistência elétrica (4 x 4cm) com isolamento em filme kapton.**

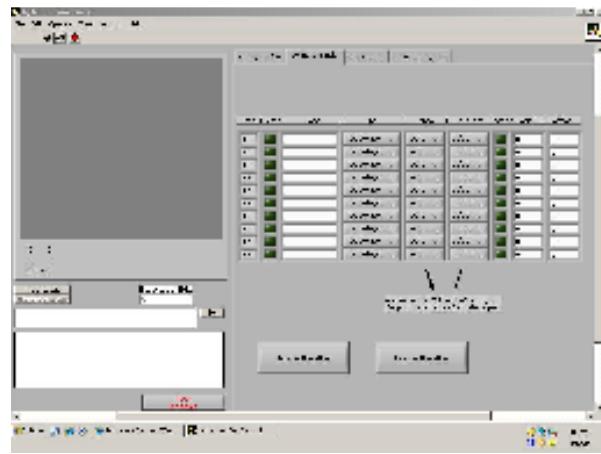


**Fig. 5.7. – Detalhe da fixação do conjunto placa-resistencia-placa no experimento vertical**

Em todas as configurações experimentais, o sistema de aquisição de dados utilizado foi baseado em microcomputador, na placa de recepção analógica da *National Instruments* e no sistema modular fabricado pela *Agilent Technologies* (modelo 34970-A) que faz a transferência dos dados para o computador via conexão RS232 com uma taxa de 115Kbits/s, para a aquisição das temperaturas dos termopares e da voltagem na resistência (ver figura 5.8). O *software* utilizado na aquisição dos dados da câmera e dos termopares foi o LabView 7.0 da *National Instruments*. O painel frontal do programa construído e utilizado nos experimentos reportados no presente trabalho pode ser visto na figura 5.9.



**Fig. 5.8. – Sistema de aquisição de dados de temperatura e voltagem – Agilent 34970-A**



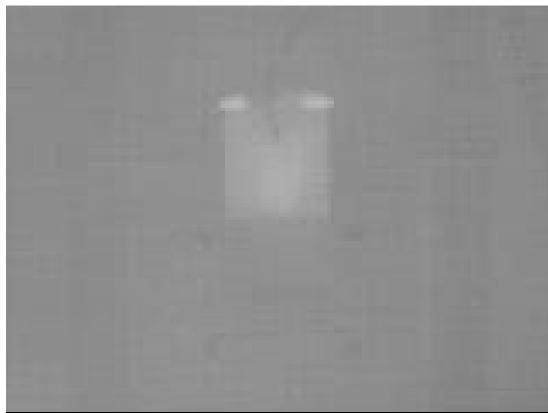
**Fig. 5.9. – Painel frontal do programa de aquisição construído na plataforma LabView 7.0**

### 5.3. Procedimento Experimental

O procedimento experimental inicia-se fixando o valor da voltagem a ser imposta na resistência com os fios desconectados de modo a não iniciar o processo de aquecimento das placas. Em seguida a fonte é desligada e os fios da resistência são então conectados a fonte. A aquisição das imagens e das temperaturas dos termopares é então simultaneamente iniciada. Após um certo número de medidas iniciais utilizadas para definir a temperatura ambiente média no começo do experimento, inicia-se o aquecimento do corpo de prova em questão pelo ligamento da fonte já fixada previamente na voltagem desejada. O aumento da temperatura da placa pode ser acompanhado na tela do computador

pelas curvas de temperatura dos termopares que estão sendo aquisitados, assim como pelas imagens da câmera, que mostram qualitativamente o aquecimento do corpo de prova. As figuras 5.10 a 5.12 ilustram as imagens aquisitadas pela *TermoVision A-10*, no momento do ligamento da fonte, Figs.5.10, três minutos após o ligamento da fonte (Figs.5.11), quando já pode-se observar o posicionamento da placa e do termopar, e a última imagem aquisitada em cada experimento, já no regime permanente (Figs.5.12). A sequência à esquerda (Figs.5.10.a, 5.11.a, e 5.12.a) referem-se ao aquecimento superior, ou seja quando a resistência está posicionada na parte superior do sanduíche de placas, enquanto a seqüência à esquerda refere-se ao aquecimento inferior, onde a fita de alumino identifica o final da placa.

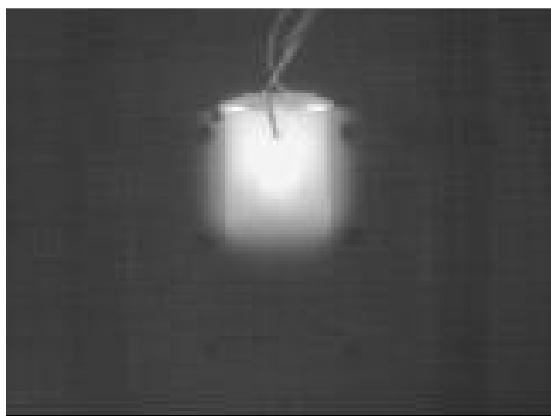
Uma vez atingido o regime permanente, e aquisitado por tempo suficiente, o sistema de aquisição é encerrado e a fonte é então desligada. Os arquivos de temperatura dos termopares e das imagens da câmera são devidamente identificados e salvos para futuras comparações com resultados de simulação e/ou solução dos problemas inversos correspondentes.



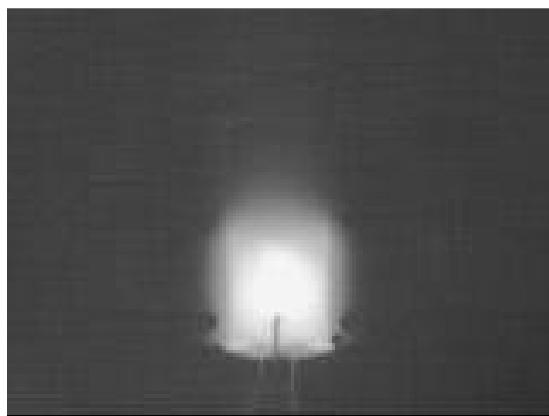
**Fig. 5.10.a. – Imagem antes de ligar a fonte, no experimento horizontal aquisitada pela câmera;**



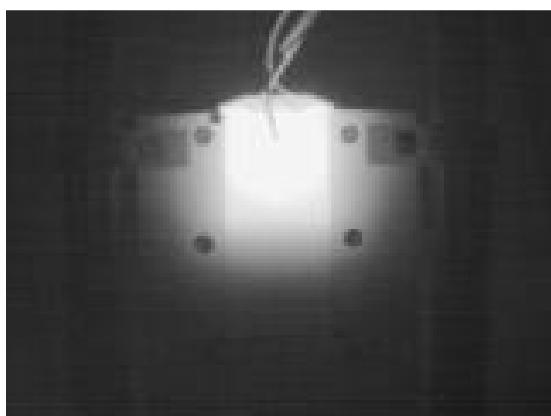
**Fig. 5.10.b. – Imagem antes de ligar a fonte, no experimento vertical aquisitada pela câmera;**



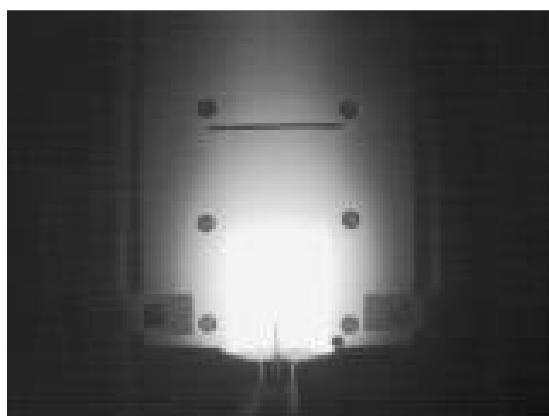
**Fig. 5.11.a. – Imagem no momento seguinte ao ligamento da fonte, no experimento horizontal aquisitada pela câmera;**



**Fig. 5.11.b. – Imagem no momento seguinte ao ligamento da fonte, no experimento vertical aquisitada pela câmera;**



**Fig. 5.12.a. – Imagem do experimento horizontal aquisitada pela câmera de infravermelho, durante o aquecimento**



**Fig. 5.12.b. – Imagem do experimento vertical aquisitada pela câmera de infravermelho, durante o aquecimento**

## 5.4. Tratamento de Dados

As imagens da câmera de infravermelho são salvas no formato “JPEG”, e são então lidas e tratadas por um código computacional construído no presente estudo na plataforma *Mathematica* 6.0. As imagens são tratadas como matrizes de “*digital level*”, em valores que variam de -255 a 255. Para converter a informação em *digital level* para temperatura em graus Celsius, é necessário um ponto de referência na imagem sobre o qual se tenha a informação da variação do *digital level* no tempo, assim como a informação sobre

a variação no tempo da sua temperatura. Para realizar esta correlação entre *digital level* e temperatura é necessário que ambas as informações retratem o mesmo tempo físico, ficando claro nesta etapa do tratamento das imagens a importância da sincronização das medidas da câmera e do sistema de aquisição (Agilent). A correlação entre estas duas quantidades se dá a cada tempo e em termos da temperatura em graus Kelvin à quarta potencia, uma vez que o detector micro-bolométrico produz um sinal proporcional ao fluxo de calor por radiação sobre ele incidente:

$$DL \propto q_{rad} \quad (5.1)$$

A equação (5.2) abaixo representa o fluxo de calor por radiação que emana da placa aquecida a cada posição na superfície da placa:

$$\begin{aligned} q_{rad}(x, y, t) &= \varepsilon_{x,y} \sigma T^4(x, y, t) + \rho_{x,y} \sigma T_\infty^4 \\ &= \varepsilon_{x,y} \sigma T^4(x, y, t) + (1 - \varepsilon_{x,y}) \sigma T_\infty^4 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Deve-se lembrar que nos experimentos abordados pelo presente trabalho utilizou-se uma tinta de grafite com emissividade próxima de  $\varepsilon_{x,y} \approx 0.97$ , para reduzir a parcela refletida da radiação térmica, que poderia se tornar relevante em temperaturas mais baixas (próximas ao valor da temperatura ambiente); deste modo, para os nossos experimentos, pode-se dizer que a refletividade é de aproximadamente  $\rho_{x,y} \approx 0.03$ . Entretanto, na correlação aqui proposta entre temperatura e *digital level*, não se assume *a priori* o conhecimento do valor numérico dessa emissividade, uma vez que se emprega um termopar de referência ao longo do processo transiente de medição.

A parcela da radiosidade que deixa um elemento de área da superfície da placa e chega à câmera é função do fator de forma de cada elemento de área em relação ao detector da câmera, e de acordo com a relação de reciprocidade (5.3), tem-se que:

$$A_{cam} F_{cam-(x,y)} = A_{x,y} F_{(x,y)-cam} \quad (5.3)$$

$$q_{cam}(x, y, t) = \frac{A_{x,y} F_{(x,y)-cam}}{A_{cam}} q_{rad}(x, y, t) = F_{cam-(x,y)} q_{rad}(x, y, t) \quad (5.4)$$

A correlação entre o *digital level* de qualquer posição na placa, o *digital level* da posição do termopar de referência e das respectivas temperaturas em graus Kelvin, pode então ser escrita na forma dada pela equação (5.5):

$$\frac{DL_{x,y}(t)}{DL_{ref}(t)} = \frac{F_{cam-(x,y)} (\varepsilon_{x,y} \sigma T^4(x, y, t) + (1 - \varepsilon_{x,y}) \sigma T_\infty^4)}{F_{cam-ref} (\varepsilon_{ref} \sigma T_{ref}^4(t) + (1 - \varepsilon_{ref}) \sigma T_\infty^4)} \quad (5.5)$$

Para a situação de  $\varepsilon_{x,y} \approx 1$ , a parcela refletida costuma ser desprezada, e tem-se que a equação (5.2) pode ser escrita como:

$$q_{rad}(x, y, t) = \varepsilon_{x,y} \sigma T^4(x, y, t) \quad (5.6)$$

Neste caso, a equação (5.5) pode fornecer uma relação entre o produto do fator de fator de forma de cada posição na placa pela sua respectiva emissividade com relação aos respectivos valores dos *digital level* na condição inicial conhecida,  $T(x, y, t) \approx T_\infty$ :

$$\frac{DL_{x,y}(0)}{DL_{ref}(0)} = \frac{F_{(x,y)-cam} \varepsilon_{x,y}}{F_{ref-cam} \varepsilon_{ref}} \quad (5.7)$$

Em geral a câmera é utilizada a uma distância suficientemente grande da placa para que os fatores de forma tenham valores relativamente uniformes, e as diferenças de *digital level* na condição inicial acabam sendo provenientes das diferenças de emissividades locais.

Entretanto, com a finalidade de eliminar ruídos e a influência de variações das condições ambientais, decidiu-se filtrar a imagem correspondente à condição inicial para modificar as imagens a serem correlacionadas com a temperatura. Ao subtrair de cada imagem aquela representativa da condição inicial, tem-se a eliminação dos pixels que

permaneceram inalterados nas imagens ao longo do período transiente do experimento e, deste modo, segregando a parcela da imagem de maior interesse. Assim, o *digital level* filtrado torna-se proporcional ao fluxo de calor incidente filtrado:

$$DLS \propto q_{cam}(x, y, t) - q_{cam}(x, y, 0) \quad (5.8)$$

Reescrevendo a correlação entre o *digital level* de qualquer posição na placa, o *digital level* da posição do termopar de referência e das respectivas temperaturas em graus Kelvin tem-se:

$$\frac{DLS_{x,y}(t)}{DLS_{ref}(t)} = \frac{F_{cam-(x,y)}\mathcal{E}_{x,y}(T^4(x, y, t) - T_\infty^4)}{F_{cam-ref}\mathcal{E}_{ref}(T_{ref}^4(t) - T_\infty^4)} \quad (5.9)$$

Fazendo uso da equação (5.7) tem-se:

$$\frac{DLS_{x,y}(t)}{DLS_{ref}(t)} = \frac{DL_{x,y}(0)}{DL_{ref}(0)} \frac{(T^4(x, y, t) - T_\infty^4)}{(T_{ref}^4(t) - T_\infty^4)} \quad (5.10)$$

Logo, a partir da equação (5.10) chega-se à forma empregada para correlação dos sinais em *digital level* filtrados, com os valores de temperatura para qualquer posição da placa em relação aos valores de *digital level* e temperatura da posição do termopar de referência:

$$T(x, y, t) = \sqrt[4]{\frac{DLS_{x,y}(t)DL_{ref}(0)}{DLS_{ref}(t)DL_{x,y}(0)}(T_{ref}^4(t) - T_\infty^4) + T_\infty^4} \quad (5.11)$$

Todos os valores de temperatura acima são dados em graus Kelvin, e o resultado final é subtraído por 273.15 para fornecer a temperatura em cada ponto em graus Celsius.

# Capítulo 6

---

## 6. Resultados e Discussões

No presente capítulo são apresentados os resultados obtidos para problemas diretos e inversos a partir das formulações apresentadas nos capítulos 3 e 4, bem como os resultados experimentais encontrados e as validações necessárias.

A apresentação dos resultados inicia-se com a análise crítica da solução via transformada integral do problema de condução de calor unidimensional transiente, apresentado no capítulo 3, para três diferentes aplicações. Em seguida apresenta-se os resultados das estimativas das propriedades termofísicas e das condições de contorno em problemas teóricos através da abordagem Bayesiana via MCMC. E por último apresenta-se resultados de estimativa de propriedades termofísicas e condições de contorno a partir de resultados experimentais reais obtidos através de medidas termográficas.

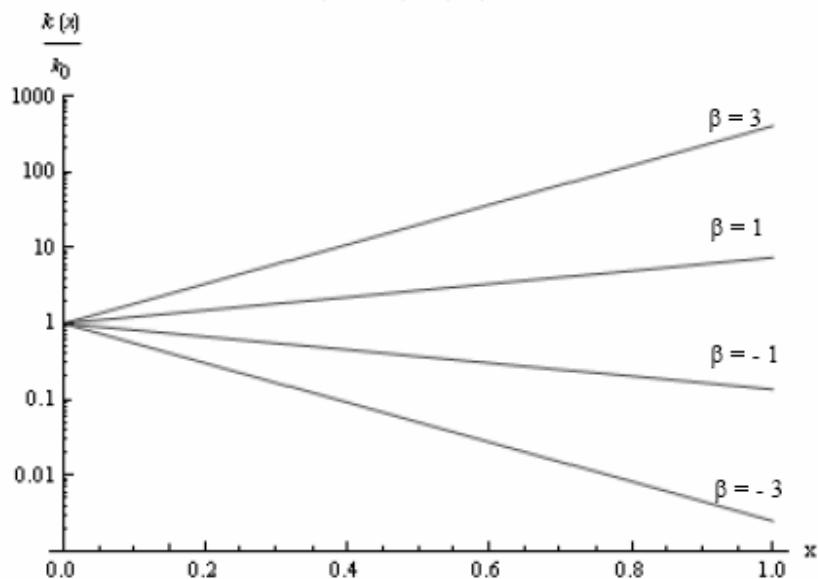
### 6.1. Problema Direto – Transformação Integral

A abordagem proposta no capítulo 3 deste trabalho para solução do problema direto de condução de calor unidimensional transiente em meios heterogêneos foi implementada na plataforma *Mathematica* 5.2 [Wolfram (2005)], e alguns resultados representativos são aqui apresentados de modo a ilustrar o comportamento da convergência das expansões em autofunções do problema de autovalor original. A convergência da expansão dos coeficientes da equação também foi criticamente analisada e os resultados encontram-se apresentados logo a seguir.

Foram, portanto, analisadas as três aplicações discutidas no capítulo 3, visando desafiar a metodologia proposta no tratamento de heterogeneidades, representadas pelas

variações espaciais dos coeficientes da equação de difusão de naturezas física e matemática bem distintas entre si. O primeiro exemplo, referente ao estudo de um FGM (*Functionally Graded Material*), retrata a situação física de um material projetado e fabricado para desempenhar mais de uma função (por exemplo, estrutural e térmica) em geral nas faixas extremas das propriedades físicas correspondentes. Nesse caso, os coeficientes da equação de difusão experimentam variações de até algumas ordens de grandeza ao longo da dimensão espacial.

A figura 6.1 abaixo ilustra o efeito do parâmetro  $\beta$  no comportamento das propriedades termofísicas do primeiro exemplo de acordo com a eq.(3.70), relacionado à variação significativa do coeficiente de difusão no caso do FGM. Vale ressaltar, para o caso de  $\beta=3$ , a razão de aproximadamente 400 vezes entre os dois valores de  $k(x)$  nos contornos opostos.



**Figura 6.1 – Comportamento do coeficiente de difusão  $k(x)$  para o caso do FGM eq.(3.70) para:  $\beta = -3, -1, 1$  e  $3$**

Resultados numéricos para os autovalores e para a distribuição da temperatura no exemplo do FGM são reportados a seguir, para os valores numéricos de  $\beta = -3, -1, 1$  e  $3$ , e para os valores de  $w_0 = 10$  e  $k_0 = 1$ . Na geração destes resultados as equações dos coeficientes foram empregadas na forma analítica original eq.(3.70), sem expansão em termos

de autofunções. A tabela 6.1.a,b ilustra a excelente convergência dos primeiros 10 autovalores associados ao problema original, eq. (3.66) a (3.69), com variação dos coeficientes,  $k(x)$  e  $w(x)$  dados pela equação (3.70). As diferentes colunas correspondem ao aumento na ordem de truncamento na expansão da autofunção original em termo das autofunções auxiliares, para:  $N_i=20, 30, 40$  e  $50$ . Deve-se notar que os dez primeiros autovalores estão completamente convergidos em seis dígitos significativos para o caso  $\beta=1$  com 50 termos na expansão (tabela 6.1.a.) e em cinco dígitos significativos para a situação mais critica de  $\beta=3$  (tabela 6.1.b.).

**Tabela 6.1.a – Convergência dos dez primeiros autovalores para o caso do FGM ( $\beta=1$ )**

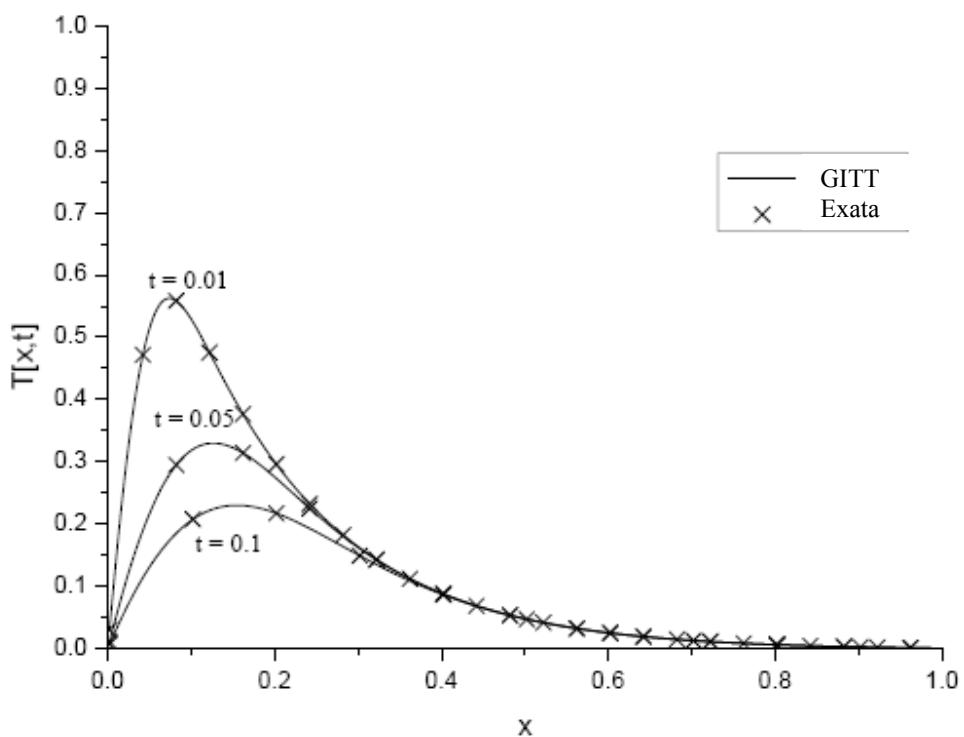
<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b><math>N_i=20</math></b>	<b><math>N_i=30</math></b>	<b><math>N_i=40</math></b>	<b><math>N_i=50</math></b>
1	1.04258	1.04258	1.04257	1.04257
2	2.01194	2.01193	2.01193	2.01193
3	2.99712	2.99711	2.99711	2.99711
4	3.98643	3.98641	3.98640	3.98640
5	4.97738	4.97736	4.97735	4.97735
6	5.96918	5.96915	5.96914	5.96914
7	6.96145	6.96141	6.96140	6.96140
8	7.95403	7.95398	7.95397	7.95396
9	8.94680	8.94674	8.94673	8.94672
10	9.93973	9.93964	9.93963	9.93962

**Tabela 6.1.b – Convergência dos dez primeiros autovalores para o caso do FGM ( $\beta=3$ )**

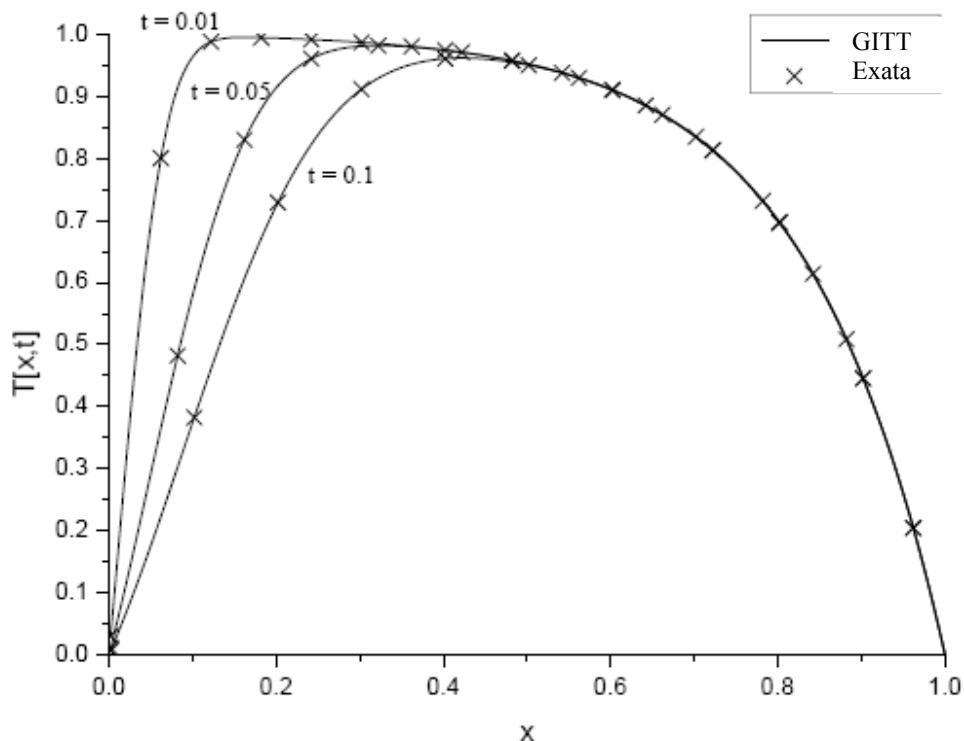
<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b><math>N_i=20</math></b>	<b><math>N_i=30</math></b>	<b><math>N_i=40</math></b>	<b><math>N_i=50</math></b>
1	1.37371	1.37368	1.37367	1.37367
2	2.20190	2.20182	2.20180	2.20179
3	3.12789	3.12777	3.12774	3.12773
4	4.08578	4.08558	4.08554	4.08552
5	5.05739	5.05716	5.05711	5.05709
6	6.03623	6.03589	6.03582	6.03580
7	7.01911	7.01875	7.01868	7.01865
8	8.00481	8.00426	8.00416	8.00412
9	8.99207	8.99150	8.99139	8.99135
10	9.98090	9.98001	9.97987	9.97982

As figuras 6.2.a,b ilustram o comportamento transiente dos perfis de temperatura para três tempos adimensionais diferentes  $t = 0.01, 0.05$  e  $0.1$ , para as duas situações extremas consideradas  $\beta=3$  e  $\beta= - 3$ , respectivamente. No primeiro caso, a propriedade termofísica

cresce aproximadamente 400 vezes na direção dos valores mais baixos das temperaturas, isto é, lado direito do gráfico, onde tanto a condutividade quanto a capacidade térmica estão significativamente aumentadas, e o efeito de resfriamento na direção do contorno  $x=1$  é intensificado. No segundo caso, as propriedades termofísicas estão significativamente reduzidas na extremidade  $x=1$ , afetando sensivelmente o resfriamento. Deve ser chamada a atenção aqui, para o fato de que a difusividade térmica adimensional  $\alpha_0$  foi mantida a mesma para os dois exemplos, mas as condições iniciais são diferentes uma vez que esta é função do valor do parâmetro  $\beta$  no resultado em regime permanente, eq. (3.77). Além disso, com o propósito de validação, os resultados encontrados com a solução exata para a mesma forma funcional dos coeficientes aqui considerados, foram também traçados nos gráficos com símbolos. Pode-se observar em ambas as figuras a excelente concordância entre os resultados reportados via GITT com 50 termos na expansão e a solução exata, proveniente das eqs. (3.72) a (3.76)



**Figura 6.2.a – Comportamento físico e validação (GITT x Solução Exata) da distribuição de temperatura para o exemplo do FGM com  $\beta=3$**

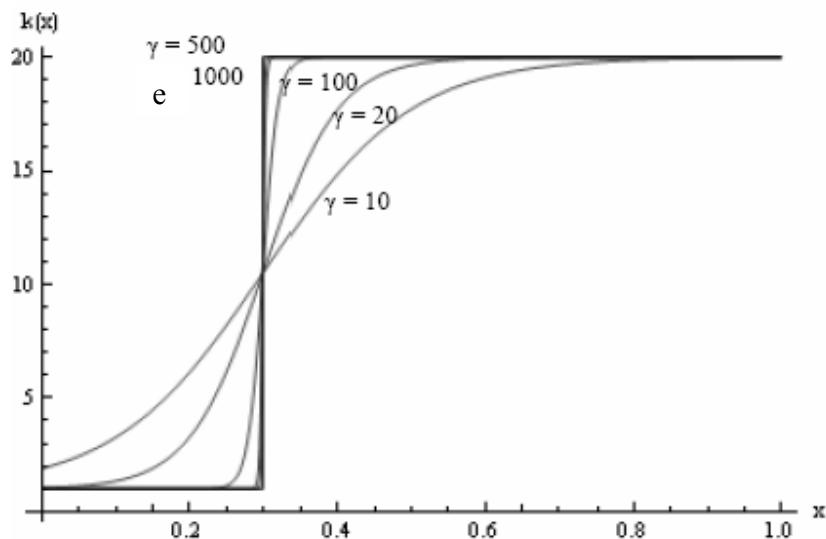


**Figura 6.2.b – Comportamento físico e validação (GITT x Solução Exata) da distribuição de temperatura para o exemplo do FGM com  $\beta = -3$**

O segundo exemplo propõe a análise de meios heterogêneos caracterizados pela união de diferentes materiais, com região de transição entre eles, quer pela interposição de um material de ligação ou pelo próprio processo de fabricação que resulta em uma fase de mistura entre os materiais. Nesse caso busca-se avaliar variações abruptas no comportamento espacial dos coeficientes no problema de difusão.

A figura 6.3 ilustra o comportamento do coeficiente variável  $k(x)$  para o exemplo de duas camadas com zona de transição, para os valores de  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 20$  e  $x_c = 0.3$ , segundo as equações (3.82) e (3.84) e para diferentes valores do parâmetro  $\gamma = 10, 20, 100, 500$  e  $1000$ . Na escala da figura os dois últimos valores,  $\gamma = 500$  e  $1000$  produzem uma variação praticamente descontínua na propriedade termofísica. Deve-se chamar a atenção para o fato que existe solução exata para o problema de condução de calor de multiregiões com coeficientes constantes em cada região. Todavia, o problema aqui abordado não se trata de solucionar um problema descontínuo, o que exigiria um problema de autovalor descontínuo para ser formalmente correto [Mikhailov. & Ozisik (1984), Cotta & Nogueira

(1998)], mas sim solucionar um problema mais geral de propriedades variáveis quaisquer, entre outros exemplos, um problema com variação abrupta dos coeficientes. Esta aplicação é particularmente importante quando lida-se com a identificação de propriedades termofísicas nos casos onde a posição da interface entre diferentes materiais não é conhecida *a priori* e/ou existe uma região de transição onde se faz necessário estimar a variação da propriedade.



**Figura 6.3 – Comportamento do coeficiente de difusão  $k(x)$  para o caso de duas camadas com região de transição, para  $\gamma = 10, 20, 100, 500$  e  $1000$**

As tabelas 6.2.a,b, ilustram a convergência dos dez primeiros autovalores para o problema de duas camadas com região de transição, para os valores de  $\gamma = 100$  e  $500$ , respectivamente, para ordens de truncamento crescentes na expansão,  $N_i = 30, 60, 90$  e  $120$ , com  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 20$ ,  $x_c = 0.3$ ,  $w_1 = 1$  e  $w_2 = 4$ . Além disso, a última coluna ilustra o resultado para a solução exata do caso descontínuo de duas camadas apenas para referência, mas não como resultado *benchmark* a ser atingido, uma vez que formalmente não se pode recuperar exatamente tais valores com a abordagem de um problema de autovalor contínuo. Vale ressaltar que estes resultados até aqui apresentados ainda não utilizam a expansão dos coeficientes em termos de autofunções, mas sim na sua forma analítica original como dada nas equações (3.82) e (3.83). O primeiro autovalor  $\mu_0 = 0$  foi omitido da tabela uma vez que ele é exatamente recuperado em todos os casos. Para a situação menos abrupta com  $\gamma = 100$

(tabela 6.2.a), os 10 primeiros autovalores estão convergidos com 6 dígitos significativos para uma ordem de truncamento  $N_i=90$  ou menor, enquanto que para o caso mais abrupto  $\gamma = 500$  (tabela 6.2.b), é necessário empregar mais termos na expansão,  $N_i=120$ , para a garantir no mínimo 3 ou 4 dígitos convergidos nos autovalores. Pode-se observar ainda a tendência dos autovalores na direção dos resultados do problema descontínuo de duas regiões à medida que se aumenta  $\gamma$ .

**Tabela 6.2.a – Convergência dos autovalores para o caso de duas camadas com região de transição ( $\gamma=100$ )**

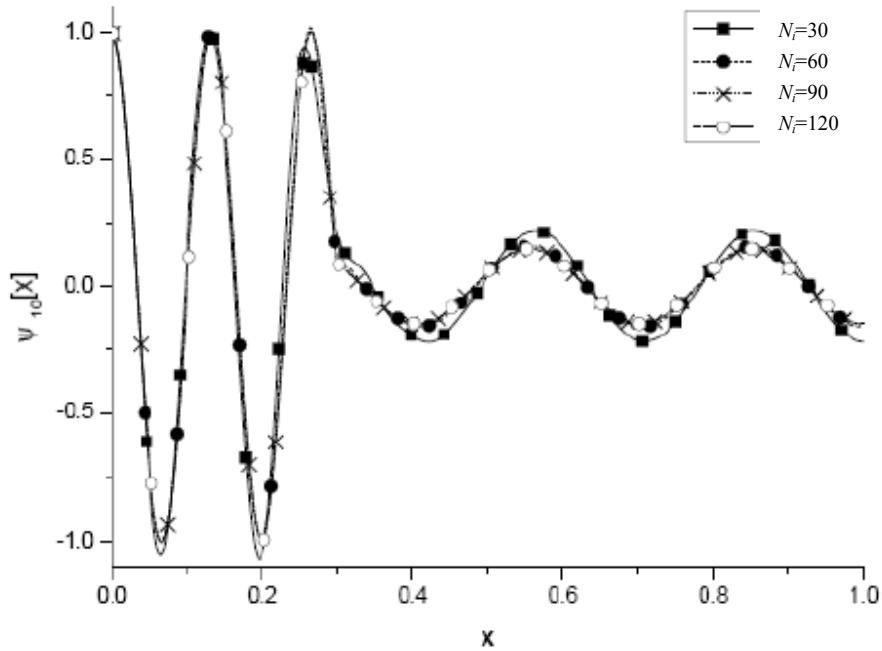
<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b><math>N_i=30</math></b>	<b><math>N_i=60</math></b>	<b><math>N_i=90</math></b>	<b><math>N_i=120</math></b>	<b>Problema Descont.</b>
1	5.69548	5.69249	5.69248	5.69248	5.21316
2	10.0904	10.0903	10.0903	10.0903	10.0779
3	16.9740	16.9645	16.9645	16.9645	15.6389
4	20.2694	20.2674	20.2673	20.2673	20.1568
5	27.9236	27.9082	27.9081	27.9081	26.0627
6	30.6674	30.6564	30.6564	30.6564	30.2380
7	38.4493	38.4303	38.4303	38.4303	36.4832
8	41.3598	41.3228	41.3227	41.3227	40.3228
9	48.6995	48.6742	48.6742	48.6742	46.8986
10	52.2297	52.1382	52.1380	52.1380	50.4129

**Tabela 6.2.b – Convergência dos autovalores para o caso de duas camadas com região de transição ( $\gamma=500$ )**

<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b><math>N_i=30</math></b>	<b><math>N_i=60</math></b>	<b><math>N_i=90</math></b>	<b><math>N_i=120</math></b>	<b>Problema Descont.</b>
1	5.38136	5.32149	5.30854	5.30481	5.21316
2	10.0791	10.0785	10.0784	10.0784	10.0779
3	16.1432	15.9615	15.9227	15.9115	15.6389
4	20.1674	20.1623	20.1614	20.1612	20.1568
5	26.9008	26.5920	26.5274	26.5090	26.0627
6	30.2779	30.2577	30.2544	30.2535	30.2380
7	37.6438	37.2041	37.1147	37.0893	36.4832
8	40.4352	40.3739	40.3648	40.3623	40.3228
9	48.3439	47.7844	47.6730	47.6416	46.8986
10	50.6907	50.5246	50.5034	50.4977	50.4129

A figura 6.4 apresenta o comportamento da décima autofunção para o caso mais abrupto  $\gamma = 1000$ , para diferentes ordens de truncamento  $N_i = 30, 60, 90, 120$ . Pode-se

perceber que na escala do gráfico a décima autofunção neste caso severo está convergida já com  $N_i=60$  termos, com melhor convergência para a primeira região ( $x < x_c$ ).

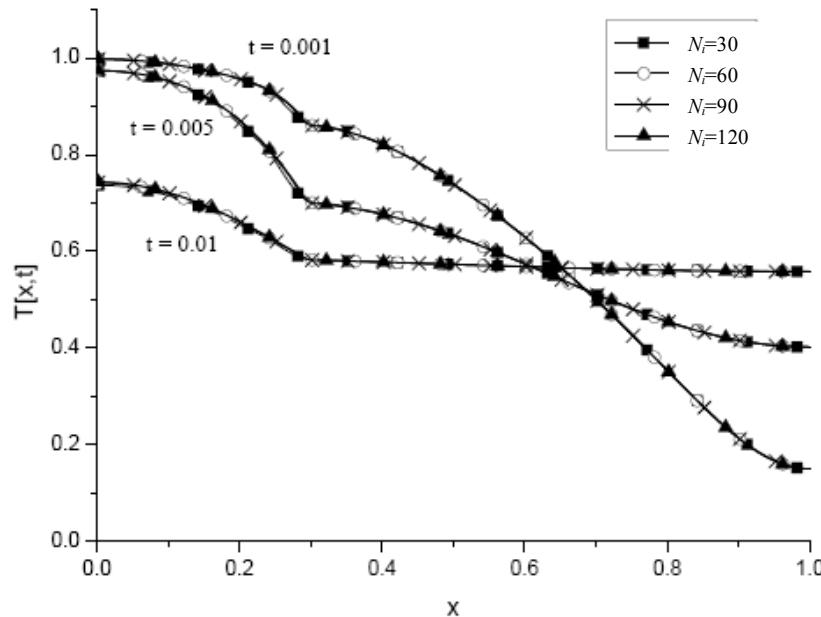


**Figura 6.4 – Convergência da décima autofunção para exemplo de duas camadas com região de transição, para  $\gamma = 1000$**

A figura 6.5 ilustra a excelente taxa de convergência da expansão em autofunções no cálculo do perfil de temperatura para o exemplo de duas camadas, novamente para o caso mais abrupto  $\gamma = 1000$ , em três diferentes tempos  $t=0.001, 0.01, 0.05$ , com resultados convergidos em escala gráfica com  $N_i < 30$ .

A tabela 6.3 demonstra a excelente convergência da temperatura para ordens de truncamento crescentes na expansão,  $N_i = 30, 60, 90$  e  $120$  no caso mais abrupto do exemplo de duas camadas, com  $\gamma = 1000$ , apresentando os valores de temperatura no contorno da segunda camada  $x=1$ , onde a convergência da autofunção é aparentemente mais lenta, e para o tempo  $t=0.01$ . Pode-se observar em todos os casos, inclusive para a solução exata descontínua de duas regiões, a convergência em seis dígitos para ordens maiores que  $i=6$  na expansão das autofunções originais. No outro sentido, aumentando  $N$ , pode-se notar que o campo de temperatura encontra-se convergido em no mínimo quatro dígitos significativos mesmo para

$N_i = 30$ , concordando com a solução exata para o problema descontínuo também em quatro dígitos.



**Figura 6.5 – Convergência do perfil de temperatura para exemplo de duas camadas com região de transição, para  $\gamma = 1000$**

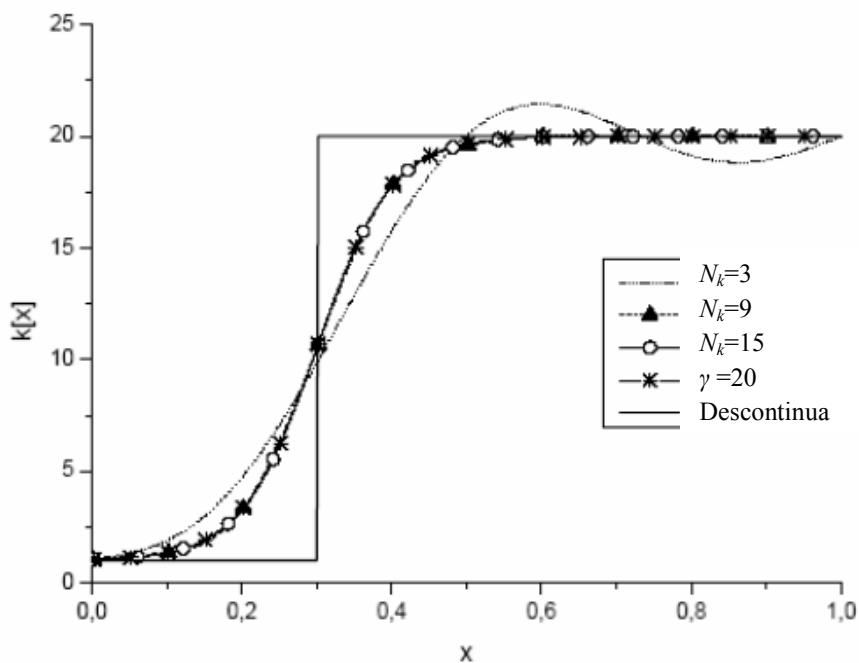
**Tabela 6.3 – Convergência da temperatura para o caso de duas camadas com região de transição, para ( $\gamma = 1000$ )**

Ordem i	$N_i = 30$	$N_i = 60$	$N_i = 90$	$N_i = 120$	Problema Descont.
0	0.578603	0.578603	0.578603	0.578603	0.578602
1	0.521377	0.521690	0.521724	0.521768	0.521924
2	0.403499	0.403586	0.403567	0.403588	0.403616
3	0.402522	0.402532	0.402491	0.402500	0.402461
4	0.401761	0.401764	0.401721	0.401730	0.401686
5	0.401756	0.401758	0.401716	0.401724	0.401681
6	0.401752	0.401755	0.401712	0.401721	0.401677
7	0.401752	0.401755	0.401712	0.401721	0.401677
8	0.401752	0.401755	0.401712	0.401721	0.401677
9	0.401752	0.401755	0.401712	0.401721	0.401677
10	0.401752	0.401755	0.401712	0.401721	0.401677

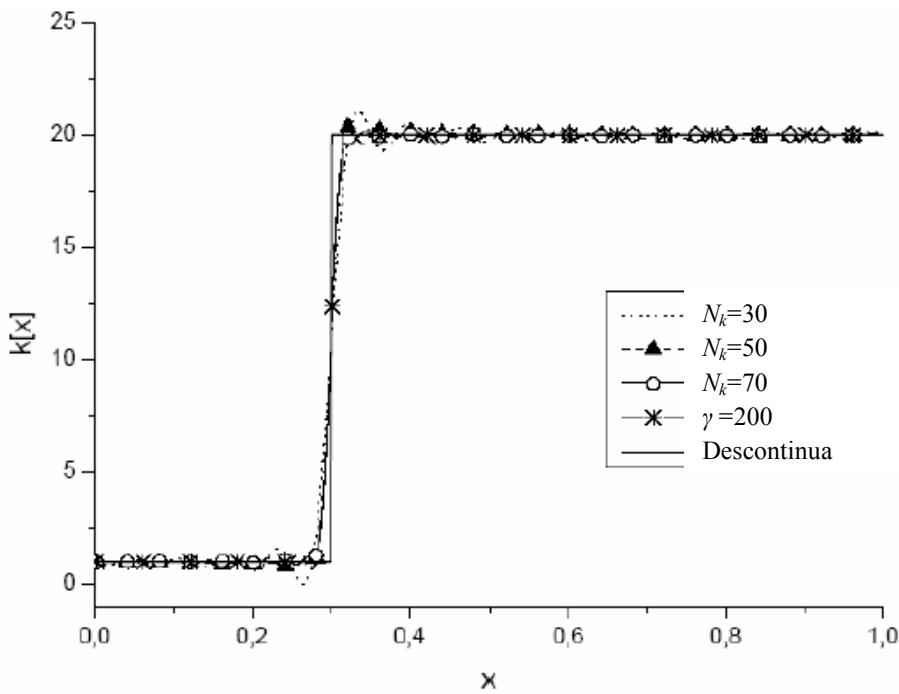
O comportamento espacial a princípio arbitrário dos coeficientes do problema de difusão, pode requerer integrações numéricas no procedimento de transformação integral

aqui proposto, para geração das matrizes de coeficientes do problema de autovalor algébrico transformado. Para uma utilização muito intensiva deste procedimento de simulação direta, como por exemplo, nos processos de otimização associados ao problema inverso de identificação de propriedades termofísicas, pode ser computacionalmente interessante propor representações alternativas para os coeficientes que levem à integração analítica em todas as etapas do processo de transformação integral. Uma alternativa possível aqui investigada é a representação dos coeficientes, eles próprios, em termos de expansões em autofunções conhecidas.

Em seguida é apresentada uma ilustração da convergência na representação dos coeficientes variáveis em termos de expansões em autofunções, para os exemplos de dupla camada com zona de transição e para o caso de variação randômica da propriedade termofísica. Por exemplo, as figuras 6.6.a,b ilustram o comportamento do coeficiente variável  $k(x)$  para o caso de duas camadas, expandido em autofunções, com  $k_1=1$ ,  $k_2=20$  e  $x_c=0.3$  para diferentes valores do parâmetro  $\gamma$ ,  $\gamma=20$  e  $\gamma=200$ , respectivamente. Pode-se observar na figura 6.6.b que na escala gráfica  $\gamma=200$  produz uma variação da propriedade termofísica praticamente descontínuas.



**Figura 6.6.a – Comportamento do coeficiente de difusão variável  $k(x)$  e sua expansão em autofunções para o caso de duas camadas com  $\gamma=20$**



**Figura 6.6.b – Comportamento do coeficiente de difusão variável  $k(x)$  e sua expansão em autofunções para o caso de duas camadas com  $\gamma=200$**

No procedimento de expansão dos coeficientes em autofunções foi adotada uma função filtro linear que liga os dois valores extremos  $k(0)$  e  $k(1)$ ,  $w(0)$  e  $w(1)$ , não levando em conta o conhecimento da posição da interface. O mesmo problema de autovalor auxiliar usado na expansão das autofunções originais foi empregado na expansão dos coeficientes  $k(x)$  e  $w(x)$ , só que com condições de contorno de primeiro tipo, isto é:

$$\tilde{\Gamma}_j(x) = \sqrt{2} \sin(\nu_j x) \quad \text{para } \nu_j = j\pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (6.1)$$

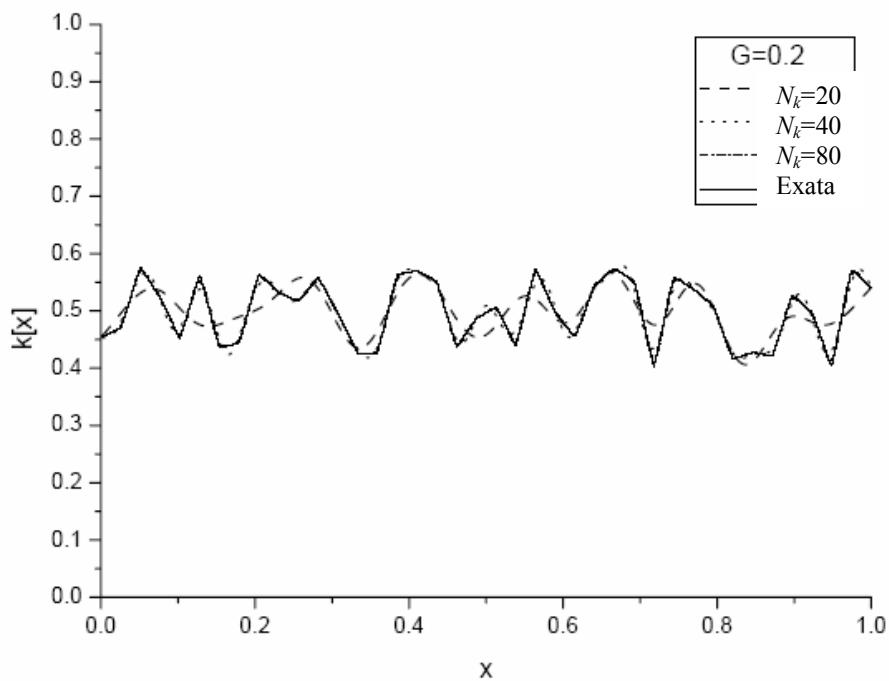
Para o caso menos abrupto da variação espacial da condutividade térmica,  $k(x)$ , no exemplo de dupla camada, figura 6.6.a, a convergência da expansão deste coeficiente é alcançada, na escala gráfica, para ordens de truncamento bem baixas, como  $N_k = 6$  e  $N_k = 9$ , e praticamente concordando com a curva original do coeficiente  $k(x)$ . Para o caso mais abrupto de variação, figura 6.6.b, um número maior de termos na expansão deste coeficiente é necessário para recuperar apropriadamente o comportamento do coeficiente, como ilustrado

pela curva com  $N_k=70$ , que praticamente é coincidente com a curva da representação exata do coeficiente.

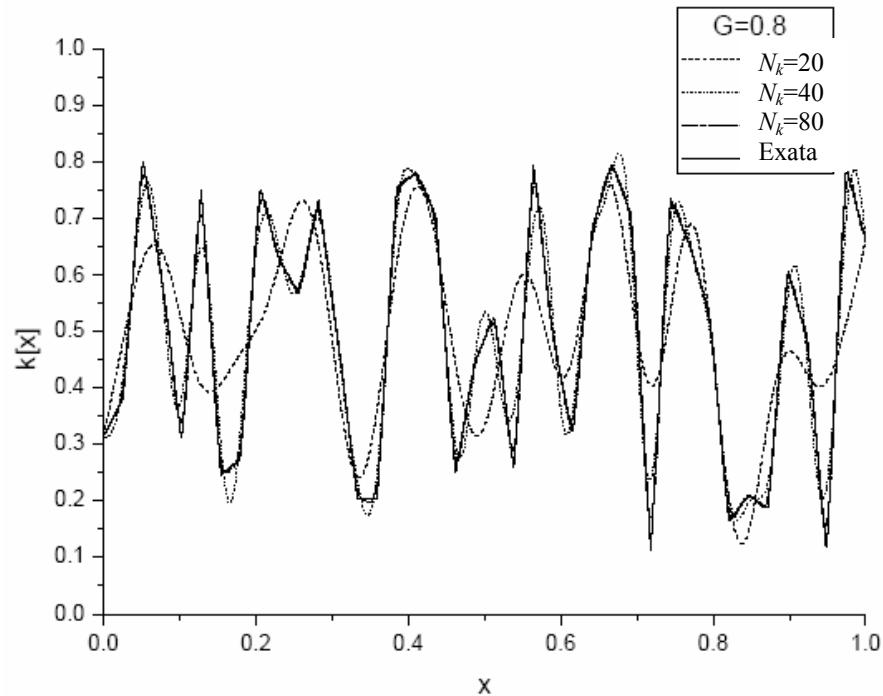
Resultados similares foram obtidos e analisados para os coeficientes do exemplo de propriedades randômicas, como ilustrado abaixo nas Figuras 6.7.a,b para o coeficiente  $k(x)$ , eq. (3.85), tomando  $k_0=0.5$ , e Figuras 6.8.a,b para o coeficiente  $w(x)$ , eq. (3.86), gerado para  $w_0=0.5$ , com um ganho de  $G=0.2$  e  $G=0.8$ .

Um total de 40 pontos igualmente espaçados foi tomado ao longo do domínio para a geração das propriedades randômicas, enquanto os números randômicos em cada posição foram mantidos os mesmos nos dois casos com diferentes ganhos. Em oposição ao caso em [Lin (1992)], os dois coeficientes foram gerados de forma independente, para desafiar ainda mais o procedimento proposto. As ordens de truncamento para a expansão em autofunções dos coeficientes são ilustradas para  $N_k=N_w=20, 40$  e  $80$ .

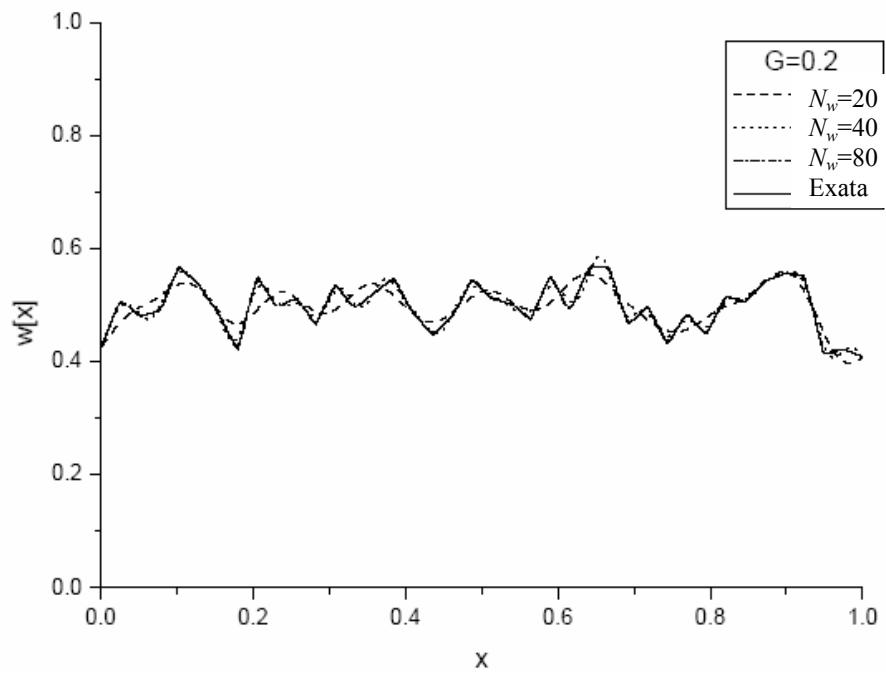
As mesmas tendências são observadas para o comportamento randômico dos dois coeficientes  $k(x)$  e  $w(x)$ , claramente, o caso com menor ganho,  $G=0.2$ , apresenta um comportamento mais favorável de convergência, devido ao efeito de amortecimento nas amplitudes das oscilações, com os resultados para  $N_k=N_w=80$  sendo completamente coincidentes com as curvas originais interpoladas que estão sobrescritos pelos resultados da expansão. Para o caso de maiores amplitudes nas variações randômicas,  $G=0.8$ , a curva para  $N_k=N_w=40$  ainda apresenta desvios perceptíveis com relação à curva interpolada original, enquanto a curva para  $N_k=N_w=80$  praticamente sobrescreve o gráfico para os coeficientes originais, exceto nas cristas mais acentuadas que podem ainda requerer alguns termos adicionais na expansão.



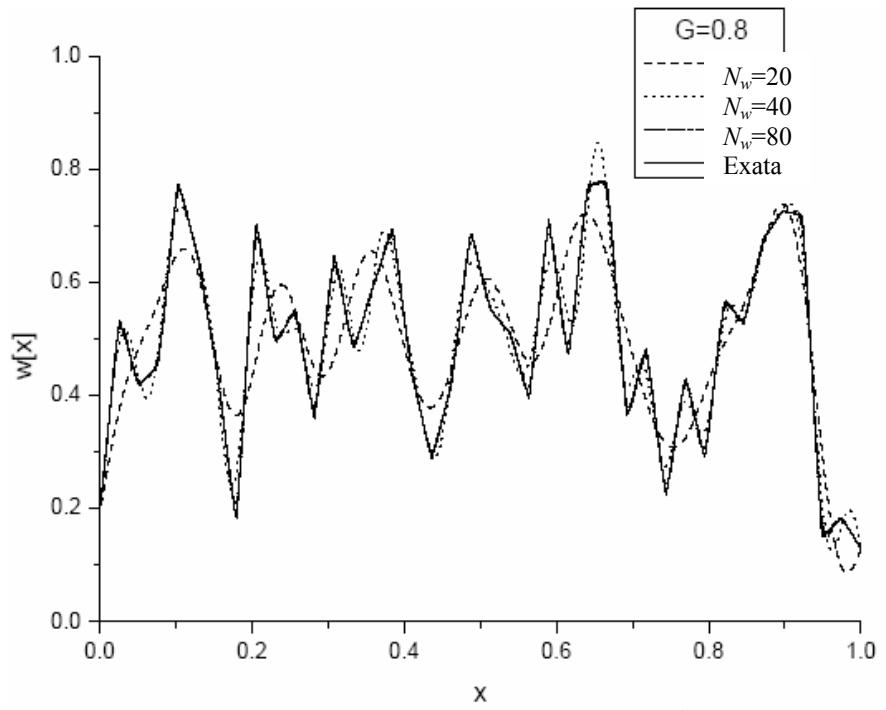
**Figura 6.7.a – Comportamento do coeficiente difusivo variável  $k(x)$  e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com  $G=0.2$**



**Figura 6.7.b – Comportamento do coeficiente difusivo variável  $k(x)$  e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com  $G=0.8$**



**Figura 6.8.a – Comportamento do coeficiente capacitivo variável  $w(x)$  e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com  $G=0.2$**



**Figura 6.8.b – Comportamento do coeficiente capacitivo variável  $w(x)$  e da sua expansão em autofunções para o exemplo de propriedades randômicas com  $G=0.8$**

A solução do problema de autovalor obtida com os coeficientes expandidos é agora demonstrada, primeiramente considerando o exemplo de dupla camada, de novo com  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 20$ ,  $x_c = 0.3$ ,  $w_1 = 1$  e  $w_2 = 4$ , para  $\gamma = 20$  e 200. As Tabelas 6.4.a,b mostram os valores convergidos dos primeiros dez autovalores  $\mu_i$ 's para diferentes ordens de truncamento nas expansões dos coeficientes,  $N_k$  e  $N_w$ , comparados nas duas últimas colunas com a solução obtida a partir dos coeficientes contínuos originais e com a solução exata do problema de autovalor descontínuo, aqui mostrado apenas como um caso limite. As expansões em autofunções do problema de autovalor original tiveram suas ordens de truncamento fixadas em  $N_i=50$  para o caso de  $\gamma = 20$ , e  $N_i=100$  para  $\gamma = 200$ , que são mais que suficientes para prover resultados convergidos para os primeiros dez autovalores aqui apresentados, como os anteriormente obtidos com a representação original dos coeficientes.

Na Tabela 6.4.a, para o comportamento mais suave dos coeficientes, ordens de truncamento razoavelmente baixas ( $N_k=N_w=27$ ) nas expansões dos coeficientes já fornecem quatro dígitos significativos de convergência nos primeiros dez autovalores, em comparação com os autovalores obtidos com integração numérica das representações originais dos coeficientes. Por outro lado, para a variação bastante abrupta com  $\gamma = 200$ , mostra-se na Tabela 6.4.b que  $N_k=N_w=110$  termos são necessários para chegar-se a quatro dígitos significativos completamente convergidos nestes mesmos dez primeiros autovalores.

De novo, fica claro que os resultados na Tabela 6.4.b são mais próximos da solução exata do caso descontínuo, conforme a representação dos coeficientes se aproxima de valores constantes em cada camada, em contraste com o caso de  $\gamma=20$ .

**Tabela 6.4.a – Influência da ordem da expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o exemplo de duas camadas com  $\gamma=20$ .**

<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=3</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=9</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=15</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=21</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=27</b>	<b>Coeficientes Originais</b>	<b>Problema Descont.</b>
1	7.86584	7.56036	7.58226	7.58278	7.58282	7.58283	5.21316
2	12.0937	11.0779	11.1062	11.1072	11.1073	11.1073	10.0779
3	18.1562	18.1547	18.1168	18.1191	18.1192	18.1192	15.6389
4	24.1409	23.6115	23.4188	23.4229	23.4232	23.4233	20.1568
5	30.0858	29.2754	29.1625	29.1583	29.1588	29.1589	26.0627
6	36.0473	35.0508	35.0189	35.0032	35.0038	35.0040	30.238
7	42.0149	40.8188	40.7035	40.6934	40.6930	40.6934	36.4832
8	47.9863	46.6067	46.5132	46.5116	46.5098	46.5102	40.3228
9	53.9608	52.3996	52.2864	52.2758	52.2743	52.2744	46.8986
10	59.9374	58.1925	58.0674	58.0627	58.0623	58.0618	50.4129

**Tabela 6.4.b – Influencia da ordem da expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o exemplo de duas camadas com  $\gamma=200$ .**

<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=30</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=50</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=70</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=90</b>	<b>N<sub>k</sub>=N<sub>w</sub>=110</b>	<b>Coeficientes Originais</b>	<b>Problema Descont.</b>
1	3.92070	5.35783	5.43630	5.44375	5.44380	5.44376	5.21316
2	10.0070	10.0756	10.0800	10.0805	10.0805	10.0805	10.0779
3	13.5127	16.0994	16.2970	16.3147	16.314	16.3139	15.6389
4	19.9172	20.1566	20.1772	20.1793	20.1794	20.1794	20.1568
5	24.3117	26.8147	27.1049	27.1299	27.1286	27.1284	26.0627
6	29.7991	30.2606	30.3167	30.3214	30.3213	30.3213	30.238
7	35.5958	37.4502	37.8105	37.8416	37.8407	37.8402	36.4832
8	39.6450	40.4020	40.5349	40.5439	40.5431	40.5431	40.3228
9	49.1208	47.9772	48.3633	48.3998	48.4000	48.3994	46.8986
10	49.7108	50.5804	50.8729	50.8906	50.8884	50.8882	50.4129

Agora o caso de propriedades randômicas é examinado mais de perto, visando observar o comportamento da metodologia proposta no tratamento de coeficientes com inúmeras alterações no domínio espacial, como na situação física de sistemas dispersos sem controle de concentrações locais de fase dispersa e/ou como resultado de redistribuições aleatórias no processo de fabricação do material compósito. Iniciando-se pela ilustração do comportamento da convergência dos primeiros dez autovalores para uma ordem fixa na expansão dos coeficientes ( $N_k=N_w=60$ ), mas com ordens crescentes na expansão em autofunções do problema original ( $N_i < 150$ ). O objetivo é demonstrar que o procedimento proposto é capaz de chegar à convergência nos autovalores de um caso como este de coeficientes variáveis randômicos para o pior caso de ganho  $G=1$ , dentro de valores razoáveis das ordens de expansão. Como pode ser observado na Tabela 6.5 abaixo, pelo menos quatro dígitos significativos estão completamente convergidos nos primeiros dez autovalores, na presente faixa de ordens de truncamento da expansão em autofunções do problema original ( $N_i$ ).

**Tabela 6.5 –Convergência dos dez primeiros autovalores para o exemplo de propriedades randomicas com  $G=1$  e  $N_k=N_w=60$ .**

<b>Autovalor <math>\mu_i</math></b>	<b><math>N_i=30</math></b>	<b><math>N_i =50</math></b>	<b><math>N_i =70</math></b>	<b><math>N_i =90</math></b>	<b><math>N_i =110</math></b>	<b><math>N_i =130</math></b>	<b><math>N_i =150</math></b>
1	2.90236	2.81658	2.79154	2.78586	2.78378	2.78283	2.78251
2	5.23446	5.10402	5.02386	5.00907	5.00218	4.99923	4.99836
3	8.10146	7.98014	7.92516	7.91856	7.91641	7.91562	7.91551
4	11.0150	10.7348	10.6866	10.6733	10.6694	10.6673	10.6667
5	14.2056	13.7055	13.5243	13.4471	13.4149	13.4000	13.3948
6	18.0474	17.5089	17.4113	17.3497	17.3335	17.3257	17.3232
7	21.7988	21.3903	21.3198	21.2922	21.2888	21.2873	21.2869
8	23.8719	22.7118	22.4950	22.3415	22.3052	22.2910	22.2843
9	26.1803	25.4689	25.2843	25.2324	25.2139	25.2064	25.2034
10	28.0210	27.1340	26.9713	26.9298	26.9163	26.9121	26.9104

Além disso, a influência das ordens de truncamento das expansões dos coeficientes ( $N_k$  e  $N_w$ ) no comportamento dos autovalores é investigada, para as seguintes ordens selecionadas,  $N_k=N_w=20, 40, 60$ , e  $80$ , e os coeficientes são dados nas Figuras 6.7.a,b e 6.8.a,b, respectivamente para  $G=0.2$  e  $0.8$ . Os dez primeiros autovalores completamente convergidos são mostrados para as quatro ordens de truncamento nas Tabelas 6.6.a,b, enquanto a última coluna representa a solução exata para o caso de propriedades constantes tomando os valores médios efetivos ( $k_0 = 0.5, w_0 = 0.5$ ), que correspondem a fazer  $G=0$ . Pode-se observar que o caso  $G=0.2$  (Tabela 6.6.a) apresenta um comportamento mais acelerado da convergência, com cinco dígitos significativos completamente convergidos para  $N_k=N_w=80$ , e quatro dígitos mesmo em ordens muito menores ( $N_k=N_w=40$ ). O caso  $G=0.8$  (Tabela 6.6.b) requer  $N_k=N_w=80$  para convergência em três ou quatro dígitos. Também, os resultados para o caso  $G=0.2$  estão muito mais próximos daqueles do caso de coeficientes médios, em comparação com os resultados do caso com maiores amplitudes ( $G=0.8$ ).

**Tabela 6.6.a – Influência da ordem na expansão dos coeficientes na convergência dos autovalores para o caso de propriedades randomicas com  $G=0.2$  e  $N_i=130$ .**

Autovalor $\mu_i$	$N_k=N_w=20$	$N_k=N_w=40$	$N_k=N_w=60$	$N_k=N_w=80$	Coeficientes Médios
1	3.16555	3.15678	3.15695	3.15686	3.14159
2	6.28652	6.26833	6.26858	6.26838	6.28319
3	9.36202	9.33868	9.33895	9.33878	9.42478
4	12.6601	12.6152	12.6163	12.6160	12.5664
5	15.7812	15.7351	15.7352	15.7347	15.7080
6	19.0825	19.0163	19.0168	19.0160	18.8496
7	22.2211	22.1142	22.1176	22.1168	21.9911
8	25.0214	24.8849	24.8881	24.8868	25.1327
9	28.1124	27.9357	27.9379	27.9368	28.2743
10	31.4528	31.0315	31.0302	31.0296	31.4159

**Tabela 6.6.b – Influência da ordem na expansão do coeficiente na convergência dos autovalores para o caso de propriedades randomicas com  $G=0.8$  e  $N_f=130$ .**

Autovalor $\mu_i$	$N_k=N_w=20$	$N_k=N_w=40$	$N_k=N_w=60$	$N_k=N_w=80$	Coeficientes Médios
1	3.09140	2.99458	2.98961	2.98921	3.14159
2	5.81296	5.67551	5.65526	5.65416	6.28319
3	8.69607	8.50171	8.50780	8.51193	9.42478
4	12.2436	11.6288	11.6549	11.6589	12.5664
5	15.2666	14.8153	14.7007	14.6916	15.7080
6	19.1082	18.4638	18.3620	18.3454	18.8496
7	22.9467	21.7388	21.7486	21.7476	21.9911
8	24.9176	24.0072	23.9370	23.8987	25.1327
9	27.6446	26.3021	26.3031	26.2804	28.2743
10	31.4090	28.3980	28.4054	28.4077	31.4159

Finalmente, examinamos o comportamento da distribuição de temperaturas no meio com propriedades randômicas, como função do ganho  $G$  para os valores  $G=0, 0.2, 0.5, 0.8$  e  $1$ , que governa a amplitude das variações dos coeficientes, mas mantendo os mesmos números randômicos em cada posição para os diferentes ganhos. As Figuras 6.9.a,b ilustram o comportamento do perfil de temperatura em dois tempos adimensionais diferentes, respectivamente,  $t=0.05$  e  $0.1$ . O caso-base  $G=0$  provê resultados para a situação de propriedades constantes, quando as variações locais de propriedades são ignoradas e substituídas por um valor médio efetivo. Como podemos ver, as diferenças entre os casos de coeficientes constantes médios e variáveis, são mais significativas para valores crescentes de  $G$  e do tempo, e mais próximo ao contorno  $x=1$ , nesta aplicação em particular. Uma reprodução razoável da solução do problema heterogêneo real empregando valores efetivos só foi obtida para o caso moderado de  $G=0.2$ .

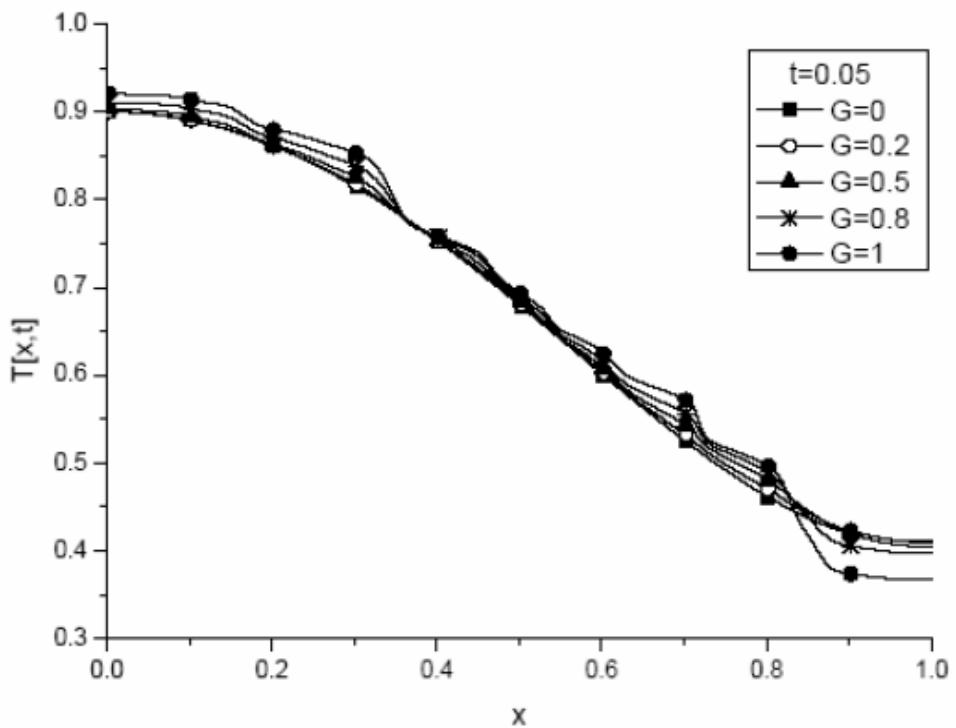


Figura 6.9.a – Distribuição de temperatura no tempo  $t=0.05$  para o caso de propriedades randomicas com  $G=0, 0.2, 0.5, 0.8$  e  $1$

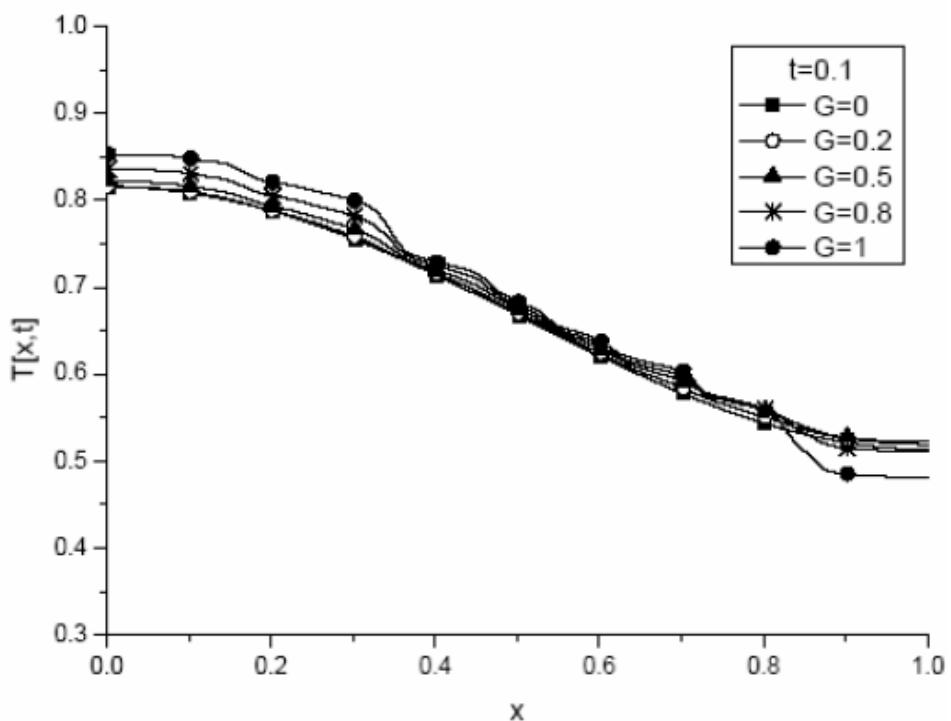


Figura 6.9.b – Distribuição de temperatura no tempo  $t=0.1$  para o caso de propriedades randomicas com  $G=0, 0.2, 0.5, 0.8$  e  $1$

## 6.2. Problema Inverso

Esta seção está subdividida em subseções onde são apresentados os resultados para: (i) a estimativa da condutividade térmica variável em uma situação onde considera-se conhecida a variação da capacidade térmica; (ii) a estimativa simultânea de condutividade e capacidade térmica variáveis; (iii) a estimativa simultânea da condutividade e da capacidade térmica variáveis no campo transformado.

A apresentação dos resultados inicia-se com as análises de pré-processamento de problemas inversos, com a análise de sensibilidade das soluções e em seguida as análises dos resultados de estimativas de parâmetros via inferência Bayesiana.

### 6.2.1. Estimativa de Condutividade Térmica Variável

Esta subseção ilustra a aplicação da inferência Bayesiana através do Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), [Kaipio e Somersalo (2004), Lee (2004), Gamerman e Lopes (2006), Migon e Gamerman (1999), Orlande *et.al.*(2008), Fudym *et.al.* (2008)], na estimativa da condutividade térmica variável em um problema unidimensional transiente de condução de calor em um meio heterogêneo, exemplificado por um meio de duas fases dispersas com variação abrupta das propriedades.

O algoritmo de Metropolis-Hastings foi utilizado no procedimento de amostragem implementado na plataforma *Mathematica* 5.2. Com o objetivo de examinar a acurácia e a robustez do algoritmo de estimativa proposto, fez-se uso de temperaturas experimentais simuladas obtidas com a solução do problema direto para funções de distribuição de concentração e propriedades termofísicas prescritas e, em seguida, perturbando-se a solução exata com erros randômicos com distribuição Gaussiana, aditivos, não correlacionados e com um desvio padrão prescrito. As temperaturas simuladas utilizadas na análise inversa foram obtidas via transformada integral, geradas com alta precisão, enquanto que na solução do problema inverso foram usadas expansões de ordens mais baixas, com o objetivo de se evitar o chamado crime inverso [Kaipio e Somersalo (2004)]. Com o objetivo de testar e analisar a robustez da solução inversa, comparou-se a utilização de *prioris*

Gaussianas e *prioris* Uniformes não-informativas nas estimativas e, ainda, a utilização de diferentes correlações como informação *a priori* para a média das *prioris* normais.

A formulação adimensional da equação de condução para este caso é dada por:

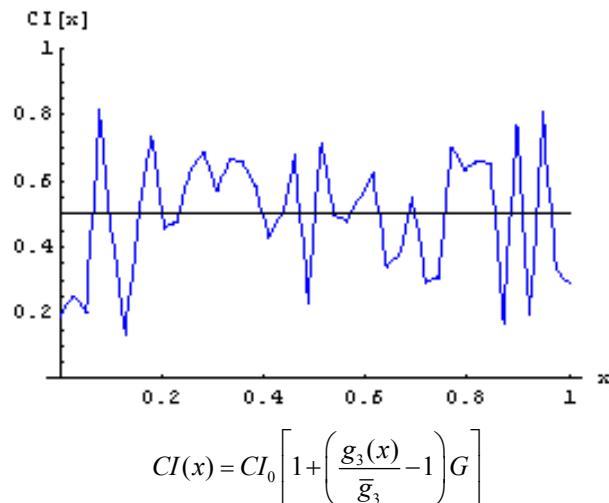
$$w(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}], \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (6.2.a)$$

Com condições inicial e de contorno dadas por:

$$T(x,0) = CI(x), \quad 0 < x < 1 \quad (6.2.b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad t > 0 \quad (6.2.c,d)$$

Para a presente aplicação, a condição inicial foi randomicamente gerada entre 0 e 1, como apresentada na figura abaixo, de modo a aumentar os gradientes de temperaturas locais e consequentemente a sensibilidade do problema de estimativa [Fudym *et.al.* (2008)].



**Figura 6.10.a – Condição inicial randômica adimensional para  $CI_0 = 0.5$  e  $G = 0.8$**

Para a geração dos dados experimentais simulados empregados nas análises do problema inverso apresentadas nesta subseção, empregou-se os valores extraídos do trabalho de Kumlutas *et.al.*(2003) para o caso de um material compósito composto de uma matriz

polimérica (HDPE) e nanopartículas de óxido de alumínio (alumina), como apresentado na tabela 6.7.

**Tabela 6.7 – Valores utilizados na geração dos dados experimentais simulados, Kumlutas et.al.(2003).**

Comprimento adimensional	L=1
Concentração percentual de partículas em $x=0$	$\phi_0=0$
Concentração percentual de partículas em $x=L$	$\phi_L=45$
Propriedades da matriz polimérica (HDPE)	$\rho_m=968 \text{ kg/m}^3$ $c_{pm}=2300 \text{ J/kgC}$ $k_m=0.545 \text{ W/mC}$
Propriedades das partículas (alumina)	$\rho_d=3970 \text{ kg/m}^3$ $c_{pd}=760 \text{ J/kgC}$ $k_d=36 \text{ W/mC}$
Modelo para a condutividade térmica efetiva	Lewis- Nielsen ( $A=1.5$ ; $\phi_m=0.637$ )
Parametros da função de concentração de partículas	$\gamma=25$ $x_c=0.2$

A distribuição espacial para a variação abrupta da concentração do particulado na matriz polimérica é governado pelo parâmetro  $\gamma$  de acordo com a forma funcional abaixo:

$$\phi(x)=\phi_{x=0}+(\phi_{x=L}-\phi_{x=0})\delta(x) \quad (6.3.a)$$

$$\delta(x)=\frac{1}{1+e^{-\gamma(x-x_c)}} \quad (6.3.b)$$

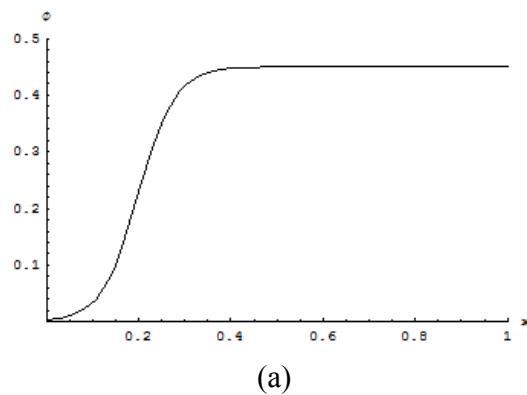
onde  $x_c$  representa a posição de transição entre as regiões de baixa e alta concentrações de partículas.

A partir da distribuição de concentração de partículas no domínio espacial, dada pela equação (6.3.a), que pode ser a princípio obtida por diferentes técnicas de medição, pode-se deterministicamente obter a capacidade térmica ao longo da coordenada espacial pela teoria de misturas. Sendo assim, para esta primeira análise do problema inverso a ser apresentada nesta subseção, considerou-se conhecida a distribuição espacial de concentração

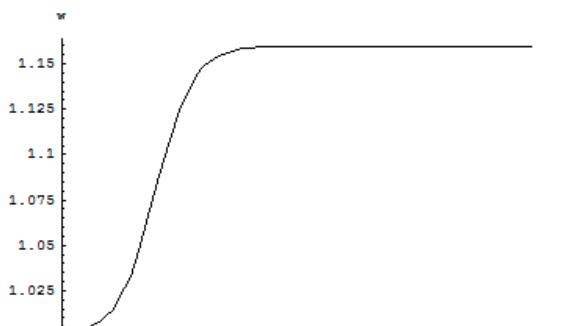
de partículas na matriz polimérica e, consequentemente, também conhecendo-se a capacidade térmica, ou seja, o coeficiente  $w(x)$ , que pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$w(x) = 1 + \left( \frac{\rho_d c_{pd}}{\rho_m c_{pm}} - 1 \right) \phi(x) \quad (6.4)$$

A figura 6.11 a,b ilustra o comportamento da distribuição de partículas empregada nas simulações subsequentes, além do correspondente comportamento da capacidade térmica adimensional de acordo com a equação (6.4), para o caso de  $\gamma=25$  e  $x_c=0.2$ .



(a)



(b)

**Figuras 6.11 – Comportamento espacial da concentração de partículas (a) e a capacidade térmica adimensional resultante (b), de acordo com os dados da tabela 6.7.**

Todavia, para a determinação da condutividade térmica, a informação sobre a fração volumétrica de partículas e a sua distribuição espacial não são suficientemente

informativas para previsão desta propriedade física, especialmente para altas concentrações, [Kumlutas *et.al.*(2003)].

Diversos modelos empíricos e teóricos tem sido propostos para predizer a condutividade térmica efetiva de um sistema de duas fases dispersas. Uma revisão e discussão detalhadas sobre a aplicabilidade de alguns destes modelos pode ser encontrada no trabalho de Kumlutas e Tavman (2006). Apresenta-se abaixo uma breve discussão sobre alguns destes modelos que serão relevantes nas análises inversas subsequentes.

Como valores limites máximo e mínimo para a condutividade térmica efetiva, tem-se respectivamente as correlações para arranjos em paralelo e em série, que são dados pelas seguintes relações:

$$k_c = (1-\phi)k_m + \phi k_d, \text{ modelo de condutividade em paralelo} \quad (6.5.a,b)$$

$$k_c^{-1} = (1-\phi)k_m^{-1} + \phi k_d^{-1}, \text{ modelo de condutividade em série}$$

Um modelo mais simples de media geométrica para a condutividade térmica efetiva de compósitos também é apresentada na literatura, [Kumlutas e Tavman (2006)]:

$$k_c = k_d^\phi k_m^{(1-\phi)} \quad (6.5 c)$$

Um dos modelos teóricos mais conhecidos na previsão da condutividade térmica efetiva é devido a Maxwell [Maxwell (1954)], na forma de uma solução exata para a condutividade de esferas homogêneas não-interativas e randomicamente distribuídas em um meio homogêneo:

$$k_c = k_m \left[ \frac{k_d + 2k_m + 2\phi(k_d - k_m)}{k_d + 2k_m - \phi(k_d - k_m)} \right] \quad (6.6)$$

O modelo de Maxwell prevê a condutividade térmica efetiva razoavelmente bem para baixas concentrações de partículas, mas para regiões de altas concentrações de partículas, este modelo subestima os valores da condutividade. Lewis e Nielsen (1970) propuseram um

modelo que leva em consideração a forma e a orientação do material de enchimento para um sistema de duas fases. A expressão resultante é dada por:

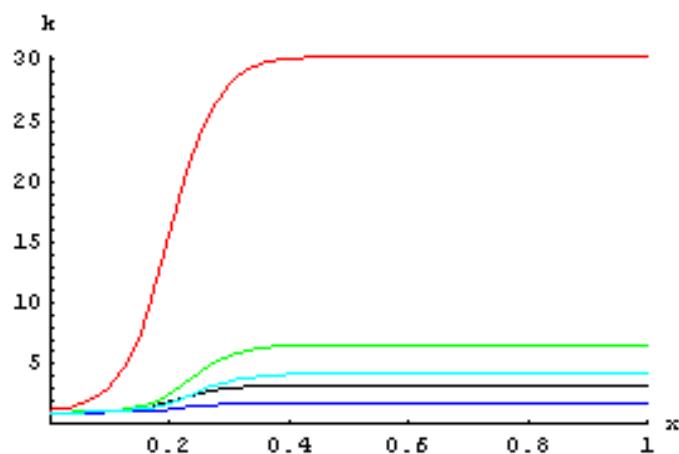
$$k_c = k_m \left[ \frac{1+AB\phi}{1-B\phi\psi} \right], \text{ onde } B = \frac{(k_d/k_m)-1}{(k_d/k_m)+A} \text{ e } \psi = 1 + \left( \frac{1-\phi_m}{\phi_m^2} \right) \phi \quad (6.7a-c)$$

Os valores de  $A$  e  $\phi_m$  são sugeridos por Lewis e Nielsen (1970) para um número variado de diferentes formas geométricas e orientações. Para esferas com acomodação randômica das partículas no meio, tem-se  $A=1.50$  e  $\phi_m=0.637$ .

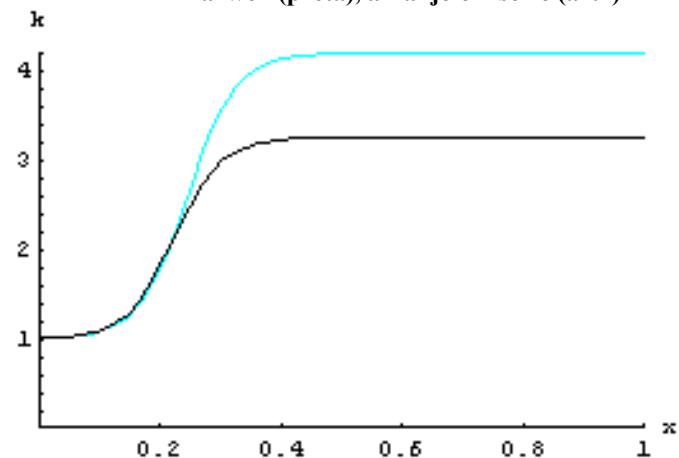
Agari e Uno (1986) propuseram um outro modelo que leva em consideração de forma combinada os mecanismos de condução dados pelos modelos de arranjo em paralelo e em série, na forma:

$$\log k_c = \phi C_2 \log k_d + (1-\phi) \log(C_1 k_m) \quad (6.8)$$

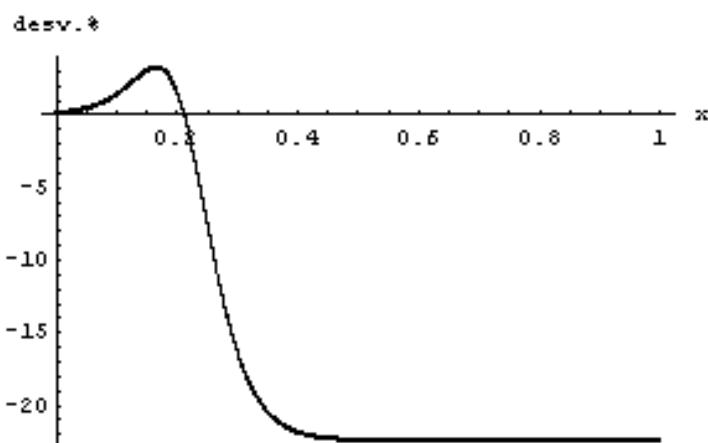
onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são experimentalmente determinadas. Uma vez que este modelo apresenta dois parâmetros ajustados experimentalmente, em geral resulta em melhores concordâncias com os respectivos resultados experimentais disponíveis. As figuras abaixo ilustram o comportamento de alguns destes modelos para o presente trabalho, de acordo com os dados apresentados na tabela 6.7. A figura 6.12.a apresenta em vermelho o modelo de arranjo em paralelo, e em azul o modelo em série, assim como o modelo de médias geométricas (curva verde) e os dois modelos de derivação teórica Maxwell (curva preta) e Lewis-Nielsen (curva cyan). A figura 6.12.b apresenta uma comparação mais detalhada entre os modelos de Maxwell e Lewis-Nielsen. Por fim o desvio na predição da condutividade térmica efetiva para estes dois últimos modelos é apresentado na figura 6.12.c.



(a) Modelo de arranjo em paralelo (vermelha), média geométrica (verde), Lewis-Nielsen (ciano), Maxwell (negra), arranjo em série (azul)



(b) Lewis- Nielsen (ciano) e Maxwell (negra)



(c) Desvio percentual entre o modelo de Lewis- Nielsen e o modelo de Maxwell.

Figura 6.12 – Comportamento da condutividade térmica efetiva de diferentes modelos.

As análises subsequentes, sobre a solução direta do problema de condução de calor unidimensional transiente, foram feitas utilizando a técnica da transformada integral generalizada (GITT), empregando a expansão dos coeficientes,  $k(x)$  e  $w(x)$ , em termos de autofunções como descrito no capítulo 3 e na seção 6.1 do presente trabalho. O problema de autovalor empregado na solução do problema descrito pelas eqs. (6.2) é dado por:

$$\frac{d}{dx} [k(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx}] + \mu_i^2 w(x) \psi_i(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (6.9.a)$$

com condições de contorno dadas por:

$$\left. \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right|_{x=1} = 0 \quad (6.9.b,c)$$

Com o intuito de demonstrar a aplicabilidade da presente abordagem, o problema auxiliar utilizado na solução do problema de autovalor apresentado acima baseou-se na escolha de coeficientes os mais simples possíveis, como  $k^*(x)=1$ ,  $w^*(x)=1$ , e  $d^*(x)=0$ , e mantendo as mesmas condições de contorno dadas pelas eqs.(6.9.b,c), resultando em:

$$\tilde{\Omega}_n(x) = \sqrt{2} \cos(\lambda_n x), \quad \text{and} \quad \tilde{\Omega}_0(x) = 1, \quad \text{com} \quad \lambda_n = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10.a-c)$$

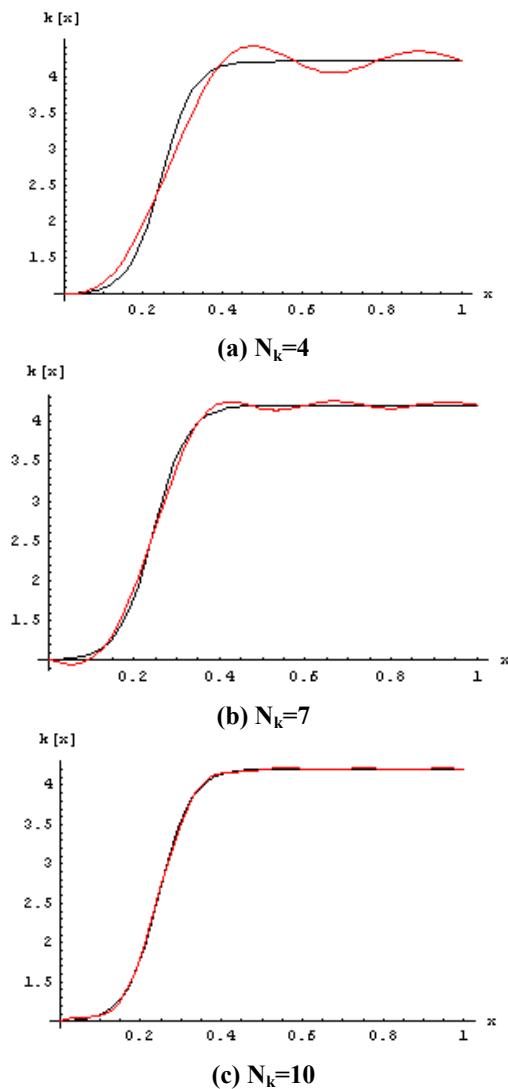
Sendo assim, o procedimento de solução inversa adotado para esta parte do presente trabalho destina-se à estimativa apenas dos coeficientes da expansão em autofunções da condutividade térmica  $k(x)$ , assim como dos dois valores da função nos contornos, utilizados na função filtro linear adotada no procedimento de expansão de  $k(x)$ . Uma vez que considerou-se conhecida a concentração de partículas e consequentemente a capacidade térmica  $w(x)$ , (eq.6.4). Desta forma, os parâmetros e o número de parâmetros a serem estimados são dados por:

$$\mathbf{P} = \left[ k_{x=0}, k_{x=L}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \dots, \bar{k}_{N_k} \right], \quad \text{com} \quad N_P = N_k + 2 \quad (6.11.a)$$

onde,

$$k(x) = k_f(x) + \sum_{j=1}^{N_k} \tilde{\Gamma}_j(x) \bar{k}_j \quad (6.11.b)$$

Na abordagem inversa proposta, o número de termos usados na expansão da condutividade térmica,  $N_k$ , controla o número de parâmetros a serem estimados. Uma análise da convergência da expansão de  $k(x)$ , para o caso do uso do modelo de Lewis-Nielsen dado pelas eqs.(6.7), é apresentado nas Figuras 6.13.a-c, para três diferentes ordens de truncamento,  $N_k = 4, 7$  e  $10$ . Pode-se observar que as três ordens de truncamento apresentadas nestas figuras são capazes de recuperar o comportamento característico da função de condutividade térmica. Todavia, o resultado para a ordem de truncamento mais baixa,  $N_k = 4$ , ainda apresenta alguma oscilação em torno da função exata, enquanto que para  $N_k = 10$  pode-se observar uma concordância bem melhor entre a função expandida e a função exata.



**Figura 6.13.** – Analise da convergencia da expansão da condutividade térmica para três diferentes ordens de truncamento da série: a)  $N_k=4$ , b)  $N_k=7$ , c)  $N_k=10$ .

Antes de se iniciar o procedimento de estimativa de parâmetros, procurou-se avaliar a influência do número de parâmetros a serem estimados na solução do problema inverso, através da análise do determinante da matriz de sensibilidade  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  [ Beck e Arnold (1977); Ozisik e Orlande (2000)].

Analisa-se então, o determinante da matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  para o caso da variação do número de parâmetros a serem estimados para um número fixo de medidas espaciais e uma freqüência fixa de medidas no tempo (figura 6.14.a). Em seguida analisa-se a variação do número de medidas espaciais para um número fixo de parâmetros (figura 6.14.b).

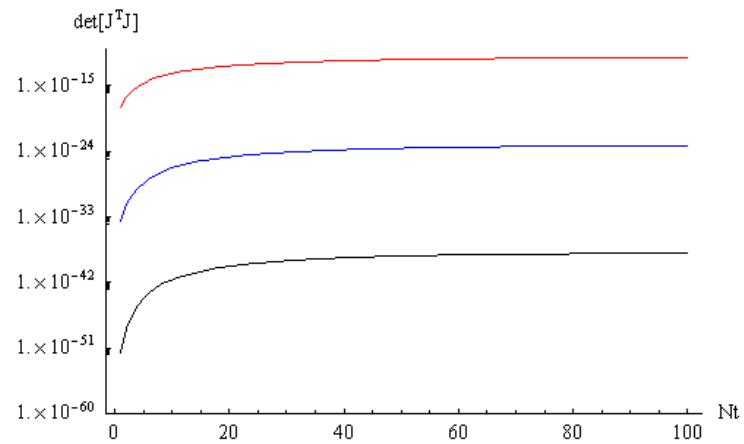
A figura 6.14.a mostra a evolução no tempo do determinante da matriz de informação para um total de 20 mil medidas sendo  $N_x=200$  ao longo do domínio espacial e  $N_t=100$  no tempo. As três curvas correspondem a valores crescentes no numero de parametros  $N_p=6, 9$  e  $12$  que correspondem respectivamente a um número crescente de termos na expansão da condutividade térmica  $N_k = 4, 7$  e  $10$ , somados aos dois valores empregados na função filtro.

Claramente, observa-se que o aumento gradual no número de parâmetros decresce consideravelmente o valor do determinante, como ilustrado pelos seus valores no final da escala no tempo,  $7.8 \times 10^{-12}$ ,  $6.0 \times 10^{-24}$ , e  $1.0 \times 10^{-38}$ , respectivamente para  $N_p=6, 9$  e  $12$ . Com isso, tem-se que o aumento no número de parâmetros a serem estimados afeta sensivelmente o condicionamento do procedimento de estimativa.

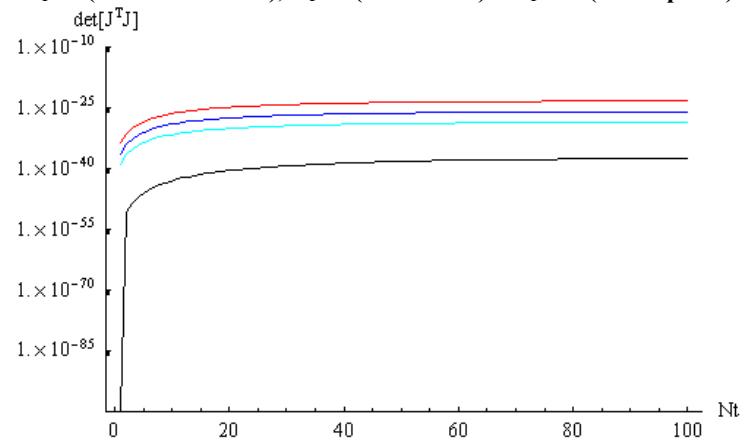
A figura 6.14.b apresenta o determinante para o caso de uma estimativa envolvendo  $N_p=9$  parâmetros, mas com um número variável de medidas igualmente espaçadas ao longo do domínio espacial ( $N_x=200, 100, 50$  e  $5$ , de baixo para cima). O valor mais baixo de  $N_x=5$ , foi considerado para avaliar o emprego de medidas tradicionais de temperatura com termopares, enquanto que os valores mais altos representam a aquisição das temperaturas através de técnicas de medidas como termografia por infravermelho. Observa-se que o valor do determinante da matriz de informação decresce quando reduz-se o número de medidas ao longo do domínio ( $61 \times 10^{-24}$ ,  $1.4 \times 10^{-26}$ ,  $3.4 \times 10^{-29}$ , e  $3.3 \times 10^{-38}$ , para  $N_x=200, 100, 50$  e  $5$ , respectivamente).

Na figura 6.14.c tem-se uma análise mais detalhada do comportamento do determinante da matriz de informação para a curva mais acima apresentada na figura 6.14.b,

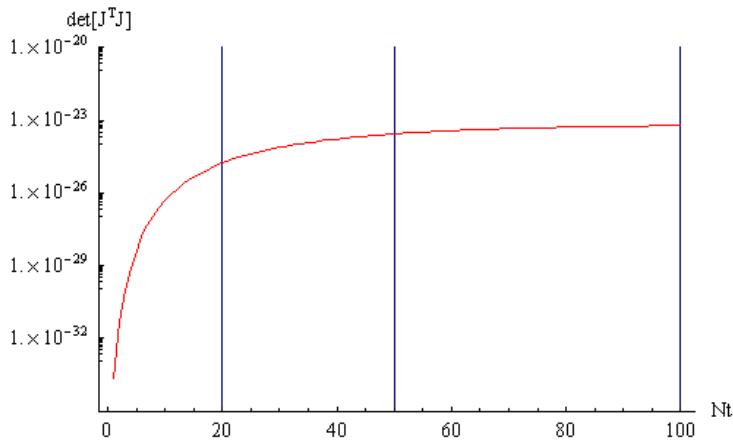
com um número fixo de medidas ao longo do domínio espacial ( $N_x=200$ ) e para uma frequencia fixa de medidas no tempo ( $\Delta_t = 5 \times 10^{-4}$ ), para o caso de uma estimativa envolvendo nove parâmetros ( $N_p=9$ ). Pode-se observar desta figura o efeito do crescimento do número de medidas no tempo ( $N_t=20, 50$  e  $100$ ), resultando no aumento de apenas uma ordem de magnitude no valor do determinante ( $1.7 \times 10^{-25}, 2.7 \times 10^{-24}$ , and  $6.0 \times 10^{-24}$ ).



(a)  $N_x=200, \Delta t=0.0005,$   
 $N_p=6$  (curva vermelha),  $N_p=9$  (curva azul) e  $N_p=12$  (curva preta)



(b)  $N_p=9$  parametros,  $\Delta t=0.0005$   
 $N_x=200$  (curva vermelha),  $N_x=100$  (curva azul),  $N_x=50$  (curva cyan), e  $N_x=5$  (curva preta).



(c)  $N_p=9$  parametros,  $N_x=200$ ,  $\Delta t=0.0005$  e  $N_t=20, 50$  e  $100$

Figura 6.14.– Evolução do determinante da matriz de sensibilidade.

Os dados experimentais simulados foram gerados com um desvio padrão de 1% do valor exato da temperatura calculada pela solução direta com  $NT=100$  termos na expansão da temperatura,  $N_t=100$  termos na expansão da autofunção original e  $N_k=N_w=20$  termos na expansão das propriedades  $k(x)$  e  $w(x)$ . Nas análises inversas realizadas subsequentemente, foram utilizadas, todavia,  $N_i=NT=15$  termos tanto na expansão da temperatura quanto na expansão da autofunção, de modo a evitar o chamado crime inverso [Kaipio e Somersalo (2004)].

Na expansão do coeficiente  $w(x)$ , manteve-se o número de termos igual a  $N_w=20$ , de modo a garantir uma convergência de quatro dígitos significativos em sua representação. Baseado na análise do determinante da matriz de sensibilidade apresentada acima, considerou-se para a solução do problema inverso  $N_x=200$  medidas espaciais e  $N_t=20$  medidas no tempo, e adotou-se  $N_k=7$  termos na expansão da condutividade térmica, de modo que o número de parâmetros a serem estimados foi de  $N_p=9$ .

Um aspecto relevante na utilização da expansão em autofunções dos coeficientes no procedimento de estimativa de parâmetros é a definição de valores máximos e mínimos para os coeficientes da expansão a serem estimados, a partir dos correspondentes valores máximos e mínimos da propriedade termofísica correspondente,  $k_{\max}$  e  $k_{\min}$ .

A função de condutividade térmica usada na presente aplicação, em função dos parâmetros a serem estimados, é dada por:

$$k(x) = \left( \frac{k_{x=L} - k_{x=0}}{L} \right) x + k_{x=0} + \sum_{j=1}^{N_k} \bar{k}_j \tilde{\Gamma}_j(x) \quad (6.12.a)$$

que por sua vez pode ser reescrito na forma:

$$\sum_{j=1}^{N_k} \bar{k}_j \tilde{\Gamma}_j(x) = k(x) - \left( \frac{k_{x=L} - k_{x=0}}{L} \right) x + k_{x=0} \quad (6.12.b)$$

Operando com  $\int_0^L \tilde{\Gamma}_l(x) dx$  em ambos os lados da equação acima, tem-se:

$$\bar{k}_l = \int_0^L \tilde{\Gamma}_l(x) k(x) dx - \left( \frac{k_{x=L} - k_{x=0}}{L} \right) \bar{g}_l - k_{x=0} \bar{f}_l \quad (6.13.a)$$

onde,

$$\bar{g}_l = \int_0^L x \tilde{\Gamma}_l(x) dx \quad (6.13.b)$$

$$\bar{f}_l = \int_0^L \tilde{\Gamma}_l(x) dx \quad (6.13.c)$$

Assim, para um valor constante, mínimo ou máximo, de  $k(x)$  tem-se  $k_b = k_{\min}$  ou  $k_b = k_{\max}$ .

$$\bar{k}_{l,b} = (k_b - k_{x=0}) \bar{f}_l - \left( \frac{k_{x=L} - k_{x=0}}{L} \right) \bar{g}_l \quad (6.14)$$

Uma vez que os valores da condutividade térmica nos contornos não são conhecidos *a priori*, para maximizar ou minimizar os valores dos coeficientes transformados da equação (6.14), tem-se que levar em consideração o sinal dos coeficientes  $\bar{g}_l$  e  $\bar{f}_l$ .

Da análise da expressão acima, e com os valores dos coeficientes transformados,  $\bar{g}_l$  e  $\bar{f}_l$ , chega-se aos limites conservadores, superior e inferior, dos coeficientes da expansão,  $\bar{k}_{l,\max}$  e  $\bar{k}_{l,\min}$ , na forma:

para  $l = \text{par} \rightarrow (k_{x=0} = k_{x=L} = k_{\min} ; k_b = k_{\max})$ :

$$\bar{k}_{l,\max} = \frac{2\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.15.a)$$

$$\bar{k}_{l,\min} = -\frac{2\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.15.b)$$

para  $l = \text{impar} \rightarrow (k_{x=0} = k_{\min} ; k_{x=L} = k_{\max})$

$$\bar{k}_{l,\max} = \frac{2(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.16.a)$$

para  $l = \text{impar} \rightarrow (k_{x=L} = k_{\min} ; k_{x=0} = k_{\max})$

$$\bar{k}_{l,\min} = \frac{-\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.16.b)$$

Os parâmetros foram então estimados através do algoritmo de Metropolis-Hastings, aceitando ou rejeitando, conjuntamente, os *parâmetros candidatos* a cada iteração. Para a estimativa dos intervalos de máximo e mínimo do coeficiente  $k(x)$  adotou-se como limite superior a condutividade da partícula,  $k_{\max}(x) = k_d$  e como limite inferior a condutividade da matriz,  $k_{\min}(x) = k_m$ . Poder-se-ia ter utilizado alguns dos modelos discutidos anteriormente como limites mínimos e máximos de modo a reduzir o intervalo de procura  $[k_{\min}, k_{\max}]$ . Todavia, no presente estagio de demonstração da ferramenta de estimativa aqui desenvolvida, preferiu-se usar intervalos mais dilatados.

Para a estimativa inicial dos coeficientes  $k(x)$ , foram escolhidos valores de modo a considerar uma função inicialmente constante dada pelo valor médio entre os limites superior e inferior,  $k_{inicial,l} = \frac{k_{max,l} + k_{min,l}}{2}$ .

Os dois primeiros parâmetros,  $k_{x=0}$  e  $k_{x=L}$ , tem os seus valores máximos, mínimos e iniciais dados pelos coeficientes  $k_{\max}(x)$ ,  $k_{\min}(x)$ ,  $k_{inicial}(x)$  avaliados em  $x=0$  e  $x=L$  respectivamente. Os demais parâmetros, referentes aos coeficientes da expansão de  $k(x)$ , têm os seus valores máximos e mínimos determinados a partir da expansão em termos das autofunções dos coeficientes máximo e mínimo,  $k_{\max}(x)$ ,  $k_{\min}(x)$ , como mostrado anteriormente, e os seus valores iniciais são tomados iguais à metade do valor entre o parâmetro máximo e mínimo encontrado. O passo de procura utilizado no procedimento de geração dos parâmetros candidatos dentro do intervalo [mínimo,máximo] foi de 20% do valor exato do parâmetro.

A tabela 6.8 apresenta os valores máximos, mínimos, iniciais e o passo de procura para os 9 parâmetros a serem estimados.

**Tabela 6.8 – Valores exatos, iniciais, passo de procura e limites maximos e minimos para o problema inverso de estimativa de condutividade térmica.**

Parametros	Exato	Inicial	passo	$k_{min}$	$k_{max}$
$k_{x=0}$	1.0072	18.27	0.201	0.545	36
$k_{x=L}$	4.2070	18.27	0.841	0.545	36
$\bar{k}_1$	1.0066	0	0.201	-31.921	31.921
$\bar{k}_2$	0.01874	0	0.00375	-7.980	7.980
$\bar{k}_3$	-0.2592	0	0.0518	-10.640	10.640
$\bar{k}_4$	-0.2441	0	0.0488	-3.990	3.990
$\bar{k}_5$	-0.1218	0	0.0244	-6.384	6.384
$\bar{k}_6$	-0.009845	0	0.00197	-2.660	2.660
$\bar{k}_7$	0.04450	0	0.00890	-4.560	4.560

Cinco casos foram analisados, correspondendo a diferentes informações a priori. No caso 1, considerou-se uma distribuição uniforme *a priori*, enquanto que no caso 2 a priori foi dada na forma de uma distribuição normal com média centrada no modelo de condutividade térmica de Lewis-Nielsen e um desvio padrão de 40% do valor da média. No caso 3, similarmente ao caso 2, adotou-se uma *priori* normal centrada no modelo de Lewis-Nielsen, mas com desvio padrão adotou-se um valor de 80% do valor da média. Os casos 4 e 5 tratam de *prioris* normais com médias dadas pela correlação de Maxwell, respectivamente, com desvios padrão de 40% e 80% do valor da média. Espera-se para o caso 1 as piores estimativas, uma vez que a *priori* adotada neste caso é não informativa. Os casos 2 e 3 empregam *prioris* Gaussinas centradas no mesmo modelo adotado na geração dos dados experimentais simulados, mas com valores para os desvios padrão relativamente altos, de modo a desafiar o algoritmo na estimativa da função de condutividade térmica. Não obstante, deve-se chamar a atenção para o fato de que uma vez que evitou-se o crime inverso, não é esperado a recuperação exata dos parâmetros empregados na geração dos dados experimentais simulados.

Os casos 4 e 5 também desafiam a abordagem aqui adotada na solução do problema inverso, uma vez que a priori Gaussiana fornecida para estes dois casos baseia-se em um modelo para a condutividade térmica efetiva (Maxwell) diferente do modelo empregado na geração dos dados experimentais simulados (Lewis-Nielsen). Vale ressaltar que para baixas concentrações estes dois modelos predizem valores para a condutividade térmica razoavelmente concordantes, todavia para concentrações mais altas tem-se valores distintos para cada modelo, como foi observado na figura 6.12.c.

Assumindo um período de aquecimento de 10 mil estados na cadeia de Markov, para um total de 50 mil estados em toda a cadeia, obteve-se a estimativas para os parâmetros em cada caso tomando-se a média amostral dos 40 mil estados restantes. A Tabela 6.9 abaixo sumariza as estimativas encontradas assim como os intervalos de confiança para um grau de confiança de 95% para os cinco casos analisados.

**Tabela 6.9 – Parâmetros estimados para os cinco casos analisados**  
**(Caso 1: priori Uniforme; Caso 2: priori Normal Lewis-Nielsen c/ 40% desvio padrão;**  
**Caso 3: priori Normal Lewis-Nielsen c/ 80% desvio padrão; Caso 4: priori Normal Maxwell c/ 40% desvio**  
**padrão; Caso 5: priori Normal Maxwell c/ 80% desvio padrão)**

P	Exato	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$k_{x=0}$	1.0072	1.426 [0.630, 2.775]	1.075 [0.7041, 1.487]	1.163 [0.655, 1.813]	1.010 [0.684, 1.390]	1.063 [0.644, 1.569]
$k_{x=L}$	4.2070	6.921 [1.950, 14.327]	4.300 [2.483, 6.424]	4.646 [2.199, 7.837]	3.979 [2.505, 5.576]	4.538 [2.373, 7.102]
$\bar{k}_1$	1.0066	0.307 [-2.189, 3.207]	0.957 [0.356, 1.610]	0.841 [-0.279, 1.908]	0.757 [0.249, 1.261]	0.655 [-0.226, 1.510]
$\bar{k}_2$	0.01874	0.328 [-0.068, 0.586]	0.0185 [0.0034, 0.033]	0.018 [-0.016, 0.049]	0.0747 [0.029, 0.121]	0.067 [-0.0013, 0.147]
$\bar{k}_3$	-0.2592	-0.336 [-1.238, 0.663]	-0.270 [-0.452, -0.086]	-0.293 [-0.625, 0.048]	-0.146 [-0.248, -0.047]	-0.169 [-0.353, 0.0223]
$\bar{k}_4$	-0.2441	-0.487 [-1.816, 0.706]	-0.244 [-0.419, -0.0582]	-0.280 [-0.596, 0.044]	-0.180 [-0.309, -0.05]	-0.204 [-0.437, 0.030]
$\bar{k}_5$	-0.1218	-0.511 [-1.305, 0.288]	-0.1216 [-0.214, -0.0248]	-0.113 [-0.294, 0.0782]	-0.107 [-0.187, -0.029]	-0.116 [-0.274, 0.056]
$\bar{k}_6$	-0.00985	0.154 [0.029, 0.271]	-0.0101 [-0.017, -0.0024]	-0.00976 [-0.027, 0.006]	-0.0388 [-0.064, -0.016]	-0.031 [-0.090, 0.023]
$\bar{k}_7$	0.04450	0.202 [-0.167, 0.625]	0.0453 [0.013, 0.0795]	0.0425 [-0.024, 0.113]	0.0088 [0.0021, 0.016]	0.0089 [-0.005, 0.023]

Claramente, o caso 1 apresenta o pior conjunto de estimativas, com um amplo intervalo de confiança, que por vezes nem inclui o valor exato, como para o caso do coeficiente  $\bar{k}_6$ . O emprego de uma priori uniforme também leva a uma estimativa com pouca aderência, devido aos limites amplos empregados para os intervalos de mínimo e máximo, que poderiam ter sido reduzidos fornecendo assim uma melhor informação ao procedimento de estimativa, como por exemplo com o emprego dos modelos em paralelo e em série na definição de limites mais estreitos.

Como esperado, os casos 2 e 3 apresentaram resultados bem mais próximos aos valores exatos, mesmo para o caso 3 onde foi empregado um desvio padrão relativamente alto para a distribuição a priori, resultando em intervalos de confiança mais amplos para os parâmetros estimados.

Nos casos 4 e 5 o algoritmo ainda consegue corrigir o comportamento da função de condutividade, recuperando de forma razoavelmente acurada os parâmetros exatos. Todavia, um aspecto deve ser ressaltado com respeito às estimativas obtidas para o caso da escolha da priori normal centrada no modelo de Maxwell, embora os dois modelos de condutividade, Lewis-Nielsen e Maxwell, sejam localmente divergentes em no máximo 22%, após a transformação integral para expressar as duas funções em termos de autofunções, o desvio entre os coeficientes de cada expansão é bem maior, chegando à ordem de 300% de desvio. Este aspecto, não é imediatamente evidente através da simples comparação entre os dois modelos apresentados na figura 3.b, todavia, certamente é a principal razão para as diferenças encontradas nas análises inversas destes dois últimos casos.

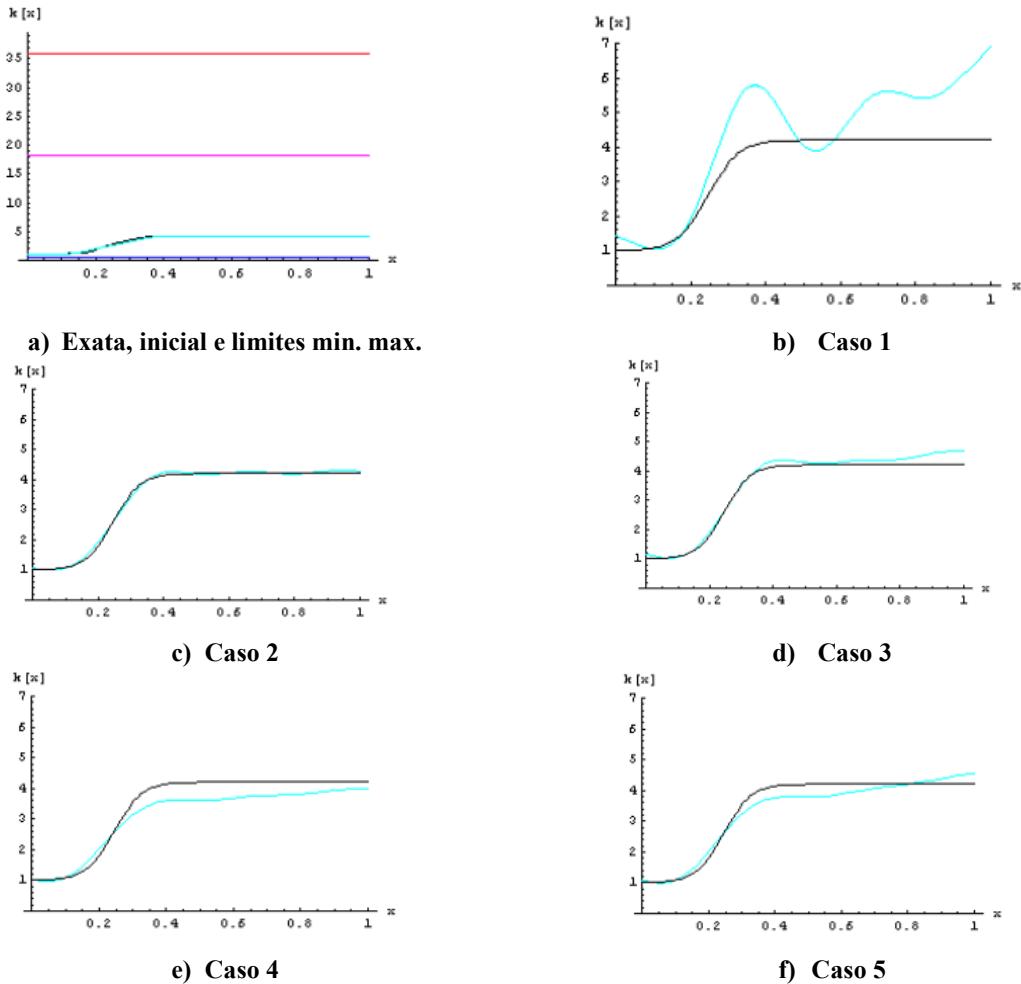
A figura 6.15.a apresenta os limites máximos, mínimos, o valor inicial e a função de condutividade térmica a ser reconstruída pela solução do problema inverso. Enquanto isso, as figuras 6.15.b-f apresentam as condutividades térmicas estimadas em comparação com a função exata para cada um dos cinco casos aqui considerados, baseadas na estimativa dos nove parâmetros apresentados na Tabela 6.9.

Estas figuras confirmam as observações feitas anteriormente baseadas nos resultados apresentados na Tabela 6.9. Pode-se observar ainda que a oscilação presente na reconstrução da condutividade térmica para o caso envolvendo a priori não-informativa (caso 1), figura 6.15.b, é uma consequência da baixa concordância nas estimativas dos coeficientes da expansão com os valores exatos esperados.

A figura 6.15.c apresenta a melhor estimativa obtida (caso 2) e a figura 6.15.d apresenta as estimativas para o caso do aumento no desvio padrão da priori para 80% (caso 3), onde pode-se observar apenas um leve desvio na condutividade térmica estimada, quando comparada à função exata.

Para os dois últimos casos, com priori dada pelo modelo de Maxwell, nota-se a tentativa de correção do modelo por parte do algoritmo, que distorce a função inicial na

tentativa de se aproximar da função exata, percebendo-se uma concordância um pouco melhor para as estimativas no caso com menor desvio padrão 40% (figuras 6.15.e-f)



**Figura 6.15.– Condutividade térmica exata, chute inicial, limites máximo e mínimos e a comparação entre a função exata e as funções estimadas para os 5 casos considerados.**

Finalmente, as figuras 6.16. e 6.17. ilustram a evolução das cadeias de Markov durante os 50 mil estados para os nove parametros nos casos 1 e 2, respectivamente. A partir da figura 6.16, que é relativa à priori não-informativa, e em vista dos limites superiores e inferiores bem amplos aqui propostos, pode-se notar a amplitude significativa das oscilações das cadeias. Por outro lado, as cadeias obtidas para o caso 2, onde prioris normais centradas no modelo de Lewis-Nielsen foram empregadas, tem-se uma menor amplitude de oscilação e uma completa convergência das cadeias mesmo antes de se alcançar os 50 mil estados.

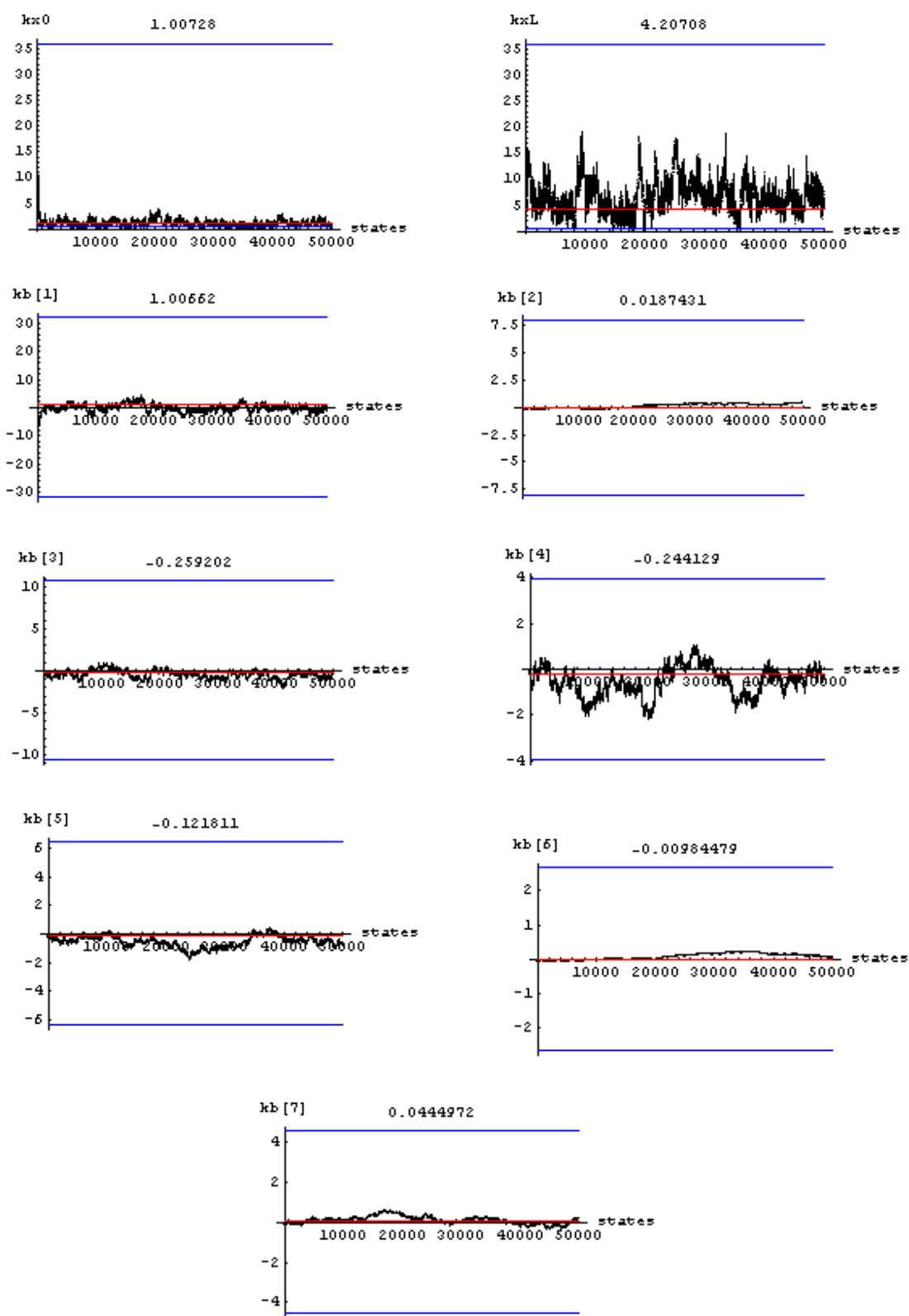


Figura 6.16 – Evolução da cadeia de Markov para os 9 parametros no caso 1.

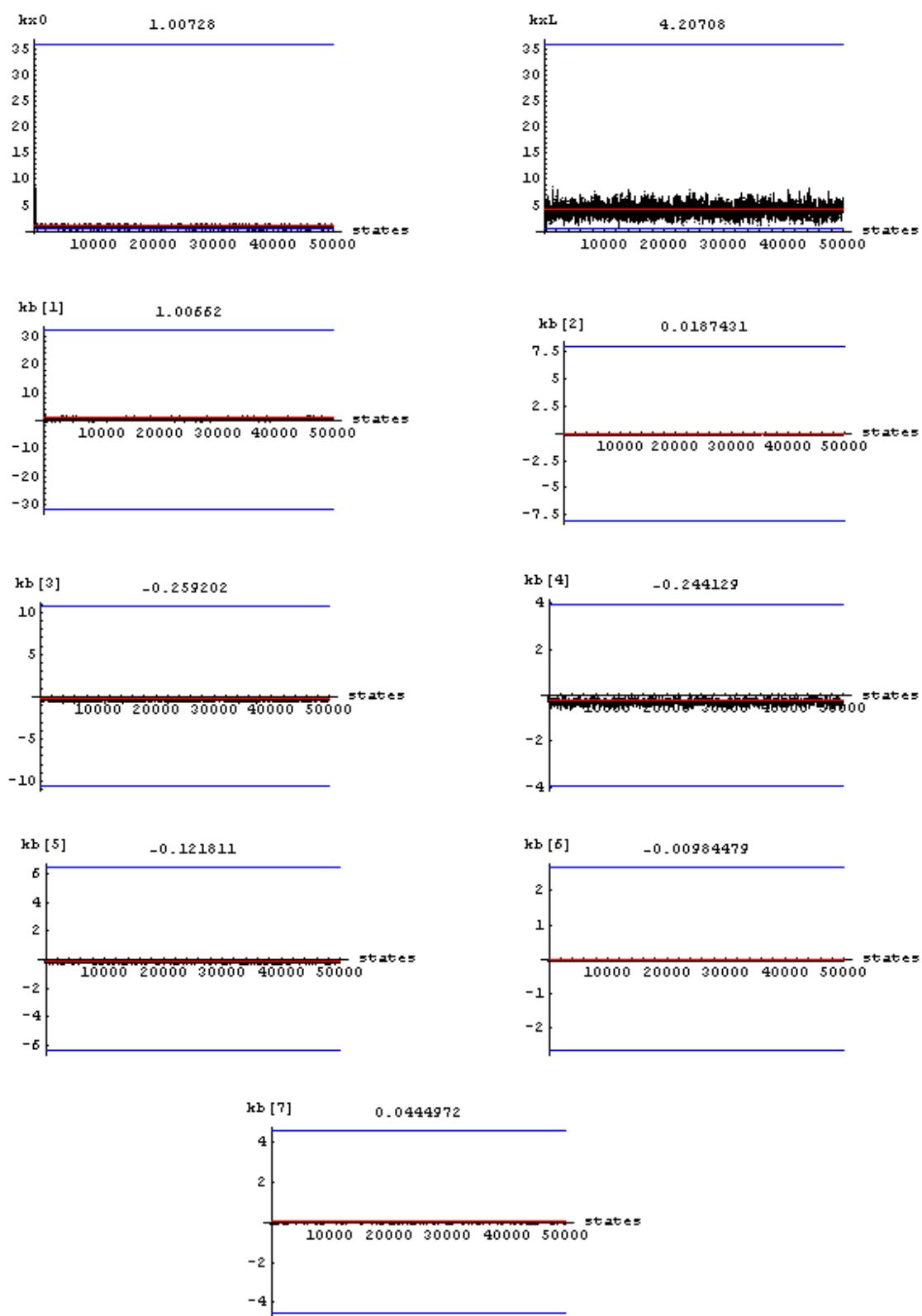


Figura 6.17 – Evolução da cadeia de Markov para os 9 parametros no caso 2.

## 6.2.2. Estimativa Simultânea da Capacidade Térmica e da Condutividade Térmica Variáveis

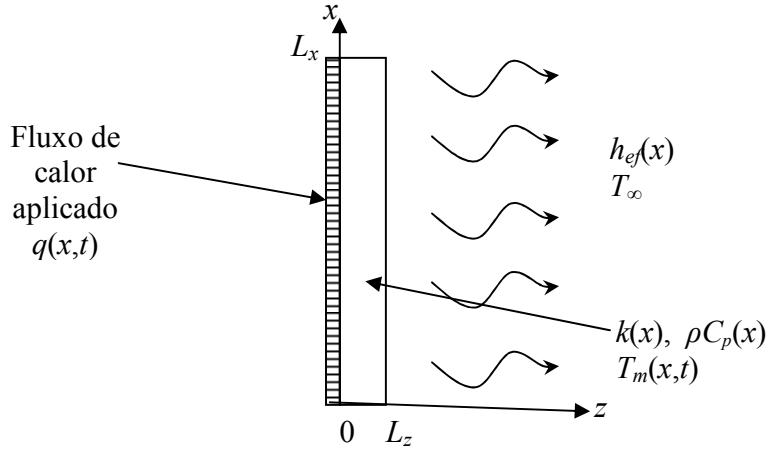
Esta subseção apresenta a estimativa simultânea da variação espacial da capacidade e da condutividade térmicas em um problema unidimensional transiente de condução de calor em meios heterogêneos, aqui ilustrado para um sistema de duas fases com partículas dispersas em uma matriz polimérica. Empregou-se o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), [Kaipio e Somersalo (2004); Gamerman e Lopes (2006); Migon e Gamerman (1999); Orlande *et.al.* (2008); Fudym *et.al.* (2008)], através da implementação, na plataforma *Mathematica* [Wolfram (2005)], do procedimento de amostragem de Metropolis-Hastings [Metropolis *et.al.* (1953); Hastings (1970)].

Para as análises que serão apresentadas nesta subseção considerou-se uma formulação unidimensional transiente para descrever o processo de condução de calor em uma região  $x \in [0, L]$  como a apresentada pelas equações (1) abaixo. A presente formulação inclui a variação espacial da capacidade e da condutividade térmicas,  $w(x)$  e  $k(x)$ , que por sua vez são responsáveis por carregar as informações relativas à heterogeneidade do meio:

$$\rho(x)C_p(x)\frac{\partial T_m(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T_m(x,t)}{\partial x}\right) - \frac{h_{ef}(x)}{L_z}(T_m(x,t) - T_\infty) + \frac{q(x,t)}{L_z}, \quad 0 < x < L_x; t > 0 \quad (6.16.a)$$

$$T_m(x, 0) = T_\infty, \quad \left.\frac{\partial T_m(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad \left.\frac{\partial T_m(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad t > 0 \quad (6.16.b-d)$$

A formulação adotada e descrita pelas equações (1) foi construída baseada na aproximação de parâmetros concentrados na direção transversal da amostra, sendo representativa do aparato experimental descrito no capítulo 5, para uma placa termicamente fina com fluxo de calor prescrito em uma das suas faces e perdas de calor por convecção na face oposta, conforme ilustrado na figura 6.18.



**Figura 6.18– Esquema representativo de um aparato experimental para determinação de propriedades termofísicas.**

Para este aparato experimental representativo, considera-se que as medidas de temperatura se dão pelo mapeamento na face oposta à aplicação do fluxo de calor, via termografia por infravermelho. Antes de efetuar a transformação integral do problema (6.16), uma solução filtro simplificada foi adotada com o objetivo de melhorar a convergência da expansão, na forma:

$$T(x,t) = T_{\infty} + T^*(x,t) \quad (6.17)$$

Outros filtros analíticos mais complexos poderiam ter sido adotados de modo a homogeneizar completamente a equação original (6.16.a), eliminando o termo fonte, mas a escolha da temperatura ambiente como filtro para este problema já apresentou resultados satisfatórios na presente análise demonstrativa da solução do problema inverso correspondente. A formulação filtrada é então dada por:

$$w(x) \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x} \right) - d(x) T^*(x,t) + P(x,t), \quad 0 < x < L_x; t > 0 \quad (6.18.a)$$

$$T^*(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad \left. \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad t > 0 \quad (6.18.b-d)$$

onde,

$$w(x) = \rho(x) C_p(x); \quad d(x) = \frac{h_{ef}(x)}{L_z}; \quad P(x,t) = \frac{q(x,t)}{L_z} \quad (6.18.e-g)$$

A solução exata para o problema (6.18) é então obtida via Transformada Integral Clássica [Mikhailov e Ozisik (1984); Cotta (1993)] e escrita como :

$$T(x,t) = T_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(x) \int_0^t \bar{g}_i(t') e^{-\mu_i^2(t-t')} dt' \quad (6.19)$$

onde os autovalores  $\mu_i$  e autofunções  $\psi_i(x)$  são obtidas do problema de autovalor que incorpora toda a informação sobre a heterogeneidade do meio, na forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx} \right] + (\mu_i^2 w(x) - d(x)) \psi_i(x) = 0, \quad x \in [0, L] \quad (6.20.a)$$

com condições de contorno dadas por:

$$\frac{d\psi_i(x)}{dx} = 0, \quad x = 0 \quad (6.20.b)$$

$$\frac{d\psi_i(x)}{dx} = 0, \quad x = L \quad (6.20.c)$$

Na solução do problema de Sturm-Liouville apresentado pelas equações (6.20.a-c) empregou-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada GIT, através da proposição de um problema de autovalor, mais simples, e então da expansão da autofunção desconhecida em termos de uma outra autofunção conhecida [Cotta (1993)]. Também para os coeficientes da equação  $w(x)$  e  $k(x)$  propõe-se a expansão em termos de autofunções conhecidas. Esta abordagem é particularmente vantajosa na avaliação das matrizes  $A_{n,m}$  e  $B_{n,m}$  do sistema algébrico, uma vez que todas as integrais podem ser então expressas em termos de autofunções, permitindo a sua integração analítica.

Os coeficientes  $w(x)$  e  $k(x)$  podem ser então escritos como nas equações abaixo, em termos de autofunções conhecidas e de uma função filtro, de modo a acelerar a convergência desta expansão nos contornos:

$$w(x) = w_f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(x) \bar{w}_j, \quad (6.21.a)$$

$$k(x) = k_f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(x) \bar{k}_j, \quad (6.21.b)$$

As funções consideradas desconhecidas nesta etapa do presente trabalho foram a capacidade térmica  $w(x)$ , a condutividade térmica  $k(x)$ , e o coeficiente de transferência de calor efetivo  $h_{ef}(x)$ , que por simplicidade foi assumido uniforme. Todavia, como a abordagem adotada na solução do problema direto envolve a expansão destes coeficientes em termos de autofunções, as quantidades desconhecidas de fato são os coeficientes desta expansão, os dois valores nos contornos, de cada propriedade, empregados no procedimento de solução como função filtro, e o coeficiente de transferência de calor uniforme. Logo, o número e os parâmetros a serem estimados são:

$$\mathbf{P} = [w_{x=0}, w_{x=L}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \dots, \bar{w}_{N_w}, k_{x=0}, k_{x=L}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \dots, \bar{k}_{N_k}, d], \quad (6.22)$$

$$\text{com } N_P = N_w + N_k + 5$$

O problema inverso aqui ilustrado envolve a análise de uma variação abrupta da concentração de partículas envolvendo um sistema de duas fases dispersas. Com o objetivo de avaliar a acurácia e a robustez da proposta de solução do problema inverso, utilizou-se de dados de temperatura simulados ao longo do comprimento do domínio, no regime transiente. Tais medidas simuladas foram obtidas pela solução do problema direto através da especificação das funções das propriedades termofísicas. As temperaturas simuladas foram então perturbadas com erros aditivos, Gaussianos, não-correlacionados de média zero e desvio padrão conhecido. Para a geração dos dados experimentais simulados e para as análises inversas subsequentemente apresentadas empregou-se os valores apresentados na Tabela 6.10, que foram extraídos dos trabalhos de [Tavman, I.H., (1996); Kumlutas *et.al.* (2003)].

**Tabela 6.10 – Valores usados na geração dos dados experimentais simulados**

Comprimento	$L_x=0.04\text{ m}$
Concentração volumétrica de partículas em $x=0$	$\phi_0=0\%$
Concentração volumétrica de partículas em $x=L_x$	$\phi_L=45\%$
Propriedades da matriz polimérica (HDPE)	$\rho_m=968\text{ kg/m}^3$ $C_{pm}=2300\text{ J/kgC}$ $k_m=0.545\text{ W/mC}$
Propriedades das partículas (alumina)	$\rho_d=3970\text{ kg/m}^3$ $c_{pd}=760\text{ J/kgC}$ $k_d=36\text{ W/mC}$
Modelo de condutividade térmica efetiva	Lewis and Nielsen ( $A=1.5$ ; $\phi_m=0.637$ )
Parametros da função para descrever a concentração de partículas dispersas na matriz	$\gamma=25$ $x_c=0.2$
Coeficiente de transferência de calor efetivo	$h_{ef}=16.7\text{ W/m}^2\text{C}$
Parametros adotados na função do fluxo de calor	$\gamma=100$ $x_c=0.5$ $q_0=0$ $q_L=598\text{ W/m}^2$
Temperatura ambiente e inicial	$T_\infty=23\text{ C}$
Espessura da placa	$L_z=0.003\text{ m}$

A distribuição espacial para a variação abrupta da concentração de partículas na matriz polimérica é governada pelo parâmetro  $\gamma$  de acordo com a forma funcional abaixo:

$$\phi(x) = \phi_{x=0} + (\phi_{x=L} - \phi_{x=0})\delta(x) \quad (6.23.a)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(x-x_c)}} \quad (6.23.b)$$

onde  $x_c$  representa a posição de transição entre as regiões de baixa e alta concentração de partículas.

A partir da distribuição de concentração de partículas na matriz polimérica ao longo do domínio, pode-se determinar por teoria de misturas a capacidade térmica  $w(x)$ :

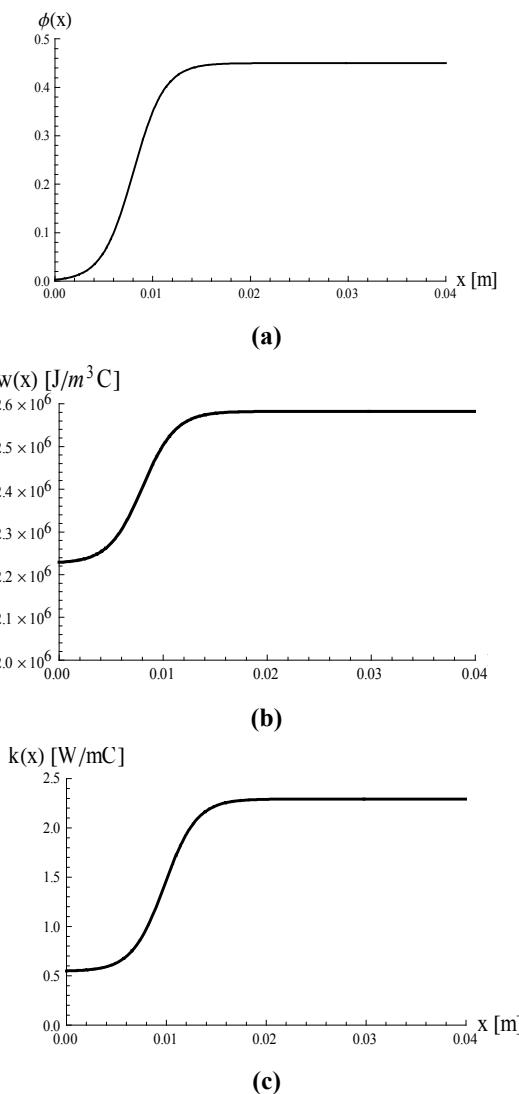
$$w(x) = 1 + \left( \frac{\rho_d C_{pd}}{\rho_m c_{pm}} - 1 \right) \phi(x) \quad (6.24)$$

Todavia, para a condutividade térmica a informação sobre a fração volumétrica de partículas e a sua distribuição espacial não são suficientemente informativas para previsão desta propriedade física, especialmente para altas concentrações, [Kumlutas *et.al.*(2003)]. Muitos modelos empíricos e teóricos tem sido propostos para predizer a condutividade térmica efetiva de um sistema de duas fases dispersas. Para a presente análise utilizou-se o modelo de Lewis-Nielsen, como apresentado na subseção anterior.

$$k_c = k_m \left[ \frac{1 + AB\phi}{1 - B\phi\psi} \right], \text{ onde } B = \frac{(k_d/k_m) - 1}{(k_d/k_m) + A} \text{ e } \psi = 1 + \left( \frac{1 - \phi_m}{\phi_m^2} \right) \phi \quad (6.25.a-c)$$

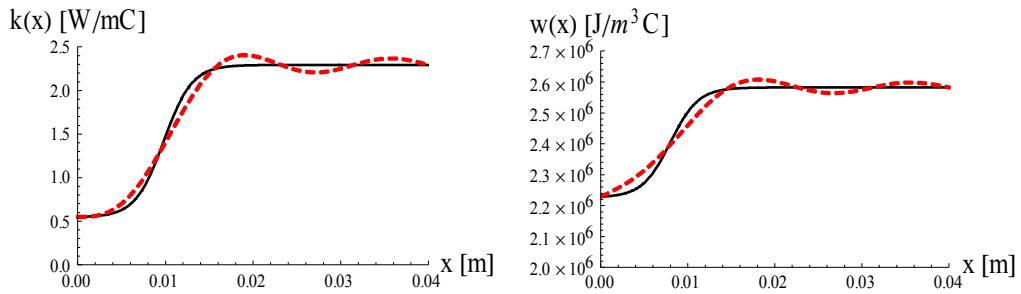
As figuras 6.19.a-c ilustram o comportamento da distribuição de concentração alem das funções de capacidade e condutividade térmicas empregadas na geração dos dados experimentais simulados.

O fluxo de calor prescrito neste problema também foi considerado como tendo um comportamento abrupto na coordenada espacial, como dado pela equação (6.3), mas usando  $x_c=0.5 L_x$  e o argumento  $\gamma=100$ , que praticamente reproduz uma função degrau. Os dois patamares da função fluxo de calor foram considerados como apresentado na tabela 6.10,  $q_0=0$  e  $q_L=q_w$ . Nesta fase do presente trabalho,  $q_w$  não é estimado devido à dependência linear resultante com os demais parâmetros remanescentes na estimativa. Optou-se então por dividir os parâmetros pelo valor de  $q_w$ , de modo que depois de se obter as estimativas, os parâmetros procurados são então multiplicados pelo valor de  $q_w$  e sua respectiva incerteza.

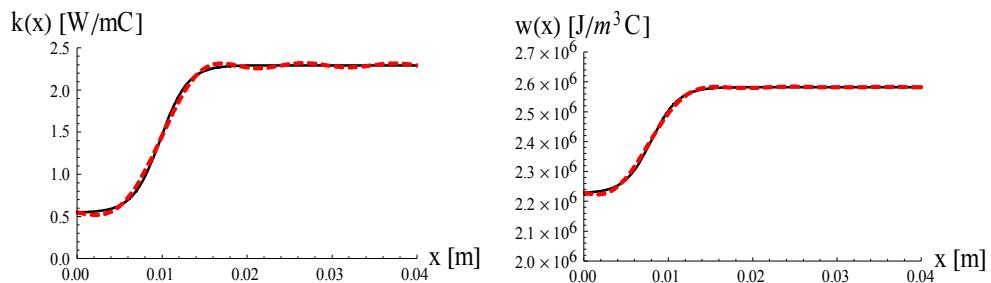


**Figura 6.19 – Variação espacial da (a) concentração de partículas na matriz, (b) capacidade térmica, (c) condutividade térmica, de acordo com os parâmetros apresentados na tabela 6.10.**

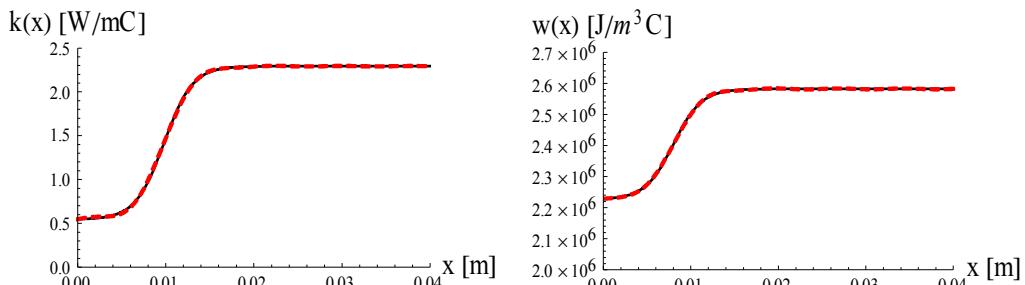
Na abordagem inversa proposta, a ordem de truncamento nas expansões da capacidade e da condutividade térmicas,  $N_w$  e  $N_k$ , controlam o número de parâmetros a serem estimados. Neste sentido, uma análise da convergência das expansões de  $w(x)$  e  $k(x)$ , eqs.(23b,c), é apresentada nas figuras 6.20.a-c, para diferentes ordens de truncamento,  $N_w$  e  $N_k = 4, 7$  e  $10$ . Pode-se observar que com o aumento da ordem de truncamento, melhora-se significativamente a concordância entre a função expandida e a função exata. Para a ordem de truncamento mais baixa,  $N_w$  e  $N_k = 4$ , ainda percebe-se alguma oscilação em torno da função exata, mas para  $N_w$  e  $N_k = 7$  já se consegue uma boa aderência entre as funções expandidas e exatas, e para  $N_w$  e  $N_k = 10$  praticamente tem-se a concordância plena entre as funções.



(a)  $N_w$  e  $N_k = 4$



(b)  $N_w$  e  $N_k = 7$



(c)  $N_w$  e  $N_k = 10$

**Figura 6.20 – Analise da convergência das expansões da condutividade e da capacidade térmicas**

(linha solida – função exata, linha pontilhada – função expandida)

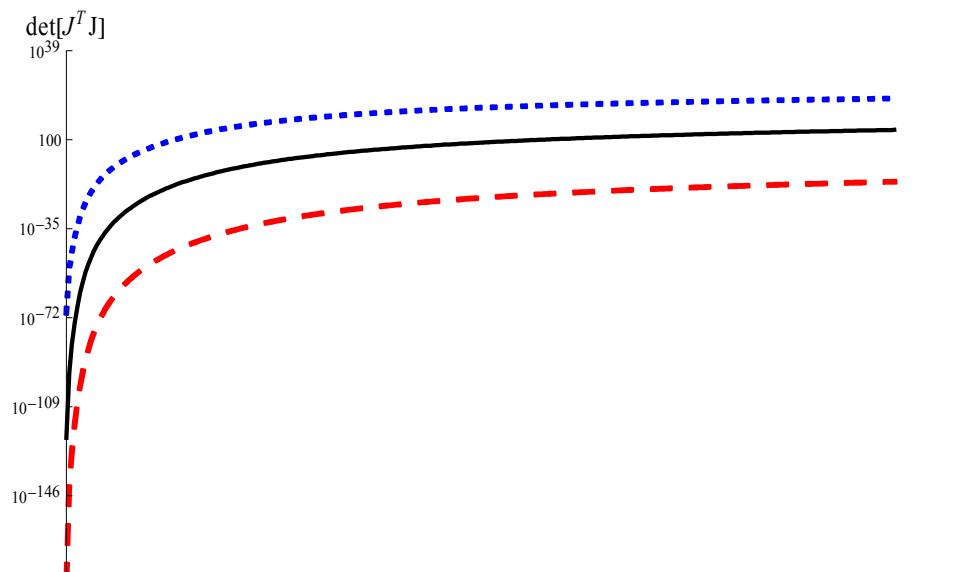
a)  $N_w$  e  $N_k = 4$ , b)  $N_w$  e  $N_k = 7$ , c)  $N_w$  e  $N_k = 10$ ,

Antes de se iniciar o procedimento de solução do problema inverso, analisou-se o determinante da matriz de informação  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , para o caso de se variar o número de parâmetros envolvidos na estimativa para um número fixo de medidas espaciais e uma freqüência fixa de medidas no tempo (figura 6.21.a). Em seguida, avaliou-se o comportamento do determinante devido à variação do número de medidas ao longo do domínio espacial para um número fixo de parâmetros a serem estimados (figura 6.21.b).

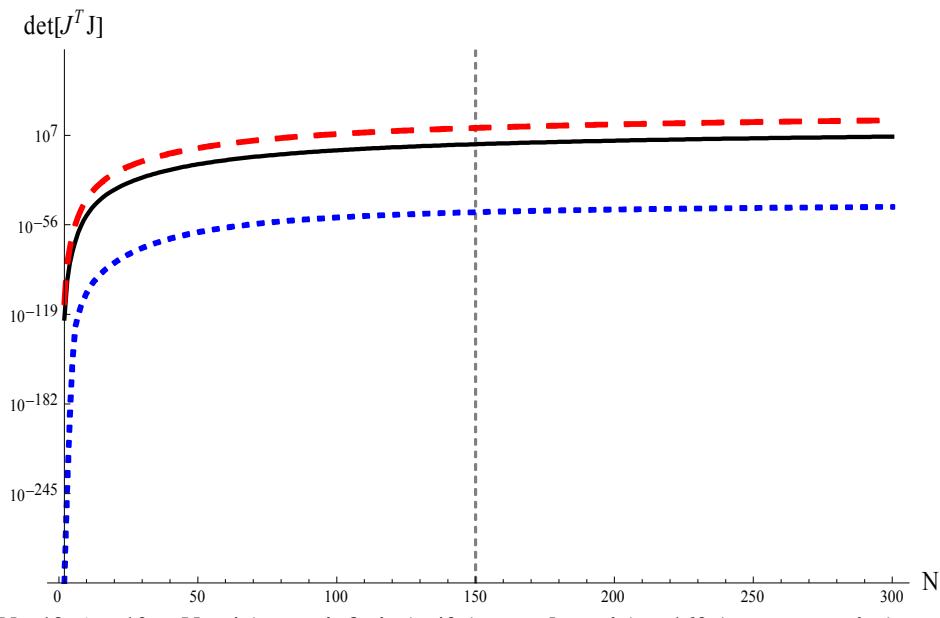
A figura 6.21.a mostra a evolução no tempo do determinante da matriz de informação para um total de 12 mil medidas sendo ( $N_x=40$  ao longo do domínio espacial e

$N_t=300$  no tempo). As três curvas, de baixo para cima, representam um número crescente de parâmetros envolvidos na estimativa,  $N_p=13, 19$  e  $25$ , que correspondem respectivamente a  $N_w$  e  $N_k = 4, 7$  e  $10$  mais os dois valores dos contornos de cada propriedade presentes nos filtros das expansões, além de “ $d$ ”. Claramente, com o aumento gradual no número de parâmetros, tem-se um decréscimo de algumas ordens de grandeza do valor do determinante, como ilustrado pelos seus valores no fim da escala temporal ( $1.7427 \times 10^{15}$ ,  $5.36019$ , e  $5.39711 \times 10^{-23}$ ), respectivamente para  $N_p=13, 19$  e  $25$ , afetando assim o condicionamento do processo de estimativa.

A figura 6.21.b apresenta o comportamento do determinante da matriz de informação para um número variável de medidas espaciais igualmente espaçadas ao longo do domínio ( $N_x=160, 40$  e  $4$ , de cima para baixo), para o caso de uma estimativa envolvendo dezenove parâmetros,  $N_p=19$ . O menor valor de  $N_x$  considerado refere-se a uma situação onde seriam empregadas técnicas de medida de temperatura tradicionais, como por exemplo termopares, enquanto que os valores mais altos representariam, por exemplo, o emprego de técnicas termográficas. O determinante da matriz de informação tem seu valor reduzido sensivelmente à medida que se tem uma redução do número de medidas espaciais, ( $1.4734 \times 10^{12}$ ,  $5.36019$ , e  $8.10324 \times 10^{-48}$ , para  $N_x=160, 40$  e  $4$  respectivamente).



(a)  $N_x=40, \Delta t=10\text{s}, N_p=13$  (curva superior),  $19$  (curva do meio) and  $25$  (curva inferior)



(b)  $N_p=19$ ,  $\Delta t=10$  s,  $N_x=4$  (curva inferior), 40 (curva do meio), e 160 (curva superior) sensores.

**Figura 6.21 – Evolução do determinante da matriz de informação para diferentes números de medidas espaciais, temporais e número de parâmetros envolvidos nas estimativas:**

- (a)  $N_x=40$  sensores,  $\Delta t=10$  s, ( $N_p=13, 19$  e  $25$  parâmetros);
- (b)  $N_p=19$  parâmetros,  $\Delta t=10$  s e  $N_x=4, 40$ , e  $160$  sensores.

Os dados experimentais simulados foram gerados com uma incerteza padrão no valor da temperatura de  $0.1^\circ\text{C}$ ,  $0.5^\circ\text{C}$  e  $1^\circ\text{C}$ , a partir da solução do problema direto computado com 50 termos na expansão da temperatura ( $NT=50$ ) e 14 termos na expansão das propriedades ( $N_w=N_k=14$ ). As análises inversas subseqüentes foram realizadas com 15 termos na expansão da temperatura, de maneira a evitar-se o chamado crime inverso [Kaipio e Somersalo (2004)]. Baseado nas análises de sensibilidade apresentadas anteriormente, realizou-se estimativas para os casos de  $N_p=13$  e  $19$ , respectivamente  $N_w=N_k=4$  e 7 termos na expansões da capacidade e da condutividade térmicas, para o caso de  $N_x=40$  medidas espaciais e  $N_t=300$  medidas no tempo.

Da mesma forma como apresentado na seção anterior, a definição dos limites máximos e mínimos é uma etapa crucial no procedimento de estimativa, uma vez que se tem uma informação física dos valores máximos e mínimos para as propriedades, e a partir destes valores define-se os limites superiores e inferiores para os coeficientes de suas respectivas expansões. Todavia, como os valores das propriedades nos contornos não são conhecidos, ou seja, são estimados juntamente com os demais parâmetros, faz-se necessário a definição

destes limites de maneira bem conservativa em função do índice de cada termo da expansão proposta, na forma:

para  $l = \text{par} \rightarrow (k_{x=0} = k_{x=L} = k_{\min} ; k_b = k_{\max})$ :

$$\bar{k}_{l,\max} = \frac{2\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.26.a)$$

$$\bar{k}_{l,\min} = -\frac{2\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.26.b)$$

para  $l = \text{impar} \rightarrow (k_{x=0} = k_{\min} ; k_{x=L} = k_{\max})$

$$\bar{k}_{l,\max} = \frac{2(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.27.a)$$

para  $l = \text{impar} \rightarrow (k_{x=L} = k_{\min} ; k_{x=0} = k_{\max})$

$$\bar{k}_{l,\min} = \frac{-\sqrt{2}(k_{\max} - k_{\min})}{l\pi\sqrt{1/L}} \quad (6.27.b)$$

Para a estimativa dos intervalos de máximo e mínimo dos coeficientes de  $k(x)$  e  $w(x)$ , adotou-se como limite superior a condutividade e a capacidade térmica da partícula,  $w_{\max}(x) = w_d$  e  $k_{\max}(x) = k_d$ , e como limite inferior a condutividade e a capacidade térmica da matriz polimérica,  $w_{\min}(x) = w_m$  e  $k_{\min}(x) = k_m$ . Poder-se-ia ter utilizado alguns dos modelos anteriormente discutidos como limites mínimos e máximos de modo a reduzir o intervalo de procura  $[w_{\min}, w_{\max}]$  e  $[k_{\min}, k_{\max}]$ , todavia, optou-se por trabalhar com intervalos mais dilatados de forma a desafiar o método e a abordagem aqui adotados.

A estimativa inicial para os coeficientes de  $k(x)$  e  $w(x)$  foram escolhidos de modo a considerar uma função inicialmente constante dada pelo valor médio entre os limites superiores e inferiores para cada parâmetro. A tabela 6.11 resume os valores máximos, mínimos, iniciais e o passo de procura pelos parâmetros candidatos, para os 19 parâmetros a serem estimados.

**Tabela 6.11 – Valores exatos, iniciais, passo de procura e limites dos intervalos usados na solução inversa.**

Parâmetro	Exato	Inicial	Passo	$P_{min}$	$P_{max}$
$h_{ef}$	16.694	18.364	0.0334	10.	20.
$k_{x=0}$	0.54897	0.60386	0.00220	0.545	5.7856
$k_{x=L}$	2.2929	2.5221	0.00909	0.545	5.7856
$\bar{k}_1$	0.10972	0.12069	0.000455	-0.9436	0.9436
$\bar{k}_2$	0.00204	0.00225	4.1668x10 <sup>-6</sup>	-0.2359	0.2359
$\bar{k}_3$	-0.02825	-0.03108	0.000111	-0.3145	0.3145
$\bar{k}_4$	-0.02661	-0.02927	0.000122	-0.1180	0.1180
$\bar{k}_5$	-0.01328	-0.01461	0.0000443	-0.1887	0.1887
$\bar{k}_6$	-0.00107	-0.00118	1.7004x10 <sup>-6</sup>	-0.07864	0.07864
$\bar{k}_7$	0.00485	0.00534	0.0000185	-0.1348	0.1348
$w_{x=0}$	2.2288x10 <sup>6</sup>	2.4517x10 <sup>6</sup>	4457.56	2.226x10 <sup>6</sup>	2.938x10 <sup>6</sup>
$w_{x=L}$	2.5823x10 <sup>6</sup>	2.8405x10 <sup>6</sup>	5161.94	2.226x10 <sup>6</sup>	2.938x10 <sup>6</sup>
$\bar{w}_1$	25047.5	27552.2	50.516	-128155.	128155.
$\bar{w}_2$	4370.18	4807.2	8.6067	-32038.7	32038.7
$\bar{w}_3$	-2701.11	-2971.23	5.3624	-42718.2	42718.2
$\bar{w}_4$	-4449.02	-4893.93	9.3753	-16019.3	16019.3
$\bar{w}_5$	-3613.83	-3975.21	6.9235	-25630.9	25630.9
$\bar{w}_6$	-1955.27	-2150.79	3.6800	-10679.6	10679.6
$\bar{w}_7$	-512.218	-563.44	1.0244	-18307.8	18307.8

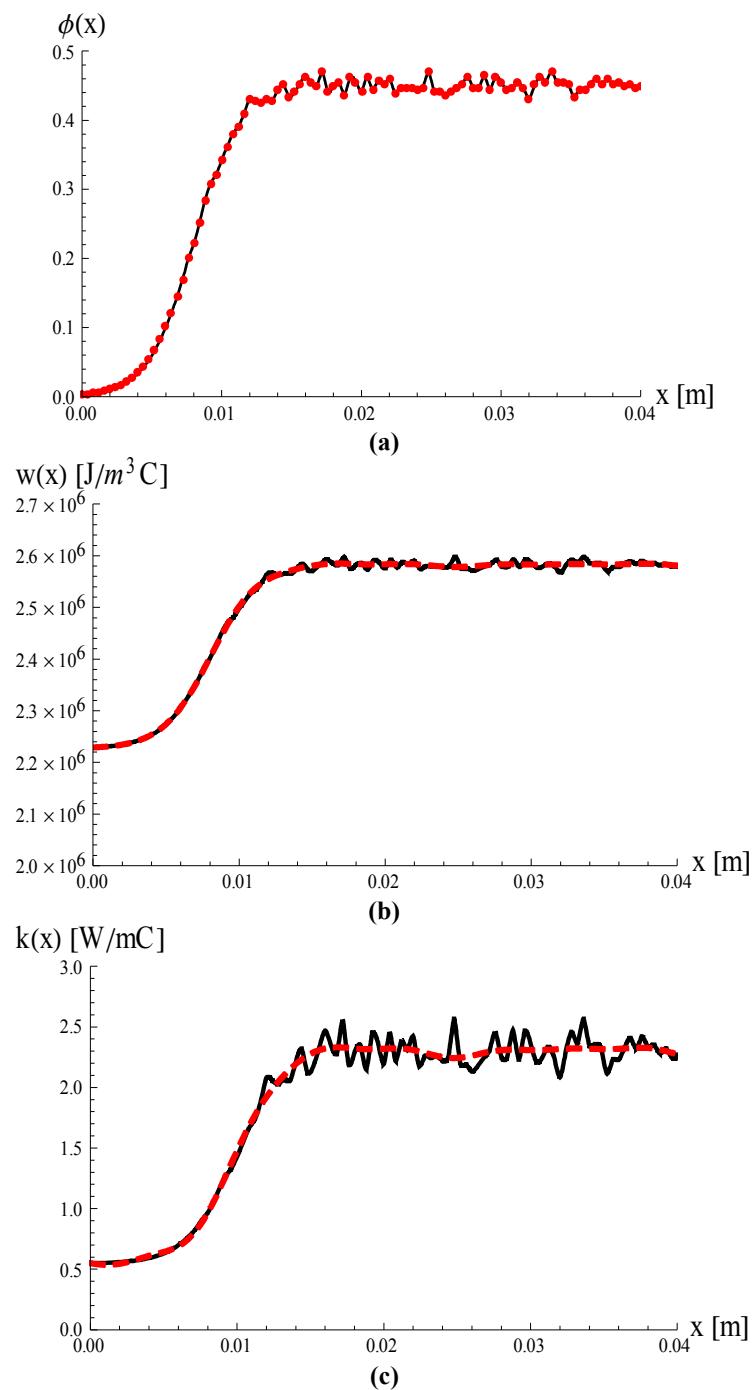
Como informação *a priori* para as estimativas das propriedades, considerou-se que fosse possível ter uma medida da distribuição da concentração volumétrica de partículas ao longo do domínio espacial, assumindo que esta concentração poderia ter sido medida com um desvio padrão de até 20% do valor exato, o que levaria a uma incerteza de mais de 50%

no seu valor absoluto (figura 6.22.a). Através das medidas de concentração seria então possível construir *prioris* para a capacidade térmica a partir da teoria de misturas e para a condutividade térmica a partir do emprego de algum dos modelos discutidos anteriormente, como por exemplo, Lewis-Nielsen. As *prioris* para os coeficientes das expansões de cada propriedade seriam então posteriormente determinadas a partir da expansão das *prioris* das propriedades. As figuras 6.22.b-c apresentam as propriedades obtidas para a distribuição de concentração com 20% de desvio padrão (linha sólida) e as suas respectivas expansões para um número de termos nas séries de  $N_w$  e  $N_k = 7$  (linha pontilhada).

Cinco casos testes, summarizados na tabela 6.12, foram estudados de modo a validar e demonstrar a metodologia de solução proposta pelo presente trabalho.

O caso 1 foi escolhido para validação do algoritmo implementado, uma vez que o número de termos na expansão para geração dos dados experimentais e na solução do problema inverso para este caso foram escolhidos iguais, ou seja, 15 termos na expansão da temperatura ( $NT=15$ ) e 4 termos nas expansões das propriedades ( $N_w$  e  $N_k = 4$ ,  $N_P=13$  parâmetros). Para os casos 2 e 3, os dados experimentais simulados foram gerados com 50 termos na expansão da temperatura e 14 termos na expansão das propriedades e uma distribuição da concentração com desvio padrão de 20%, mantendo-se para a solução do problema inverso um número de termos nas expansões da temperatura e das propriedades reduzido ( $NT=15$  e  $N_w$  e  $N_k = 4$ , tal que  $N_P=13$  parâmetros).

Para o caso 1, considerou-se então que as temperaturas teriam uma pequena incerteza, de  $0.1^\circ\text{C}$ , e que as medidas da distribuição de concentração não teriam nenhum erro, de modo que as *prioris* normais para os coeficientes foi centrada nos seus respectivos valores exatos. Todavia, os desvios padrão considerados para as *prioris* normais das propriedades foi de 40% do valor exato. Já para o coeficiente de transferência de calor, pode-se ter quase sempre uma idéia da sua ordem de grandeza através de correlações disponíveis na literatura, e por isso considerou-se que seria possível oferecer uma *priori* normal também para este parâmetro, centrado no valor obtido por uma destas correlações. Para este primeiro caso de validação utilizou-se então para o coeficiente de transferência de calor uma distribuição normal centrada no seu valor exato e com um desvio padrão de 20% da sua média.



**Figura 6.22 – Distribuições *a priori*:** (a) distribuição da concentração para um desvio padrão de 20%  
(b) capacidade térmica e (c) condutividade térmica  
(Linha solida) propriedade calculada a partir de (a) e (Linha pontilhada) propriedade expandida.

O caso 3 é essencialmente igual ao caso 2, aumentando-se contudo a incerteza das medidas de temperaturas para 0.5°C. Os casos 4 e 5, por sua vez, levam em consideração a solução do problema inverso para um número maior de parâmetros ( $N_P=19$ , com  $N_w=N_k=7$ ), mantendo-se uma incerteza na temperatura de 0.5°C. A diferença entre estes dois últimos casos deve-se aos diferentes valores para o desvio padrão empregados em cada uma das análises.

**Tabela 6.12 – Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.**

Dados	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$NT, N_w, N_k$ (dados simul.)	15, 4, 4	50, 14, 14	50, 14, 14	50, 14, 14	50, 14, 14
$NT, N_w, N_k$ (sol.inversa)	15, 4, 4	15, 4, 4	15, 4, 4	15, 7, 7	15, 7, 7
$N_P$ (sol.inversa)	13	13	13	19	19
Passo	1%	1%	1%	1%	1%
Desvio Padrão (concentração)	Não	Sim 20%	Sim 20%	Sim 20%	Sim 20%
Desvio Padrão ( $k, w, h_e$ )	40%, 40%, 20%	40%, 40%, 20%	40%, 40%, 20%	40%, 40%, 20%	40%, 20%, 20%
Incerteza Exp. (Temperatura)	0.1 °C	0.1 °C	0.5 °C	0.5 °C	0.5 °C

Adotando-se um período de aquecimento de 10 mil estados para as cadeias de Markov, em um total de 50 mil estados para cada cadeia, tem-se que as estimativas dos parâmetros podem ser dadas pelas estatísticas amostrais dos 40 mil estados remanescentes. A tabela 6.13 sumariza estas estimativas encontradas para cada um dos parâmetros nos cinco casos analisados.

Tabela 6.13 – Parametros estimados para os 5 casos analisado.

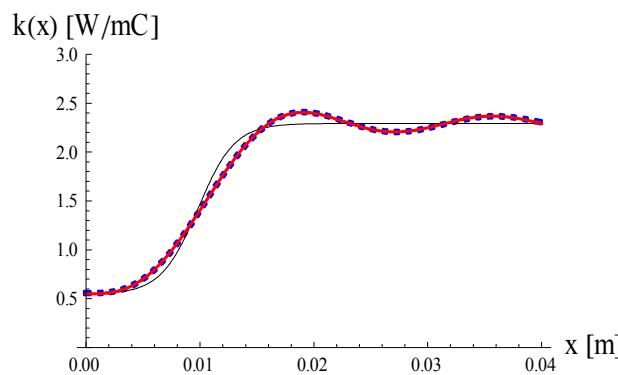
P	Exato	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$h_{ef}$	16.694	16.690	16.686	16.676	16.692	16.692
$k_{x=0}$	0.54897	0.55742	0.54552	0.55593	0.56523	0.57677
$k_{x=L}$	2.2929	2.3041	2.4129	2.4219	2.3023	2.3359
$\bar{k}_1$	0.10972	0.10801	0.10061	0.09989	0.10723	0.10327
$\bar{k}_2$	0.00204	0.00225	0.00231	0.00230	0.00205	0.00232
$\bar{k}_3$	-0.02825	-0.02912	-0.02654	-0.02662	-0.02969	-0.03080
$\bar{k}_4$	-0.02661	-0.02636	-0.03320	-0.03368	-0.02728	-0.02658
$\bar{k}_5$	-0.01328	-	-	-	-0.01275	-0.01351
$\bar{k}_6$	-0.00107	-	-	-	-0.00111	-0.00105
$\bar{k}_7$	0.00485	-	-	-	0.00580	0.00589
$w_{x=0}$	$2.229 \times 10^6$	$2.234 \times 10^6$	$2.239 \times 10^6$	$2.277 \times 10^6$	$2.281 \times 10^6$	$2.247 \times 10^6$
$w_{x=L}$	$2.582 \times 10^6$	$2.587 \times 10^6$	$2.5848 \times 10^6$	$2.573 \times 10^6$	$2.618 \times 10^6$	$2.595 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	25047.5	24264.8	23953.3	22037.0	15923.9	22196.6
$\bar{w}_2$	4370.18	4928.48	4983.48	3290.25	4892.01	5009.25
$\bar{w}_3$	-2701.11	-3156.08	-2968.88	-3051.92	-2405.1	-2622.2
$\bar{w}_4$	-4449.02	-5132.59	-5029.64	-3746.84	-4654.52	-4857.93
$\bar{w}_5$	-3613.83	-	-	-	-3912.02	-4337.8
$\bar{w}_6$	-1955.27	-	-	-	-2367.64	-2283.89
$\bar{w}_7$	-512.22	-	-	-	-610.09	-529.54

Como era esperado, o caso 1 apresentou as melhores estimativas uma vez que se tratava de um caso de validação do algoritmo computacional construído. Para os casos 2 e 3 evitou-se o crime inverso e consequentemente os resultados das estimativas não estão tão aderentes aos valores exatos como no caso 1. Todavia, mesmo com o aumento da incerteza na temperatura de 0.1°C para 0.5°C, percebe-se que ainda sim tem-se uma boa estimativa dos parâmetros. Ambos os casos, 4 e 5, envolvem estimativas com uma incerteza na temperatura de 0.5°C e um número maior de parâmetros e mesmo assim conseguem recuperar os valores dos parâmetros de maneira satisfatória, percebendo-se uma melhora na estimativa nos parâmetros referente à capacidade térmica para o caso 5, em que se utiliza de um desvio padrão reduzido para esta propriedade.

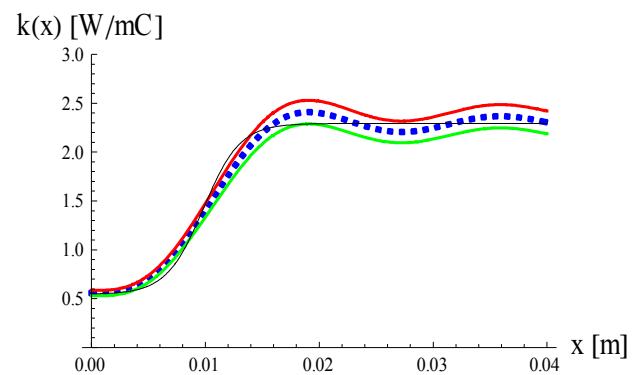
As figuras 6.23 a 6.27 sumarizam a reconstrução das duas propriedades a partir dos parâmetros estimados apresentados na tabela 6.13 acima e comparam com a função exata (linha sólida preta), com a função exata expandida com mesmo numero de termos usado na estimativa inversa (curva solida vermelha) e a função resconstruída a partir das estimativas (curva pontilhada em azul), com os seus respectivos intervalos de 99% de confiança para cada uma das propriedades nos cinco casos analisados.

As figuras 6.23.a-d vem confirmar graficamente o que já era esperado e que já havia sido observado anteriormente pela análise da tabela 4, de que o caso 1 tem a melhor aderência entre as funções exatas e estimadas.

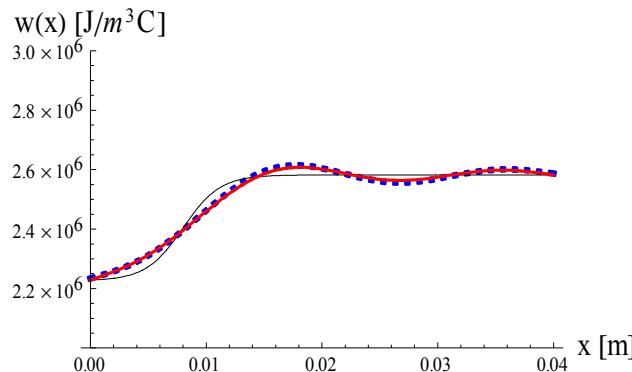
As figuras 6.24.a-d apresentam a comparação entre as funções exatas e estimadas para o caso 2, onde o crime inverso não foi cometido. Pode-se observar uma pequena divergência entre a função exata expandida e a função estimada próximo ao contorno  $x=L_x$  na estimativa da condutividade térmica, enquanto que na estimativa da capacidade térmica tem-se ainda uma boa concordância entre as funções.



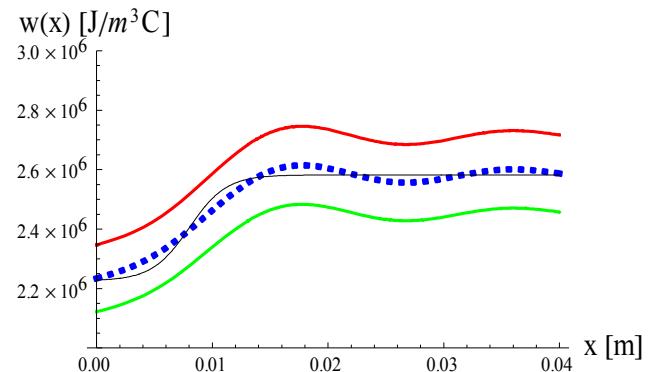
(a)



(b)



(c)

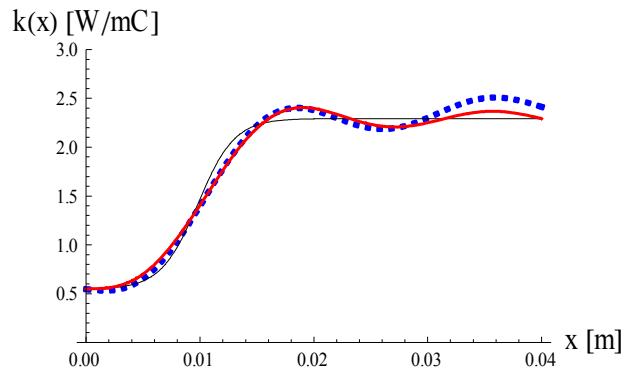


(d)

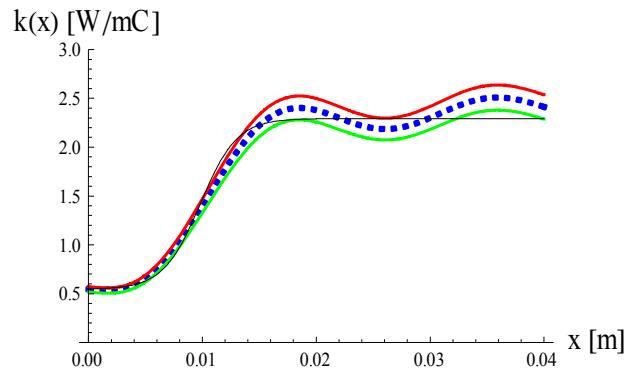
### Figuras 6.23.a-d –caso 1:

Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 4 termos (linha solida vermelha), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul);

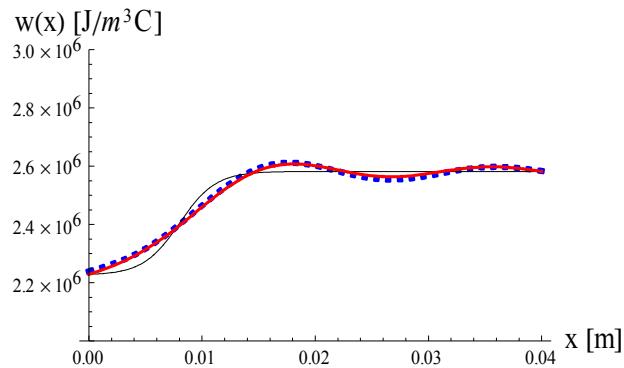
b)  $k(x)$  e d)  $w(x)$



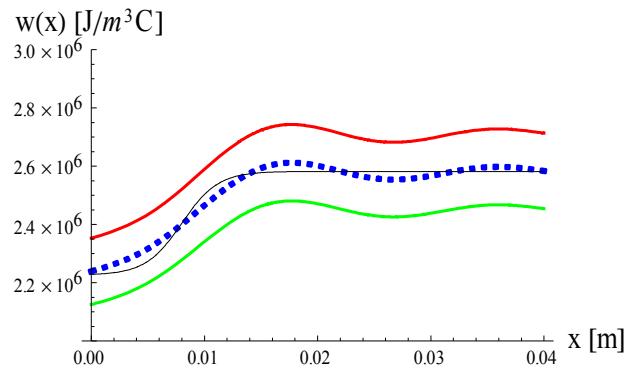
(a)



(b)



(c)



(d)

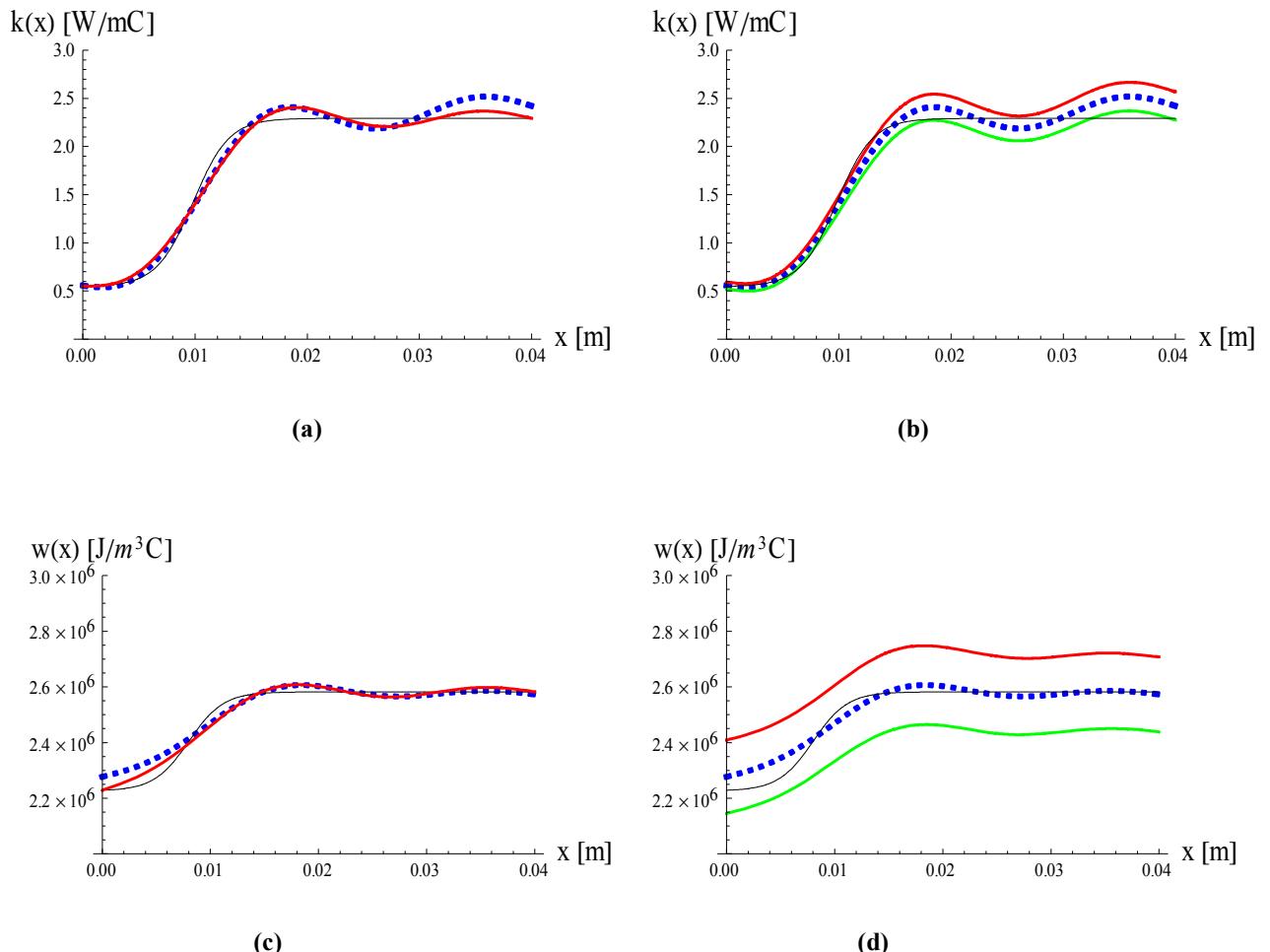
**Figuras 6.24.a-d –caso 2:**  
a)  $k(x)$  e c)  $w(x)$

**Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 4 termos (linha solida vermelha), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul);**

b)  $k(x)$  e d)  $w(x)$

**Função exata (linha sólida preta), função estimada com 4 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99% de confiança máximos e mínimos;**

Pelas figuras 6.25.a-d referentes ao caso 3, pode-se observar que novamente tem-se um pequeno desvio na estimativas da condutividade térmica no contorno  $x=L_x$  e, além disso, a capacidade térmica tem um comportamento um pouco menos concordante do que no caso 2 próximo ao contorno  $x=0$ , contudo ainda apresentando um intervalo de confiança suficientemente amplo.



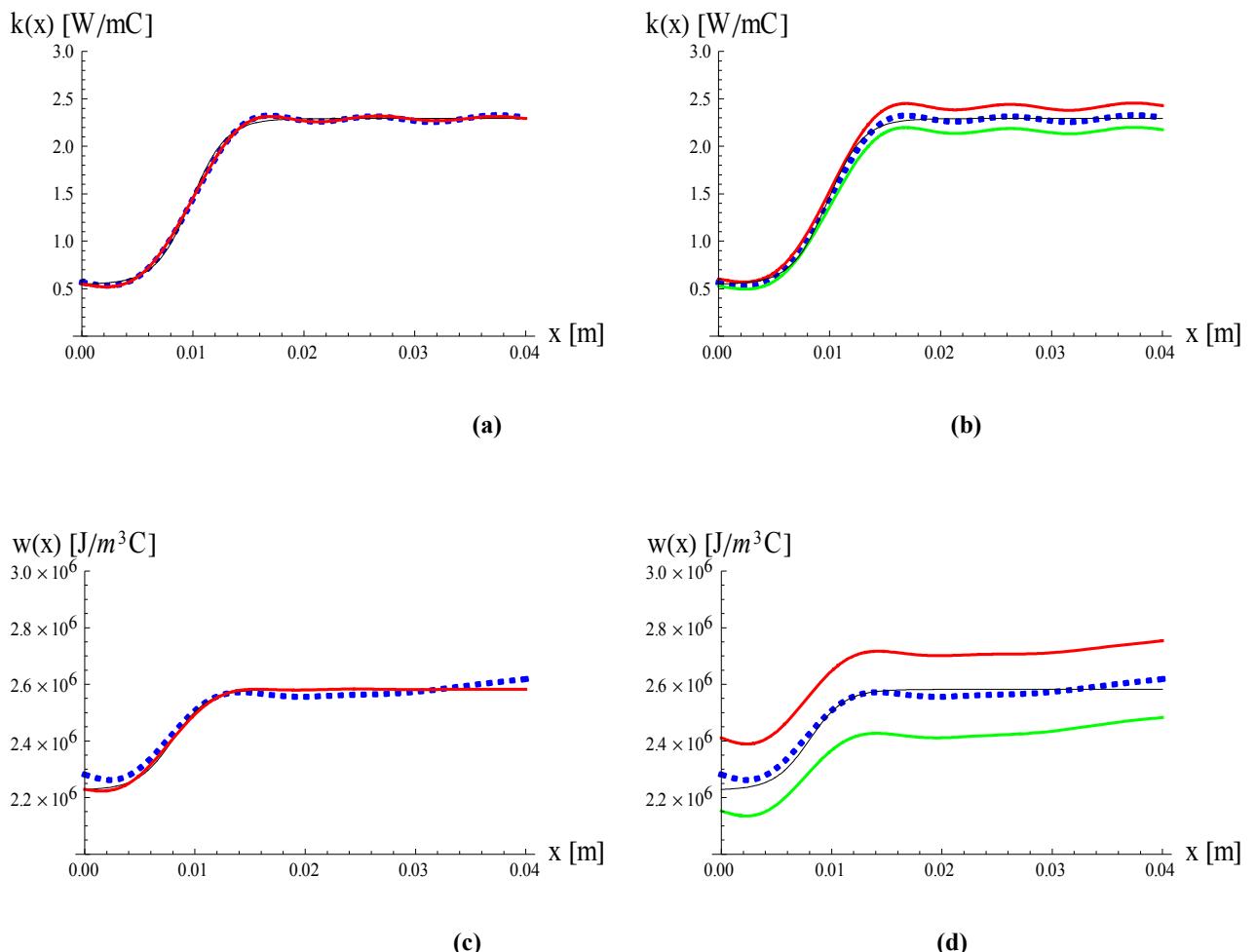
**Figuras 6.25.a-d –caso 3:**  
**a)  $k(x)$  e c)  $w(x)$**

**Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha solida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);**

**b)  $k(x)$  e d)  $w(x)$**

**Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99%de confiança máximos e mínimos;**

As figuras 6.26.a-d, relativas ao caso 4, ilustram o comportamento das propriedades com 7 termos na série, que claramente oferecem uma melhor concordância com a função original (linha sólida preta). Para este caso, foi testado um desvio padrão relativamente alto 40%, de modo a desafiar a abordagem aqui proposta, e pode-se notar pela análise destas figuras que o resultado das estimativas conseguidas foram bem satisfatórios, mesmo para este caso mais severo.

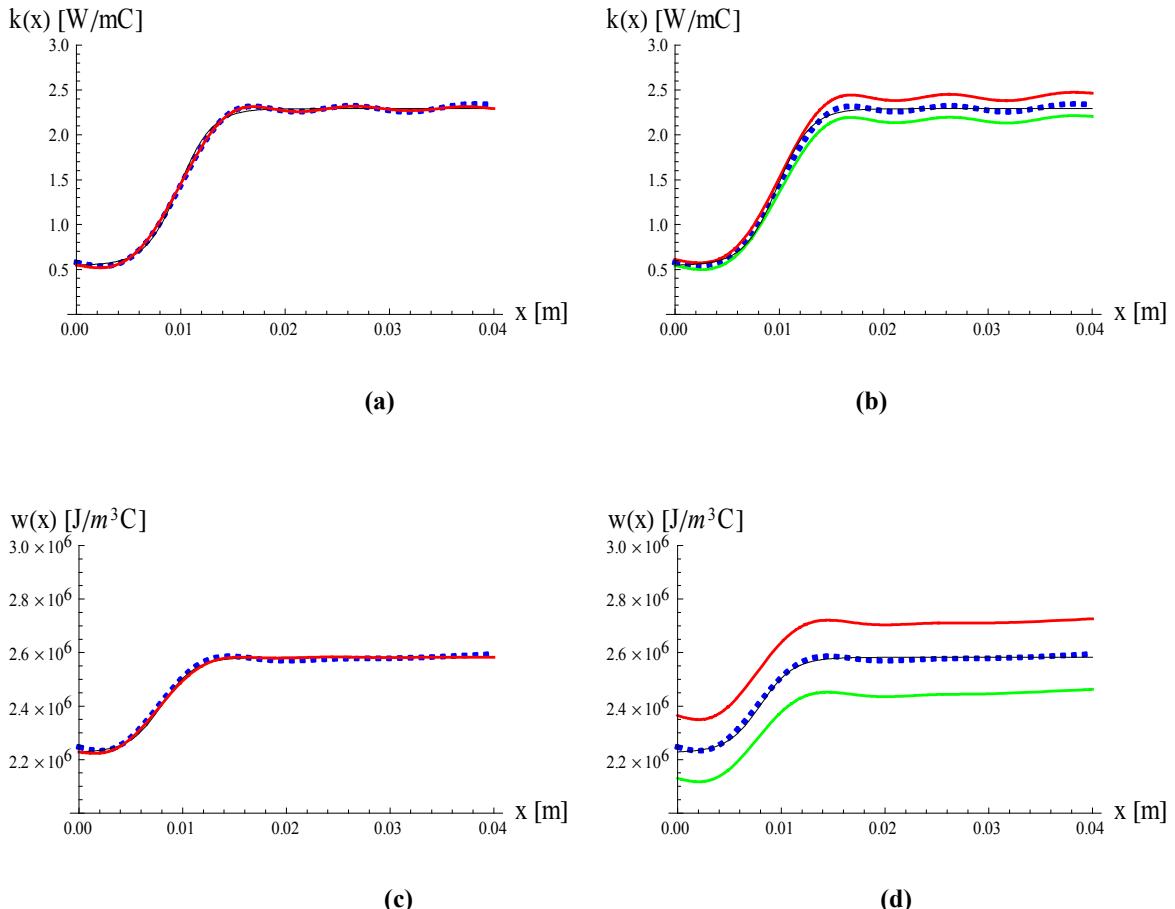


**Figuras 6.26.a-d –caso 4:**  
**a)  $k(x)$  e c)  $w(x)$**

**Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha sólida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);  
b)  $k(x)$  e d)  $w(x)$**

**Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99% de confiança máximos e mínimos;**

O caso 5, figuras 6.27.a-d, resulta em estimativas bastante acuradas mesmo para um número maior de parâmetros. Comparando as figuras 6.27.c e 6.26.c percebe-se a melhora das estimativas da capacidade térmica para o caso 5 como uma consequência da redução do desvio padrão considerado para esta propriedade neste último caso. A estimativa da condutividade térmica apresentou-se satisfatoriamente concordante em ambos os casos 4 e 5, enquanto que para o coeficiente de transferência de calor efetivo obteve-se estimativas bem acuradas para todos os 5 casos analisados.



**Figuras 6.27.a-d –caso 5:**

a)  $k(x)$     e) c)  $w(x)$

Função exata (linha sólida preta), função exata expandida com 7 termos (linha sólida vermelha), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul);  
b)  $k(x)$     d)  $w(x)$

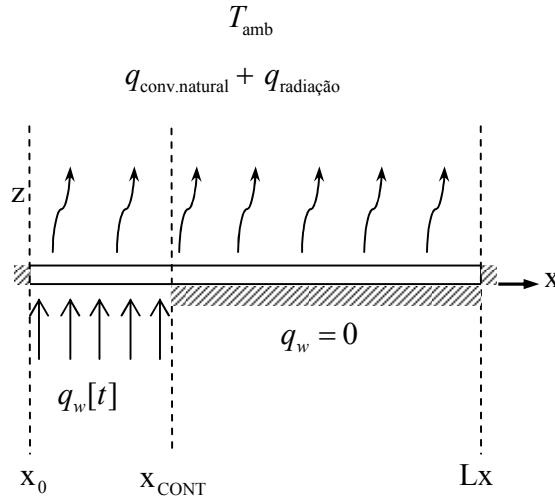
Função exata (linha sólida preta), função estimada com 7 termos (linha pontilhada azul) e intervalos com 99% de confiança máximos e mínimos;

### **6.2.3. Estimativa Simultânea da Capacidade Térmica e da Condutividade Térmica Variáveis no Campo Transformado**

Em seqüência à análise da seção anterior, buscou-se desafiar a metodologia de solução do problema inverso para estimativa simultânea das propriedades termofísicas, no tratamento de uma situação com variação acentuada das propriedades (FGM), na forma do comportamento exponencial com a variável espacial apresentada na seção de solução do problema direto, sem informação a priori da distribuição espacial das concentrações volumétricas das partículas. Tendo em vista a dificuldade encontrada na inversão a partir da utilização dos campos de temperatura, quer na qualidade das estimativas quer no custo computacional requerido ao se utilizar um grande número de sensores e medidas experimentais, surgiu a idéia de se empregar a temperatura transformada como medida experimental na expressão da versossimilhança. Desta forma, os dados experimentais referentes a todos os sensores seriam reduzidos a um conjunto bem menor de campos transformados, a cada medida na variável temporal. Ou seja, a transformação integral dos resultados experimentais disponíveis ao longo da variável espacial, permite a compactação dos dados em um número de campos transformados que seja suficiente para representar o campo de temperaturas garantindo convergência da expansão com erro inferior ao das próprias medidas experimentais. Assim, obteve-se a identificação de parâmetros pretendida, dentro dos limites de precisão desejados e a um custo computacional compatível com a dificuldade do problema tratado, como descrito a seguir.

O problema físico a ser tratado diz respeito a uma placa térmicamente fina de espessura  $L_z=1mm$  sendo aquecida por uma resistência elétrica em uma das faces, em apenas uma porção  $x_{\text{CONT}} = \frac{L_x}{3}$  do seu comprimento total,  $L_x=12cm$ . Na face oposta considera-se uma perda de calor devido à convecção natural e radiação, e os demais contornos são considerados isolados. Modelou-se este problema físico como sendo um problema de condução de calor transiente unidimensional usando parâmetros concentrados na direção transversal, como formulado nas equações abaixo e apresentado esquematicamente na figura 6.28. Para as análises inversas que serão apresentadas a seguir assumiu-se conhecido o fluxo de calor oriundo da potência dissipada na resistência “ $q_{\text{inf}}$ ” e a variação espacial do fluxo de

calor  $q(x)$  e propõe-se fazer a estimativa simultânea da distribuição espacial da capacidade e da condutividade térmicas, da distribuição do coeficiente de transferência de calor efetivo e a dependência temporal do fluxo de calor, respectivamente,  $w(x)$ ,  $k(x)$ ,  $h_{ef}(x)$ ,  $f(t)$ .



**Figura 6.28 – Modelo físico estudado na estimativa simultânea no campo transformado**

$$w[x] \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k[x] \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \frac{h_{ef}[x]}{L_z} (T_m[x,t] - T_\infty) + \frac{q_w[x,t]}{L_z} \quad (6.28.a-d)$$

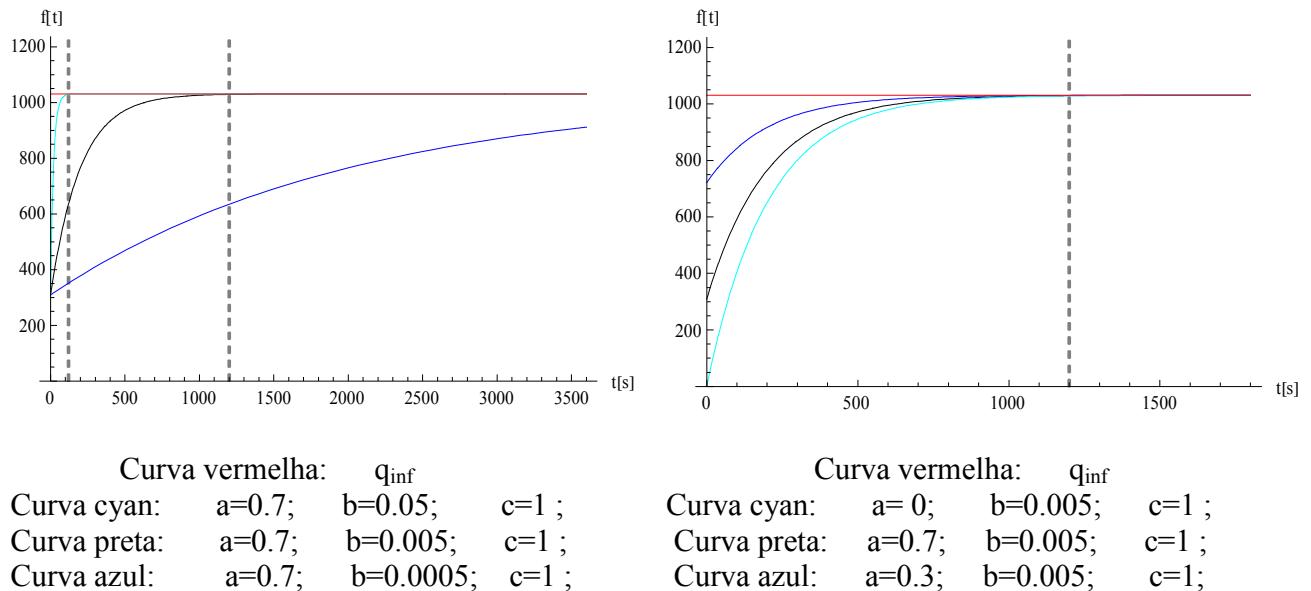
$$T_m[x,0] = T_\infty \quad \left. \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0$$

$$q_w[x,t] = q[x]f[t]$$

$$q[x] = \begin{cases} q_{\text{inf}} & 0 < x < \frac{L_x}{3} \\ 0 & \frac{L_x}{3} < x < L_x \end{cases} \quad f[t] = c - ae^{-bt} \quad (6.28.e-g)$$

Analizando-se o termo de geração, tem-se que a dependência temporal do fluxo de calor, na forma paramétrica adotada, depende dos parâmetros  $a, b, c$  em que “ $c$ ” é a fração do valor do fluxo de calor em regime permanente. As figuras 6.29.a-b abaixo fazem uma breve análise da influência destes valores no comportamento temporal do fluxo de calor.

Em ambas as análises, o parâmetro  $c$  assumiu o valor igual a 1, isso porque considerou-se que em regime permanente toda a potência dissipada pelo elemento de aquecimento (resistência elétrica) é fornecida à placa. A figura 6.29.a mostra, para um valor fixo do parâmetro “ $a$ ”, a influência de três ordens de grandeza diferentes para o parâmetro “ $b$ ”. A figura 6.29.b apresenta uma análise similar para um valor fixado de  $b$ , ou seja, o comportamento da função para três diferentes valores de “ $a$ ”.



**Figura 6.29.- Análise da dependência temporal do fluxo de calor;**

Para o termo de dissipação linear considerou-se a correlação do coeficiente de transferência de calor por convecção natural para fluxo de calor prescrito uniforme em placa plana horizontal, dada pelas eqs. (6.29.a-c) [Bejan (1993)], enquanto para a parcela da perda de calor por radiação considerou-se a aproximação de linearização dada pela equação (6.29.d), de modo que o coeficiente de transferência de calor efetivo apresentou a forma funcional em degrau da eq. (6.30), como ilustrado na figura 6.30.

Numero de Rayleigh:

$$Ra_{x_{\text{CONT}}} = \frac{g \beta q_{\text{inf}} (x_{\text{CONT}})^4}{k_{ar} v_{ar} \alpha_{ar}} \quad \therefore \quad \beta = \sqrt[3]{(T_{amb} + 273)}$$

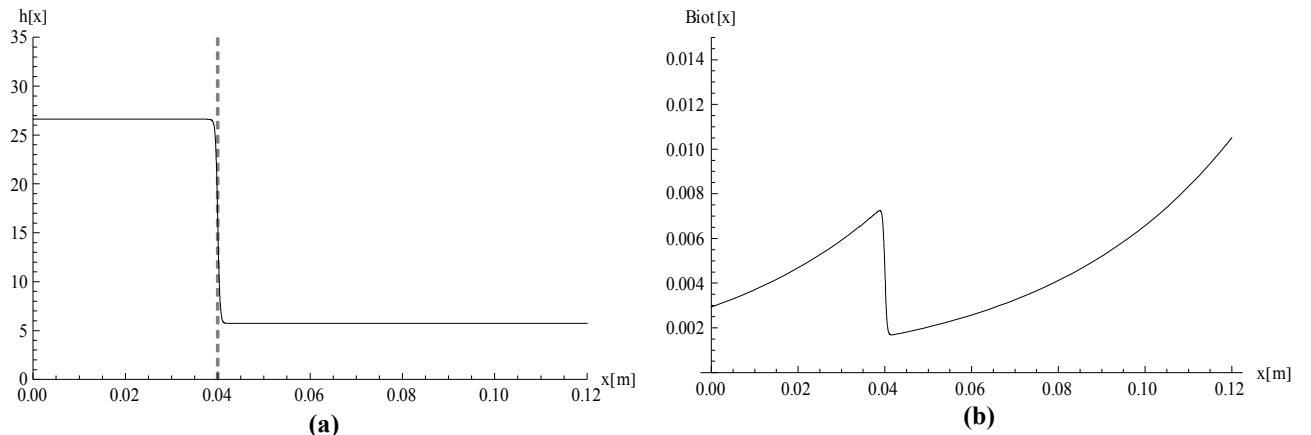
Numero de Nusselt ( $10^7 < Ra_{x_{\text{CONT}}} < 10^9$ ):

$$Nu_{x_{\text{CONT}}} = 0.15 \left( Ra_{x_{\text{CONT}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.29.\text{a-b})$$

Coef. Convecção Natural:

$$hc_{x_{\text{CONT}}} = \frac{k_{ar} Nu_{x_{\text{CONT}}}}{x_{\text{CONT}}} \rightarrow hc_{x_{\text{CONT}}} = 20.9 \frac{W}{m^2 C}$$

$$hr = 4\varepsilon\sigma (T_w + 273)^3 \quad \therefore \quad T_w = T_{amb} \rightarrow hr = 5.73 \frac{W}{m^2 C} \quad (6.29.\text{c-d})$$



**Figura 6.30.- Comportamento espacial do coeficiente de transferência de calor efetivo (a) e do número adimensional de Biot (b);**

Coef. Transferencia de Calor Efetivo:

$$h_{ef}(x) = \begin{cases} hc_{x_{\text{CONT}}} + hr & 0 < x < x_{\text{CONT}} \\ hr & x_{\text{CONT}} < x < L_x \end{cases} \quad (6.30)$$

Na presente análise do problema inverso considerou-se as propriedades termofísicas na forma de uma matriz polimérica (HDPE), com nanopartículas de óxido de alumínio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) dispersas na matriz, onde a variação espacial de partículas é descrita pela forma funcional de uma exponencial, considerando que em  $x=0$  tem-se apenas a matriz polimérica, ou seja 0% de partículas dispersas e em  $x=L_x$  tem-se 60% de concentração de partículas dispersas no meio.

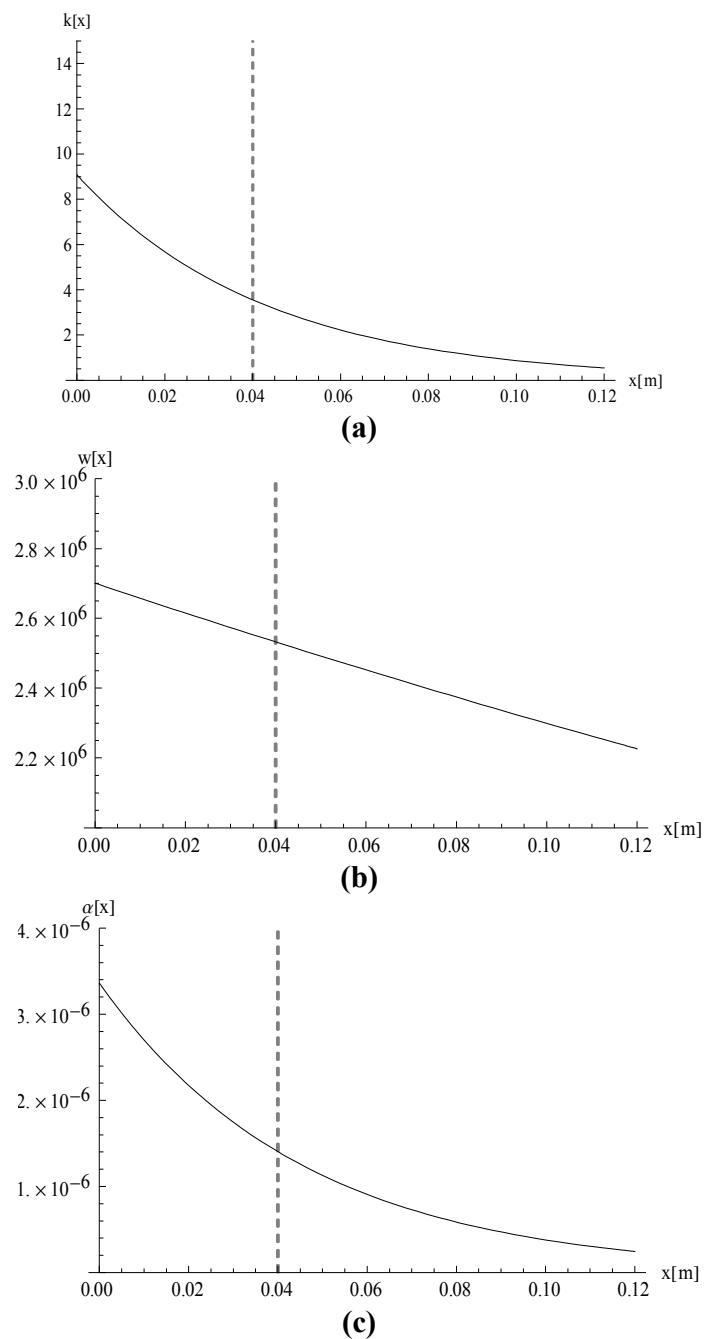
A matriz polimérica considerada tem capacidade e condutividade térmicas de  $w_m = 2.2264 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{C}$  e  $k_m = 0.545 \text{ W/mC}$ , respectivamente, enquanto que as partículas de óxido de alumínio tem propriedades dadas por  $w_p = 3.0172 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{C}$  e  $k_p = 36 \text{ W/mC}$ . Sendo assim, se utilizarmos a teoria de misturas para calcular a capacidade térmica e a correlação de Lewis-Nielsen [Lewis e Nielsen (1970)] para calcular a condutividade térmica, ambas sob uma concentração final de 60%, tem-se que em  $x=L_x$  a capacidade térmica é de  $w_{x=L_x} = 2.7008 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{C}$  e a condutividade térmica é de  $k_{x=L_x} = 9.078 \text{ W/mC}$ .

Sob a forma funcional de uma exponencial dada pelas equações (6.31.a,b) abaixo tem-se que o comportamento espacial das propriedades pode ser verificado nas figuras 6.31.a-c.

$$k(x) = k_0 \exp[2\beta \left(1 - \frac{x}{L_x}\right)] \quad w(x) = w_0 \exp[2\beta \left(1 - \frac{x}{L_x}\right)] \quad (6.31.\text{a-b})$$

$$\beta = 1.4064$$

$$\beta = 0.0966$$



**Figura 6.31.- Comportamento espacial do propriedades termofísicas  
(a)condutividade térmica; (b)capacidade térmica; (c)difusividade térmica;**

Como esta subseção trata de uma análise teórica de solução do problema inverso, utilizou-se de dados simulados de temperatura experimental ao longo do comprimento do domínio, no regime transiente. Tais medidas simuladas foram obtidas pela solução do problema direto através da especificação das funções e das distribuições das

propriedades termofísicas. As temperaturas simuladas foram então perturbadas com um erros Gaussianos aditivos, não-correlacionados de média zero e desvio padrão conhecido. Para a geração dos dados experimentais simulados e para as análises inversas subsequentemente apresentadas, empregou-se os valores apresentados na Tabela 6.14.

**Tabela 6.14 – Valores usados na geração dos dados experimentais simulados**

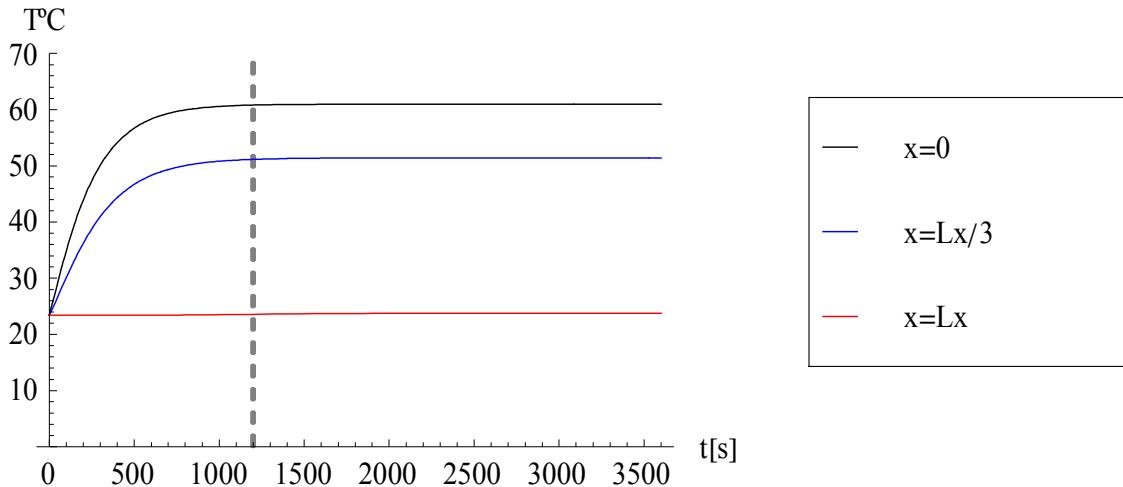
tfinal	3 600s	$\varepsilon$	0.97
$L_x$	0.12m	a	0.7
$L_y$	0.04m	b	0.005
$L_z$	0.001m	c	1
$x_{CONT}$	0.04m	$T(x, t=0)$	$T_{amb}=23.4^{\circ}C$

O perfil de temperatura resultante da solução do problema direto, com os valores dados pela Tabela 6.14, é apresentado nas figuras 6.32.a-b. Na figura 6.32.a tem-se a distribuição de temperatura para três diferentes posições na placa ao longo do tempo. Percebe-se que para toda a placa o regime permanente foi alcançado para tempos maiores que 1200 segundos. A figura 6.32.b apresenta o comportamento espacial da temperatura para diferentes tempos e pode-se observar o gradiente de temperatura que se forma ao longo da placa devido ao aquecimento desigual ao longo do seu comprimento. Para posições situadas próximas a  $x=L_x$ , opostas à região do aquecimento ( $x=0$  a  $x=x_{CONT}$ ), a placa permanece praticamente à temperatura ambiente.

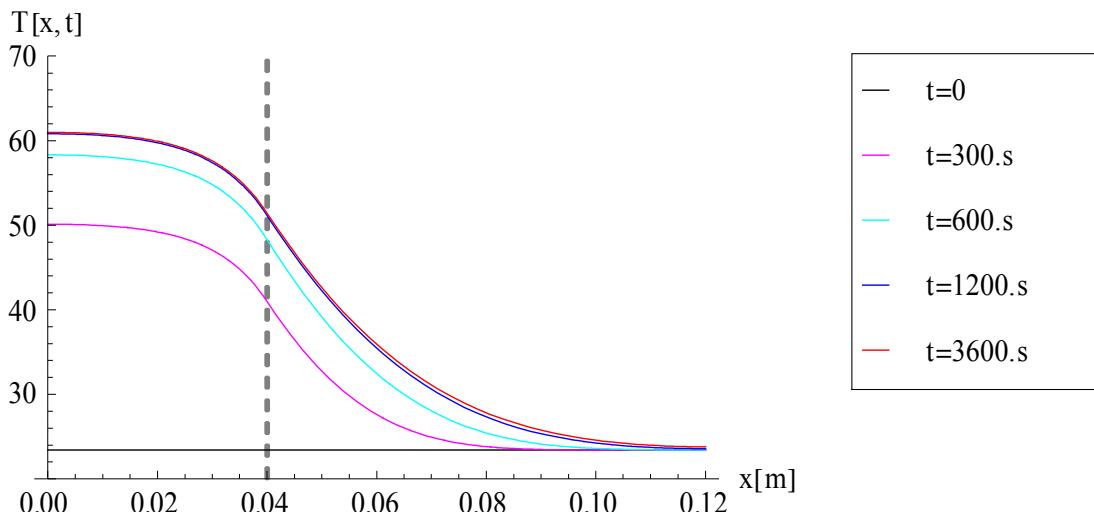
Antes de proceder à análise do problema inverso, realizou-se um estudo de convergência da solução direta via Transformação Integral, através da análise da convergência da expansão da temperatura. As tabelas 6.15.a-c apresentam as temperaturas obtidas com até 40 termos na expansão para três diferentes tempos (360s, 1200s e 3600s), respectivamente, em três diferentes posições da placa. Observando estas tabelas pode-se perceber uma convergência de até 4 dígitos significativos nos valores das temperaturas, para as posições e tempos analisados, com 40 termos na série.

Todavia, a utilização desta ordem de truncamento no procedimento de solução do problema inverso levaria a um custo computacional desnecessariamente alto. Desta forma, a ordem de truncamento empregada na solução do problema inverso foi escolhida de modo

que este número fosse suficientemente grande para garantir a convergência da expansão com um erro razoavelmente inferior ao das próprias medidas experimentais.



**Figura 6.32.a – Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa**



**Figura 6.32.b – Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos**

As figuras 6.33.a-c comparam graficamente a solução via Transformação Integral com 10 termos na expansão, com a solução obtida pela rotina do *Mathematica*, *NDSolve*, para três diferentes tempos, onde se percebe uma pequena oscilação da solução transformada para os tempos muito pequenos e uma melhor aderência entre as duas soluções para tempos maiores.

**Tabela 6.15.a – Analise da convergência da expansão da temperatura para t=360s**

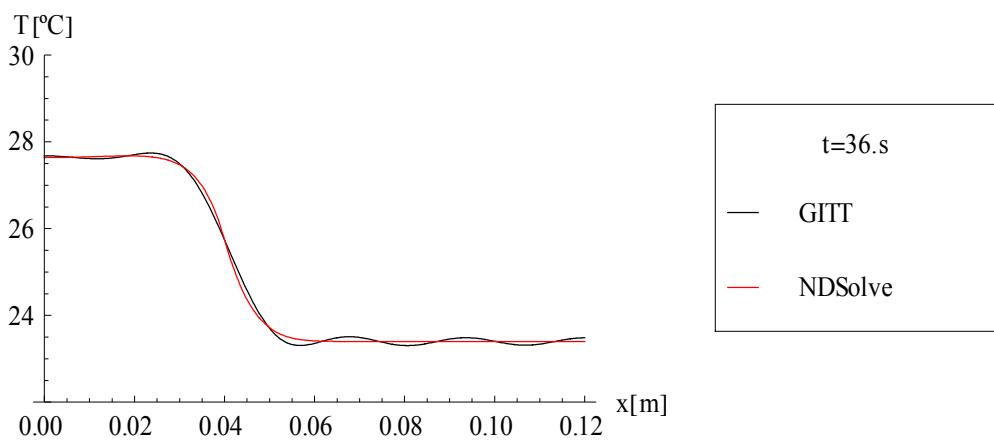
Ordem	$x = 0$	$x = x_{CONT} = L_x/3$	$x = L_x$
1	23.468	23.820	26.937
2	23.982	26.360	17.496
3	26.268	32.951	31.916
4	38.054	44.944	12.185
5	52.347	44.710	27.229
6	54.572	42.529	22.997
7	54.460	42.676	22.755
8	53.699	43.367	24.260
9	52.918	43.452	22.791
10	52.486	43.141	23.653
11	52.374	43.001	23.414
12	52.453	43.097	23.247
13	52.619	43.208	23.586
14	52.776	43.187	23.267
15	52.866	43.107	23.454
16	52.883	43.086	23.419
17	52.845	43.129	23.341
18	52.783	43.164	23.470
19	52.724	43.149	23.351
20	52.691	43.117	23.420
21	52.687	43.111	23.411
22	52.705	43.131	23.373
23	52.734	43.145	23.433
24	52.761	43.136	23.379
25	52.776	43.121	23.409
26	52.776	43.120	23.407
27	52.765	43.132	23.388
28	52.748	43.138	23.414
29	52.733	43.131	23.394
30	52.726	43.123	23.401
31	52.729	43.127	23.404
32	52.740	43.134	23.396
33	52.752	43.130	23.403
34	52.757	43.124	23.401
35	52.752	43.130	23.398
36	52.742	43.132	23.402
37	52.736	43.125	23.400
38	52.740	43.129	23.399
39	52.747	43.130	23.401
40	52.750	43.126	23.400

**Tabela 6.15.b – Analise da convergência da expansão da temperatura para t=1200s**

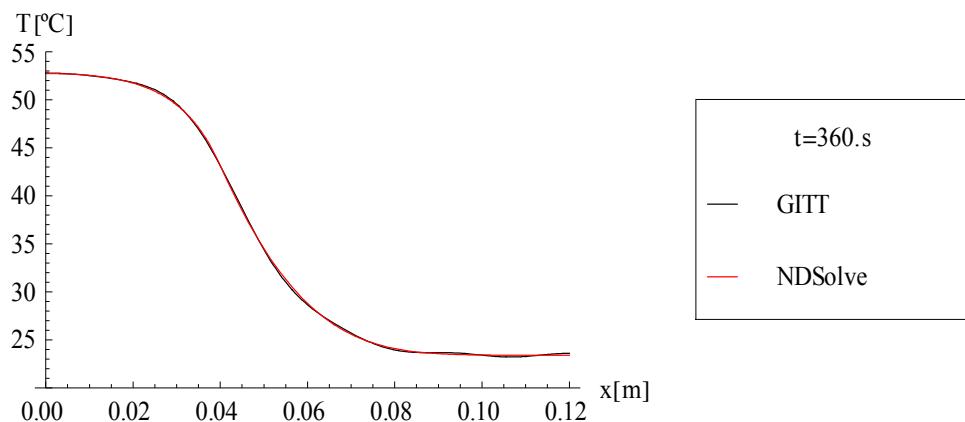
<b>Ordem</b>	<b>x = 0</b>	<b>x = x<sub>CONT</sub>= L<sub>x</sub>/3</b>	<b>x = L<sub>x</sub></b>
1	23.540	24.268	30.706
2	24.425	28.643	14.440
3	27.663	37.975	34.856
4	42.716	53.293	9.6546
5	60.282	53.006	28.143
6	62.935	50.406	23.098
7	62.804	50.578	22.814
8	61.923	51.378	24.558
9	61.024	51.476	22.867
10	60.528	51.119	23.855
11	60.399	50.959	23.582
12	60.490	51.069	23.391
13	60.679	51.196	23.777
14	60.858	51.171	23.415
15	60.960	51.081	23.627
16	60.979	51.057	23.588
17	60.936	51.106	23.499
18	60.865	51.145	23.646
19	60.799	51.128	23.510
20	60.762	51.092	23.589
21	60.756	51.085	23.578
22	60.777	51.108	23.536
23	60.810	51.124	23.603
24	60.840	51.113	23.542
25	60.857	51.096	23.575
26	60.858	51.095	23.574
27	60.846	51.109	23.552
28	60.826	51.116	23.581
29	60.809	51.107	23.558
30	60.801	51.098	23.567
31	60.804	51.103	23.570
32	60.817	51.111	23.561
33	60.831	51.107	23.569
34	60.836	51.100	23.566
35	60.831	51.106	23.564
36	60.819	51.109	23.568
37	60.812	51.101	23.566
38	60.817	51.106	23.565
39	60.825	51.107	23.567
40	60.829	51.102	23.566

**Tabela 6.15.c – Analise da convergência da expansão da temperatura para t=3600s**

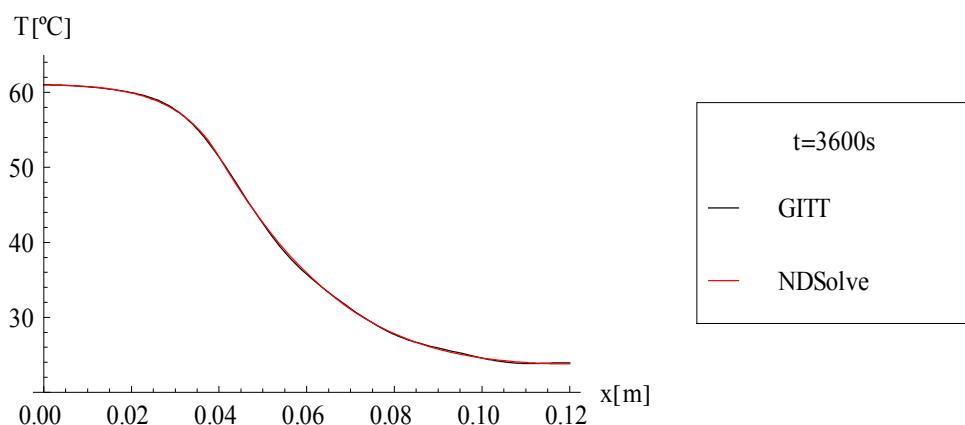
<b>Ordem</b>	<b>x = 0</b>	<b>x = x<sub>CONT</sub>= L<sub>x</sub>/3</b>	<b>x = L<sub>x</sub></b>
1	23.550	24.329	31.224
2	24.457	28.809	14.570
3	27.714	38.200	35.114
4	42.820	53.571	9.8255
5	60.436	53.283	28.367
6	63.095	50.676	23.309
7	62.964	50.849	23.025
8	62.081	51.650	24.772
9	61.180	51.749	23.078
10	60.684	51.391	24.068
11	60.555	51.231	23.794
12	60.645	51.341	23.603
13	60.835	51.468	23.990
14	61.014	51.444	23.627
15	61.116	51.353	23.840
16	61.135	51.329	23.800
17	61.093	51.378	23.711
18	61.021	51.417	23.858
19	60.955	51.400	23.722
20	60.917	51.364	23.801
21	60.912	51.357	23.791
22	60.933	51.380	23.748
23	60.966	51.396	23.815
24	60.996	51.386	23.754
25	61.013	51.368	23.788
26	61.014	51.367	23.786
27	61.002	51.381	23.764
28	60.982	51.388	23.794
29	60.965	51.380	23.771
30	60.957	51.370	23.780
31	60.960	51.375	23.783
32	60.973	51.383	23.774
33	60.987	51.379	23.782
34	60.992	51.372	23.779
35	60.987	51.379	23.776
36	60.975	51.381	23.780
37	60.968	51.373	23.778
38	60.973	51.378	23.777
39	60.981	51.379	23.779
40	60.985	51.375	23.778



(a) t=36s;



(b) t=360s;



(c) t=3600s;

**Figura 6.33– Analise da convergência da temperatura via Transformação Integral e Método das Linhas (NDSolve) para (a) t=36s; (b) t=360s; (c) t=3600s**

Como discutido nas análises inversas apresentadas nas subseções anteriores, a ordem de truncamento assim como a escolha da função filtro na expansão das funções a serem estimadas, determinam por sua vez o número de parâmetros a serem estimados. A Tabela 6.16 abaixo sumariza a abordagem adotada no tratamento de cada função e o número de parâmetros que estão envolvidos na estimativa de cada propriedade  $k(x)$ ,  $w(x)$ , do termo de dissipação linear  $d(x) = \frac{h_{ef}(x)}{L_z}$  e do comportamento temporal do fluxo de calor  $f(t)$ . Logo, o número total de parâmetros “NP” é dado pela soma do numero de parâmetros empregados em cada expansão e nos seus respectivos filtros:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T &\equiv \mathbf{P}_k^T \cup \mathbf{P}_w^T \cup \mathbf{P}_d^T \cup \mathbf{P}_f^T \\ N_P &= N_{Pk} + N_{Pw} + N_{Pd} + N_f \\ N_P &= (N_{kF} + N_k) + (N_{wF} + N_w) + (N_{dF} + N_d) + N_f \end{aligned} \quad (6.32)$$

A Tabela 6.17 apresenta a função filtro escolhida para ser empregada no processo de expansão de cada um destes coeficientes da equação de energia, onde os valores nos contornos ( $k_{x0}, k_{xL}, w_{x0}, w_{xL}$  e  $d_{x0}, d_{xL}$ ), presentes nos filtros, são desconhecidos, de modo que devem ser estimados juntamente com os coeficientes das expansões. Para as propriedades  $k(x)$  e  $w(x)$  optou-se por empregar um filtro linear na expansão das propriedades, uma vez que este seria o filtro mais simples que homogeniza as duas condições de contorno referentes às expansões em autofunções para uma variação qualquer das propriedades, de modo que a expansão em autofunções seja uniformemente convergente. Já para o termo de dissipação linear  $d(x)$ , optou-se por usar um filtro mais informativo, na forma de uma função degrau, considerando que se teria, numa situação experimental real, a informação *a priori* de que o fluxo de calor aplicado tem a forma de uma função degrau, e que consequentemente o coeficiente de transferência de calor tende a aproximar-se deste comportamento para o caso de uma parede termicamente fina. O argumento “ $\gamma$ ”, presente na definição desta função filtro fornece a informação sobre o comportamento da função na região de transição, e no caso do presente estudo considerou-se um variação bastante abrupta fazendo-se “ $\gamma = 500$ ”.

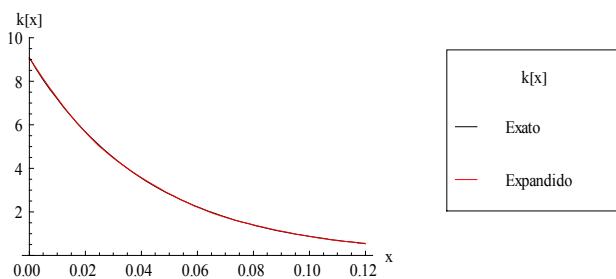
**Tabela 6.16 – Funções e parâmetros a serem estimados**

Função	Abordagem Adotada	No. Parâmetros
$k(x)$	Expansão em Autofunções	$\mathbf{P}_k^T \equiv [N_{kF}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_{N_k}]$
$w(x)$	Expansão em Autofunções	$\mathbf{P}_w^T \equiv [N_{wF}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{N_w}]$
$d(x)$	Expansão em Autofunções	$\mathbf{P}_d^T \equiv [N_{dF}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_{N_d}]$
$f(t)$	Parametrização	$\mathbf{P}_f^T \equiv [a, b]$

**Tabela 6.17 – Filtros utilizados nas expansões das funções**

Função	Filtro	Forma Funcional do Filtro	No. Parâmetros no Filtro
$k(x)$	Linear	$\frac{(k_{xL} - k_{x0})}{L_x} x + k_{x0}$	$N_{kF} = 2$
$w(x)$	Linear	$\frac{(w_{xL} - w_{x0})}{L_x} x + w_{x0}$	$N_{wF} = 2$
$d(x)$	Degrau	$d_{x0} + \frac{d_{xL} - d_{x0}}{1 + \text{Exp}[-\frac{\gamma(x - x_{CONT})}{L_x}]}$	$N_{dF} = 2$

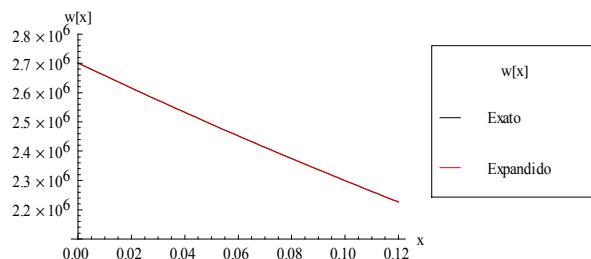
Realizou-se também uma análise de convergência das expansões das funções  $k(x)$ ,  $w(x)$  e  $d(x)$ , de forma a identificar o número mínimo de termos na série que garantisse a convergência das mesmas. As figuras 6.34.a-c abaixo e as tabelas 6.18.a-c apresentam uma análise gráfica e quantitativa da convergência para a condutividade térmica  $k(x)$  com 10 termos na série, para a capacidade térmica  $w(x)$ , também com 10 termos na sua série, e para o termo de dissipação linear  $d(x)$ , com apenas 5 termos na série. Pode-se observar que para as três expansões tem-se uma convergência de pelo menos 2 dígitos significativos mesmo para apenas 2 termos na série no caso de  $k(x)$  e  $w(x)$  e uma convergência completa para  $d(x)$  mesmo para um único termo na série, isso porque seu filtro, a depender dos valores dos dois patamares do degrau, carrega toda informação sobre a própria função.



**Figura 6.34.a – Análise qualitativa da convergência da expansão da Condutividade Térmica  $k(x)$ ;**

**Tabela 6.18.a – Análise quantitativa da convergência da expansão da Condutividade Térmica  $k(x)$ ;**

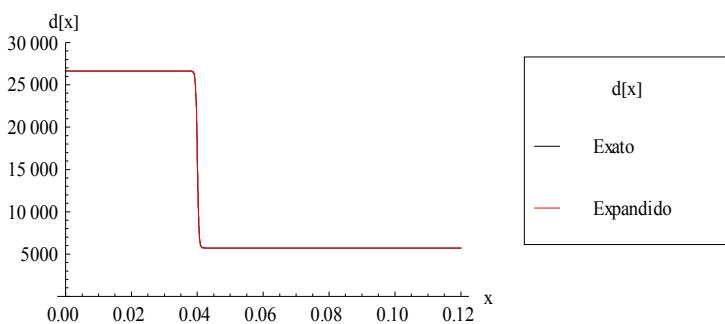
Ordem de Truncamento $N_k$	$k[x=0.04]$	$k[x=0.08]$
1	3.873	1.029
2	3.480	1.421
3	3.480	1.421
4	3.536	1.365
5	3.569	1.398
6	3.569	1.398
7	3.557	1.386
8	3.550	1.393
9	3.550	1.393
10	3.554	1.390
exato	3.555	1.392



**Figura 6.34.b – Análise qualitativa da convergência da expansão da Capacidade Térmica  $w(x)$ ;**

**Tabela 6.18.b – Análise quantitativa da convergência da expansão da Capacidade Térmica  $w(x)$ ;**

Ordem de Truncamento $N_w$	$w[x=0.04]$	$w[x=0.08]$
1	$2.5325 \times 10^6$	$2.3743 \times 10^6$
2	$2.5324 \times 10^6$	$2.3744 \times 10^6$
3	$2.5324 \times 10^6$	$2.3744 \times 10^6$
4	$2.5324 \times 10^6$	$2.3744 \times 10^6$
5	$2.5325 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
6	$2.5325 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
7	$2.5324 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
8	$2.5324 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
9	$2.5324 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
10	$2.5324 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$
exato	$2.5324 \times 10^6$	$2.3745 \times 10^6$



**Figura 6.34.c – Análise qualitativa da convergência da expansão de  $d(x)$ ;**

**Tabela 6.18.c – Análise quantitativa da convergência da expansão de  $d(x)$ ;**

Ordem de Truncamento $N_d$	$d[x=0.04]$	$d[x=0.08]$
1	16174.5	5728.61
2	16174.5	5728.61
3	16174.5	5728.61
4	16174.5	5728.61
5	16174.5	5728.61
exato	16174.5	5728.61

Antes de se iniciar o procedimento de estimativa realizou-se ainda a análise do determinante da matriz de informação para diferentes números de sensores e parâmetros envolvidos na estimativa.

As Tabelas 6.19.a-c abaixo apresentam resultados para diferentes números de sensores que poderiam ser considerados em um procedimento experimental real, usando por exemplo termografia por infravermelho como técnica de medida de temperatura. Logo, a depender da capacidade do equipamento disponível poderia se ter um grande volume de informação espacial, chegando a mais de 500 mil dados experimentais para um experimento com 3 000 segundos de duração.

Neste contexto, a abordagem proposta nesta subseção, de realizar a estimativa dos parâmetros no campo transformado, torna-se mais evidentemente desejável, a partir da colapsação da informação espacial através do processo de transformação integral dos dados experimentais, levando a uma significativa redução de custo computacional a medida que se almeje utilizar toda a informação espacial disponível no procedimento de estimativa.

Para uma avaliação do número de parâmetros que estariam envolvidos nas estimativas, realizou-se a análise do determinante da matriz de informação para três diferentes números de parâmetros,  $N_p=11$ , 15 e 19, sendo que esta variação no número total de

parâmetros deve-se somente à variação do número de parâmetros utilizados nas expansões de  $k(x)$  e  $w(x)$ , uma vez que como apresentado anteriormente, para  $d(x)$  é necessário apenas um termo na sua série para garantir a convergência deste coeficiente.

A Tabela 6.20, resume as escolhas do números de parâmetros que foram tratados nesta análise de sensibilidade e as figuras 6.35.a-c ilustram graficamente o comportamento das expansões dos coeficientes a estimar quando comparadas às funções exatas para as diferentes ordens de truncamento das séries.

**Tabela 6.19.a – Número de sensores e freqüência de medidas no tempo**

No. Sensores	$\Delta x$
61	2 mm
121	1mm
241	500 $\mu\text{m}$
481	250 $\mu\text{m}$
961	125 $\mu\text{m}$
1921	62.5 $\mu\text{m}$

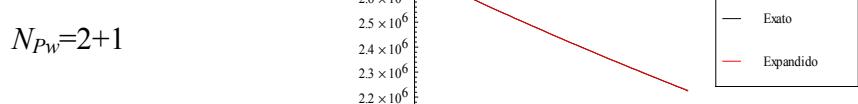
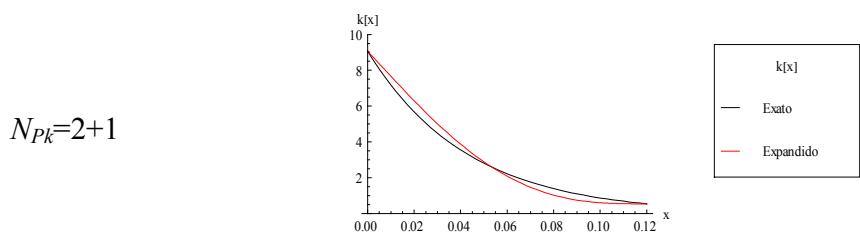
Tempo final Exp.	$\Delta t$
3 600 s	10 s

**Tabela 6.19.b – Número de Dados Experimentais**

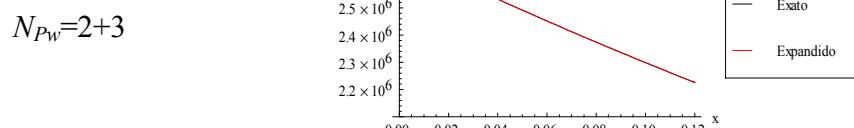
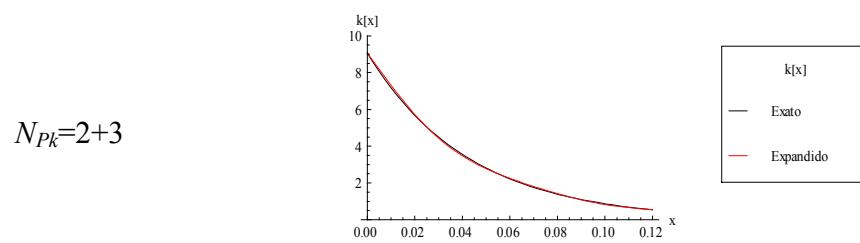
No. Medidas no tempo	
300	
No. Sensores	No. Dados Experimentais
61	18 300
121	36 300
241	72 300
481	144 300
961	288 300
1921	576 300

**Tabela 6.20 – Número de parâmetros avaliados na analise de sensibilidade do problema**

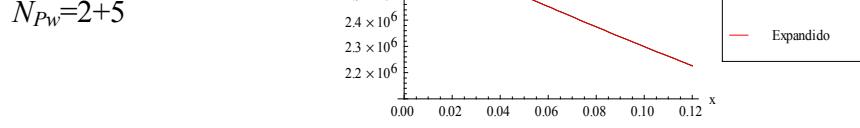
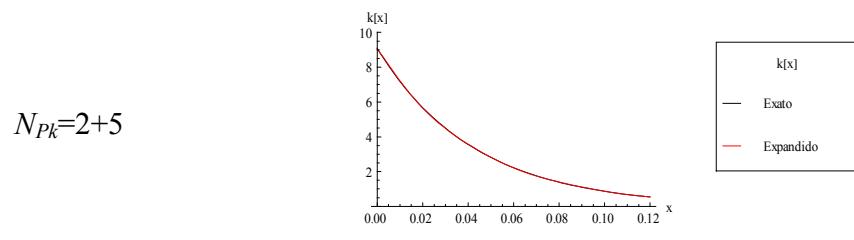
Função	No. Parâmetros		
$k(x)$	$N_{Pk}=2+1$	$N_{Pk}=2+3$	$N_{Pk}=2+5$
$w(x)$	$N_{Pw}=2+1$	$N_{Pw}=2+3$	$N_{Pw}=2+5$
$d(x)$	$N_{Pd}=2+1$	$N_{Pd}=2+1$	$N_{Pd}=2+1$
$f(t)$	$N_f=2$	$N_f=2$	$N_f=2$
No. Total de Parâmetros			
$N_P =$	11	15	19



(a)



(b)

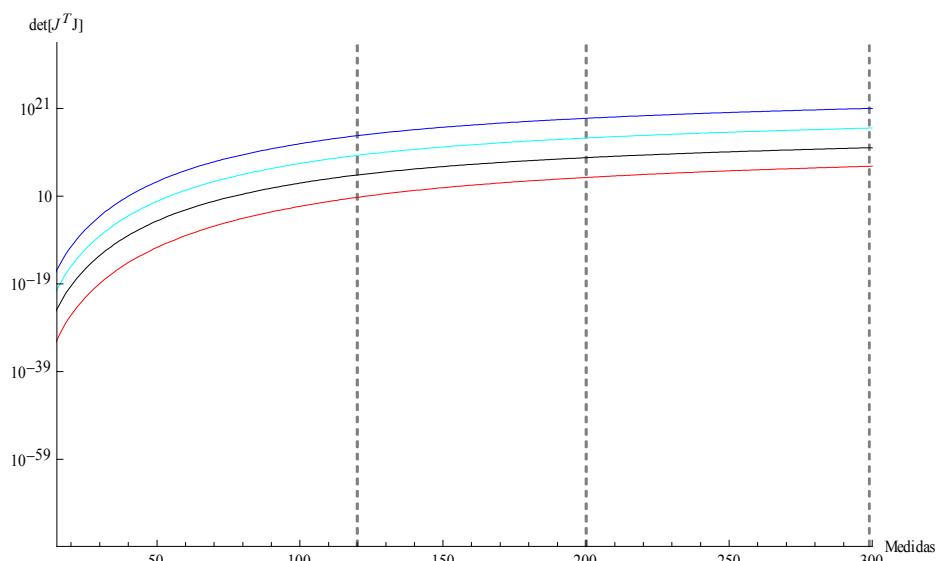


(c)

**Figura 6.35.a-c – Comportamento dos coeficientes em função do número de parâmetros adotados na análise de sensibilidade**

A figura 6.36.a e a tabela 6.21.a apresentados a seguir ilustram o comportamento do determinante da matriz de informação  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , para o caso de uma estimativa envolvendo 15 parâmetros, ou seja, 3 termos na expansões de  $w(x)$  e  $k(x)$  e 1 termo apenas na expansão de  $d(x)$ , somados aos 6 parâmetros dos três filtros e os 2 parâmetros de  $f(t)$ , para diferentes quantidades de dados experimentais. Como esperado, tem-se um aumento do determinante à medida que se tem mais informação disponível, ou seja, mais dados experimentais, sendo a curva com valores mais altos (azul marinho) aquela correspondente a 481 sensores e a curva com valores mais baixos (vermelha) a situação com apenas 61 sensores, onde percebe-se o ganho de mais de 10 ordens de grandeza no valor do determinante para um experimento com 300 medidas temporais com uma freqüência fixa de 10 segundos.

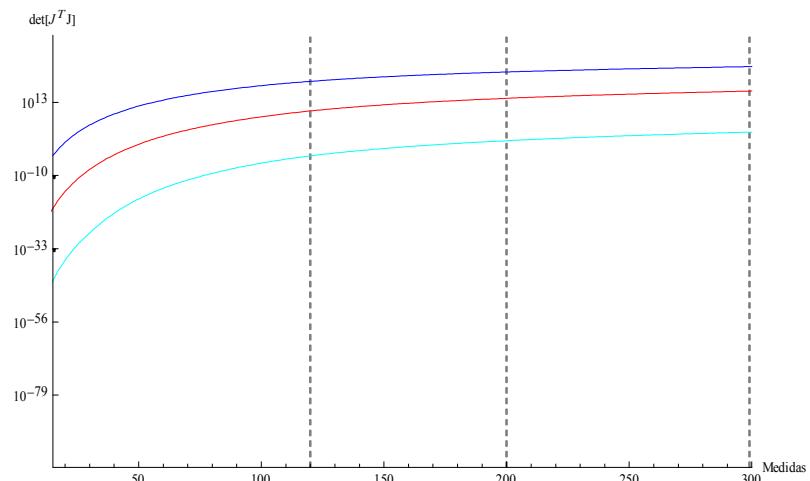
A figura 6.36.b e a tabela 6.21.b apresentam o comportamento do determinante da matriz de sensibilidade, quando varia-se o número de parâmetros envolvidos na estimativa, para um numero fixo de medidas e sensores disponíveis. A curva com valores mais baixos (cyan) representa uma estimativa com 19 parâmetros enquanto que a curva mais acima (azul marinho) diz respeito à estimativa com 11 parâmetros. Pode-se perceber que para um experimento com 300 medidas tem-se um decréscimo de mais de 20 ordens de grandeza quando aumenta-se a estimativa de 11 para 19 parâmetros.



**Figura 6.36.a – Analise grafica do determinante da matriz de informação**  
**Curva azul: 481 sensores; Curva cyan: 241 sensores; Curva preta: 121 sensores;**  
**Curva vermelha: 61 sensores**

**Tabela 6.21.a – Analise quantitativa do determinante da matriz de informação**

No. Sensores	NT=10	NP = 15	Determinante 200 medidas 300 medidas
	120 medidas		
61	5.108	180 2.	$6.661 \times 10^7$
121	665 9	$6.041 \times 10^9$	$1.113 \times 10^{12}$
241	$1.983 \times 10^{10}$	$1.794 \times 10^{14}$	$3.353 \times 10^{16}$
481	$6.087 \times 10^{14}$	$5.626 \times 10^{18}$	$1.044 \times 10^{21}$



**Figura 6.36.b – Analise grafica do determinante da matriz de informação**  
Curva azul: 11 parâmetros; Curva vermelha: 15 parâmetros;  
Curva cyan: 19 parâmetros

**Tabela 6.21.b – Análise quantitativa do determinante da matriz de informação**

No. Parâmetros	No. Sensores = 241	NT = 10	Determinante 200 medidas 300 medidas
	120 medidas		
11	$3.743 \times 10^{19}$	$3.356 \times 10^{22}$	$1.589 \times 10^{24}$
15	$1.983 \times 10^{10}$	$1.794 \times 10^{14}$	$3.353 \times 10^{16}$
19	0.000147	8.455	4377.5

Na geração dos dados experimentais simulados utilizou-se 50 termos na expansão da temperatura e 10 termos nas expansões de  $k(x)$ ,  $w(x)$  e  $d(x)$  e considerou-se a geração de 86760 dados de temperaturas aquisitadas por 241 sensores, distribuídos igualmente espaçados ao longo do comprimento da placa, e tomadas a uma freqüência de 10 segundos ao longo de uma hora de experimento, considerando-se dois possíveis erros experimentais,  $0.1^\circ$  e  $0.5^\circ\text{C}$ . Como critério de validação do código computacional construído e

da abordagem inversa aqui proposta, analisou-se inicialmente as estimativas para um caso com um erro reduzido de  $0.01^{\circ}\text{C}$  e ordens mais baixas e iguais nas expansões dos dados experimentais gerados e na solução inversa,  $N_T=10$ ,  $N_k=3$ ,  $N_w=3$ , e  $N_d=1$  termos na expansão, respectivamente, para  $T(x,t)$ ,  $k(x)$ ,  $w(x)$  e  $d(x)$ .

Depois de geradas as temperaturas experimentais, iniciou-se então o procedimento de transformação integral destes dados, definindo-se um par transformada-inversa (eqs.6.33.a,b), e integrando-se espacialmente os dados experimentais ao longo de todo o domínio a cada tempo. Como os dados a serem integrados são discretos, realizou-se uma interpolação que apresenta-se como uma aproximação do seu comportamento espacial.

Par Transformada-Inversa:

$$\text{Transformada} \quad \overline{T_{\exp,i}}(t) = \int_0^{L_x} w(x) \tilde{\psi}_i(x) [T_{\exp}(x,t) - T_{\text{amb}}] dx \quad (6.33.a)$$

$$\text{Inversa} \quad T_{\exp}(x,t) = T_{\text{amb}} + \sum_{i=0}^{N_i} \tilde{\psi}_i(x) \overline{T_{\exp,i}}(t) \quad (6.33.b)$$

A tabela 6.22 abaixo apresenta a análise realizada para investigar o erro relativo em consequência do procedimento de interpolação por segmentos, para o caso de validação onde a incerteza padrão experimental é de  $0.01^{\circ}\text{C}$  e se tem 10 termos na expansão da temperatura. Analisou-se para este caso a influência da ordem da interpolação: ordem 1 (reta) e ordem 3 (cúbica), usando diferentes números de sensores. Para tanto, determina-se o máximo erro relativo encontrado em todas as medidas ao longo do tempo (200 medidas), para cada campo transformado (10 campos), em função das escolhas de ordem de interpolação e número de sensores empregado. Observa-se então que o número de sensores empregado pode reduzir este erro máximo de cerca de 4% a 0.3%, com o aumento do número de sensores de 61 para 241 para a interpolação de primeira ordem, enquanto o erro máximo cai de 0.2% até menos que 0.007% , quando se aumenta o número de sensores na interpolação de terceira ordem. Claramente, a utilização da aproximação por cúbicas oferece uma aproximação muito melhor, com resultados comparáveis quando se utiliza apenas 61 sensores, em relação ao resultado com 241 sensores para a aproximação de primeira ordem. Também na Tabela 6.22 ilustra-se que o ganho de precisão é insignificante ao se aumentar o número de iterações de 20

para 40 no procedimento de integração numérica, bem como requerendo-se maior precisão relativa, de 6 para 8 dígitos significativos, na função *NIntegrate* do *Mathematica*.

Nas soluções inversas que serão apresentadas a seguir, os dados experimentais foram transformados integralmente utilizando 241 sensores, uma interpolação de terceira ordem, um número máximo de 20 iterações na integração numérica, e uma precisão de 6 dígitos significativos. Estes resultados foram também covalidados com o procedimento de integração semi-analítica de expansões em autofunções [Cotta et al., 2009].

**Tabela 6.22 – Analise do Erro Relativo na Integração Numérica dos Dados Experimentais**

<b>No. Medidas = 200</b>	
Erro relativo = $\text{Abs} \left( \frac{\overline{T}_{\text{exp},i}(t) - \overline{T}_{\text{calc},i}(t)}{\overline{T}_{\text{calc},i}(t)} \right)$	

<b>No. Iterações = 40 Precisão = Default = 6 dígitos</b>			
<b>Ordem da Interpolação Espacial</b>	<b>No. Sensores</b>		
	<b>61</b>	<b>121</b>	<b>241</b>
1	0.0443	0.0112	0.00280
3	0.00198	0.000201	0.0000653

<b>No. Sensores = 241</b>			
<b>Ordem da Interpolação Espacial</b>	<b>No. Iterações 20 Precisão: 6 dígitos</b>	<b>No. Iterações 40 Precisão: 6 dígitos</b>	<b>No. Iterações 40 Precisão: 8 dígitos</b>
1	0.00280	0.00280	0.00279
3	0.0000653	0.0000653	0.0000654

Uma vez realizada a transformação integral das temperaturas experimentais (considerando 241 sensores disponíveis espacialmente) tem-se uma redução considerável do número de dados experimentais a serem utilizados na solução inversa. As Tabelas 6.23.a,b apresentam de forma resumida uma comparação da redução deste volume de dados. A Tabela 6.23.a mostra para a estimativa no campo de temperatura, com um número fixo de 241 medidas espaciais, o número de dados experimentais relativamente alto, de acordo com o número de medidas no tempo. A Tabela 6.23.b mostra a redução conseguida no número de dados experimentais totais com a transformação integral, utilizando temperaturas fornecidas

por 241 sensores, para três ordens de truncamento diferentes na expansão da temperatura. Tem-se por exemplo, uma redução de mais de 95% ao se trocar a estimativa no campo da temperatura usando 200 medidas no tempo (48200 dados experimentais) por uma estimativa no campo transformado com 10 termos na série para as mesmas 200 medidas temporais (2000 dados experimentais).

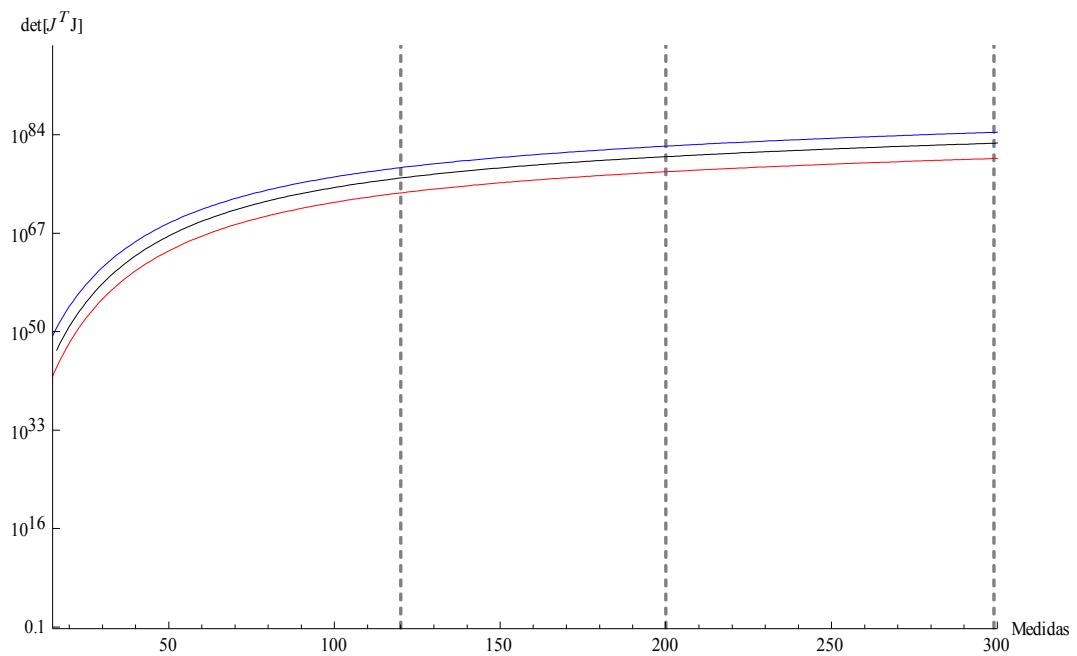
**Tabela 6.23.a – Análise do número de dados experimentais na estimativa no campo de temperaturas**

No. Sensores	No. Medidas no tempo	No. Dados Experimentais
241	120	25 680
	200	48 200
	300	72 300

**Tabela 6.23.b – Análise do número de dados experimentais na estimativa no campo transformado**

No. Termos na Expansão da Temperatura	No. Medidas no tempo	No. Dados Experimentais
$NT=10$	120	1 200
	200	2 000
	300	3 000
$NT=20$	120	2 400
	200	4 000
	300	8 000
$NT=40$	120	4 800
	200	8 000
	300	12 000

Através da análise do determinante da matriz de informação para as estimativas no campo transformado ilustrada na figura 6.37 e na tabela 6.24 abaixo, tem-se que o aumento do número de termos na série leva a um aumento no valor do determinante. Com o aumento do numero de termos na série de 10(curva vermelha) para 20 (curva preta) e para 40 (curva azul) tem-se que o número de dados a serem tratados na solução inversa vai tendo seu valor dobrado; todavia, este aumento, para um número fixo de medidas no tempo, representa um aumento considerável do custo computacional mas não representa um aumento significativo do valor do determinante. Sendo assim, a escolha do número de termos na série deve ser feita de maneira a ser mínima, garantindo apenas que o erro da expansão seja menor do que o erro experimental.



**Figura 6.37 – Analise de sensibilidade para a estimativa no campo transformado**  
**Curva azul:  $NT=40$ ; Curva preta:  $NT=20$ ; Curva vermelha:  $NT=10$**

**Tabela 6.24 – Analise quantitativa do determinante da matriz de informação  
no campo transformado**

No. Sensores usados na Transformação Integral = 241 $N_p = 15$			
No. Medidas no tempo	Determinante		
	$NT=10$	$NT=20$	$NT=40$
120	$9.34 \times 10^{73}$	$3.50 \times 10^{76}$	$2.17 \times 10^{78}$
200	$4.19 \times 10^{77}$	$1.69 \times 10^{80}$	$1.09 \times 10^{82}$
300	$8.35 \times 10^{79}$	$3.63 \times 10^{82}$	$2.80 \times 10^{84}$

Neste contexto, as estimativas que se seguiram foram realizadas com 10 termos na expansão da temperatura, 3 termos nas expansões de  $k(x)$  e  $w(x)$ , e 1 termo na expansão de  $d(x)$ . A tabela 6.25 abaixo resume essas informações sobre o número de termos empregados nas expansões da geração dos dados experimentais simulados.

**Tabela 6.25. – Geração dos dados experimentais simulados**

Dados Experimentais Simulados	No. Termos na Expansão
T(x,t)	50
k(x)	10
w(x)	10
d(x)	10

Estimativa no Caso de Validação	
$NT = 10$	Incerteza Temp.= 0.01°C

Estimativas com Erro Experimental		
		Incerteza Exp.= 0.5°C
		$NT = 10$
Função	No. Parâmetros	No. Total de Parâmetros
k(x)	$N_k=2+3$	$N_P = 15$
w(x)	$N_w=2+3$	
d(x)	$N_d=2+1$	
f(t)	$N_f=2$	

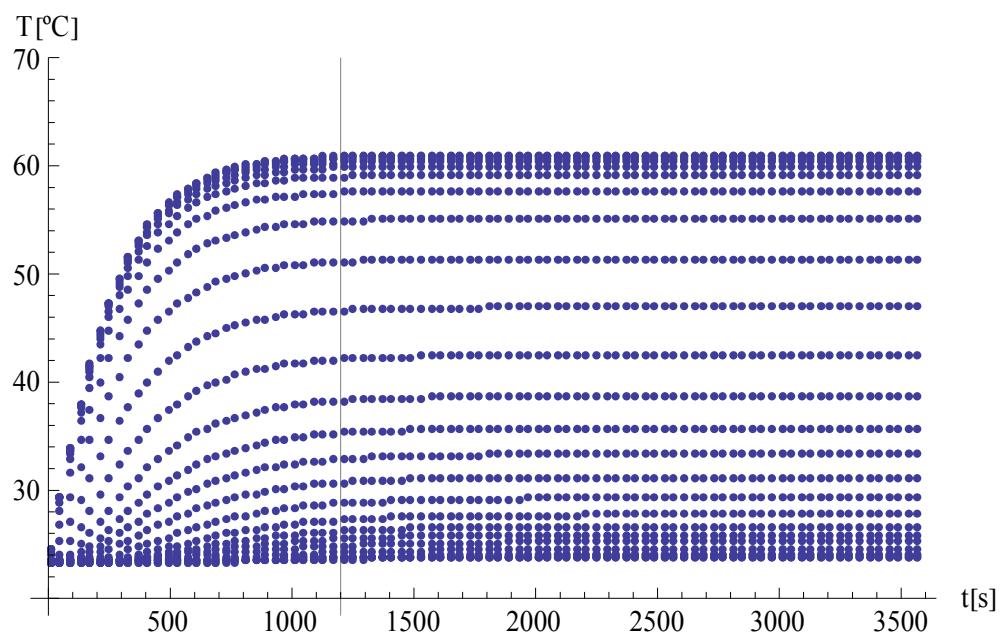
No. Medidas	No. Sensores	No. Dados Experimentais
360	241	86 760

As figuras 6.38 e 6.39 ilustram a distribuição de temperatura experimental ao longo do tempo para diferentes posições (a) e ao longo da placa para diferentes tempos (b), para as duas incertezas padrão experimentais citadas anteriormente.

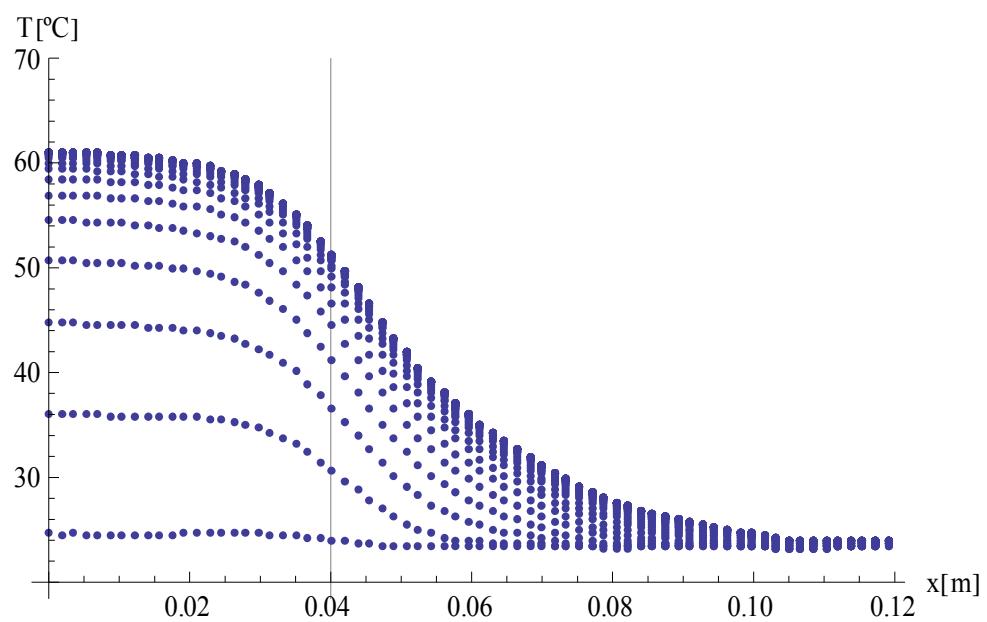
No contexto da estimativa Bayesiana que é adotada na presente proposta de solução de problema inverso, tem-se então a reformulação da verossimilhança uma vez que os dados experimentais são agora tratados como temperaturas transformadas, como apresentado nas equações (6.34.a,b) a seguir. Neste processo de estimativa no campo transformado tem-se a comparação das temperaturas experimentais e calculadas transformadas, para cada campo transformado, ao longo de todas as medidas temporais, ponderadas por um desvio padrão experimental que varia para cada campo transformado.

$$\text{Verossimilhança no campo de Temperatura} \propto \text{Exp}\left[-\frac{1}{2} \sum_s^{No.\text{Sensores}} \sum_m^{No.\text{Medidas}} \frac{1}{\sigma_s^2} (T_{\text{exp}}(x_s, t_m) - T_{\text{calc}}(x_s, t_m))^2\right] \quad (6.34.a)$$

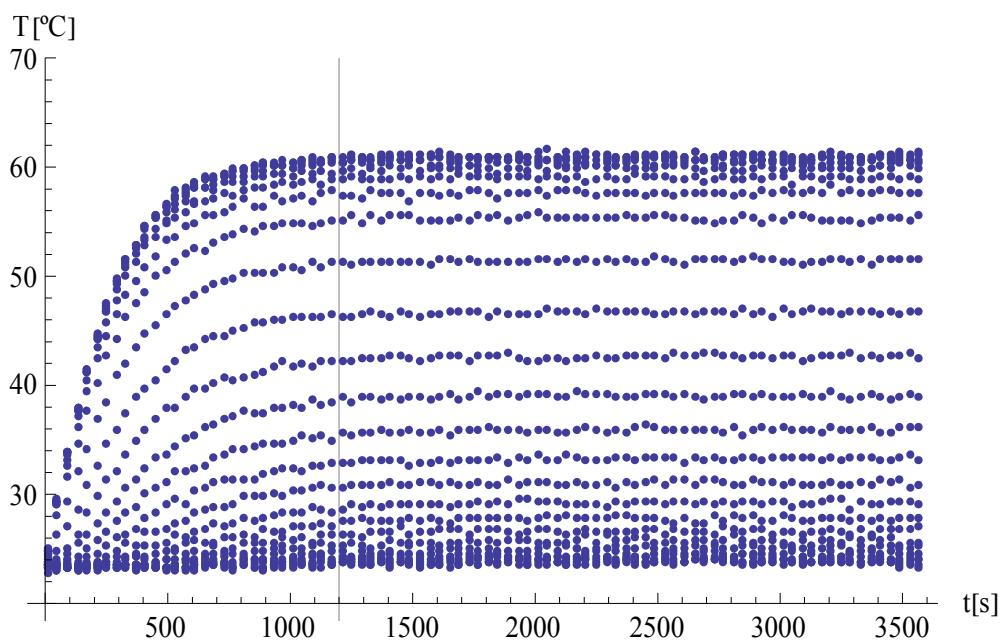
$$\text{Verossimilhança no campo Transformado} \propto \text{Exp}\left[-\frac{1}{2} \sum_i^{NT} \sum_m^{No.\text{Medidas}} \frac{1}{\bar{\sigma}_i^2} (\overline{T}_{\text{exp},i}(t_m) - \overline{T}_{\text{calc},i}(t_m))^2\right] \quad (6.34.b)$$



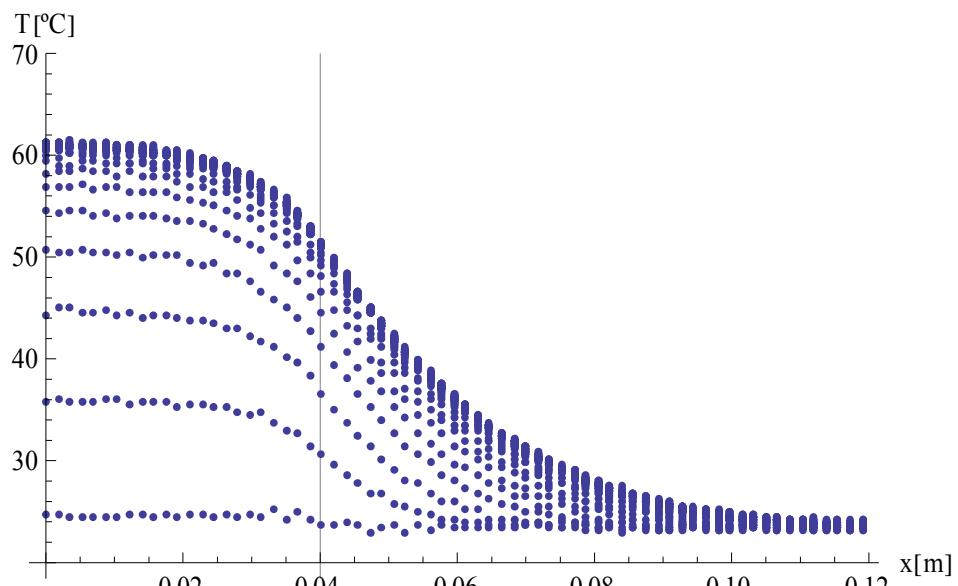
**Figura 6.38.a – incerteza 0.01°C**  
**Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa**



**Figura 6.38.b – incerteza 0.01°C**  
**Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos**



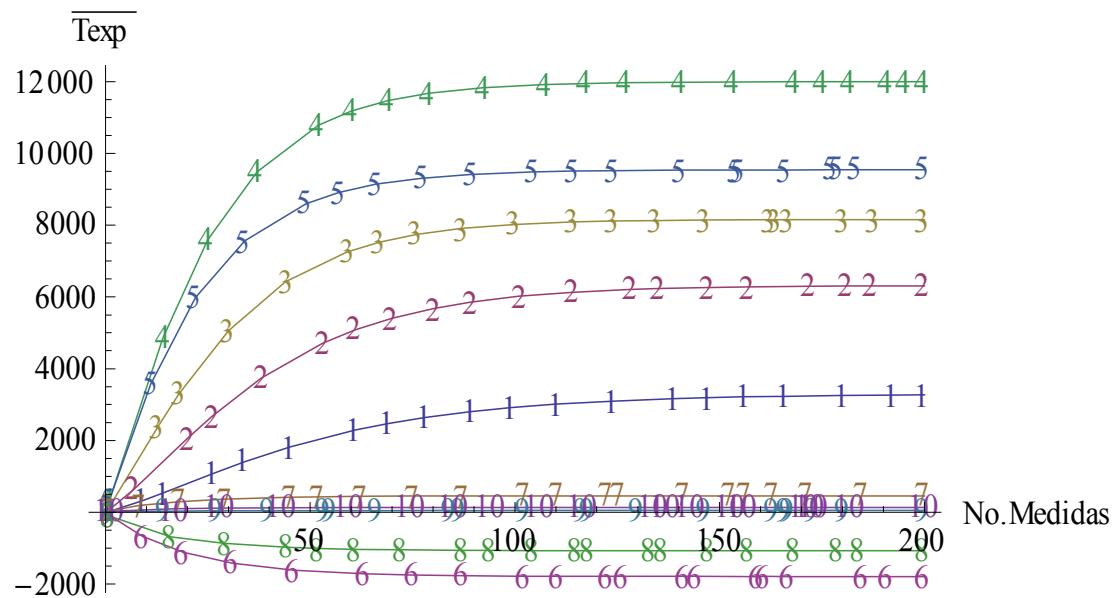
**Figura 6.39.a – incerteza  $0.5^{\circ}\text{C}$**   
**Distribuição de temperatura ao longo do tempo para diferentes posições da placa**



**Figura 6.39.b – incerteza  $0.5^{\circ}\text{C}$**   
**Distribuição de temperatura ao longo da placa para diferentes tempos**

As figuras 6.40 e 6.41 ilustram a distribuição de temperatura experimental transformada ao longo do tempo para cada campo transformado, para as duas incertezas padrão experimentais analisados  $0.01^{\circ}\text{C}$ ,  $0.5^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. Percebe-se por estas figuras a importância mais significativa dos primeiros cinco campos da expansão. As tabelas 6.26 e

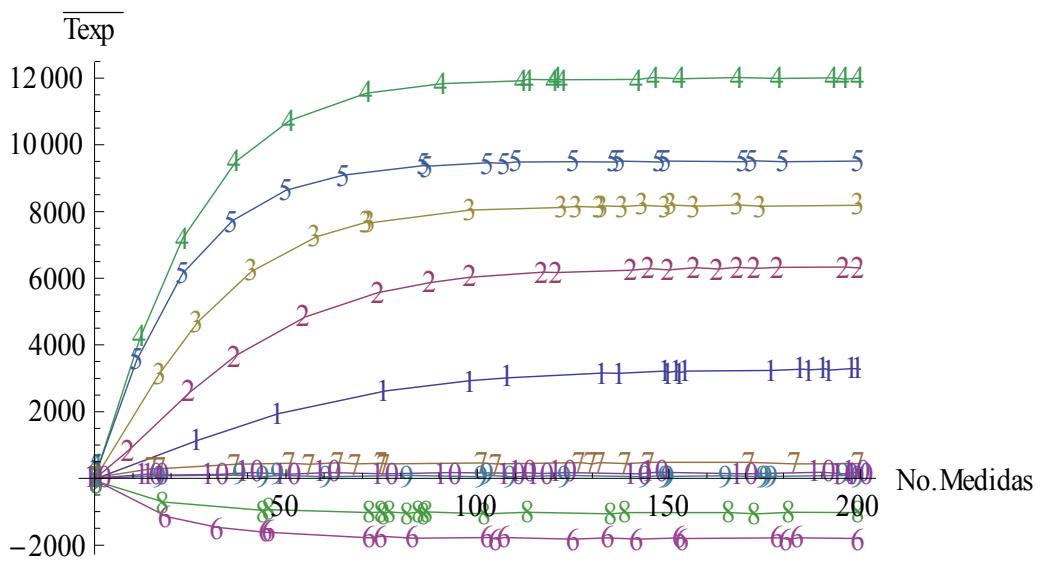
6.27 apresentam os valores das temperaturas transformadas médias para o regime permanente, os desvios padrão das temperaturas experimentais transformadas e os desvios percentuais com relação às respectivas temperaturas transformadas médias. Tais desvios foram calculados como sendo os desvios médios das temperaturas para as ultimas 50 medidas no tempo (entre 3100s e 3600s) para cada campo transformado, já em regime permanente.



**Figura 6.40 – incerteza experimental 0.01°C**  
Distribuição de temperatura transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série

**Tabela 6.26. – Analise da Temperatura Experimental Transformada para o incerteza experimental 0.01°C**

Ordem $i$	$\bar{T}_{exp,i}$	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{\sigma}_i \%$
1	3243.2	0.833	0.0257
2	6293.3	0.474	0.00754
3	8151.7	0.658	0.00808
4	11995.1	0.540	0.00451
5	9540.8	0.572	0.00600
6	-1790.7	0.604	0.0337
7	458.79	0.553	0.120
8	-1071.4	0.572	0.0534
9	47.823	0.546	1.141
10	136.94	0.557	0.407



**Figura 6.41– incerteza experimental 0.5°C  
Distribuição de temperatura Transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série**

**Tabela 6.27. – Analise da Temperatura Experimental Transformada para o incerteza experimental 0.5°C**

Ordem $i$	$\bar{T}_{\text{exp},i}$	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{\sigma}_i \%$
1	3244.4	28.43	0.876
2	6305.8	25.82	0.409
3	8174.3	25.08	0.307
4	11998.3	26.22	0.219
5	9506.5	27.86	0.293
6	-1800.2	23.75	1.320
7	460.42	22.84	4.961
8	-1037.4	25.48	2.457
9	70.128	25.25	36.00
10	157.64	26.73	16.95

Cinco casos teste, summarizados na tabela 6.28, foram estudados de modo a validar e demonstrar a metodologia de solução apresentada pelo presente trabalho. Os casos 1, 2 e 3 foram escolhidos para validação do algoritmo implementado, uma vez que o erro experimental considerado nestes casos foi de 0.01°C e o número de termos nas expansões na geração dos dados experimentais e na solução do problema inverso para estes três casos foram escolhidos iguais: 10 termos na expansão da temperatura, 3 termos nas expansões de  $w(x)$  e  $k(x)$ , e 1 termo na expansão de  $d(x)$ , sendo que para o caso 1 a estimativa se dá no campo de temperatura e para os casos 2 e 3 as estimativas se dão no campo transformado. Para os demais casos as estimativas foram feitas no campo transformado e os dados experimentais

simulados foram gerados com 50 termos na expansão da temperatura e 10 termos nas expansões de  $w(x)$ ,  $k(x)$  e  $d(x)$ , enquanto a solução do problema inverso foi construída com 10 termos na expansão da temperatura, 3 termos nas expansões de  $w(x)$  e  $k(x)$  e 1 termo na expansão de  $d(x)$ . Como discutido nas análises inversas apresentadas anteriormente, a ordem de truncamento determina o número de parâmetros envolvidos na estimativa. Logo, o número total de parâmetros “ $N_p$ ” é dado pela soma do numero de termos empregados na expansão de cada coeficiente, seus respectivos filtros e os coeficientes presentes na parametrização da função temporal do fluxo de calor.

$$P = \left( k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_j, \dots, \bar{k}_{N_k} \right), \left( w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_j, \dots, \bar{w}_{N_w} \right), \left( d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_j, \dots, \bar{d}_{N_d} \right), (a, b)$$

Em todos os casos utilizou-se de priori não-informativa (Uniforme) na estimativa do parâmetro “ $a$  e  $b$ ”; para os demais parâmetros analisou-se através dos casos, a influência na escolha de uma *priori* Gaussiana centrada nos valores esperados para cada um dos parâmetros com um desvio padrão de até 34% do valor da sua respectiva média. A tabela 6.28 traz a informação da escolha das *prioris* para cada caso, onde a escolha por *prioris* normais é representada pela letra “N” e as *prioris* uniformes pela letra “U”.

**Tabela 6.28- Estimativas Realizadas**

<b>Casos de Validação: Incerteza Experimental de 0.01°C</b>					
<b>Caso</b>	<b>Campo</b>	<b>NT</b>	<b>No. Medidas</b>	<b>No. Sensores</b>	<b>Priori</b>
1	Temperatura	10	120	61	N, N, U - N, N, U - N, N, U - U, U
2	Transfomado	10	200	241	N, N, U - N, N, U - N, N, U - U, U
3	Transfomado	10	200	241	U, U, U - U, U, U - N, N, U - U, U
<b>Casos com Incerteza Experimental de 0.5°C</b>					
<b>Caso</b>	<b>Campo</b>	<b>NT</b>	<b>No. Medidas</b>	<b>No. Sensores</b>	<b>Priori</b>
4	Transfomado	10	200	241	N, N, U - N, N, U - N, N, U - U, U
5	Transfomado	10	200	241	U, U, U - U, U, U - N, N, U - U, U

A seguir apresenta-se nas tabelas 6.29 a 6.33 os resultados encontrados nas estimativas para os casos da tabela 6.28 acima. Os três casos de validação recuperam, como esperado, o comportamento dos coeficientes originais. Todavia percebe-se uma melhor estimativa dos parâmetros para os casos 2 e 3 que ocorrem no campo transformado. Estes

resultados confirmam a colapsação da informação espacial nos campos transformados como uma alternativa interessante nos procedimentos de solução de problemas inversos, principalmente nos casos em que se tem disponível uma grande quantidade de medidas espaciais, como no caso das técnicas de medição por câmera de infravermelho. Para cada um dos casos analisados, tem-se nas tabelas de 6.29 a 6.330 as informações sobre os dados de entrada das estimativas, como o valor exato dos parâmetros, o intervalos de máximo e mínimo de procura para cada parâmetro, assim como os valores iniciais utilizados no procedimento de solução inversa. As tabelas 6.29 a 6.33 apresentam em seguida os valores estimados para cada caso, assim como os respectivos intervalos com 99% de confiança para cada parâmetro.

As figuras 6.42.a-e a 6.45.a-e que se seguem apresentam para os cinco casos uma comparação entre as funções exatas (curva cyan) e as funções estimadas, reconstruídas a partir dos parâmetros estimados por cada caso (curva preta), assim como os seus respectivos intervalos de 99% de confiança (curvas azul e vermelha) e em pontilhado os limites adotados como máximos e mínimos no procedimento de estimativa destas funções. As figuras 6.46.a-f a 6.50.a-f apresentam uma comparação entre as temperaturas experimentais e as temperaturas calculadas a partir das estimativas encontradas para cada caso. E logo em seguida, tem-se as figuras que ilustram os respectivos resíduos encontrados em cada uma dessas comparações (Figs. 6.51 a 6.55), onde pode-se observar, para diferentes posições e diferentes tempos resíduos menores que 1°C. Para todos os casos analisados percebe-se uma excelente concordância entre as temperaturas estimadas e as temperaturas experimentais resultando nos baixos resíduos que são apresentados.

Comparando os casos 4 e 5 com erro experimental de 0.5C, observa-se que se tem melhores estimativas para o caso do emprego das *prioris* normais, hipótese essa que apresenta-se bastante razoável na maioria das situações reais uma vez que quase sempre se tem alguma informação disponível a *priori* sobre as propriedades do material em questão através de algum método de medida diretamente da própria propriedade ou de maneira indireta como no caso da concentração de partículas, por exemplo. Todavia, os resultados apresentados para o caso 5 para uma *priori* uniforme demonstram que mesmo para uma situação onde pouco ou nada se sabe sobre as propriedades de um material, pode-se ainda obter uma estimativa razoável do seu comportamento espacial e dos seus valores numéricos com o emprego da metodologia proposta pelo presente trabalho.

**Tabela 6.29 - CASO 1**

<b>Dados de Entrada das Estimativas</b>					
<b>P</b>	<b>Priori</b>	<b>Exato</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Inicial</b>
$k_{x0}$	Normal	9.078	0.218	14.525	9.986
$k_{xL}$	Normal	0.545	0.218	14.525	0.5995
$\bar{k}_1$	Uniforme	-0.6677	-4.462	4.462	-0.7345
$\bar{k}_2$	Uniforme	-0.1111	-1.1155	1.1155	-0.12212
$\bar{k}_3$	Uniforme	-0.04091	-1.4873	1.4873	-0.04500
$w_{x0}$	Normal	$2.701 \times 10^6$	890560.	$4.321 \times 10^6$	$2.971 \times 10^6$
$w_{xL}$	Normal	$2.226 \times 10^6$	890560.	$4.321 \times 10^6$	$2.449 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	Uniforme	-2894.7	$-1.070 \times 10^6$	$1.070 \times 10^6$	-3184.1
$\bar{w}_2$	Uniforme	-34.942	-267502.	267502.	-38.436
$\bar{w}_3$	Uniforme	-107.57	-356669.	356669.	-118.33
$h_{x0}$	Normal	26.620	13.310	53.2406	29.282
$h_{xL}$	Normal	5.7286	2.8643	11.457	6.3015
$\bar{h}_1$	Uniforme	0.	$-3. \times 10^{-12}$	$3. \times 10^{-12}$	0.
$a$	Uniforme	721.65	0	1237.1	793.81
$b$	Uniforme	0.005	0	0.1	0.0055

<b>Dados de Saída das Estimativas</b>				
<b>P</b>	<b>Exato</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	9.078	10.281	10.240	10.322
$k_{xL}$	0.545	0.592	0.591	0.593
$\bar{k}_1$	-0.668	-0.804	-0.807	-0.801
$\bar{k}_2$	-0.111	-0.147	-0.149	-0.146
$\bar{k}_3$	-0.0409	-0.0494	-0.0508	-0.0479
$w_{x0}$	$2.7009 \times 10^6$	$2.872 \times 10^6$	$2.856 \times 10^6$	$2.889 \times 10^6$
$w_{xL}$	$2.2264 \times 10^6$	$2.308 \times 10^6$	$2.292 \times 10^6$	$2.323 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	-2894.7	-3025.4	-3055.5	-2995.4
$\bar{w}_2$	-34.942	-38.779	-39.201	-38.357
$\bar{w}_3$	-107.57	-124.94	-125.45	-124.43
$h_{x0}$	26.620	26.503	26.491	26.516
$h_{xL}$	5.7286	6.023	5.992	6.053
$\bar{h}_1$	0.	$-1.31 \times 10^{-13}$	$-1.77 \times 10^{-13}$	$-8.51 \times 10^{-14}$
$a$	721.65	701.08	698.91	703.25
$b$	0.005	0.00510	0.00508	0.00511

**Tabela 6.30 - CASO 2**

<b>P</b>	<b>Priori</b>	<b>Dados de Entrada das Estimativas</b>			
		<b>Exato</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Inicial</b>
$k_{x0}$	Normal	9.078	0.463	10.440	8.616
$k_{xL}$	Normal	0.545	0.463	10.440	0.503
$\bar{k}_1$	Uniforme	-0.668	-3.111	3.111	-0.726
$\bar{k}_2$	Uniforme	-0.111	-0.778	0.778	-0.108
$\bar{k}_3$	Uniforme	-0.0409	-1.037	1.037	-0.0443
$w_{x0}$	Normal	$2.701 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.686 \times 10^6$
$w_{xL}$	Normal	$2.226 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.282 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	Uniforme	-2894.7	-378487.0	378487.0	-2810.4
$\bar{w}_2$	Uniforme	-34.94	-94621.8	94621.8	-33.04
$\bar{w}_3$	Uniforme	-107.57	-126162.0	126162.0	-104.67
$h_{x0}$	Normal	26.62	13.31	53.24	26.60
$h_{xL}$	Normal	5.729	2.864	11.457	6.232
$\bar{h}_1$	Uniforme	0.	$-3 \times 10^{-12}$	$3 \times 10^{-12}$	0.
$a$	Uniforme	721.65	0	1237.1	700.89
$b$	Uniforme	0.005	0	0.1	0.00521

<b>P</b>	<b>Dados de Saída das Estimativas</b>			
	<b>Exato</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	9.0780	9.1639	9.1503	9.1776
$k_{xL}$	0.545	0.5068	0.5058	0.5078
$\bar{k}_1$	-0.6677	-0.6663	-0.6680	-0.6646
$\bar{k}_2$	-0.1111	-0.1122	-0.1134	-0.1111
$\bar{k}_3$	-0.04091	-0.03869	-0.03918	-0.03819
$w_{x0}$	$2.7009 \times 10^6$	$2.7199 \times 10^6$	$2.7172 \times 10^6$	$2.7226 \times 10^6$
$w_{xL}$	$2.2264 \times 10^6$	$2.2637 \times 10^6$	$2.2581 \times 10^6$	$2.2693 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	-2894.68	-2706.4	-2746.6	-2666.2
$\bar{w}_2$	-34.942	-33.943	-34.148	-33.739
$\bar{w}_3$	-107.57	-104.30	-104.87	-103.74
$h_{x0}$	26.620	26.595	26.588	26.603
$h_{xL}$	5.7286	5.7903	5.7743	5.8063
$\bar{h}_1$	0.	$6.494 \times 10^{-15}$	$-2.392 \times 10^{-14}$	$3.691 \times 10^{-14}$
$a$	721.65	718.71	717.90	719.52
$b$	0.005	0.00501	0.005007	0.005022

**Tabela 6.31 - CASO 3**

<b>P</b>	<b>Priori</b>	<b>Dados de Entrada das Estimativas</b>			
		<b>Exato</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Inicial</b>
$k_{x0}$	Uniforme	9.0780	0.218	14.525	9.9858
$k_{xL}$	Uniforme	0.545	0.218	14.525	0.5995
$\bar{k}_1$	Uniforme	-0.6677	-4.462	4.462	-0.7345
$\bar{k}_2$	Uniforme	-0.1111	-1.115	1.115	-0.122
$\bar{k}_3$	Uniforme	-0.04091	-1.487	1.487	-0.0450
$w_{x0}$	Uniforme	$2.701 \times 10^6$	890560.	$4.321 \times 10^6$	$2.971 \times 10^6$
$w_{xL}$	Uniforme	$2.226 \times 10^6$	890560.	$4.321 \times 10^6$	$2.449 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	Uniforme	-2894.68	$-1.070 \times 10^6$	$1.070 \times 10^6$	-3184.15
$\bar{w}_2$	Uniforme	-34.942	-267502.	267502.	-38.436
$\bar{w}_3$	Uniforme	-107.57	-356669.	356669.	-118.33
$h_{x0}$	Normal	26.620	13.310	53.241	29.282
$h_{xL}$	Normal	5.7286	2.8643	11.457	6.3015
$\bar{h}_1$	Uniforme	0.	$-3 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-12}$	0.
$a$	Uniforme	721.65	0	1 237.1	793.81
$b$	Uniforme	0.005	0	0.1	0.0055

<b>P</b>	<b>Dados de Saída das Estimativas</b>			
	<b>Exato</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	9.0780	9.1212	9.0536	9.1888
$k_{xL}$	0.545	0.5717	0.5655	0.5779
$\bar{k}_1$	-0.6677	-0.6756	-0.6840	-0.6673
$\bar{k}_2$	-0.1111	-0.1113	-0.1132	-0.1093
$\bar{k}_3$	-0.04091	-0.04078	-0.04118	-0.04038
$w_{x0}$	$2.701 \times 10^6$	$2.701 \times 10^6$	$2.692 \times 10^6$	$2.710 \times 10^6$
$w_{xL}$	$2.226 \times 10^6$	$2.252 \times 10^6$	$2.244 \times 10^6$	$2.259 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	-2894.68	-3130.3	-3140.6	-3120.1
$\bar{w}_2$	-34.942	-38.947	-39.102	-38.792
$\bar{w}_3$	-107.57	-120.98	-121.47	-120.50
$h_{x0}$	26.620	26.615	26.607	26.624
$h_{xL}$	5.7286	5.7642	5.7227	5.8057
$\bar{h}_1$	0.	$-4.3274 \times 10^{-14}$	$-6.9097 \times 10^{-14}$	$-1.74509 \times 10^{-14}$
$a$	721.65	720.12	718.81	721.42
$b$	0.005	0.00500	0.00499	0.00501

**Tabela 6.32 - CASO 4**

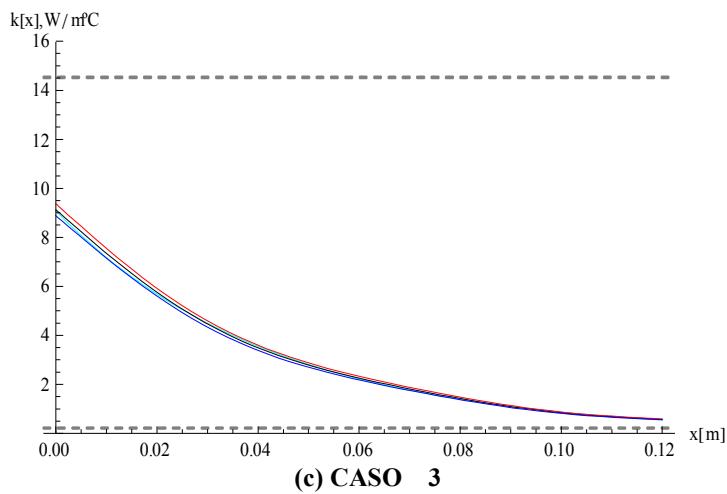
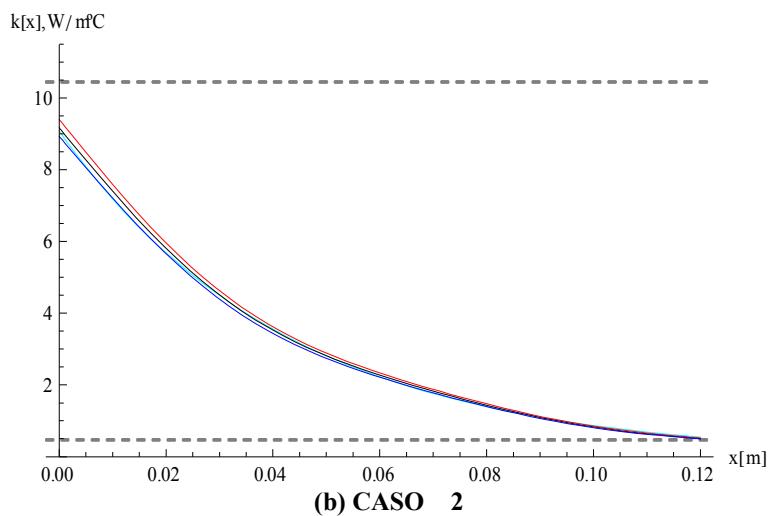
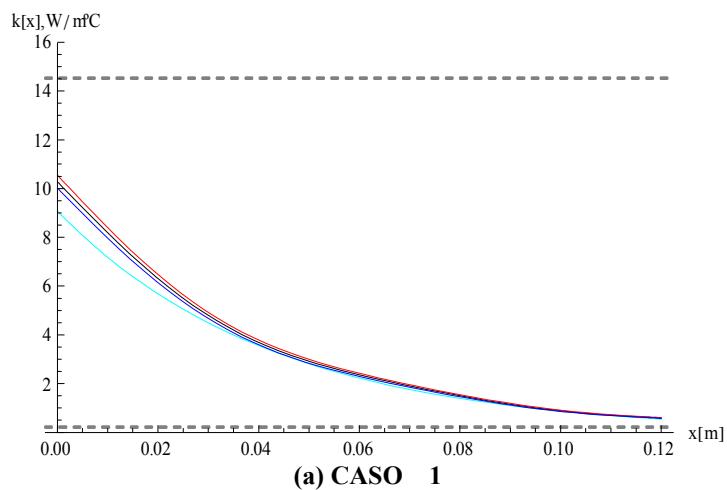
<b>Dados de Entrada das Estimativas</b>					
<b>P</b>	<b>Priori</b>	<b>Exato</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Inicial</b>
$k_{x0}$	Normal	9.0780	0.463	10.440	8.6157
$k_{xL}$	Normal	0.545	0.463	10.440	0.5028
$\bar{k}_1$	Uniforme	-0.6677	-3.111	3.111	-0.7256
$\bar{k}_2$	Uniforme	-0.1111	-0.778	0.778	-0.1082
$\bar{k}_3$	Uniforme	-0.04091	-1.037	1.037	-0.04433
$w_{x0}$	Normal	$2.701 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.686 \times 10^6$
$w_{xL}$	Normal	$2.226 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.282 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	Uniforme	-2894.68	-378487.0	378487.0	-2810.39
$\bar{w}_2$	Uniforme	-34.942	-94621.8	94621.8	-33.045
$\bar{w}_3$	Uniforme	-107.57	-126162.0	126162.0	-104.67
$h_{x0}$	Normal	26.620	13.310	53.241	26.601
$h_{xL}$	Normal	5.7286	2.8643	11.457	6.2323
$\bar{h}_1$	Uniforme	0.	$-3 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-12}$	0.
$a$	Uniforme	721.65	0	1 237.1	700.89
$b$	Uniforme	0.005	0	0.1	0.00521

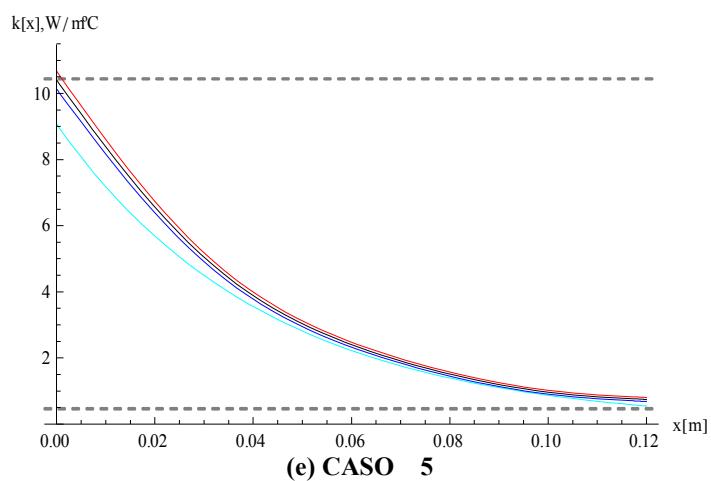
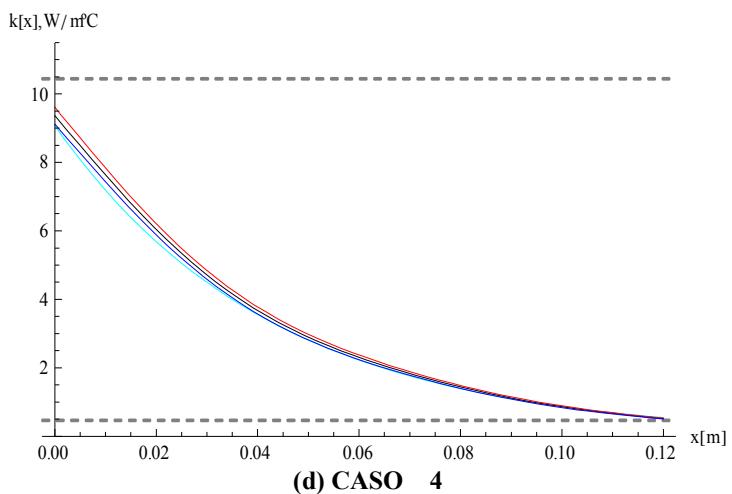
<b>Dados de Saída das Estimativas</b>				
<b>P</b>	<b>Exato</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	9.0780	9.3645	9.3143	9.4147
$k_{xL}$	0.545	0.5186	0.5165	0.5206
$\bar{k}_1$	-0.6677	-0.6742	-0.6783	-0.6701
$\bar{k}_2$	-0.1111	-0.1015	-0.1024	-0.1006
$\bar{k}_3$	-0.04091	-0.02804	-0.02962	-0.02647
$w_{x0}$	$2.701 \times 10^6$	$2.791 \times 10^6$	$2.771 \times 10^6$	$2.812 \times 10^6$
$w_{xL}$	$2.226 \times 10^6$	$2.290 \times 10^6$	$2.284 \times 10^6$	$2.296 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	-2894.68	-2789.49	-2823.22	-2755.76
$\bar{w}_2$	-34.942	-31.272	-31.595	-30.950
$\bar{w}_3$	-107.57	-107.78	-111.17	-104.39
$h_{x0}$	26.620	26.551	26.540	26.562
$h_{xL}$	5.7286	5.9186	5.8944	5.9429
$\bar{h}_1$	0.	$1.316 \times 10^{-15}$	$-9.167 \times 10^{-14}$	$9.4302 \times 10^{-14}$
$a$	721.65	710.44	707.54	713.34
$b$	0.005	0.00505	0.00503	0.00506

**Tabela 6.33 - CASO 5**

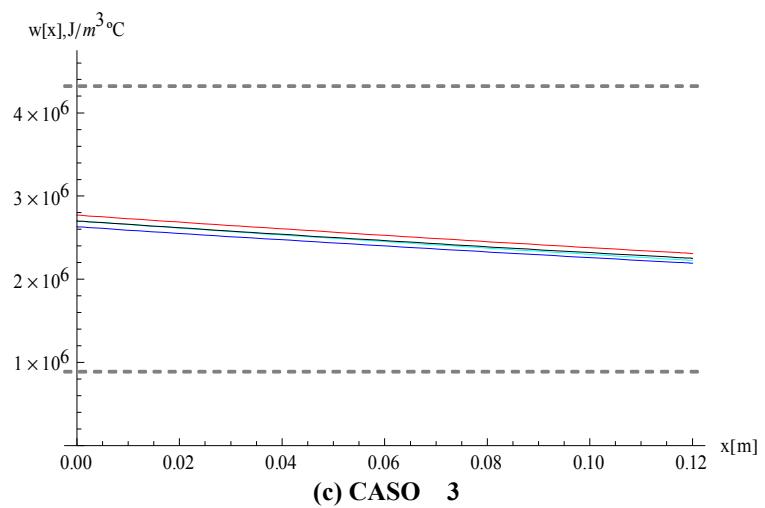
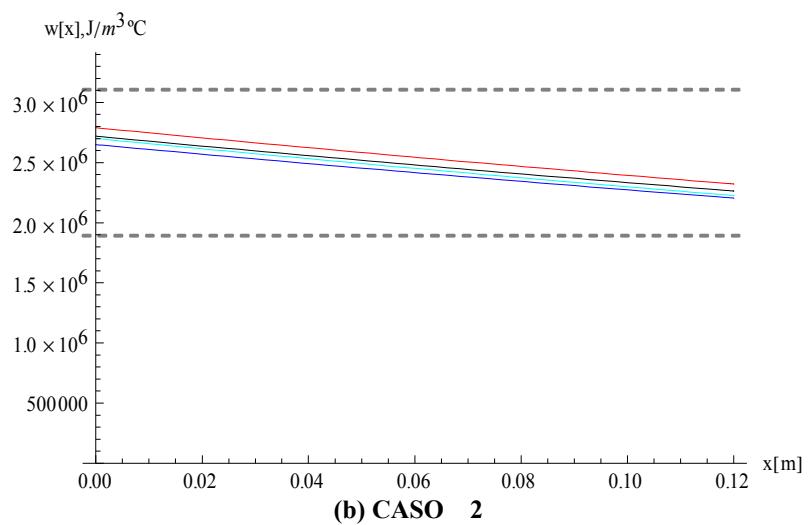
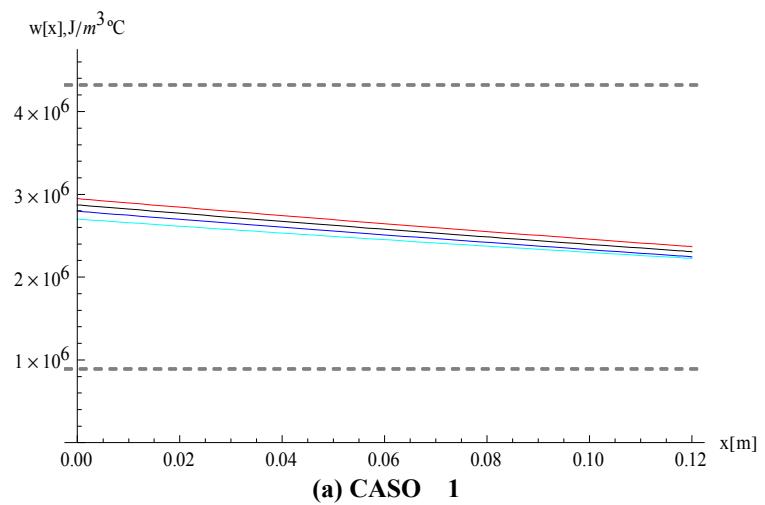
<b>Dados de Entrada das Estimativas</b>					
<b>P</b>	<b>Priori</b>	<b>Exato</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Inicial</b>
$k_{x0}$	Normal	9.0780	0.463	10.440	8.6157
$k_{xL}$	Normal	0.545	0.463	10.440	0.5028
$\bar{k}_1$	Uniforme	-0.6677	-3.111	3.111	-0.7256
$\bar{k}_2$	Uniforme	-0.1111	-0.778	0.778	-0.1082
$\bar{k}_3$	Uniforme	-0.04091	-1.037	1.037	-0.04433
$w_{x0}$	Normal	$2.701 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.686 \times 10^6$
$w_{xL}$	Normal	$2.226 \times 10^6$	$1.892 \times 10^6$	$3.106 \times 10^6$	$2.282 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	Uniforme	-2894.68	-378487.0	378487.0	-2810.39
$\bar{w}_2$	Uniforme	-34.942	-94621.8	94621.8	-33.045
$\bar{w}_3$	Uniforme	-107.57	-126162.0	126162.0	-104.67
$h_{x0}$	Normal	26.620	13.310	53.241	26.601
$h_{xL}$	Normal	5.7286	2.8643	11.457	6.2323
$\bar{h}_1$	Uniforme	0.	$-3 \times 10^{-12}$	$3 \times 10^{-12}$	0.
$a$	Uniforme	721.65	0	1 237.1	700.89
$b$	Uniforme	0.005	0	0.1	0.00521

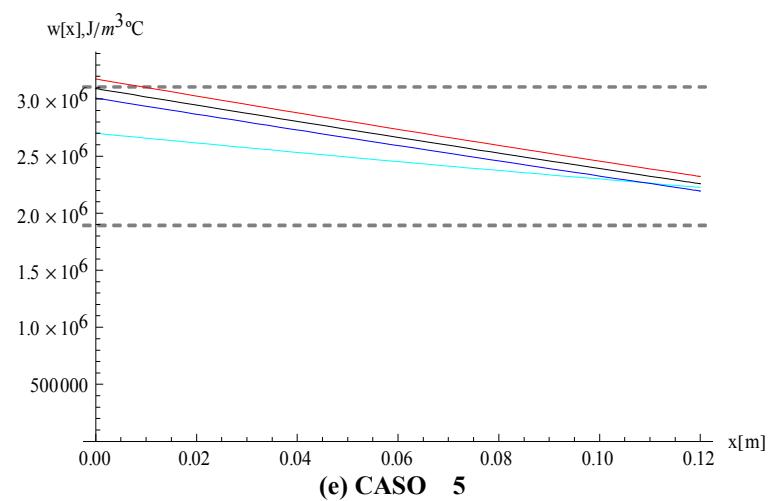
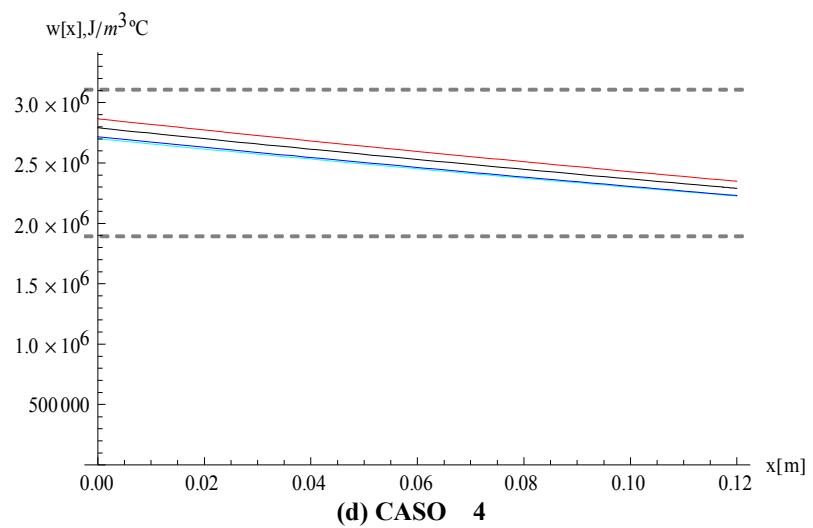
<b>Dados de Saída das Estimativas</b>				
<b>P</b>	<b>Exato</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	9.0780	10.404	10.373	10.434
$k_{xL}$	0.545	0.7424	0.6844	0.8004
$\bar{k}_1$	-0.6677	-0.8135	-0.8204	-0.8065
$\bar{k}_2$	-0.1111	-0.1197	-0.1239	-0.1155
$\bar{k}_3$	-0.04091	-0.03674	-0.03803	-0.03544
$w_{x0}$	$2.701 \times 10^6$	$3.093 \times 10^6$	$3.066 \times 10^6$	$3.119 \times 10^6$
$w_{xL}$	$2.226 \times 10^6$	$2.258 \times 10^6$	$2.232 \times 10^6$	$2.284 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	-2894.68	-2823.6	-2868.9	-2778.3
$\bar{w}_2$	-34.942	-32.303	-33.446	-31.160
$\bar{w}_3$	-107.57	-110.12	-111.94	-108.30
$h_{x0}$	26.620	26.434	26.430	26.439
$h_{xL}$	5.7286	6.2039	6.1981	6.2097
$\bar{h}_1$	0.	$-4.700 \times 10^{-14}$	$-1.397 \times 10^{-13}$	$4.574 \times 10^{-14}$
$a$	721.65	677.37	674.51	680.23
$b$	0.005	0.00519	0.00517	0.00520



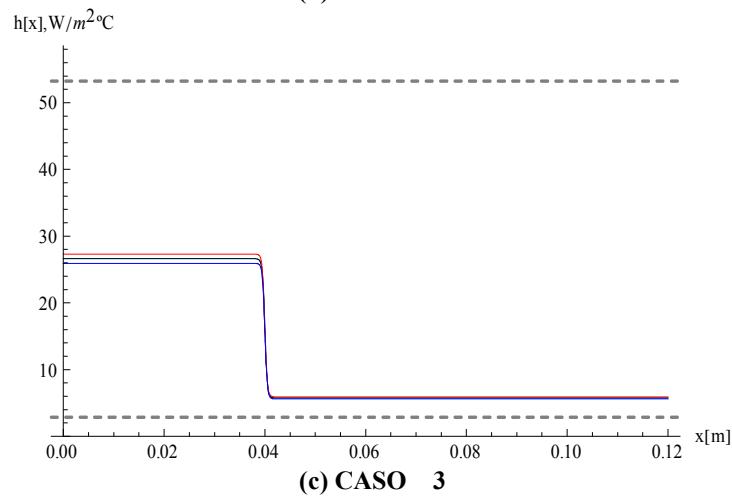
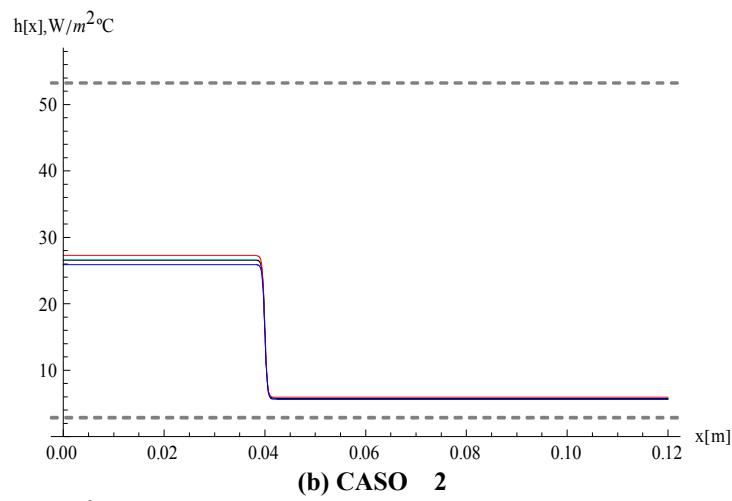
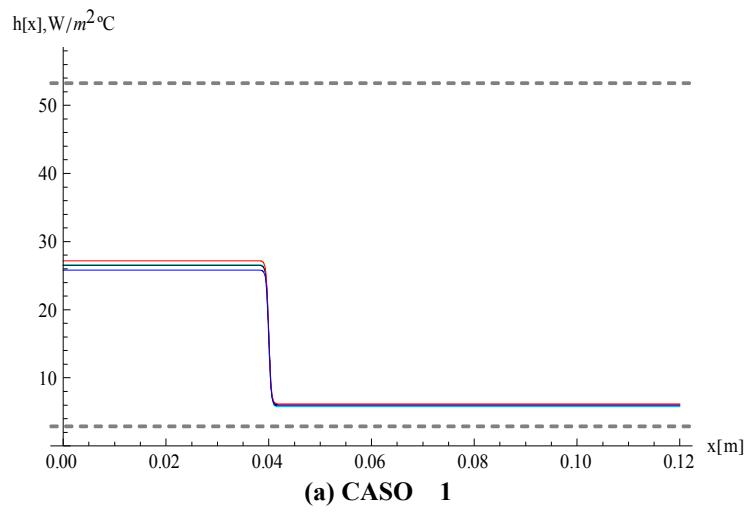


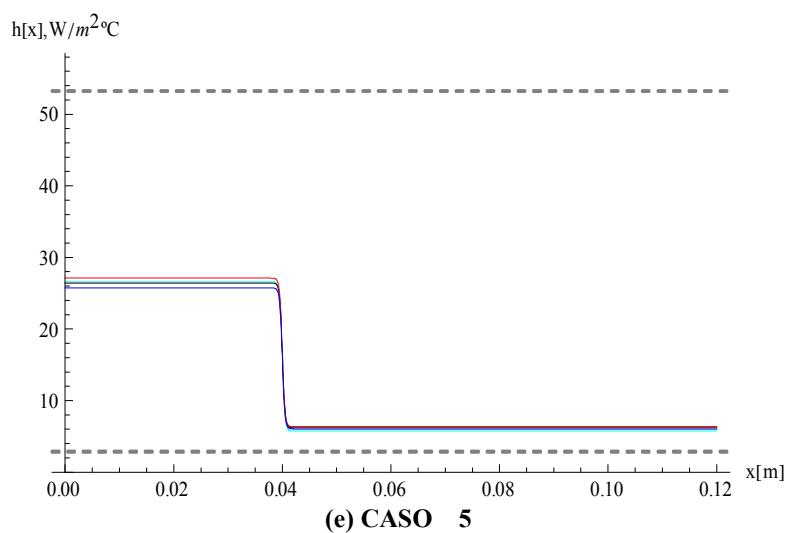
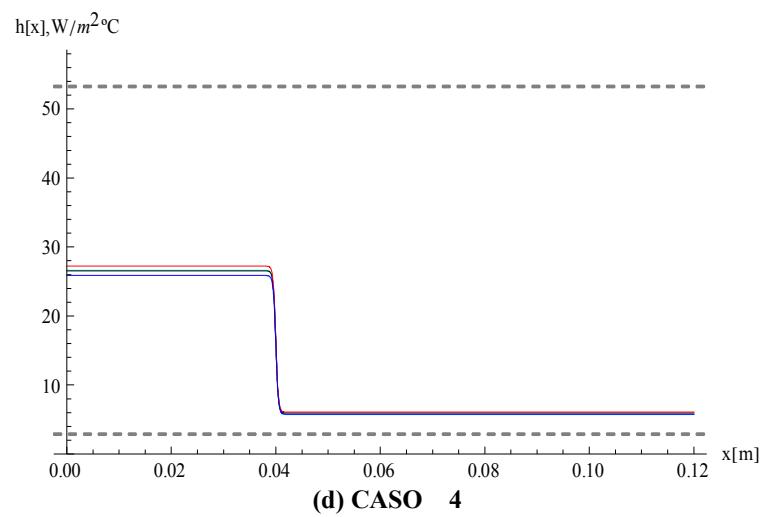
**Figura 6.42 - Condutividade Térmica Estimada  $k(x)$  – curva preta, intervalos de confiança máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata**



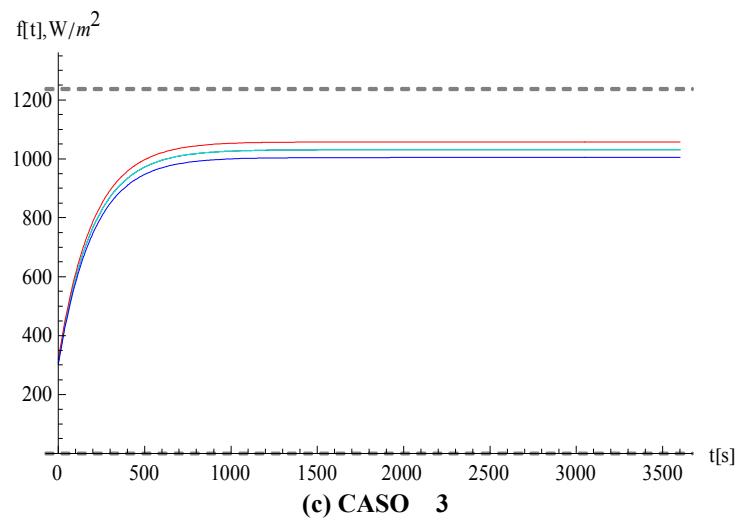
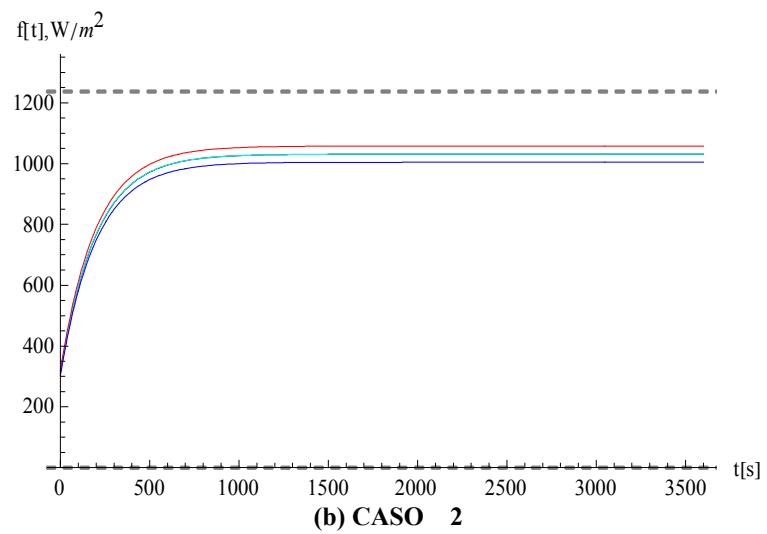
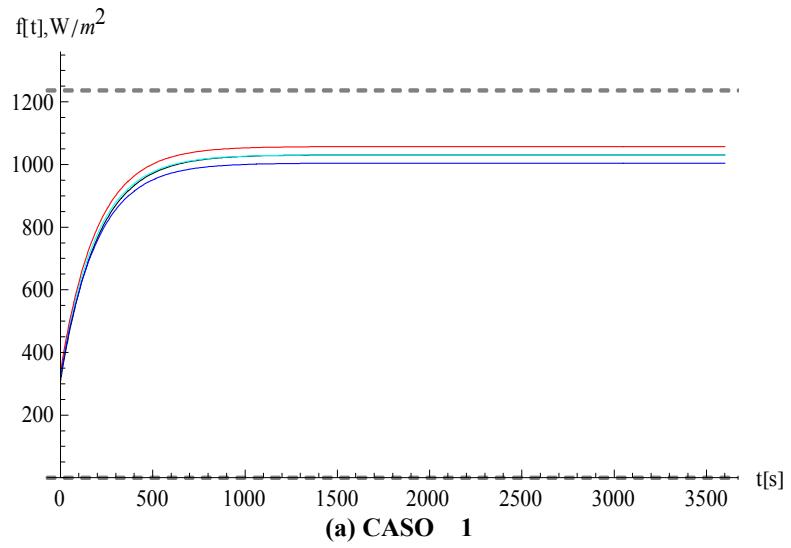


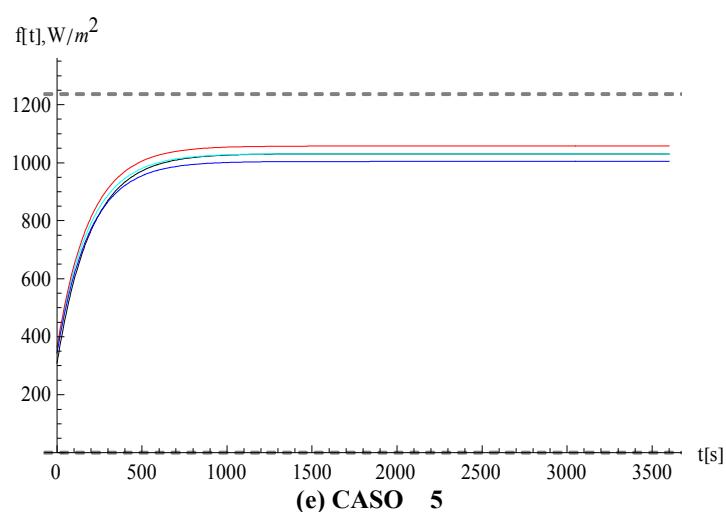
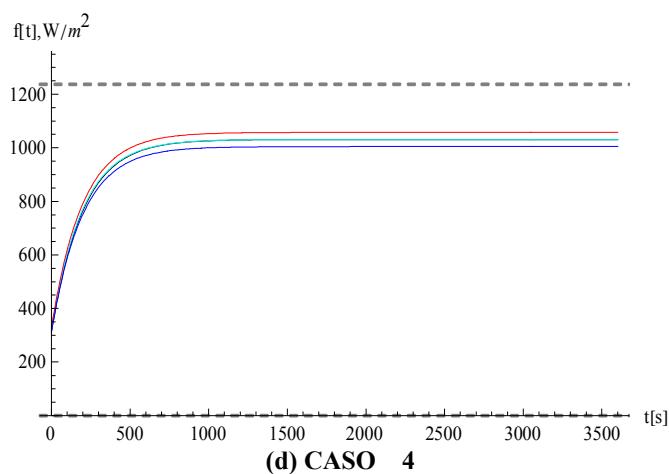
**Figura 6.43 - Capacidade Térmica Estimada –  $w(x)$  – curva preta, intervalos de confiança máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata**



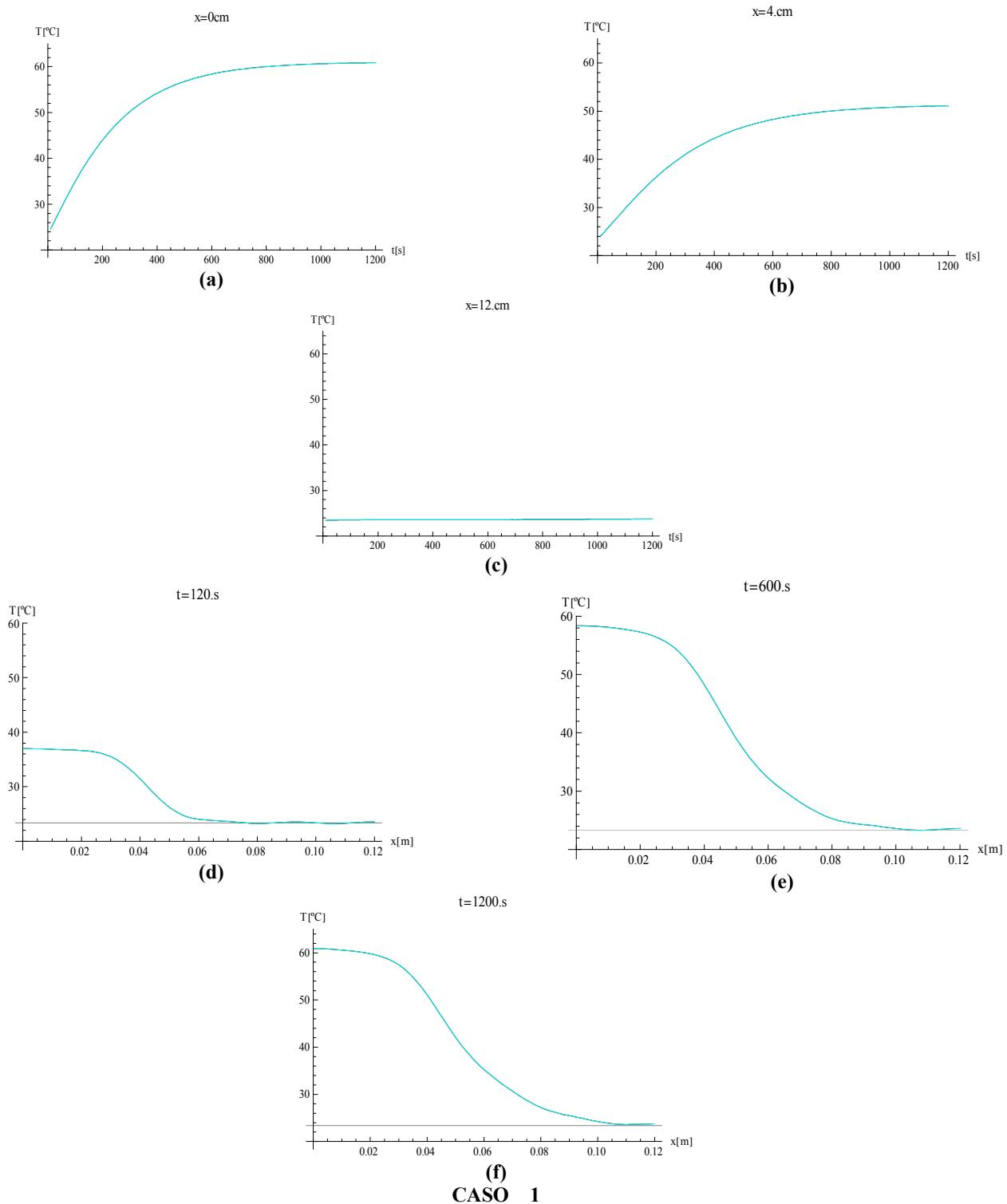


**Figura 6.44 - Coef. Transferência de Calor Estimado –  $h(x)$  – curva preta, intervalos de confiança máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata**

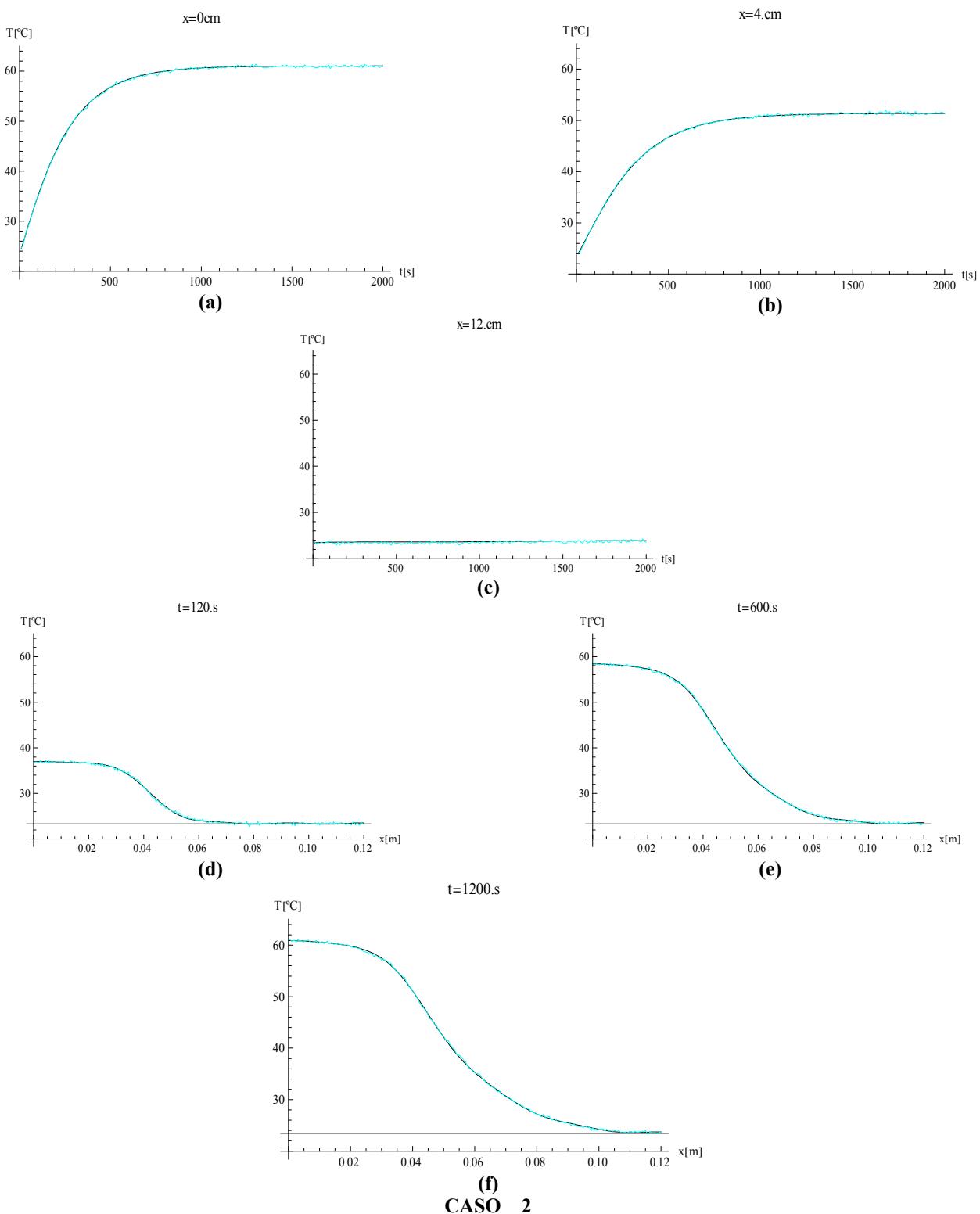




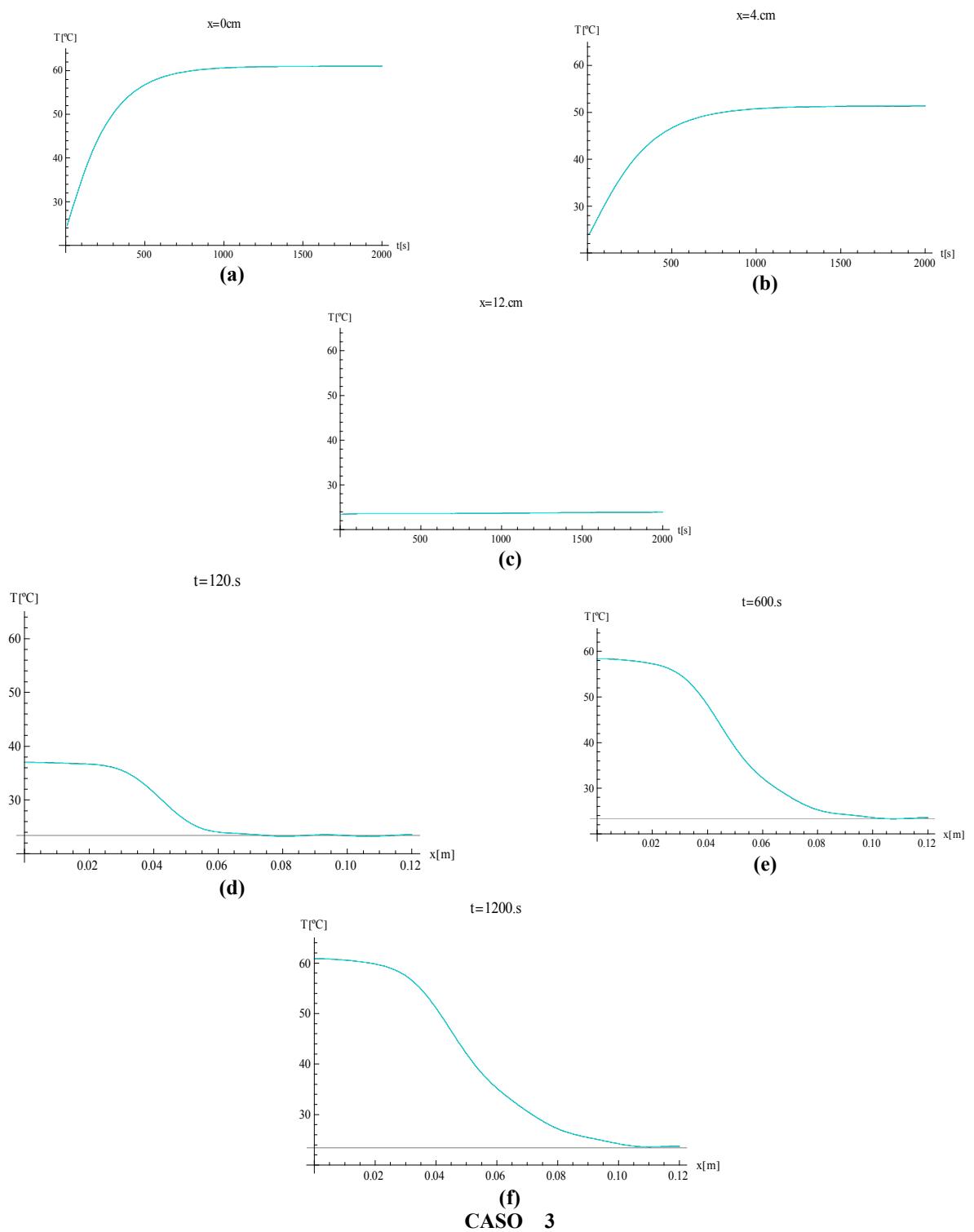
**Figura 6.45 - Partição do Fluxo de calor no tempo –  $f(t)$  – curva preta, intervalos de confiança máximos e mínimos (curvas vermelha e azul); curva cyan – função exata**



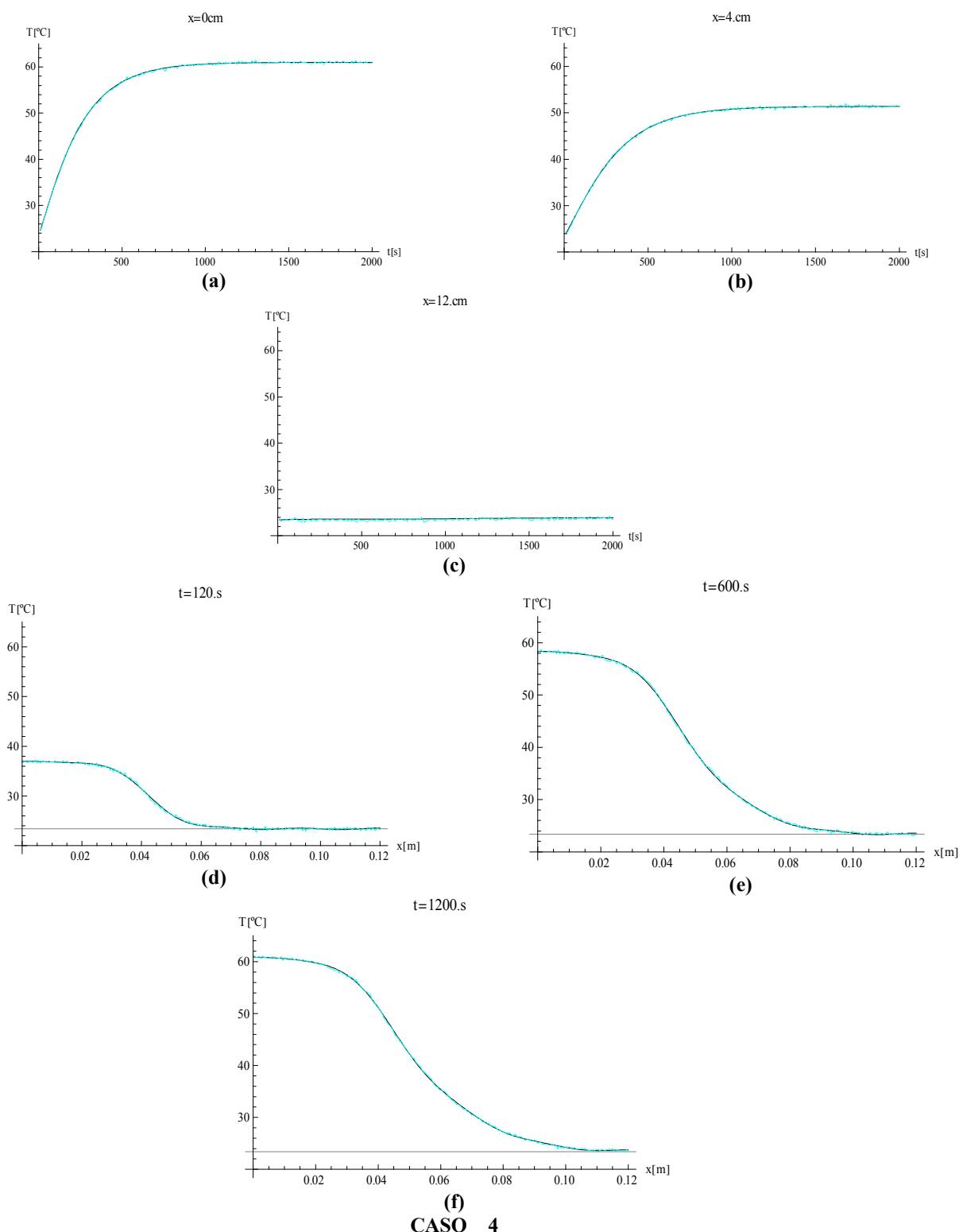
**Figura 6.46 – Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta), para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm; para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;**



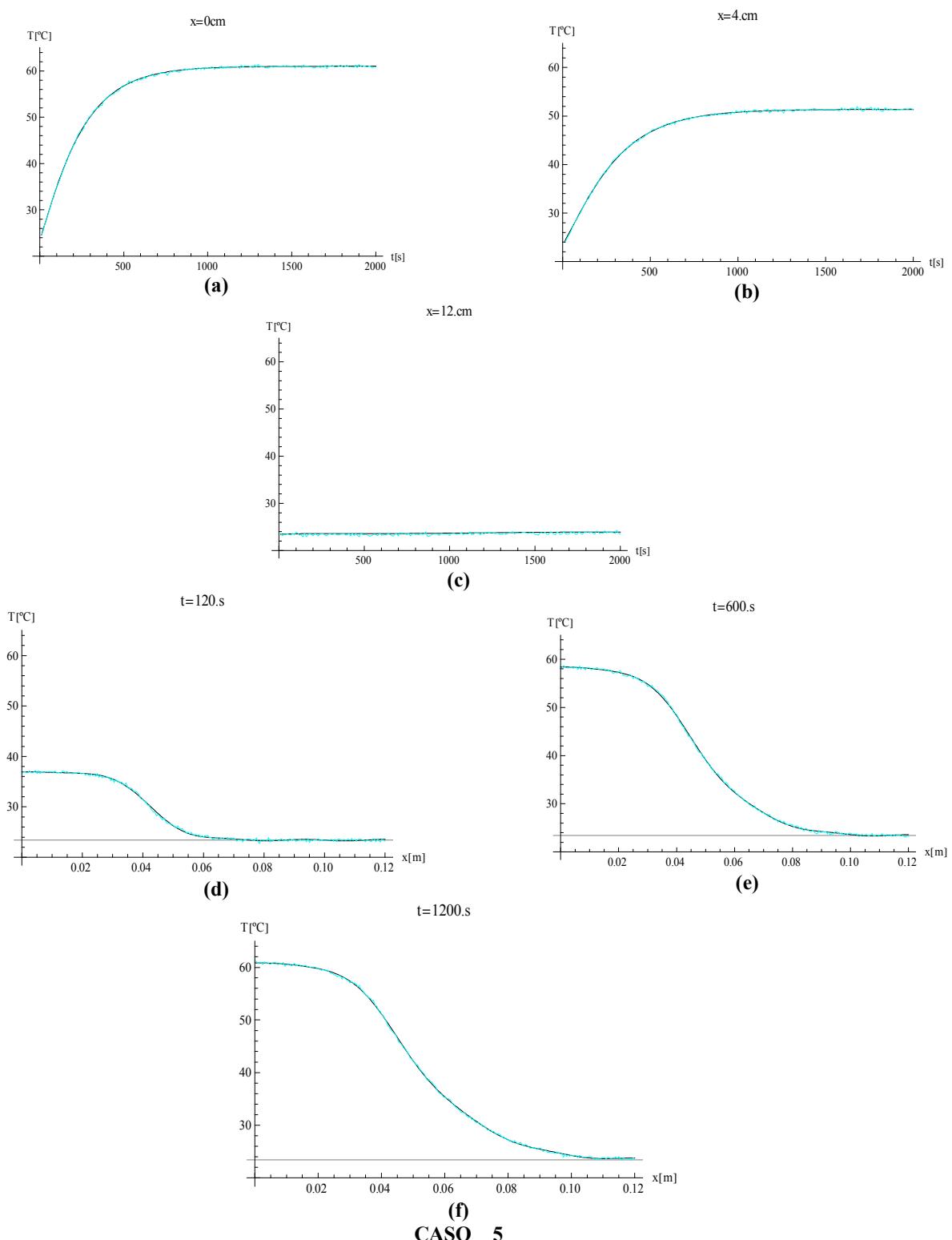
**Figura 6.47– Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm; para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;**



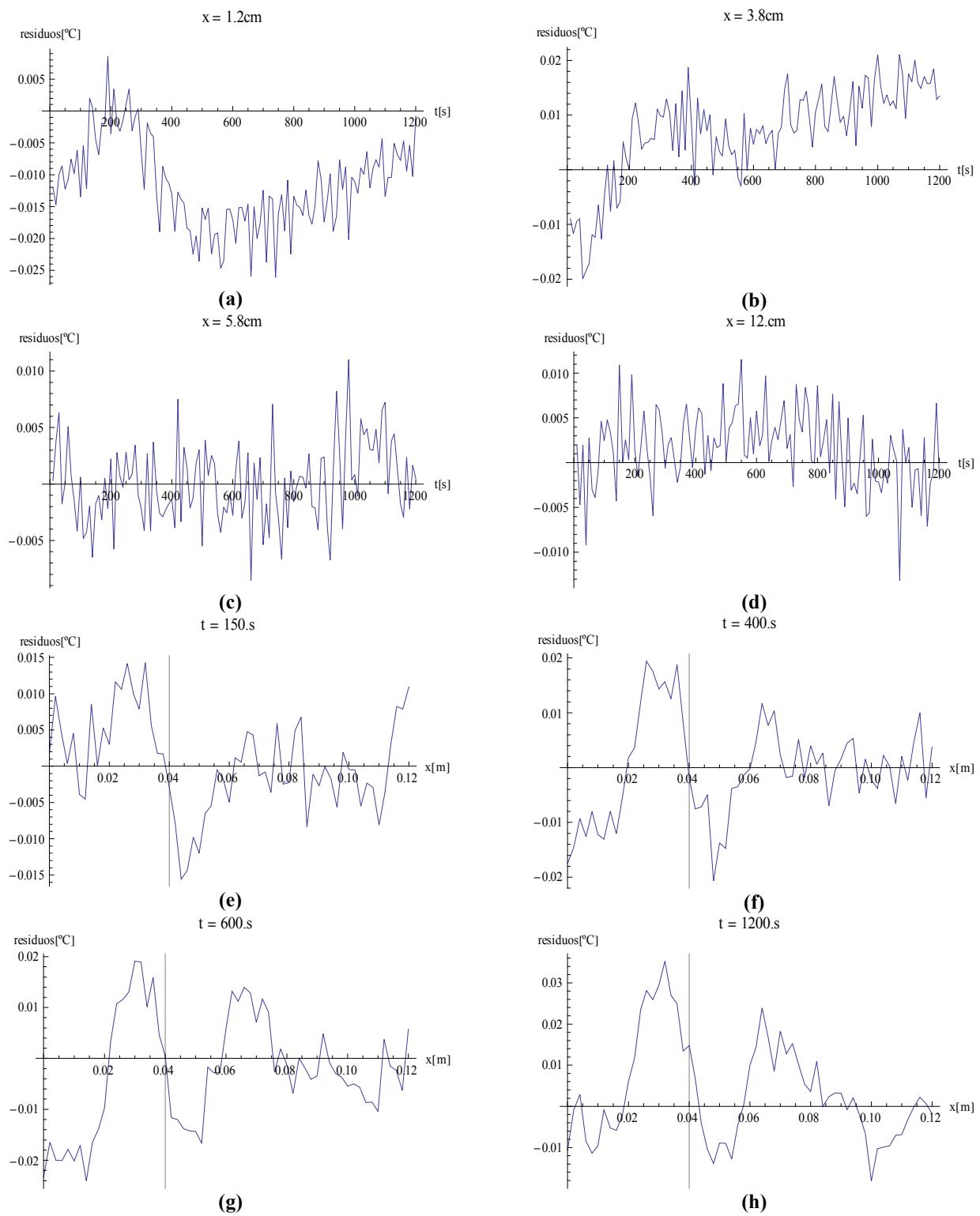
**Figura 6.48– Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm; para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;**



**Figura 6.49 – Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm; para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;**



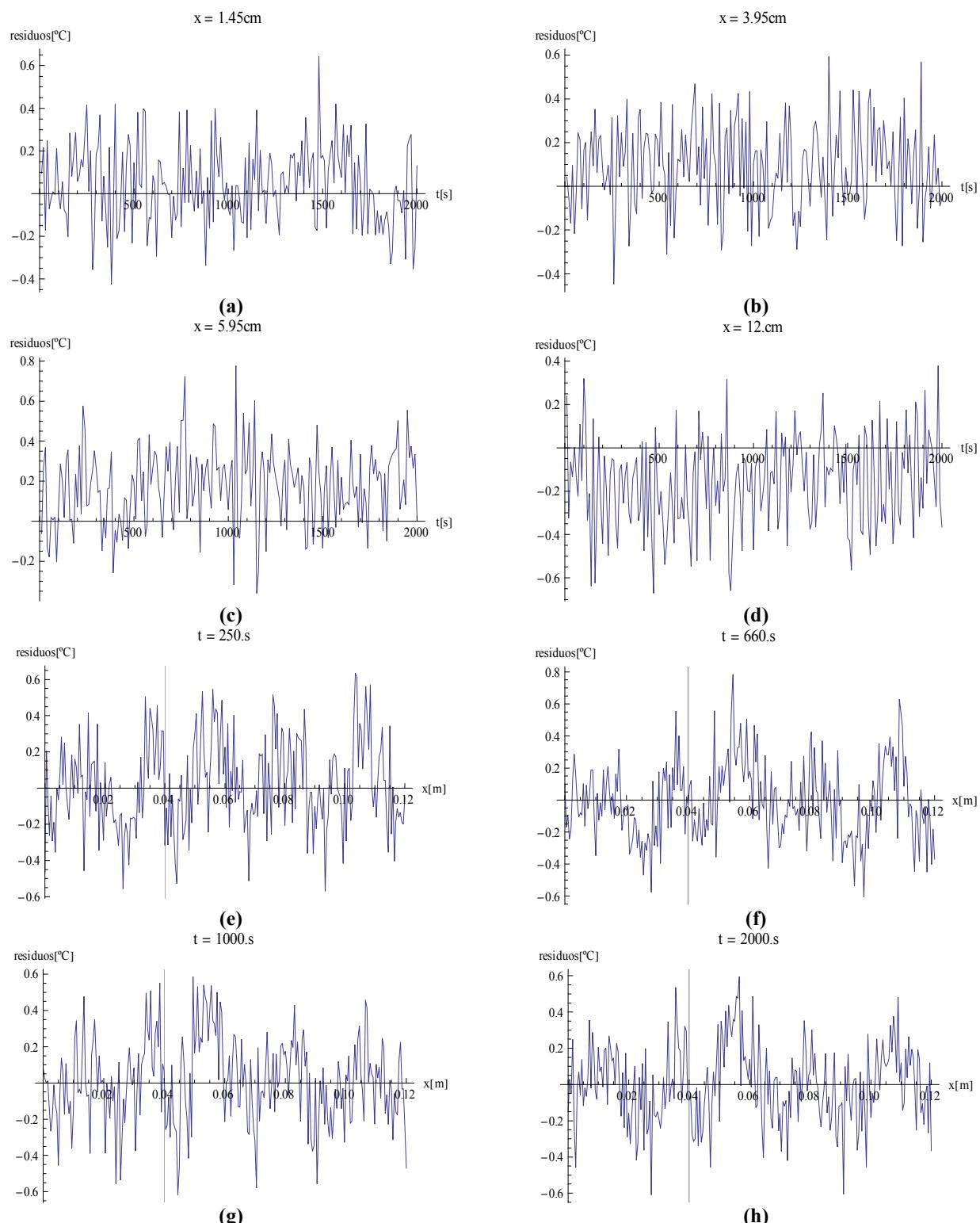
**Figura 6.50 – Comparação entre as Temperatura Experimental (curva cyan) e a Temperatura Estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 0cm; (b) 4cm; (c) 12cm; para três diferentes tempos: (d) 120s; (e) 600s; (f) 1200s;**



**Figura 6.51. CASO 1**

**Figura 6.51.a-d – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

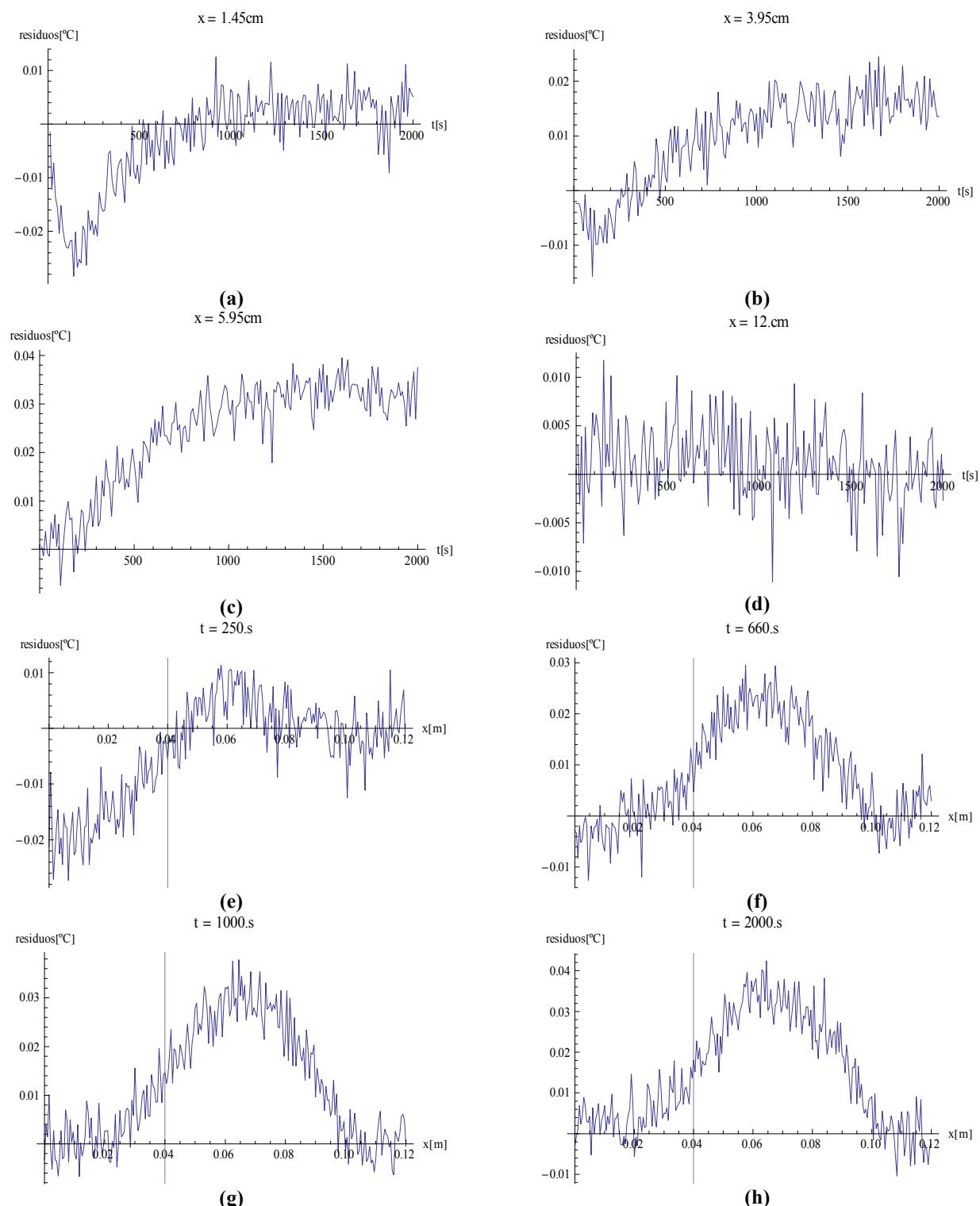
**Figura 6.51.e-h – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**



**Figura 6.52. CASO 2**

**Figura 6.52.a-d – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

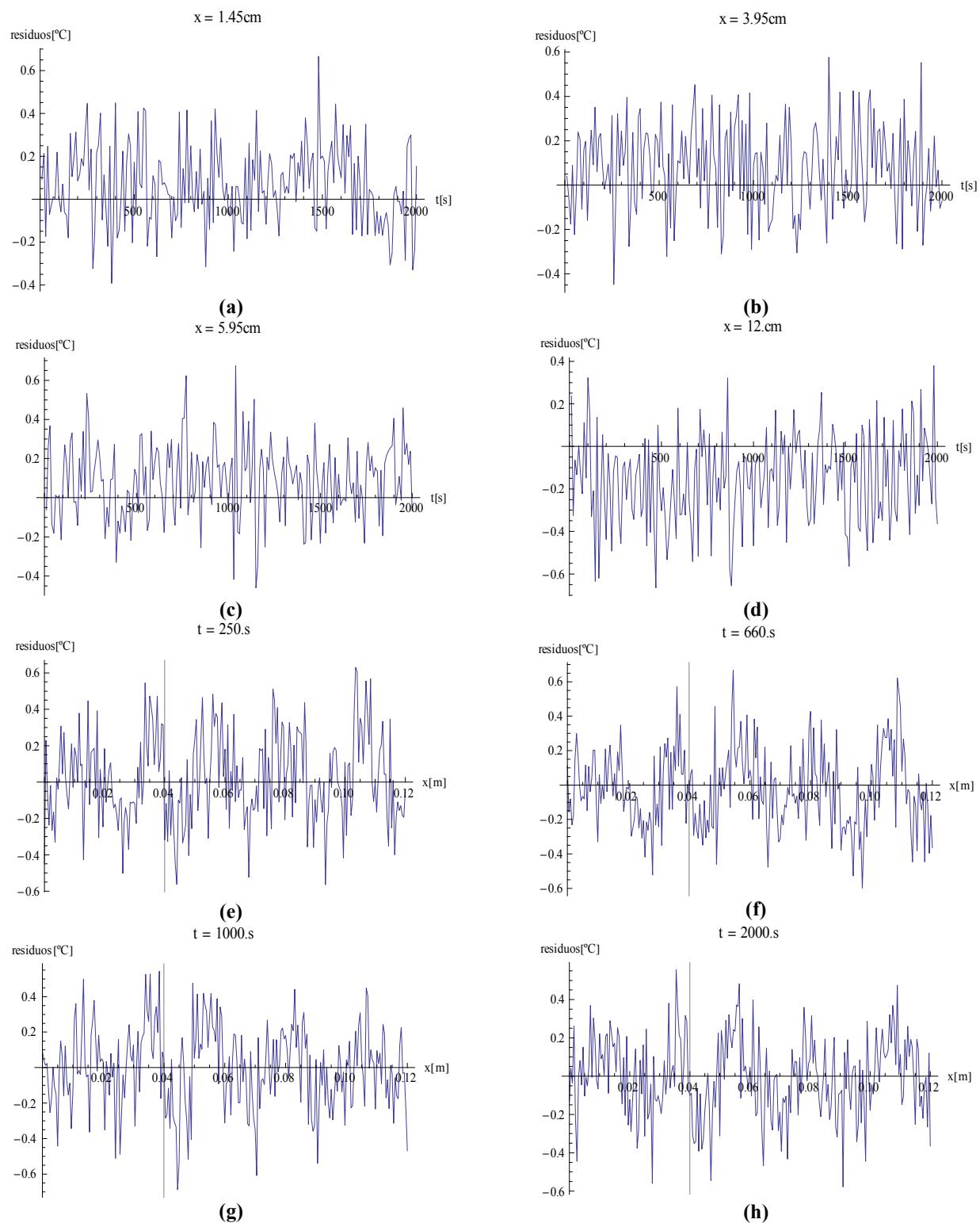
**Figura 6.52.e-h – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**



**Figura 6.53. CASO 3**

**Figura 6.53.a-d – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

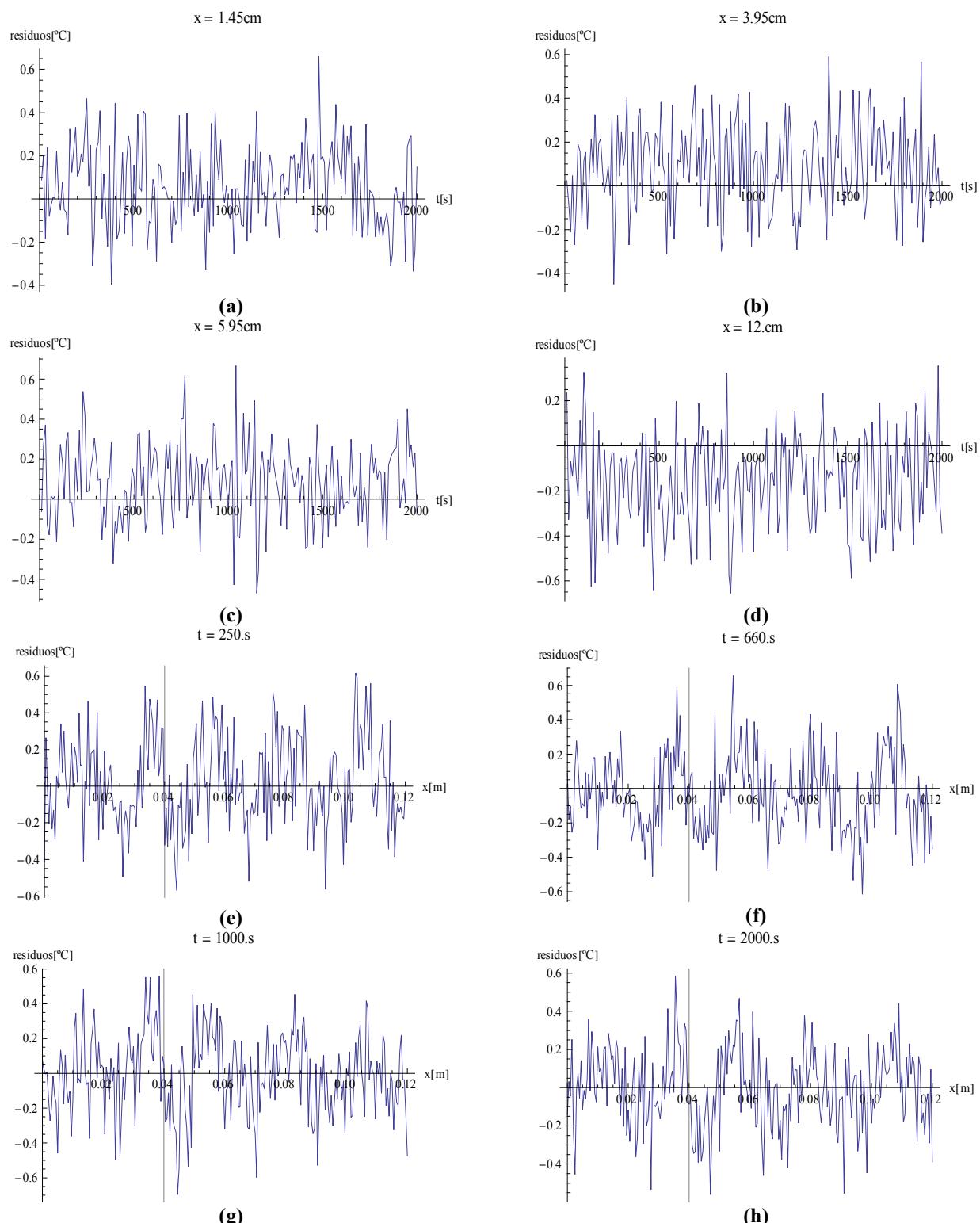
**Figura 6.53.e-h – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**



**Figura 6.54. CASO 4**

**Figura 6.54.a-d – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

**Figura 6.54.e-h – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**



**Figura 6.55. CASO 5**

**Figura 6.55.a-d – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

**Figura 6.55.e-h – Resíduos entre as Temperaturas Estimadas e as Experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**

### **6.3. Experimentos com Termografia por Câmera de Infravermelho**

Os resultados experimentais apresentados nesta seção demonstram a utilização da técnica não-intrusiva de medição de temperaturas por termografia de infravermelho, e sua utilização na análise de problemas inversos, através da realização de dois experimentos em condução de calor, utilizando a bancada e o procedimento experimental apresentados no capítulo 5 deste trabalho.

Os primeiros resultados experimentais aqui relatados têm o objetivo de demonstrar a identificação da capacidade térmica e das condições de contorno em um experimento de placas em sanduíche com variação desprezível da temperatura nas coordenadas espaciais, empregando-se placas de alumínio (alta condutividade térmica) de mesmo tamanho que a resistência elétrica. Os resultados experimentais aquisitados pela câmera de infravermelho são então tratados e empregados na solução do problema inverso correspondente, via inferência Bayesiana, a partir da solução numérica do modelo em parâmetros concentrados para o problema direto associado.

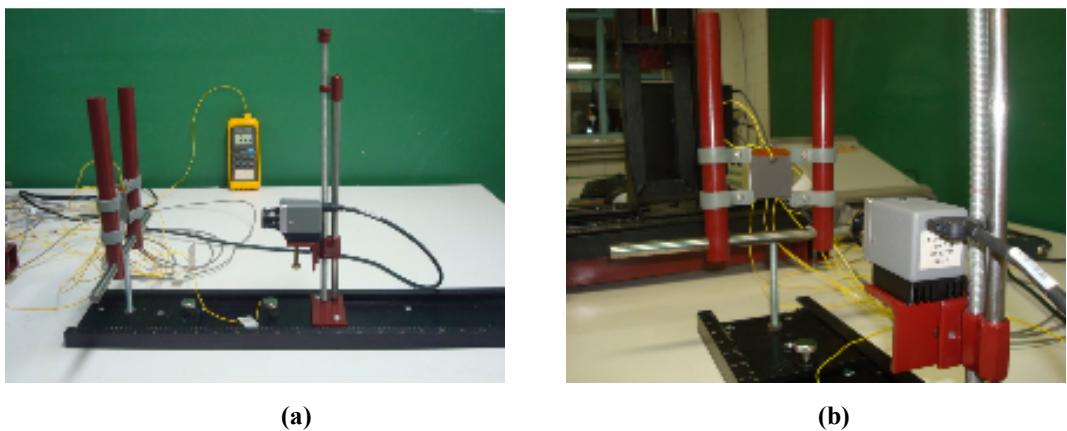
O segundo experimento aborda um problema com variação espacial significativa das temperaturas, utilizando-se placas de baquelite (baixa condutividade térmica) de 4x8 cm, portanto mais longas que a resistência elétrica empregada. Três experimentos distintos são realizados, variando-se a configuração (horizontal ou vertical) e a posição relativa da resistência elétrica (aquecimento superior e inferior). Seleciona-se então um dos experimentos para permitir a identificação das propriedades termofísicas e condições de contorno simultaneamente, novamente via inferência Bayesiana, e desta feita empregando o método de transformação integral na solução do problema direto.

### **6.3.1. Estimativa de Capacidade Térmica e Condições de Contorno em Placas de Alumínio**

Para o experimento com as placas de alumínio, utilizou-se duas placas quadradas de espessura de 3mm e de 40 mm de lado. As imagens neste experimento foram feitas com as placas na posição vertical, de forma frontal. O aquecimento das placas foi feito com uma resistência de  $38.18\Omega$ , quadrada e de mesmas dimensões das placas de alumínio, instalada entre as duas placas. Para melhorar o contato entre a resistência e as placas utilizou-se uma fina camada de pasta térmica. Seis termopares do tipo "K" foram fixados com epoxy nas placas, sendo 1 termopar fixado na placa voltada para a câmera e 5 termopares fixados na placa de trás. Depois de feita a fixação dos 6 termopares, a placa voltada para a câmera recebeu uma pintura em grafite ( $\epsilon \approx 0.97$ ) em toda a sua superfície.

As figuras 6.56.a-b apresentam as placas de alumínio montadas na bancada experimental e o posicionamento horizontal da câmera com relação as placas. As figuras 6.57.c-d fazem a identificação dos termopares neste experimento. As aquisições feitas tanto pelo Agilent quanto pela câmera foram efetuadas a cada 10 segundos. A descrição detalhada do procedimento experimental foi apresentada no capítulo 5 deste trabalho.

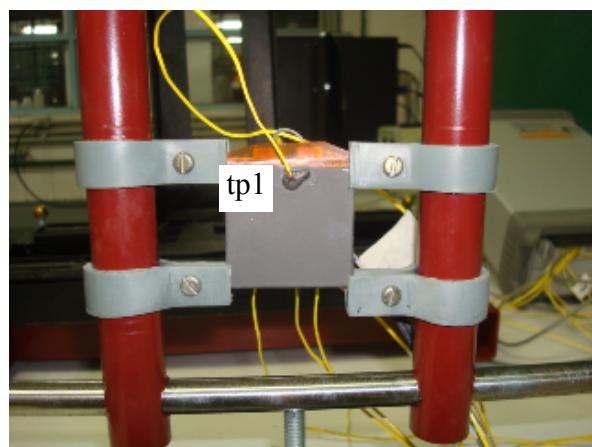
As figuras 6.57.a-b apresentam as temperaturas medidas pelos 5 termopares da placa de trás (sem pintura). Pode-se observar que todos os termopares apresentam temperaturas em torno dos  $55^{\circ}\text{C}$  no regime permanente. Nota-se também que as variações de temperatura entre os termopares são ligeiramente mais significativas na direção horizontal (tp2, tp4 e tp6) que na vertical (tp3, tp5 e tp6). A figura 6.57.c compara as temperaturas aquisitadas pelo termopar da placa da frente, *tp1* comparado ao da placa de trás, *tp3*, ambos situados na mesma posição só que em placas diferentes. Como esperado, as temperaturas da placa de trás (sem pintura  $\epsilon \approx 0.10$ ) são mais altas que as temperaturas da placa da frente (com pintura de grafite,  $\epsilon \approx 0.97$ ). Isso se dá devido à diferença entre as emissividades das duas placas, levando à partição assimétrica do fluxo de calor gerado pela resistência elétrica.



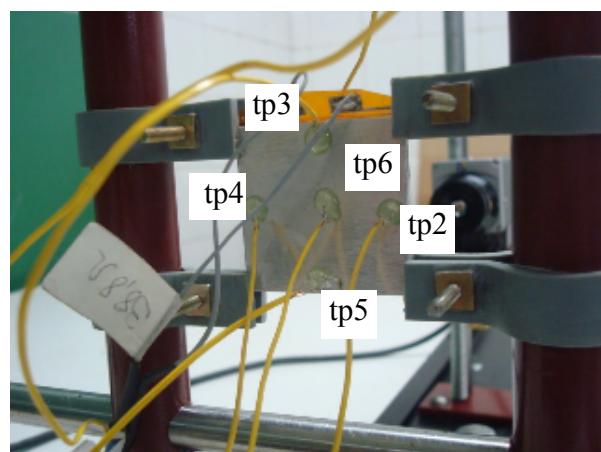
(a)

(b)

**Figura 6.56 – Experimento com as placas de alumínio, com detalhe do dispositivo de posicionamento horizontal da câmera.**

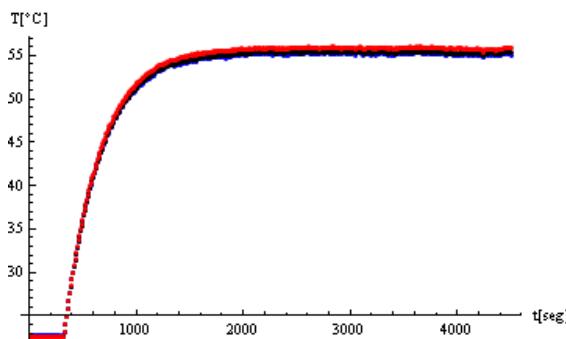


(c)

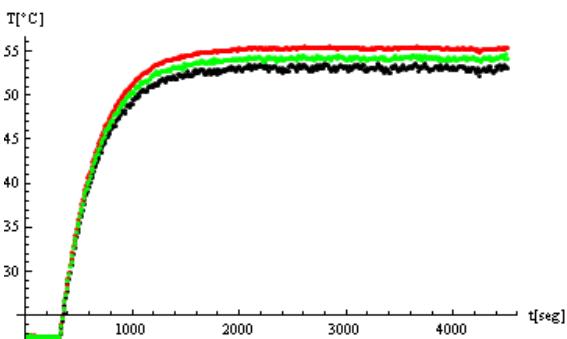


(d)

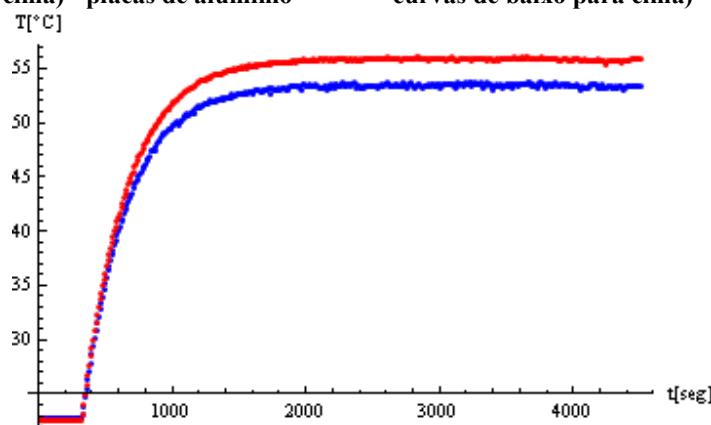
**Figura 6.56 – Identificação dos termopares no experimento de placa vertical**



**Figura 6.57.a – Temperaturas nos termopares da vertical tp5, tp6 e tp3 (respectivamente as curvas de baixo para cima) - placas de alumínio**



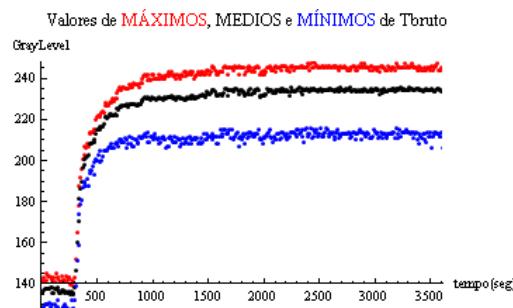
**Figura 6.57.b – Temperaturas nos termopares da horizontal tp2, tp6 e tp4 (respectivamente as curvas de baixo para cima) - placas de alumínio**



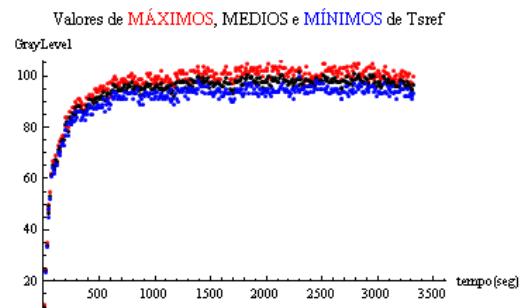
**Figura 6.57.c – Comparação entre as temperaturas do termopar do topo da placa de trás (tp3 – curva vermelha) e do topo da placa da frente (tp1 – curva azul) no experimento com as placas de alumínio**

A figura 6.58.a apresenta a variação de *digital level* da placa voltada para a câmera. Já a figura 6.58.b mostra a faixa estreita dos valores máximos, mínimos e médios do *digital level* na região do termopar de referência. Os valores médios em uma matriz de 2x2 pixels são usados na correlação com as temperaturas lidas no termopar.

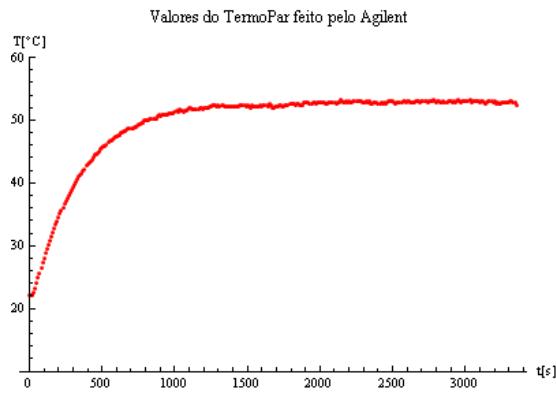
As figuras 6.59.a,b apresentam as duas curvas que foram utilizadas na etapa de correlação do *digital level* com a temperatura. A figura 6.59.b representa os valores médios de *digital level* na região próxima ao termopar de referência, *tp1*. A curva na figura 6.60.a representa a variação da temperatura em graus Celsius aquisitada pelo termopar de referência. Depois de feita a correlação para esta região do termopar de referência, em matriz de 2x2 pixels, aplicou-se esta conversão em toda a placa.



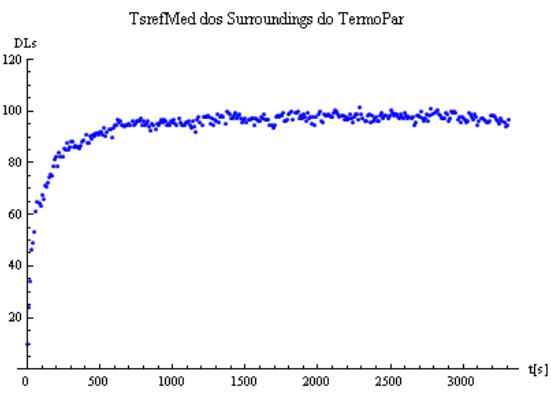
**Figura 6.58.a – Valores máximos, médios e mínimos de *digital level* encontrados na placa voltada para a câmera – placas de alumínio**



**Figura 6.58.b – Valores máximos, médios e mínimos de *digital level* encontrados na região do termopar de referência–placas de alumínio**

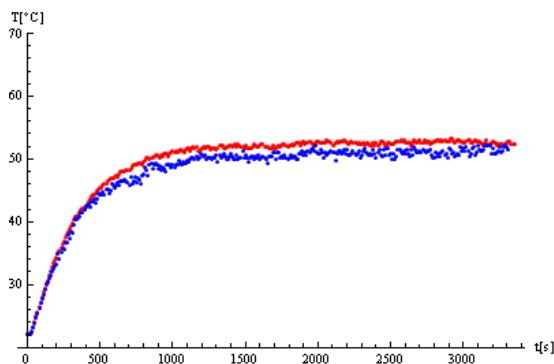


**Figura 6.59.a – Temperaturas aquisitadas pelo termopar *tp1*.**

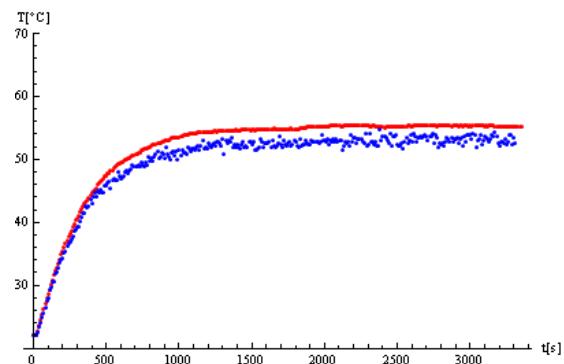


**Figura 6.59.b – *Digital level* médio na região próxima ao termopar *tp1*.**

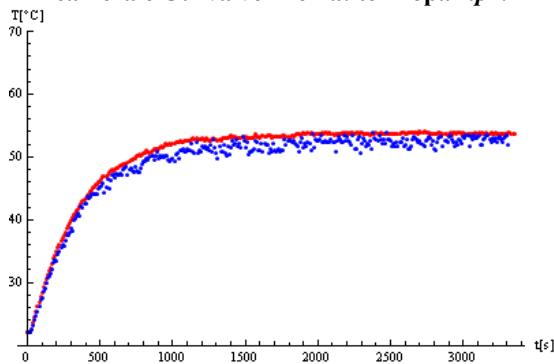
As figuras 6.60.a-e apresentam uma avaliação qualitativa das medidas de temperatura aquisitadas pelos termopares da placa de trás *tp2*, *tp3*, *tp4*, *tp5* e *tp6* em graus Celsius com as temperaturas aquisitadas pela câmera, depois de realizada a conversão, para posições referentes aos termopares na placa da frente. Pode-se observar, o comportamento físico coerente dos resultados encontrados pelos termopares e pela câmera, lembrando que neste caso as temperaturas não são esperadas serem iguais, tendo em vista as diferentes emissividades em cada face e a consequente partição assimétrica do fluxo térmico.



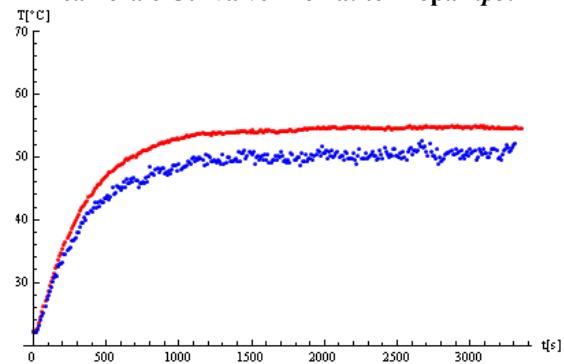
**Figura 6.60.a – Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar tp2.**



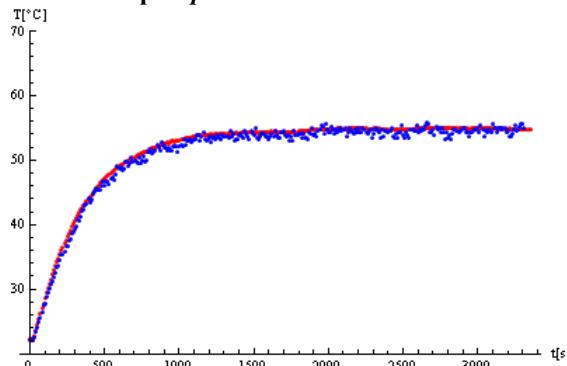
**Figura 6.60.b – Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar tp3.**



**Figura 6.60.c – Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar tp4.**



**Figura 6.60.d – Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar tp5**



**Figura 6.60.e – Comparação entre as temperaturas em graus Celsius. Curva azul: câmera e Curva vermelha: termopar tp6**

Observa-se que as temperaturas medidas com a câmera estão consistentemente abaixo daquelas aquisitadas pelos termopares, como fisicamente esperado, uma vez que a face onde estão instalados os termopares tem uma emissividade menor. Nota-se também que o desvio mais significativo ocorre na posição do termopar mais abaixo na placa (tp5).

A formulação matemática para a temperatura média na superfície da placa para este experimento com as placas de alumínio, após a aproximação por parâmetros concentrados, é apresentada nas equações abaixo:

$$\rho C_p L_z \frac{dT_m(t)}{dt} = h(T_{amb} - T_m(t)) + \varepsilon \sigma (T_{amb}^4 - T_m^4(t)) + f(t)q_w, \quad t > 0 \quad (6.35.a)$$

$$T_m(0) = T_{amb} \quad (6.35.b)$$

onde a variação temporal do fluxo de calor entre as duas placas é escrita como

$$f(t) = c(1 - \text{Exp}[-bt]) \quad (6.36)$$

Pela lei de resfriamento de Newton, e um coeficiente de transferência de calor constante, tem-se que o comportamento temporal do fluxo deve ser semelhante ao da temperatura. Por isto, assumiu-se a forma funcional exponencial para a variação do fluxo de calor entre as duas placas dada pela equação (6.36). Nesta etapa os coeficientes da função  $f(t)$  foram considerados desconhecidos e foram estimados através da solução do problema inverso com os resultados experimentais, onde  $q_w$  é conhecido e dado pela potência dissipada na resistência dividida pela área da face da resistência:

São apresentados a seguir os resultados das estimativas através do procedimento inverso de inferência Bayesina via MCMC, utilizando como dados experimentais as temperaturas obtidas pela técnica da termografia por infravermelho para o experimento com as placas de alumínio. Para a estimativa em questão os parâmetros são  $\rho C_p, h, b, c, \varepsilon$ , apresentados na formulação matemática para o experimento de alumínio

Os resultados apresentados a seguir fazem uma análise comparativa entre seis diferentes casos de estimativa de parâmetros a partir das temperaturas experimentais aquisitadas com a câmera de infravermelho. As tabelas 6.34 e 6.35 resumem os casos estudados, os valores iniciais e o tipo de *priori* utilizados no procedimento de estimativa, assim como os limites mínimos e máximos de procura para cada parâmetro.

Para os quatro primeiros casos, tem-se a análise inversa sendo realizada na estimativa de 5 parâmetros, sendo eles a capacidade térmica volumétrica do alumínio, o

coeficiente de transferência de calor por convecção, dois parâmetros referentes à função que controla a variação do fluxo de calor no tempo, e por fim a emissividade da tinta de grafite utilizada na pintura da placa de alumínio, ou seja ( $\rho Cp$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$ ). Para os dois últimos casos analisou-se a influência na estimativa para o caso de adotarmos como conhecido o valor da emissividade, com o valor fornecido pelo fabricante da tinta de grafite, e realizou-se a estimativa dos quatro parâmetros restantes.

Em todos os casos utilizou-se de priori não-informativa (Uniforme) na estimativa do parâmetro “ $b$ ”; para os demais parâmetros analisou-se através dos casos, a influência na escolha de uma *priori* Gaussiana centrada nos valores esperados para cada um dos parâmetros com um desvio padrão que variou até 20% do valor da sua respectiva média. A tabela 6.34 traz a informação da escolha das *prioris* para cada caso, onde a escolha por *prioris* normais é representada pela letra “N” e por *prioris* uniformes representada pela letra “U”.

Os valores esperados para cada parâmetro, e para alguns casos utilizados como valores iniciais no procedimento de estimativa, são resultantes de: (i) medição pelo método Flash (UNIMET/LTTC), no caso da capacidade térmica da placa ( $\rho Cp$ ); (ii) da análise de correlações para convecção natural em placa plana vertical sujeita a um fluxo de calor prescrito, para o caso do coeficiente de transferência de calor ( $h$ ); (iii) da solução analítica da equação do calor para o regime permanente, para a constante “ $c$ ” da variação do fluxo; (iv) do valor da emissividade fornecida pelo fabricante para a tinta de grafite utilizada na pintura na face da placa de alumínio voltada para a câmera ( $\varepsilon$ ); e (v) da simples média no intervalo de procura para o parâmetro “ $b$ ”, sobre o qual não se tem a princípio informação disponível. Neste sentido, os casos 1 a 3 foram construídos de modo a analisar a influência da utilização de diferentes valores iniciais no procedimento de estimativa.

**Tabela 6.34 – Definição dos dados de entrada para a solução inversa.**

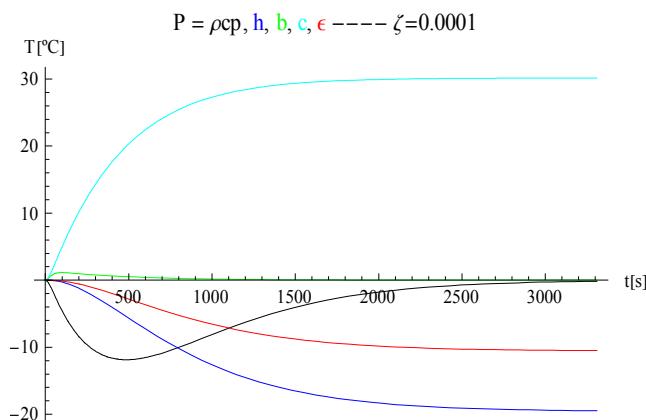
	P	Inicial	Priori
<b>Caso 1</b>	$\rho Cp, h, b, c, \varepsilon$	$P_{\text{esp}}$	N, N, U, N, N
<b>Caso 2</b>	$\rho Cp, h, b, c, \varepsilon$	$P_{\max}$	N, N, U, N, N
<b>Caso 3</b>	$\rho Cp, h, b, c, \varepsilon$	$P_{\text{esp}} + 0.01(P_{\max} - P_{\min})$	N, N, U, N, N
<b>Caso 4</b>	$\rho Cp, h, b, c, \varepsilon$	$P_{\text{esp}}$	U, U, U, U, N
<b>Caso 5</b>	$\rho Cp, h, b, c$	$P_{\text{esp}}$	N, N, U, N
<b>Caso 6</b>	$\rho Cp, h, b, c$	$P_{\text{esp}}$	U, U, U, U

**Tabela 6.35 – Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.**

P	Valor Esperado $P_{\text{esp}}$	Desvio Padrão (caso priori Normal)	Limite Mínimo $P_{\min}$	Limite Máximo $P_{\max}$
$\rho Cp$ [J/m <sup>3</sup> °C]	$2.9799 \times 10^6$	349 249.0	$2.0802 \times 10^6$	$3.8795 \times 10^6$
$h$ [W/m <sup>2</sup> °C]	12.322	2.4640	6.1610	24.644
$b$	0.05	-	0	0.1
$c$	0.5902	0.6040	0	1
$\varepsilon$	0.97	0.0291	0.94	1

Antes de iniciar o procedimento de solução do problema inverso, realizou-se uma análise de sensibilidade do problema inverso utilizando um total de 300 medidas experimentais. A figura 6.61 apresenta os coeficientes de sensibilidade reduzidos do problema de estimativa com relação a cada parâmetro, calculados por um esquema de diferenças centradas como apresentado na equação (6.37) abaixo, para uma perturbação no parâmetro de  $\xi = 10^{-4}$ . Pode-se então perceber nesta figura uma menor sensibilidade do problema para o parâmetro “b” e uma dependência linear entre  $h$  e  $\varepsilon$ .

$$J_{ij} = P_j \frac{\partial T_i}{\partial P_j} = P_j \frac{T_i[P_1, P_2, \dots, P_j + \xi P_j, \dots, P_{NP}] - T_i[P_1, P_2, \dots, P_j - \xi P_j, \dots, P_{NP}]}{2\xi P_j} \quad (6.37)$$



**Figura 6.61 – Analise de sensibilidade dos parâmetros**

A tabela 6.36 e as figuras 6.62 a 6.64 apresentam os resultados das estimativas para os 6 diferentes casos. Na tabela 6.36 tem-se os valores estimados para cada parâmetro e o seus respectivos intervalos com 99% de confiança. Pode-se perceber, pela análise desta tabela, uma boa concordância nas estimativas de todos os parâmetros pelos seis casos.

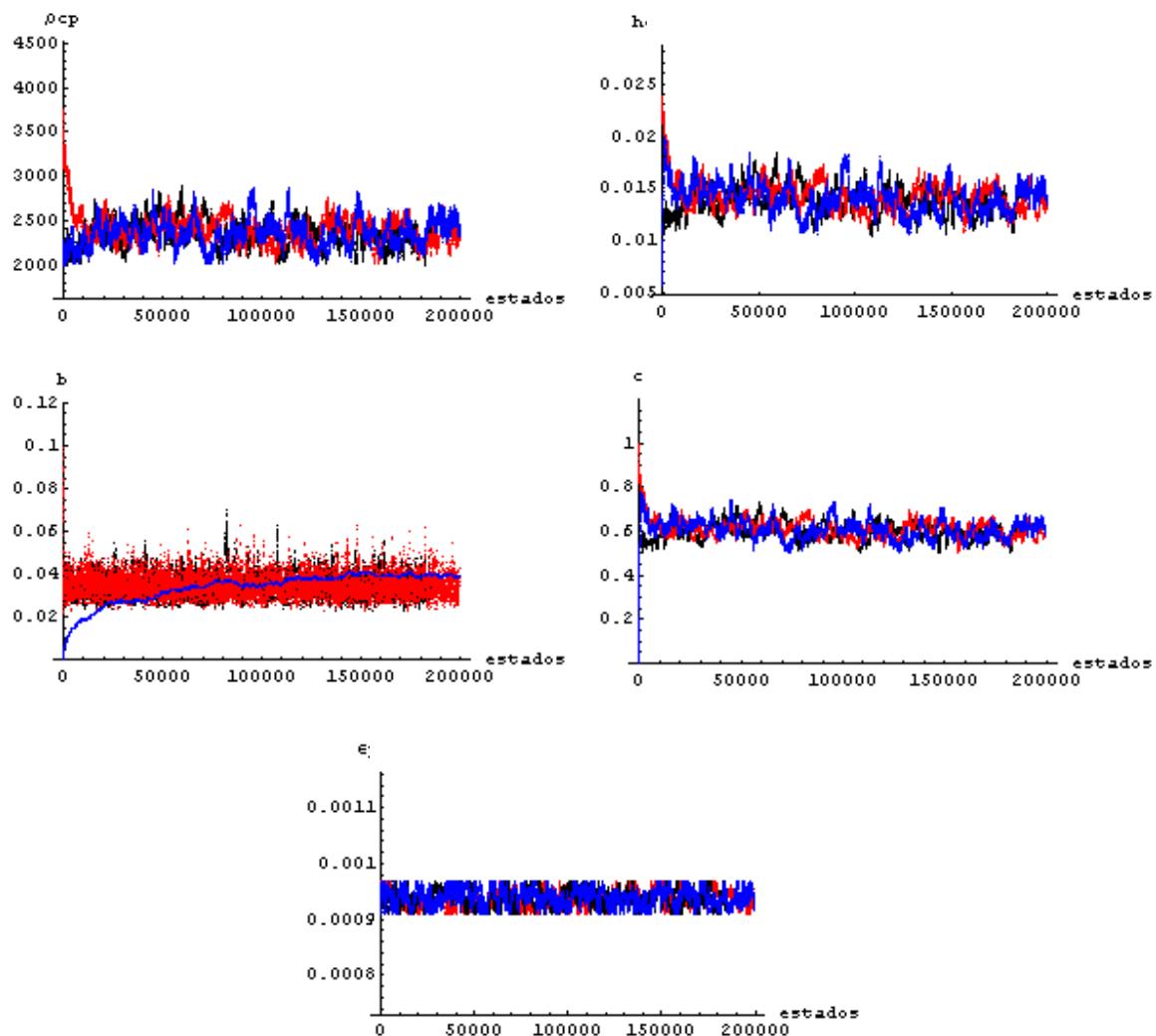
Nas figuras de 6.62 a 6.64 tem-se a comparação da evolução das cadeias de Markov para cada parâmetro entre os casos 1, 2 e 3, casos 1 e 4 e casos 5 e 6, respectivamente. Estas figuras mostram a convergência das cadeias entre si, justificando assim as estimativas concordantes apresentados na tabela 6.36. Na figura 6.62, por exemplo, mostra-se para todos os parâmetros o comportamento convergente das cadeias mesmo para três diferentes valores iniciais. As figura 6.63 e 6.64, mostram, respectivamente, para o casos de uma estimativa com 5 e 4 parâmetros, que mesmo para o caso da escolha de *prioris* não-informativas, tem-se ainda assim, bons resultados quando comparados às estimativas usando *prioris* Normais.

A figura 6.65 vem complementar as análises dos resultados das estimativas para o experimento com as placas de alumínio, confirmando as boas estimativas encontradas tendo em vista que os resíduos encontrados entre as temperaturas experimentais e as temperaturas calculadas com as estimativas resultantes do caso 1, são menores que 1°C.

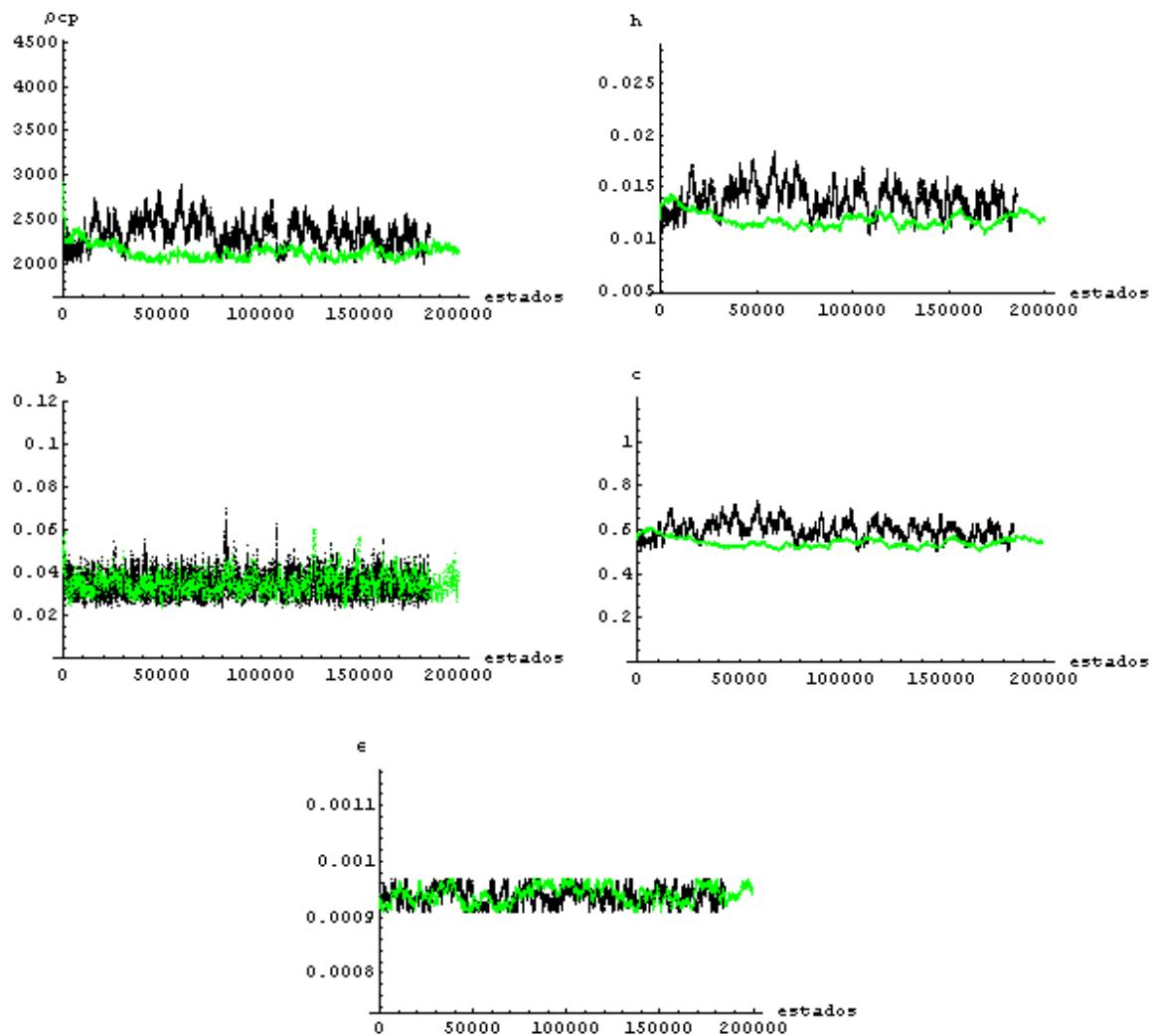
**Tabela 6.36 – Resultado das estimativas para os 6 diferentes casos.**

P	CASO 1	CASO 2	CASO 3
$\rho Cp$ [J/m <sup>3</sup> °C]	<b>2.423x10<sup>6</sup></b> [2.08x10 <sup>6</sup> , 2.81x10 <sup>6</sup> ]	<b>2.461 x10<sup>6</sup></b> [2.09x10 <sup>6</sup> , 2.83x10 <sup>6</sup> ]	<b>2.450x10<sup>6</sup></b> [2.08x10 <sup>6</sup> , 2.865x10 <sup>6</sup> ]
$h$ [W/m <sup>2</sup> °C]	<b>14.341</b> [10.89 , 17.79]	<b>14.680</b> [11.49 , 17.88 ]	<b>14.383</b> [10.79 , 17.98]
$b$	<b>0.03533</b> [0.0226 , 0.0481]	<b>0.03511</b> [0.0231 , 0.0471]	<b>0.03795</b> [0.0315 , 0.0444]
$c$	<b>0.6045</b> [0.506 , 0.703]	<b>0.6141</b> [0.522 , 0.706]	<b>0.6063</b> [0.502 , 0.711]
$\varepsilon$	<b>0.9670</b> [0.94 , 1.00]	<b>0.9659</b> [0.94 , 1.00]	<b>0.9694</b> [0.94 , 1.00]

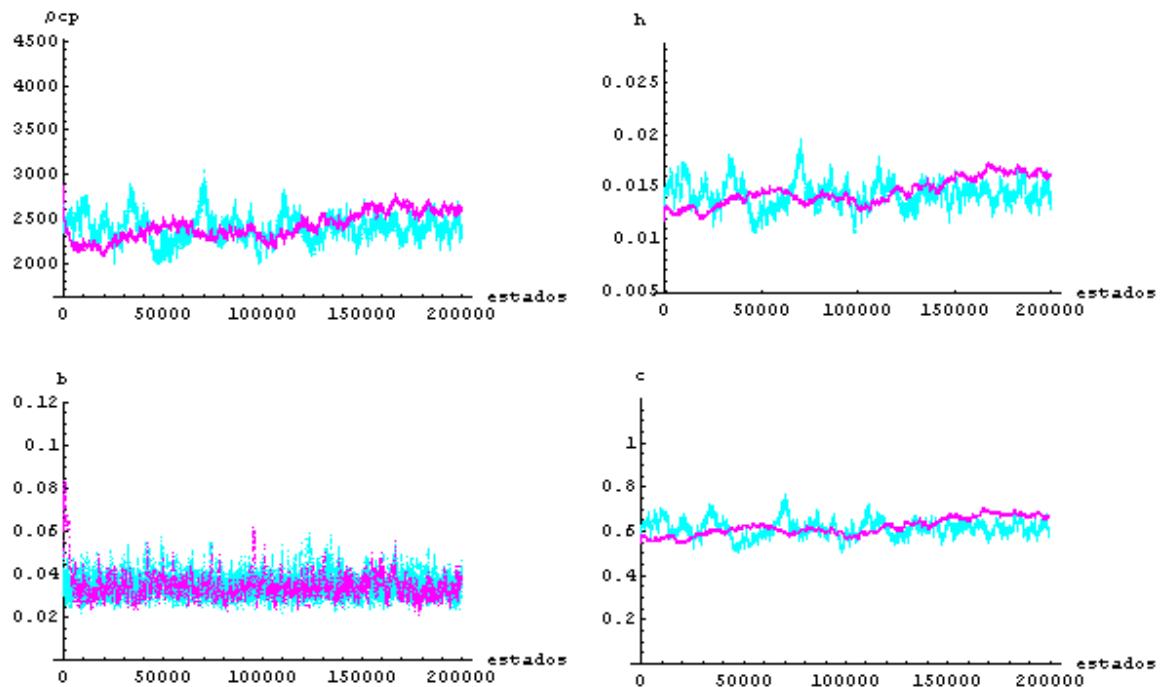
P	CASO 4	CASO 5	CASO 6
$\rho Cp$ [J/m <sup>3</sup> °C]	<b>2.189 x10<sup>6</sup></b> [2.08x10 <sup>6</sup> , 2.339x10 <sup>6</sup> ]	<b>2.477 x10<sup>6</sup></b> [2.115x10 <sup>6</sup> , 2.839x10 <sup>6</sup> ]	<b>2.552 x10<sup>6</sup></b> [2.200x10 <sup>6</sup> , 2.904x10 <sup>6</sup> ]
$h$ [W/m <sup>2</sup> °C]	<b>12.215</b> [10.865 , 13.566]	<b>14.803</b> [11.670 , 17.934]	<b>15.506</b> [12.454 , 18.558]
$b$	<b>0.03596</b> [0.0230 , 0.0489]	<b>0.03519</b> [0.02305 , 0.0474]	<b>0.03491</b> [0.0218 , 0.0480]
$c$	<b>0.5441</b> [0.505 , 0.584]	<b>0.6183</b> [0.528 , 0.709]	<b>0.6386</b> [0.5505 , 0.7267]
$\varepsilon$	<b>0.9727</b> [0.933 , 1.00]	-	-



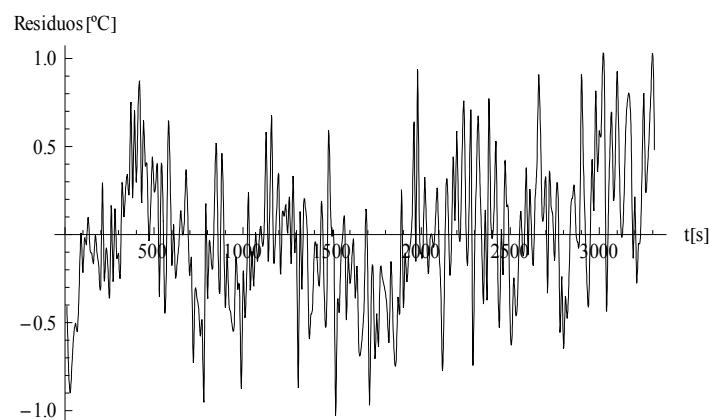
**Figura 6.62.a-e – Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes valores iniciais:  
Caso 1 (linha preta); Caso2 (linha vermelha) e Caso 3 (linha azul)**



**Figura 6.63.a-e – Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes *prioris*: Casos 1 (linha preta) e caso 4 (linha verde)**



**Figura 6.64.a-d – Comparação entre a evolução das cadeias para diferentes *priors*:  
Casos 5 (linha rosa) e Caso 6 (linha azul claro)**

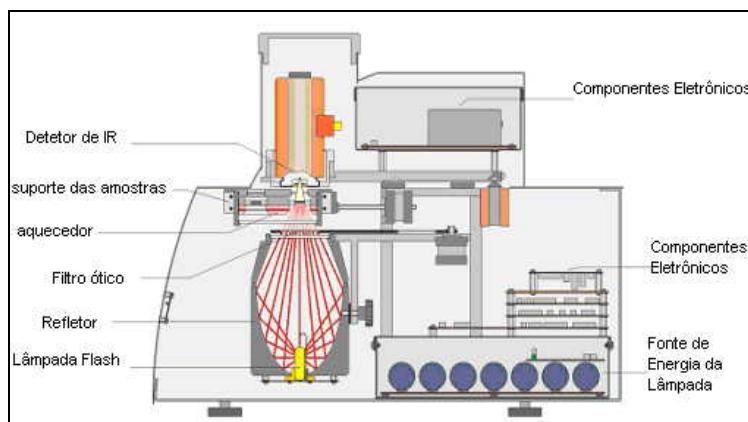


**Figura 6.65 - Analise dos resíduos das estimativas pelo Caso 1**

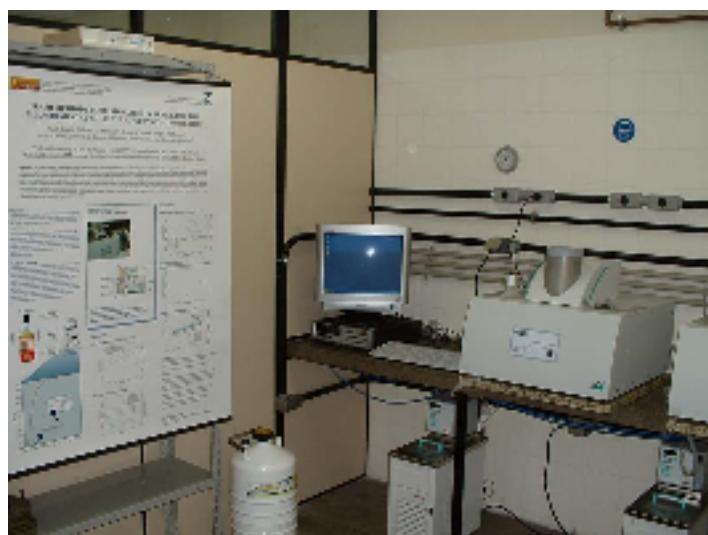
Na etapa de análise da capacidade térmica das placas de alumínio, foram extraídas 3 amostras do mesmo material para análise na Unidade de Metrologia Térmica Prof. Roberto de Souza, do LTTC, PEM/COPPE/UFRJ. O equipamento utilizado para a determinação das propriedades termofísicas das amostras de materiais aqui ensaiados é baseado no método Flash, o Netzsch LFA 447/1, disponível na UNIMET do LTTC. O LFA 447/1 é um instrumento utilizado para medir difusividade térmica, calor específico e condutividade térmica de metais, revestimentos, compósitos, cerâmicas, polímeros, líquidos e outros materiais, numa faixa de temperatura de 25 a 200°C. A fonte de energia para gerar o aumento de temperatura na amostra é uma lâmpada de Xenônio de alta potência. Ela é envolvida por um espelho parabólico (refletor) que direciona o feixe de luz para a amostra.

O LFA 447/1 usa um detector de InSb-IR na faixa de comprimento de onda de 2000 a 5000 nm, resfriado por nitrogênio líquido, que permite uma leitura de temperatura rápida e sem contato direto com a amostra. A conexão próxima com o sistema pré-amplificador permite uma aquisição de dados rápida (500 kHz, 12 Bit) e uma medida de 2000 pontos por teste. Um forno integrado (aquecedor) mantém a temperatura da amostra estável durante a medida. O aquecedor é integrado ao suporte da amostra, que tem uma massa térmica baixa, permitindo altas taxas de aquecimento / resfriamento. As medidas de temperatura da amostra são feitas no suporte por um temopar. Um chiller Julabo é usado para auxiliar o controle de temperatura do forno.

A lâmpada de Xenônio pode prover uma energia de pulso até 10 J (até 5 J/cm<sup>2</sup>), controlada pelo usuário através de um software fornecido com o equipamento, na faixa de comprimento de onda de 150 nm a 2000 nm. O software também permite que o comprimento do pulso de energia seja ajustado em 0.1, 0.2 ou 0.4 ms. A figura 6.66 mostra um esquema do equipamento. A figura 6.67 mostra o equipamento operando na UNIMET (Unidade de Metrologia Térmica do LTTC/PEM/COPPE).



**Figura. 6.66. Netzsch Nanoflash LFA 447/1**



**Figura. 6.67. Netzsch Nanoflash LFA 447/1 operando no UNIMET, LTTC/PEM, COPPE/UFRJ**

A seguir, na Tabela 6.37, apresenta-se a consolidação dos resultados experimentais para a difusividade térmica, condutividade térmica e calor específico, obtidas com o Nanoflash, nas temperaturas selecionadas de 25, 35, 45 e 55 °C, condizentes com a faixa de temperatura dos experimentos aqui realizados. Além das médias para cada amostra, a cada temperatura, apresenta-se as médias das três amostras para cada temperatura. Apresenta-se também, na última coluna, os valores de literatura para alumínio puro, a 20 °C, extraídos de [Bejan (1993)].

**Tabela 6.37 – Propriedades termofísicas das amostras de alumínio das placas ensaiadas, em função da temperatura, obtidas com o Nanoflash Netzsch LFA 447/1 e comparadas com valores da literatura a 20 °C para alumínio puro [Bejan (1993)].**

Propriedade	Amostras			Médias	Bejan(1993) alum. Puro (20 °C)
	1	2	3		
$\alpha$ [mm <sup>2</sup> /s] 25 °C	84.450 (0.727)*	83.594 (0.151)*	83.163 (1.009)*	83.736	84.18
$\alpha$ [mm <sup>2</sup> /s] 35 °C	84.822 (0.812)	83.753 (0.530)	82.406 (0.843)	83.660	-
$\alpha$ [mm <sup>2</sup> /s] 45 °C	84.322 (0.302)	82.881 (0.224)	82.431 (0.510)	83.211	-
$\alpha$ [mm <sup>2</sup> /s] 55 °C	83.837 (0.253)	83.037 (0.704)	83.118 (0.207)	83.327	-
$k$ [W/mC] 25 °C	185.85 (1.60)	192.78 (0.361)	205.80 (2.50)	194.81	204.
$k$ [W/mC] 35 °C	199.51 (2.29)	205.63 (1.43)	208.35 (2.13)	204.50	-
$k$ [W/mC] 45 °C	231.83 (2.03)	229.36 (0.612)	229.67 (1.38)	230.29	-
$k$ [W/mC] 55 °C	239.79 (0.715)	229.32 (1.94)	219.60 (0.546)	229.57	-
$C_p$ [J/gC] 25 °C	0.816 (0.010)	0.855 (0.013)	0.918 (0.030)	0.863	0.896
$C_p$ [J/gC] 35 °C	0.876 (0.030)	0.910 (0.016)	0.937 (0.002)	0.908	-
$C_p$ [J/gC] 45 °C	1.026 (0.005)	1.026 (0.028)	1.033 (0.012)	1.028	-
$C_p$ [J/gC] 55 °C	1.061 (0.008)	1.024 (0.012)	0.979 (0.014)	1.021	-

(\*) desvio padrão das medidas

Os resultados acima são então diretamente comparados aos valores estimados da capacidade térmica ( $\rho C_p$ ) pela presente análise, destacando-se os casos 1 e 6 que representam os dois casos extremos analisados. Para o caso 1, todos os parâmetros possuem informação *a priori* na forma de distribuições normais, enquanto no caso 6 todos os parâmetros são estimados sem nenhuma informação restritiva (distribuições uniformes). Destaca-se também o valor médio de todas as estimativas (casos 1 a 6), e observa-se que todos os três resultados encontram-se em excelente concordância com as medidas do Nanoflash e os valores da literatura, como mostrado na Tabela 6.38.

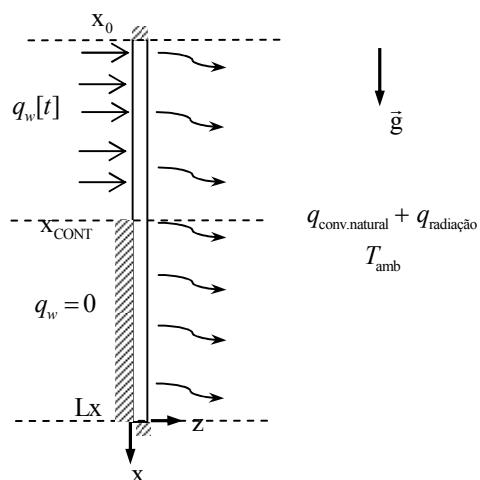
**Tabela 6.38 – Capacidades térmicas do alumínio estimadas, comparadas com as obtidas pelo Nanoflash Netzsch LFA 447/1 e com valores da literatura a 20 °C para alumínio puro [Bejan (1993)].**

	<b>NanoFlash (25 – 55 °C)</b>	<b>Bejan(1993) @ 20 °C</b>	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 6</b>	<b>Média Casos 1 a 6</b>
$\rho C_p$ [J/m <sup>3</sup> °C]	2.573 x10 <sup>6</sup>	2.425 x10 <sup>6</sup>	2.423x10 <sup>6</sup>	2.552x10 <sup>6</sup>	2.425x10 <sup>6</sup>

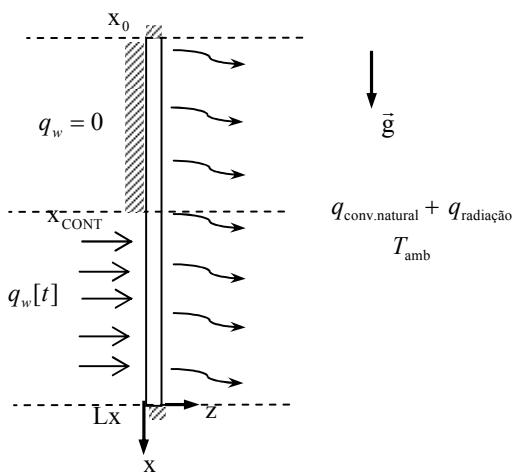
### 6.3.2. Estimativa Simultânea de Propriedades Termofísicas e Condições de Contorno com Placas de Baquelite

Nos resultados experimentais apresentados nesta subseção aborda-se um problema com variação espacial significativa das temperaturas, utilizando-se placas de baquelite (baixa condutividade térmica) de espessura 1.58mm e de dimensões 40mm de largura por 80mm de comprimento. No aquecimento das placas foi empregado uma resistência elétrica de 38.18Ω, quadrada e de dimensões 40mm de largura por 40mm de comprimento, instalada entre as duas placas, ligada a uma fonte de corrente contínua com voltagem aquisitada automaticamente. Para melhorar o contato entre a resistência e as placas utilizou-se uma fina camada de pasta térmica. Três experimentos distintos foram realizados, variando-se a configuração (horizontal ou vertical) e a posição relativa da resistência elétrica (aquecimento superior e inferior). Para ilustrar o emprego da metodologia de solução de problema inverso aqui proposta, em uma situação com resultados experimentais reais, escolheu-se uma das

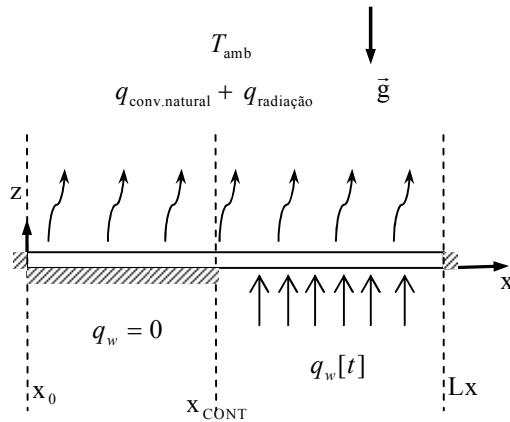
configurações experimentais acima citadas, para tratamento dos seus dados visando a estimativa simultânea das propriedades termofísicas e demais parâmetros desconhecidos no problema físico. Para tal, em função do excelente comportamento observado na seção 6.2.3, empregou-se a metodologia de estimativa a partir do campo transformado, e permitindo-se a princípio variações espaciais nos coeficientes a determinar, mesmo sabendo-se tratar de um meio homogêneo. Serão apresentados a seguir os resultados experimentais encontrados para os três experimentos envolvendo as placas de baquelite. As figuras 6.68 abaixo apresentam de forma esquemática o modelo físico referente a cada configuração experimental, placa vertical com aquecimento superior, placa vertical com aquecimento inferior e placa horizontal.



**Figura 6.68.a – Modelo físico da configuração de placa vertical com aquecimento superior**



**Figura 6.68.b – Modelo físico da configuração de placa vertical com aquecimento inferior**



**Figura 6.68.c – Modelo físico da configuração de placa horizontal**

A formulação matemática foi adotada de forma a ser geral para as três configurações, variando apenas os valores de  $q_1$  e  $q_2$ ,  $h_1$  e  $h_2$ , de modo a ser representativa da situação física em questão.

$$w[x] \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k[x] \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \frac{h_{ef}[x]}{L_z} (T_m[x,t] - T_\infty) + \frac{q_w[x,t]}{L_z} \quad (6.38.a-d)$$

$$T_m[x, 0] = T_\infty \quad \left. \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial T_m[x,t]}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0$$

$$q_w[x,t] = q[x]f[t] \quad (6.38.e-g)$$

$$q[x] = \begin{cases} q_1 & 0 < x < x_{CONT} \\ q_2 & x_{CONT} < x < L_x \end{cases} \quad f[t] = c - ae^{-bt}$$

$$h_{ef}[x] = \begin{cases} h_1 & 0 < x < x_{CONT} \\ h_2 & x_{CONT} < x < L_x \end{cases}$$

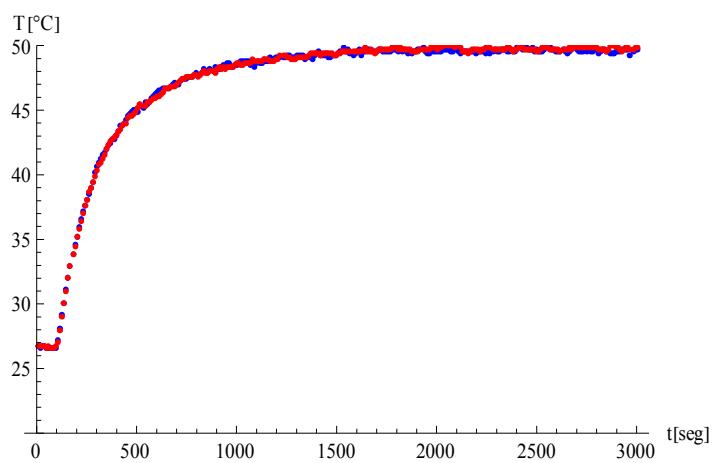
Dois termopares do tipo-“K” foram fixados com adesivo especial Loctite no centro das placas a 10mm da borda, sendo 1 termopar fixado na placa voltada para a câmera e

o outro termopar fixado simetricamente na placa de trás (Fig. 5.5.a). Nas três configurações experimentais a distância entre a placa e a câmera foi de cerca de 250mm e a voltagem especificada na fonte ligada à resistência foi de 8V. Todavia, vale lembrar, que a voltagem foi aquisitada automaticamente durante todo o experimento pelo sistema de aquisição de dados Agilent, simultaneamente à aquisição das temperaturas pelos termopares.

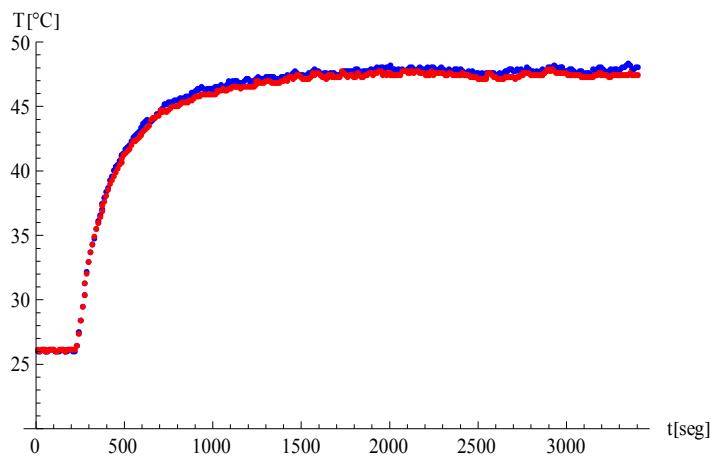
Depois de feita a fixação dos termopares, as duas placas receberam uma pintura em grafite ( $\epsilon \approx 0.97$ ) em suas superfícies externas. Na figura 6.69.a-c tem-se a comparação entre o comportamento temporal das temperaturas aquisitadas pelos dois termopares, sendo em azul as temperaturas referentes ao termopar fixado no lado da câmera e em vermelho o termopar fixado na placa de trás, para os três experimentos, placa na vertical com aquecimento superior (figura 6.69.a), placa na vertical com aquecimento inferior (figura 6.69.b) e placa na horizontal (figura 6.69.c).

Como esperado, pode-se observar a boa concordância entre as temperaturas apresentadas pelos termopares nas configurações verticais tanto para o aquecimento superior quanto para o aquecimento inferior. Para a placa horizontal, a concordância entre as temperaturas indicadas pelos dois termopares pode ser explicada pelas pequenas diferenças do coeficiente de transferência de calor para a placa superior e inferior nesta diferença de temperaturas entre a placa e o ambiente externo.

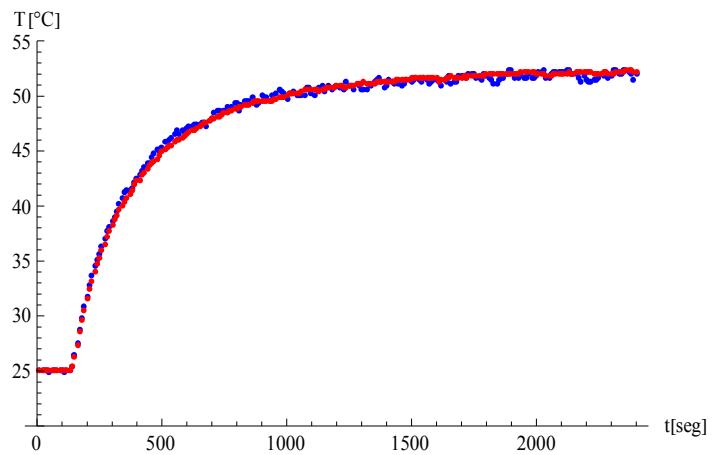
Para cada configuração experimental realizou-se um total de três experimentos de modo a verificar as suas repetibilidades. As figuras 6.70.a-c apresentam as comparações das temperaturas aquisitadas pelo termopar voltado para a câmera nos três experimentos para cada uma das três configurações, onde percebe-se uma excelente concordância entre as repetições de cada experimento.



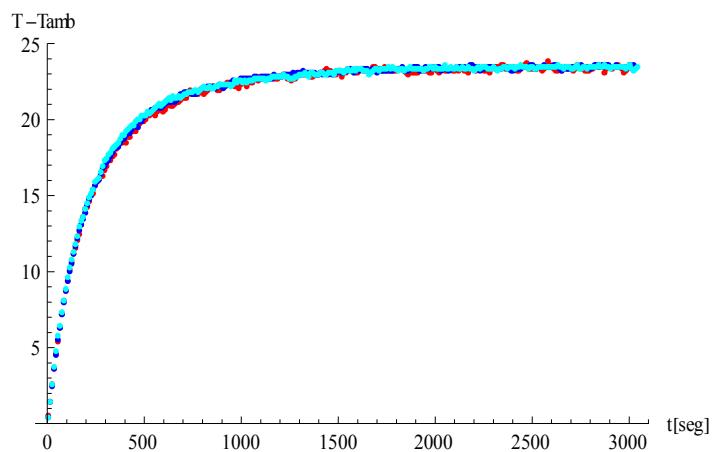
**Figura 6.69.a – Comparação dos termopares nas duas placas: Experimento de placa na vertical com aquecimento superior**



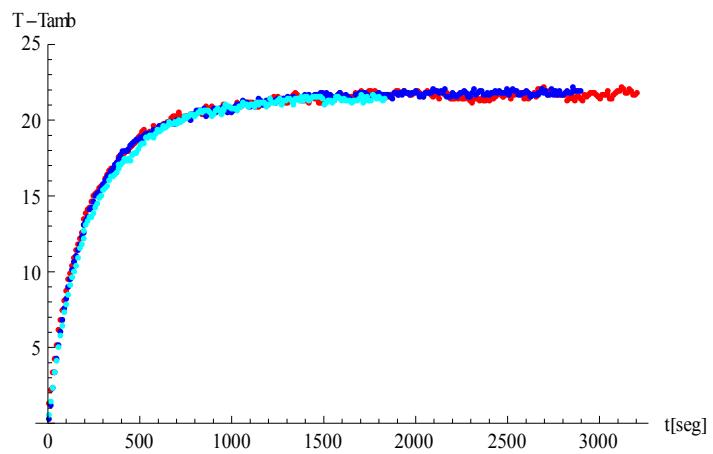
**Figura 6.69.b. – Comparação dos termopares nas duas placas: Experimento de placa na vertical com aquecimento inferior**



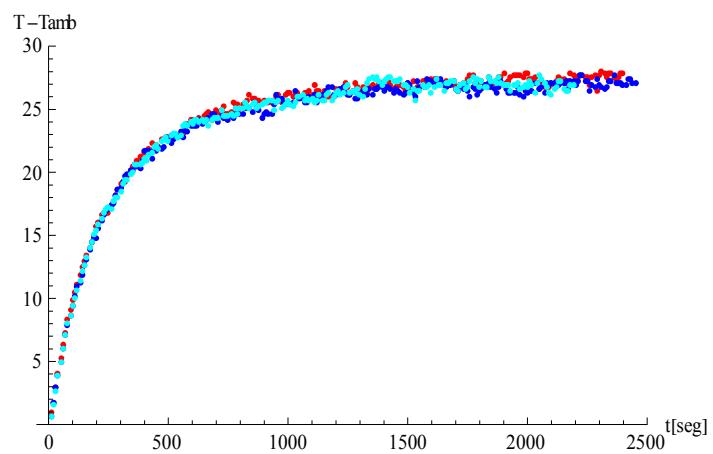
**Figura 6.69.c. – Comparação dos termopares nas duas placas: Experimento de placa na horizontal**



**Figura 6.70.a – Repetibilidade experimental: Experimento de placa na vertical com aquecimento superior**



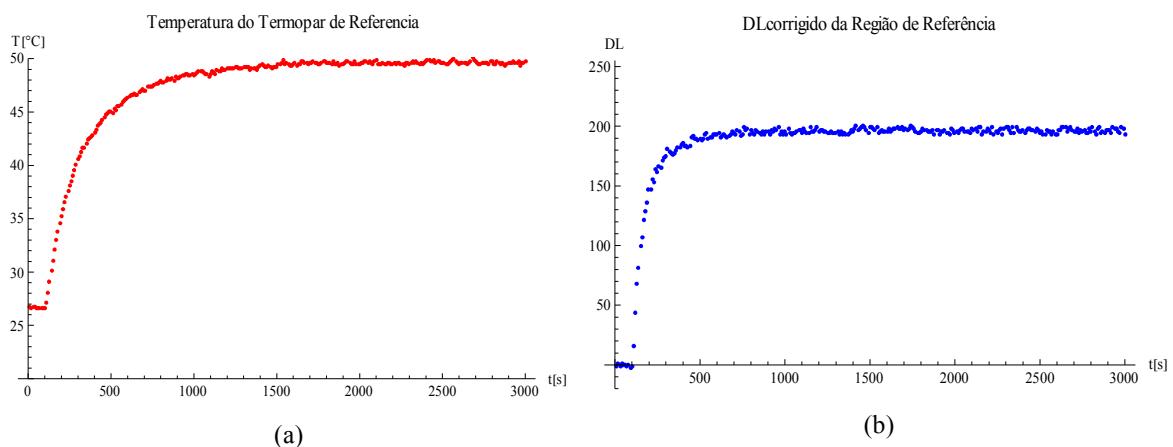
**Figura 6.70.b. – Repetibilidade experimental: Experimento de placa na vertical com aquecimento inferior**



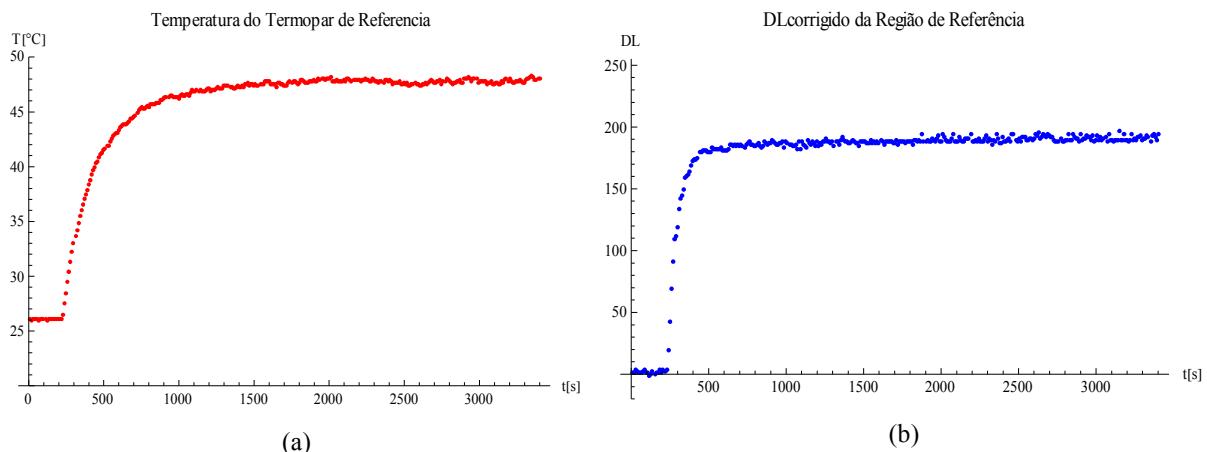
**Figura 6.70.c. – Repetibilidade experimental: Experimento de placa na horizontal**

As figuras 6.71.a-b, 6.72.a-b e 6.73.a-b apresentam as duas curvas que foram utilizadas na etapa de conversão do *digital level* para temperatura, para cada uma das configurações experimentais. A forma em que se dá a correlação entre estas duas grandezas foi detalhadamente apresentada no capítulo anterior.

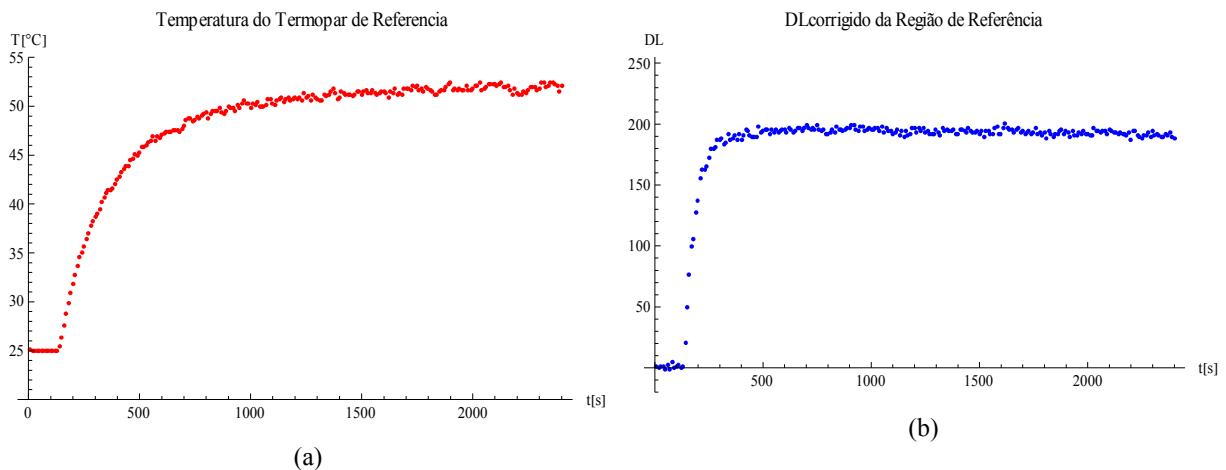
A figura 6.71.b, 6.72.b e 6.73.b representam os valores médios de *digital level* na região próxima ao termopar de referência, voltado para a câmera. As curvas na figura 6.71.a, 6.72.a e 6.73.a representam as variações da temperatura em graus Celsius aquisitada pelo termopar de referência. Depois de feita a correlação para esta região do termopar de referência, em matriz de 3x3 pixels, aplica-se esta conversão em toda a placa.



**Figura 6.71 – Correlação de *digital level* e temperatura: Experimento placa na vertical aquecimento superior**

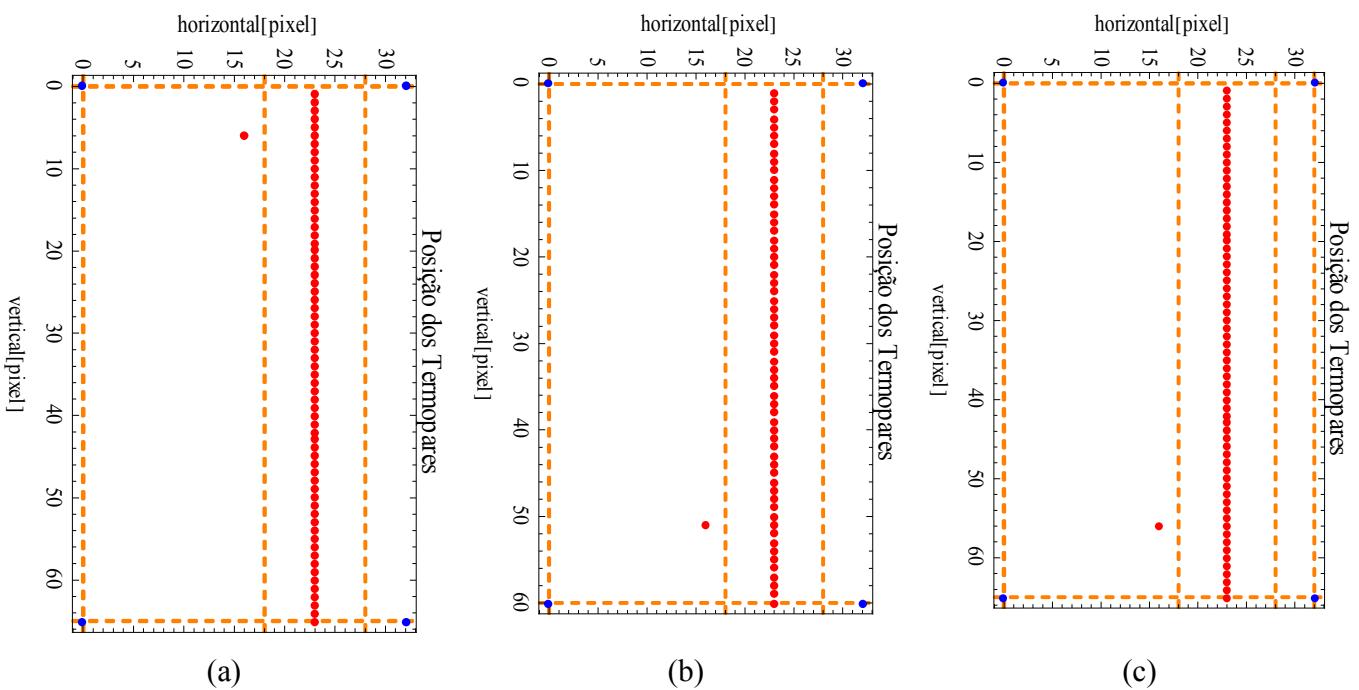


**Figura 6.72 – Correlação de *digital level* e temperatura: Experimento placa na vertical aquecimento inferior**



**Figura 6.73 – Correlação de digital leve e temperatura: Experimento placa na horizontal**

As figuras 6.74 mostram a posição deslocada, evitando-se capturar a imagem do fio do termopar de referência, e as regiões retangulares demarcadas onde foram computados os valores médios das temperaturas para cada altura ao longo de todo o comprimento da placa. As regiões demarcadas onde se operam as médias na direção transversal, só se fizeram necessárias em um lado da placa, uma vez que os perfis se apresentaram razoavelmente simétricos ao longo da largura da placa nas três configurações experimentais. O número de posições para cada experimento refere-se ao número de sensores. Para o experimento da placa na posição vertical com aquecimento superior (figura 6.74.a) obteve-se 65 sensores, para o experimento da placa vertical com aquecimento inferior (figura 6.74.b) obteve-se 60 sensores, e por fim, para o experimento horizontal (figura 6.74.c), obteve-se 65 sensores. Essas diferenças no número de sensores são devidas a pequenas diferenças entre as distâncias da placa à lente da câmera, após o reposicionamento para cada experimento.



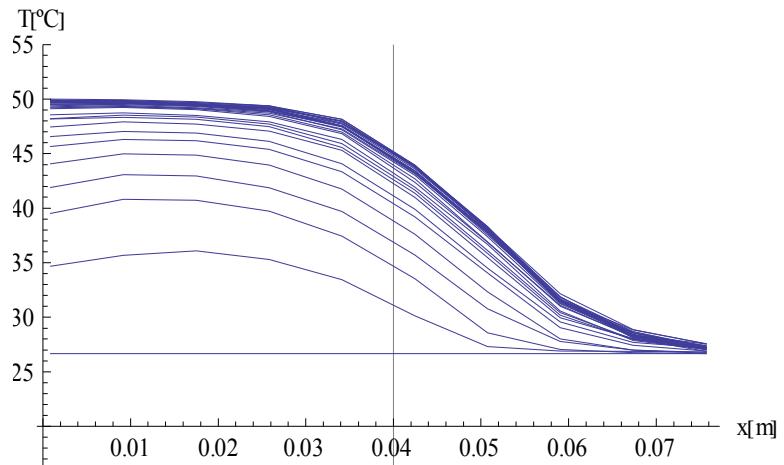
**Figura 6.74 – Posições ao longo do comprimento da placa para exportação das temperaturas experimentais**

As figuras 6.75.a-c, 6.76.a-c e 6.77.a-c, apresentam as temperaturas aquisitadas pela câmera, depois de realizada a conversão, para diferentes posições na placa da frente. A linha vertical presente nas figuras 6.75.a, 6.76.a e 6.77.a, indica a posição de término da resistência.

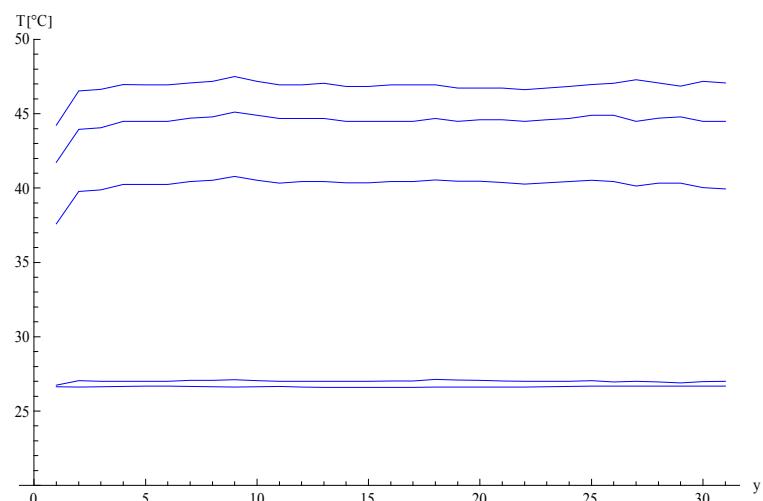
As figuras 6.75.a, 6.76.a e 6.77.a apresentam a variação espacial da temperatura ao longo do comprimento da placa, onde o início do eixo das abscissas, nestes gráficos, são referentes às posições na parte superior da placa.

Pela análise das figuras 6.75.b, 6.76.b e 6.77.b pode-se observar o comportamento simétrico ao longo da largura da placa, de modo que a variação espacial da temperatura pode ser considerada unidimensional, ou seja, como sendo essencialmente na direção do comprimento da placa.

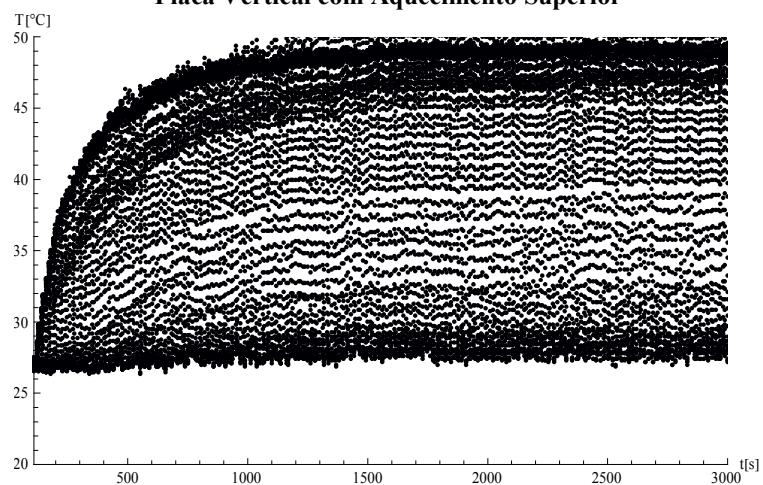
As figuras 6.75.c, 6.76.c e 6.77.c apresentam o comportamento temporal da temperatura nos três experimentos, de modo que se pode observar por estas três figuras que o tempo final considerado nestes experimentos, em torno de 1 hora, foi suficientemente grande para que as temperaturas fossem consideradas em regime permanente.



**Figura 6.75.a – Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos:  
Placa Vertical com Aquecimento Superior**

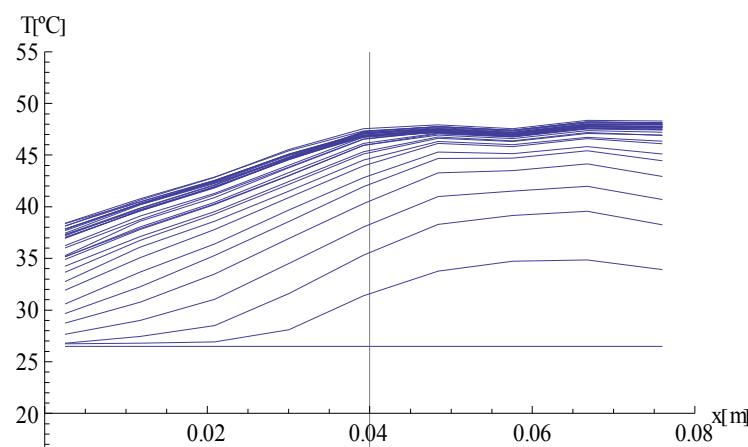


**Figura 6.75.b. – Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos:  
Placa Vertical com Aquecimento Superior**

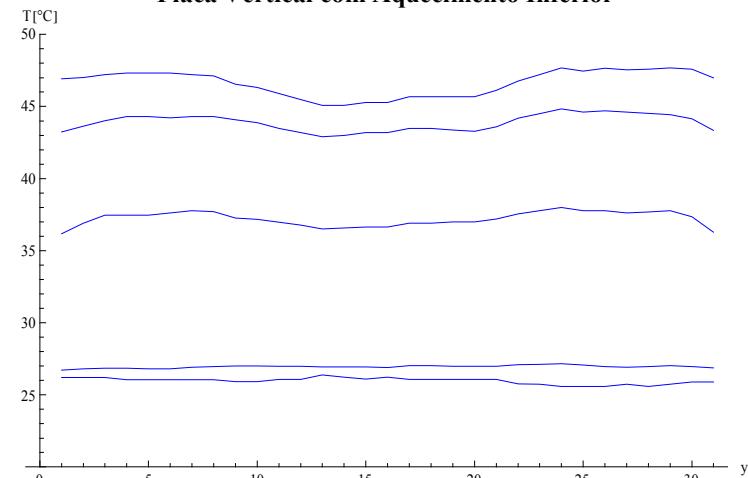


**Figura 6.75.c. – Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições:**

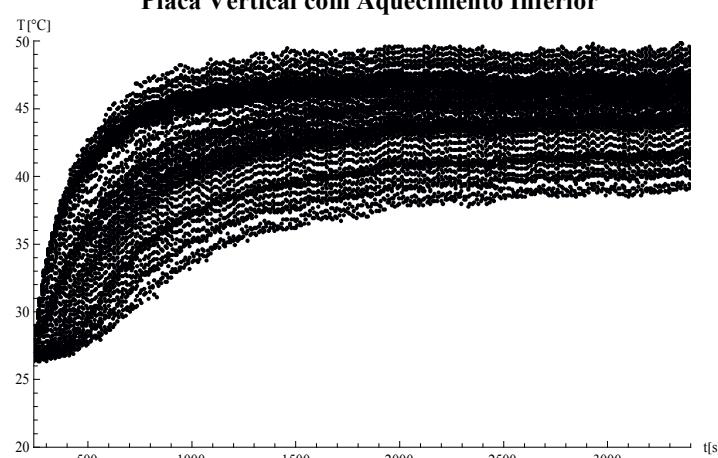
ao longo do comprimento da placa - Placa Vertical com Aquecimento Superior



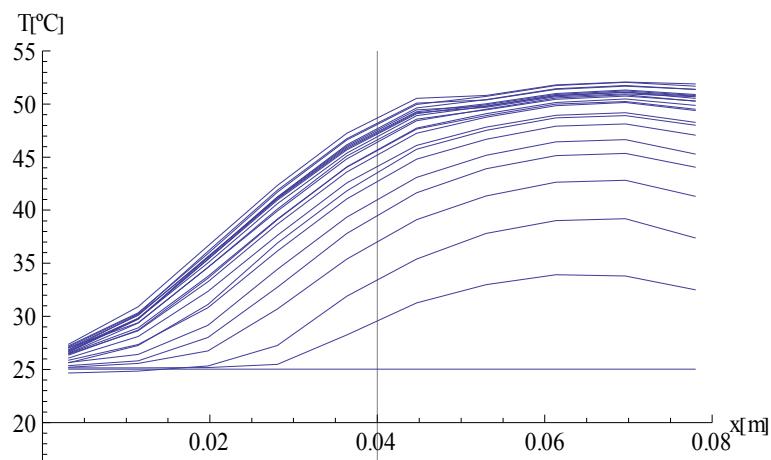
**Figura 6.76.a – Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos:  
Placa Vertical com Aquecimento Inferior**



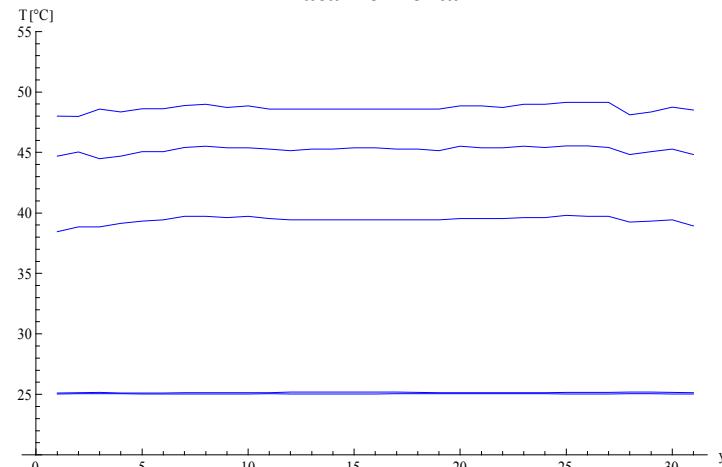
**Figura 6.76.b. – Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos:  
Placa Vertical com Aquecimento Inferior**



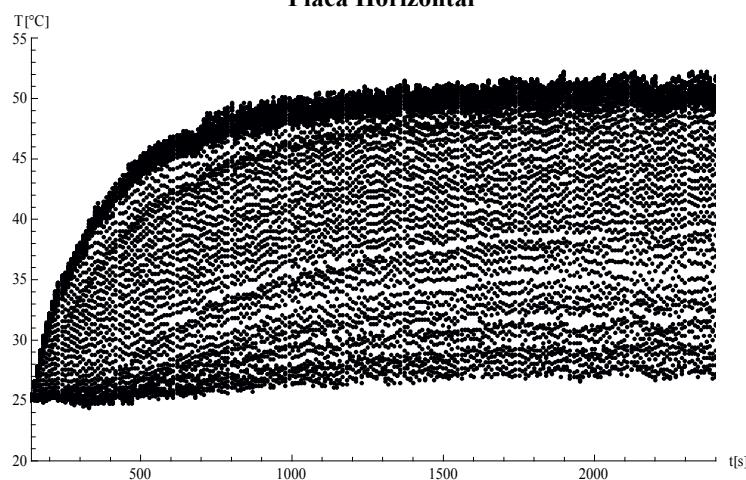
**Figura 6.76.c. – Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições  
ao longo do comprimento da placa - Placa Vertical com Aquecimento Inferior**



**Figura 6.77.a – Temperatura ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos:  
Placa Horizontal**



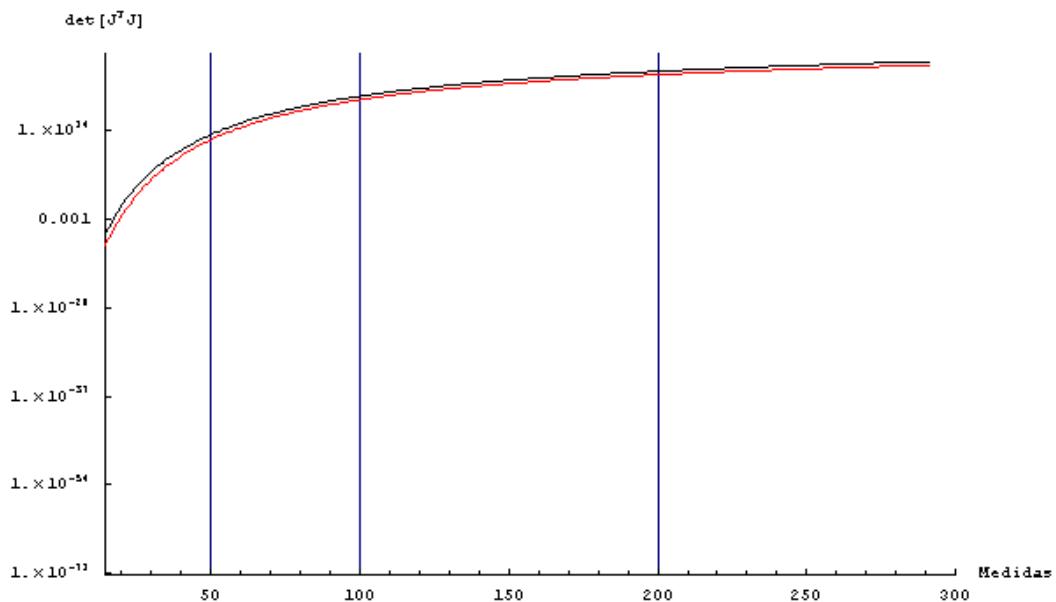
**Figura 6.77.b. – Temperatura ao longo da largura da placa para cinco diferentes tempos  
Placa Horizontal**



**Figura 6.77.c. – Temperatura ao longo dos tempos para diferentes posições  
ao longo do comprimento da placa - Placa Horizontal**

Antes de iniciar o procedimento de solução inversa, analisou-se o determinante da matriz de informação  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , para o caso de se variar o número de termos na expansão da temperatura envolvida na estimativa para um número fixo de parâmetros e uma freqüência fixa de medidas no tempo, uma vez que o procedimento de estimativa proposto é baseado no campo transformado. Os resultados são apresentados nas figuras 6.78.a-c e tabelas 6.39.a-c, para as três configurações experimentais, respectivamente, isto é, posição vertical com aquecimento superior, posição vertical com aquecimento inferior e para a placa na posição horizontal. Lembra-se que, como se trata de estimativas no campo transformado, o número total de dados experimentais é dado pelo produto entre o número de termos na expansão da temperatura e o número de medidas no tempo. Logo, nestas análises de sensibilidade utilizou-se no procedimento de integração espacial (inerente ao processo de transformação integral dos dados experimentais) toda a informação espacial disponível, respectivamente 65, 60 e 65 sensores, em cada configuração experimental. Em seguida, comparou-se o comportamento do determinante entre as configurações experimentais no caso de se fixar 10 termos na expansão da temperatura (figura 6.79).

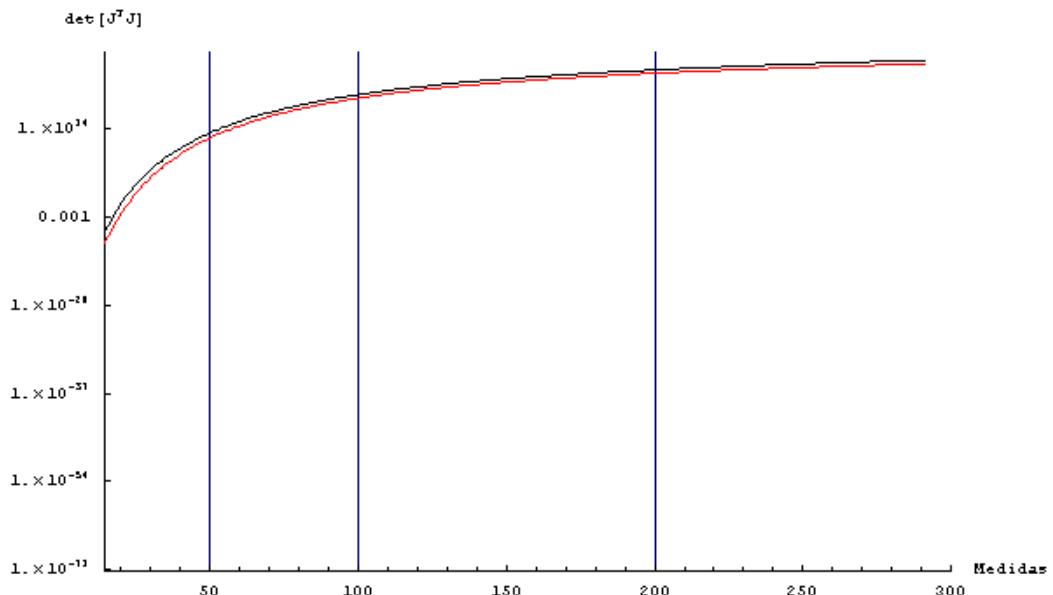
As figuras 6.78.a-c mostram que para as três configurações experimentais tem-se um pequeno aumento do valor do determinante com o aumento do número de termos na série de 10 para 15 termos. Pela figura 6.79, pode-se observar que o comportamento do determinante para as três configurações experimentais é praticamente coincidente (curva vermelha: placa vertical com aquecimento superior; curva verde: placa vertical com aquecimento inferior; curva azul: aquecimento horizontal) para 10 termos na expansão da temperatura, não indicando assim uma diferença de sensibilidade do problema com relação ao posicionamento da placa e/ou da resistência



**Figura 6.78.a – Placa Vertical Aquecimento Superior:**  
Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta)

**Tabela 6.39.a – Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, Placa Vertical Aquecimento Superior**

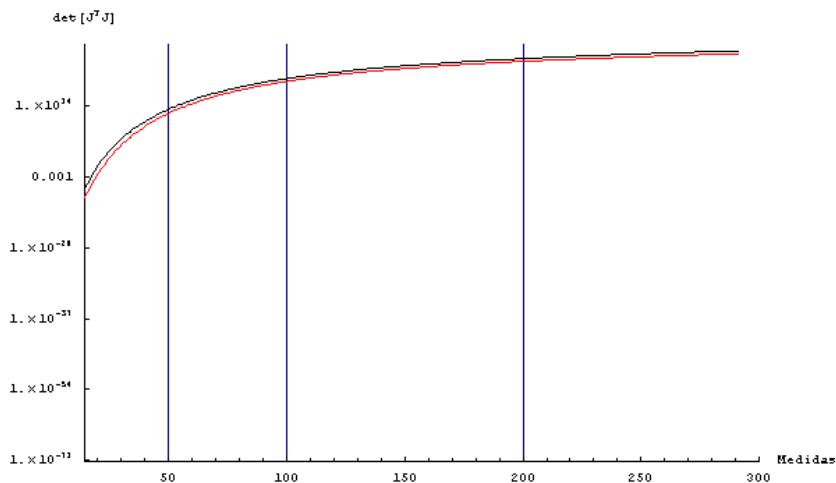
Placa Vertical Aquecimento Superior $N_p = 10$			
No. Termos na Expansão da Temperatura	Nmedidas=50	Determinante Nmedidas=100	Determinante Nmedidas=200
10	$3.42053 \times 10^{14}$	$1.03048 \times 10^{21}$	$1.29922 \times 10^{25}$
15	$2.23932 \times 10^{15}$	$3.6009 \times 10^{21}$	$4.26257 \times 10^{25}$



**Figura 6.78.b – Placa Vertical Aquecimento Inferior:**  
Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta).

**Tabela 6.39.b – Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, Placa Vertical Aquecimento Inferior**

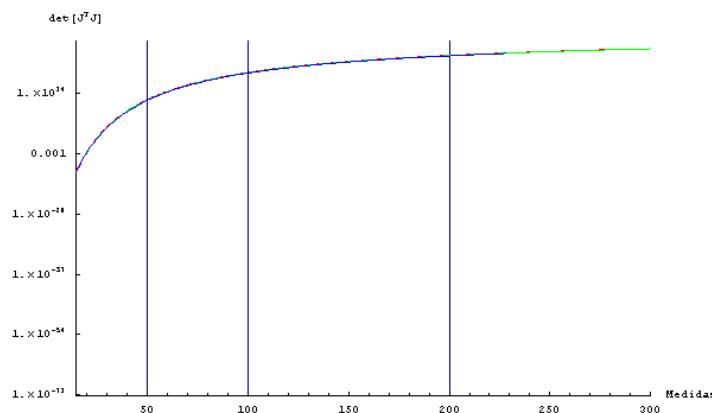
Placa Vertical Aquecimento Inferior $N_p=10$			
No. Termos na Expansão da Temperatura	Determinante $N_{medidas}=50$	Determinante $N_{medidas}=100$	Determinante $N_{medidas}=200$
10	$1.12783 \times 10^{12}$	$6.79626 \times 10^{13}$	$4.6659 \times 10^{14}$
15	$9.87516 \times 10^{12}$	$2.92071 \times 10^{10}$	$1.91342 \times 10^{15}$



**Figura 6.78.c – Placa com Aquecimento Horizontal:**  
Analise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura (curva vermelha) e com 15 termos (curva preta).

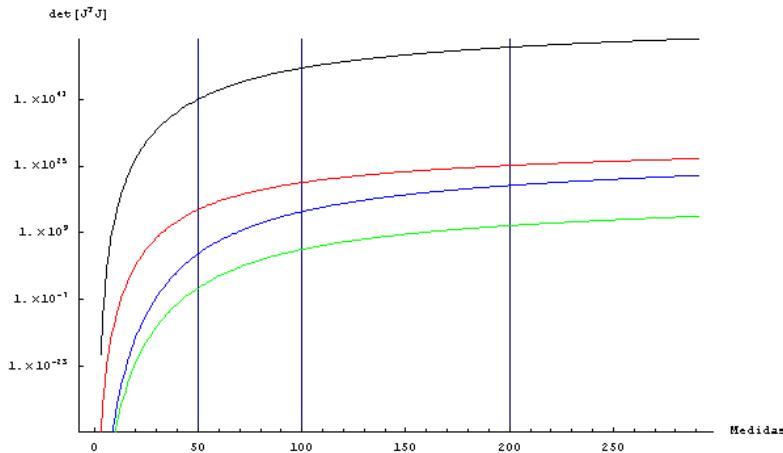
**Tabela 6.39.c – Analise do determinante da matriz de informação com 10 e 15 termos na expansão da temperatura, Placa com Aquecimento Horizontal**

Placa com Aquecimento Horizontal $N_p = 10$			
No. Termos na Expansão da Temperatura	Nmedidas=50	Determinante Nmedidas=100	Determinante Nmedidas=200
10	$9.32187 \times 10^{11}$	$5.47893 \times 10^{19}$	$4.05543 \times 10^{24}$
15	$6.25812 \times 10^{12}$	$2.16185 \times 10^{20}$	$1.52845 \times 10^{25}$



**Figura 6.79 – Análise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura para as três configurações experimentais: Placa vertical com aquecimento superior (curva vermelha); Placa vertical com aquecimento inferior (curva verde); Placa horizontal (curva azul);**

A figura 6.80 apresenta o comportamento do determinante da matriz de informação para 4 situações diferentes, estimando 10 parâmetros ( $k_{x0}, \bar{k}_1, w_{x0}, \bar{w}_1, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b$ ), 12 parâmetros (acrescentando  $k_{xL}, w_{xL}$ ), 14 parâmetros ( $k_{x0}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, w_{x0}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b$ ) e estimando 16 parâmetros (acrescentando  $k_{xL}, w_{xL}$ ). Pode-se observar que acrescentar termos na expansão das propriedades leva a um aumento do número de parâmetros e à diminuição da sensibilidade do problema (curva vermelha e curva verde). Todavia, ao se acrescentar os parâmetros dos contornos mantendo-se o número de termos na expansão das propriedades fixo, tem-se um significativo aumento do determinante (curva preta e curva vermelha), uma vez que seus valores são bem maiores do que os valores esperados para os termos da expansão.



**Figura 6.80 – Análise do determinante da matriz de informação com 10 termos na expansão da temperatura para a placa vertical com aquecimento superior;**

**Curva vermelha –  $N_P = 10 (k_{x0}, \bar{k}_1, w_{x0}, \bar{w}_1, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b)$ ;**

**Curva preta –  $N_P = 12 (k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b)$ ;**

**Curva verde –  $N_P = 14 (k_{x0}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, w_{x0}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b)$ ;**

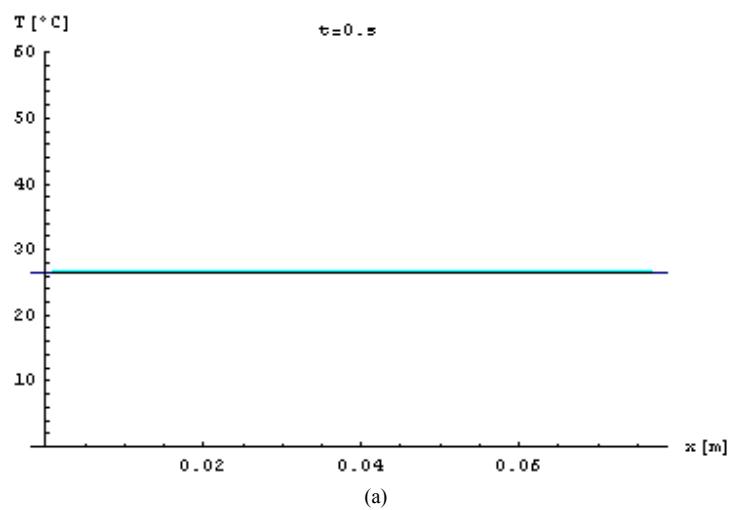
**Curva azul –  $N_P = 16 (k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, d_{x0}, d_{xL}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, b)$ ;**

Em seguida são apresentados os resultados da identificação simultânea no campo transformado das propriedades termofísicas e condições de contorno. São utilizadas as temperaturas aquisitadas pela câmera para o experimento com as placas na configuração vertical e com o aquecimento na parte superior da placa, empregando o método de transformação integral na solução direta e a abordagem de inferência Bayesiana via método de

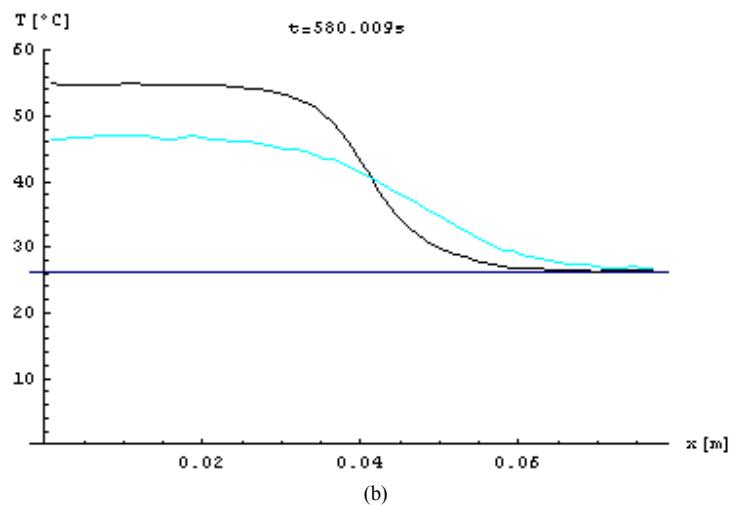
MCMC na solução do problema inverso, oferecendo portanto o emprego simultâneo das metodologias teórico-experimentais aqui avançadas. A tabela 6.40 abaixo apresenta os valores iniciais e os limites máximos e mínimos considerados na procura dos parâmetros. A escolha dos valores iniciais foi baseada nos valores das medidas de propriedades termofísicas feitas na UNIMET/LTTC com o método FLASH para as propriedades e em valores de correlações de convecção natural para os coeficientes de transferência de calor de placa plana vertical com fluxo prescrito. Todavia, tais valores são tidos como valores de referência para as distribuições *a priori*. Os valores iniciais não são necessariamente os valores esperados como solução das estimativas, uma vez que observou-se que o campo de temperatura quando calculado com esse valores não representa de forma precisa os perfis de temperatura experimentais, Figs. 6.81. A figura 6.81 apresenta uma comparação entre as temperaturas calculadas com os valores iniciais apresentados na tabela 6.40 (curva preta), as temperaturas experimentais aquisitadas pela câmera (curva cyan) e a temperatura ambiente (curva azul), ao longo do comprimento da placa para diferentes tempos.

**Tabela 6.40 - Valores iniciais, mínimos e máximos para cada parâmetro nas estimativas**

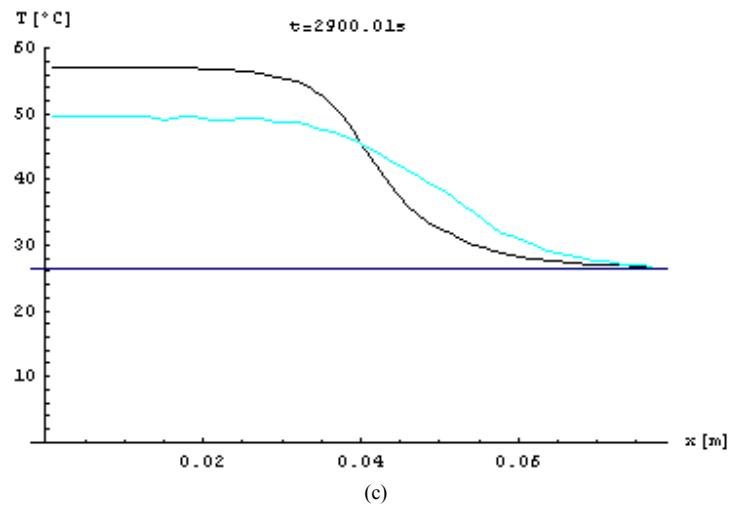
P	Inicial	Min	Max
$k_{x0}$	0.2789	0.2	0.4
$k_{xL}$	0.2789	0.2	0.4
$\bar{k}_1$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$\bar{k}_2$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$\bar{k}_3$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$w_{x0}$	$1.768 \times 10^6$	$1.44 \times 10^6$	$2.55 \times 10^6$
$w_{xL}$	$1.768 \times 10^6$	$1.44 \times 10^6$	$2.55 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$\bar{w}_2$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$\bar{w}_3$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-14}$	$1 \times 10^{-7}$
$h_{x0}$	16.518	8.259	41.294
$h_{xL}$	5.902	0.	11.804
$\bar{h}_1$	$1 \times 10^{-6}$	-10.515	10.515
$\bar{h}_2$	$1 \times 10^{-6}$	-2.6289	2.6289
$\bar{h}_3$	$1 \times 10^{-6}$	-3.5052	3.5052
b	0.001	0	0.1



(a)



(b)



(c)

**Figura 6.81 – Comparação entre as temperaturas experimentais (curva cyan) e as temperaturas calculadas com os valores iniciais da Tabela 6.40 (curva preta), para diferentes tempos experimentais:  
(a)  $t=0$ s; (b)  $t=580$ s; (c) $2900$ s;**

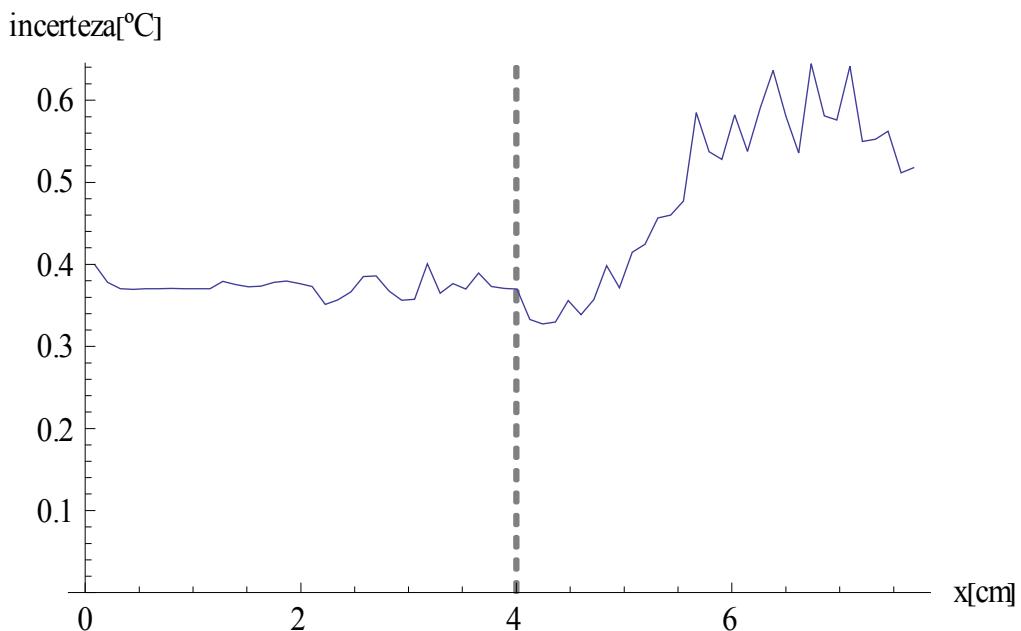
A tabela 6.41 apresenta os parâmetros e o tipo de *priori* envolvidos na estimativa deste experimento. O caso 1, leva em consideração a informação *a priori* de que se trata de um experimento com um material homogêneo de modo que o filtro utilizado para este primeiro caso foi uma constante. Deste modo, tem-se que apenas  $k_{x0}$  ou  $k_{xL}$  e  $w_{x0}$  ou  $w_{xL}$  são necessários na estimativa. Para ambos os casos utilizou-se de *prioris* normais centradas nas medições de propriedade feitas no LTTC com 5% de desvio padrão para  $k_{x0}$  e/ou  $k_{xL}$  e  $w_{x0}$  e/ou  $w_{xL}$  e *priori* normal centrada em correlação de convecção natural [Bejan (1993)] de placa plana vertical com fluxo prescrito para o coeficiente de transferência de calor, para  $h_{x0}$  e  $h_{xL}$ . Para os demais parâmetros ( $\bar{k}_1, \bar{w}_1, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, b$ ) considerou-se *prioris* não informativas.

Para o caso 2, o filtro considerado foi uma reta de modo que sem tem no vetor de parâmetros a serem estimados dois parâmetros a mais do que no caso 1, permitindo-se assim identificar variações espaciais das propriedades. Para este segundo caso espera-se estimar valores de  $k_{xL}$  e  $w_{xL}$  iguais ou muito próximos aos de  $k_{x0}$   $w_{x0}$ , respectivamente, uma vez que se trata de um experimento de material homogêneo e de espessura uniforme.

**Tabela 6.41 – Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.**

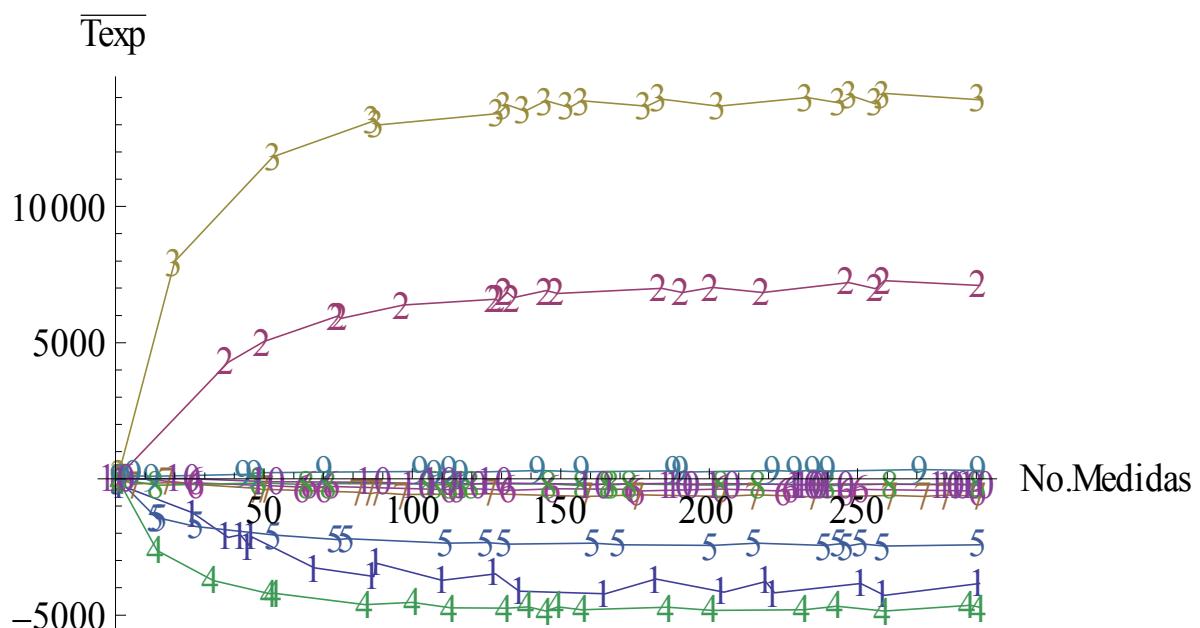
Caso	P	Priori
<b>1</b>	$N_P = 10$ ( $k_{x0}, \bar{k}_1, w_{x0}, \bar{w}_1, h_{x0}, h_{xL}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, b$ );	N, U, N, U, N, N, U, U, U, U
<b>2</b>	$N_P = 12$ ( $k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, h_{x0}, h_{xL}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, b$ );	N, N, U, N, N, U, N, N, U, U, U, U

A figura 6.82 apresenta a incerteza padrão da temperatura experimental ao longo do comprimento da placa, onde percebe-se claramente uma incerteza praticamente constante para a parte aquecida próxima de 0.4°C e uma maior incerteza para a região não aquecida, chegando a valores maiores que 0.6°C.



**Figura 6.82 – Incerteza padrão da temperatura experimental ao longo do comprimento da placa para o experimento com placa vertical e aquecimento superior**

A figura 6.83 ilustra a distribuição dos campos transformados da temperatura experimental ao longo do tempo para cada ordem. Percebe-se por estas figuras a importância mais significativa dos primeiros quatro campos transformados da expansão.

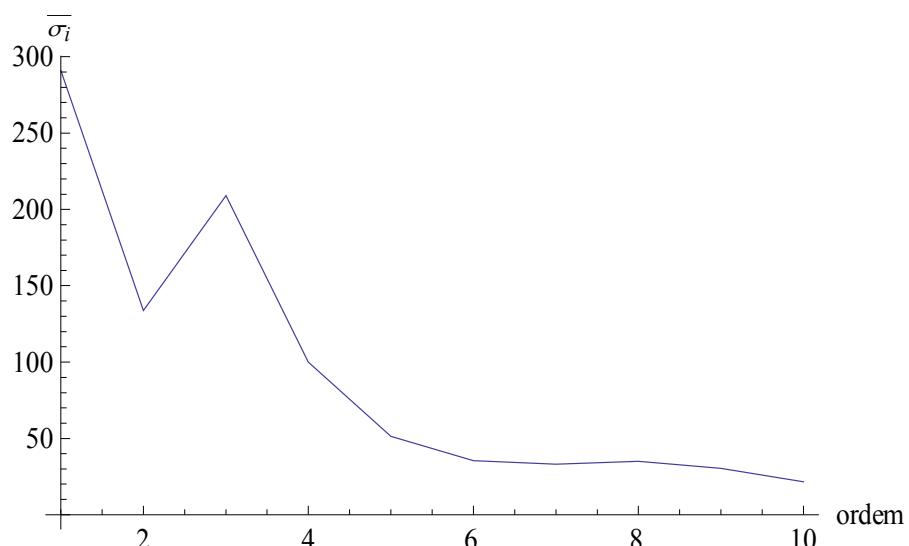


**Figura 6.83 – Distribuição de temperatura transformada ao longo do tempo para as diferentes ordens da série experimento com placa vertical e aquecimento superior**

A tabela 6.42 apresenta os valores das temperaturas transformadas médias para o regime permanente, os desvios padrão das temperaturas experimentais transformadas e os desvios percentuais com relação às respectivas temperaturas experimentais transformadas médias. Tais desvios foram calculados como sendo os desvios médios das temperaturas para as ultimas 50 medidas no tempo (entre 2410s e 2910s) para cada campo transformado, já em regime permanente. A figura 6.84 apresenta o desvio padrão da temperatura experimental transformada para cada campo transformado, onde percebe-se graficamente o decaimento do seu valor com o aumento do número de termos na série

**Tabela 6.42. – Analise das incertezas da temperatura experimental transformada**

Ordem $i$	$\bar{T}_{\text{exp},i}$	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{\sigma}_i \%$
1	-4001.95	290.99	7.27
2	7091.07	133.74	1.89
3	13873.	209.00	1.51
4	-4724.33	100.02	2.12
5	-2410.02	51.515	2.14
6	-436.347	35.404	8.11
7	-629.758	33.108	5.26
8	-218.287	34.948	16.01
9	311.161	30.442	9.78
10	-198.154	21.501	10.85



**Figura 6.84 –Desvio padrão da temperatura experimental transformada para cada campo transformado, para o experimento com placa vertical e aquecimento superior**

A tabela 6.43 e as figuras 6.85 a 6.89 apresentam os resultados das estimativas para o caso 1. Na tabela 6.43 tem-se os valores estimados para cada parâmetro e os seus respectivos intervalos com 99% de confiança. Pode-se perceber, pela análise desta tabela 6.43, uma boa concordância nas estimativas das propriedades com os valores iniciais referente às medidas com o método Flash.

As figuras 6.85 a 6.88 apresentam, em preto, a curva reconstruída com os parâmetros estimados através da técnica de transformação integral (curva preta), enquanto as curvas azul e vermelha representam os intervalos com 99% de confiança, inferior e superior, a curva cyan representa a função construída com os parâmetros iniciais e as linhas pontilhadas dizem respeito aos intervalos máximos e mínimos de procura dos coeficientes.

A figura 6.87 mostra que na região não aquecida, o coeficiente de transferência de calor estimado é praticamente nulo, uma vez que pelas análises dos perfis de temperatura experimentais tem-se a parcela final da placa praticamente à temperatura ambiente durante boa parte do processo transiente.

A falta de aderência ainda apresentada nas figuras 6.89, entre as temperaturas calculadas com os parâmetros estimados e as temperaturas experimentais na região de temperaturas mais baixas e próximas à temperatura ambiente, pode ser resultado da não-linearidade do coeficiente de transferência de calor por convecção natural nessa região, não retratada pelo presente modelo de coeficientes variáveis apenas espacialmente.

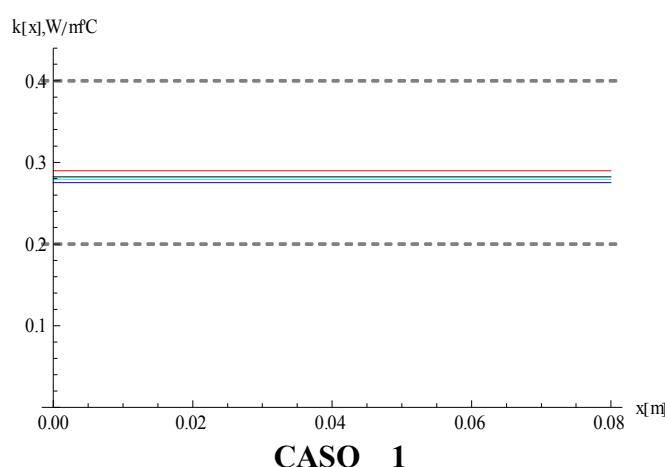
A figura 6.90, apresenta os resíduos entre a temperatura experimental e a temperatura calculada com os parâmetros estimados, onde percebe-se que os resíduos resultantes ainda são relativamente altos principalmente na parte não aquecida da placa, chegando a valores próximos a 6 °C na região mais extrema para o caso 1.

A Tabela 6.44 apresenta as estimativas encontradas para o caso 2. Para este caso foram incluídas as estimativas dos valores das propriedades  $k(x)$  e  $w(x)$  em  $x=L_x$ , uma vez que a análise de sensibilidade apresentada anteriormente indicou uma maior sensibilidade da solução do problema inverso no caso de se incluir estes parâmetros nas estimativas. Sendo assim, para este caso utilizou-se um filtro linear de modo que os parâmetros  $k_{x0}$  e  $k_{xL}$  presentes no filtro fossem estimados juntamente com os demais parâmetros. Para o caso anterior, havia-se assumido um filtro constante uma vez que este experimento trata de uma amostra de um material a princípio homogêneo.

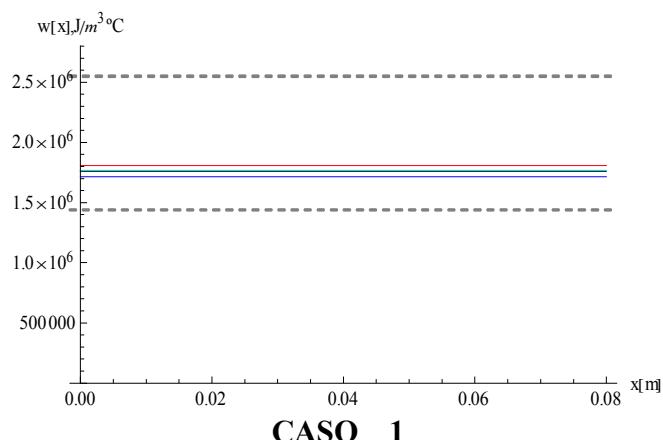
Os resultados apresentados para o caso 2 através da Tabela 6.44 e das figuras 6.91 a 6.96 mostram a boa concordância nas estimativas de  $k_{x0}$  e  $k_{xL}$ ,  $w_{x0}$  e  $w_{xL}$  como esperado, confirmando se tratar de uma amostra de material homogêneo. Todavia, também para este segundo caso tem-se ainda uma falta de aderência entre as temperaturas calculadas com os parâmetros estimados e as temperaturas experimentais na região não-aquecida, de modo que os resíduos também para este caso continuam atingindo valores maiores que 5°C nesta região da placa, como no caso 1.

**Tabela 6.43 - Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 1**

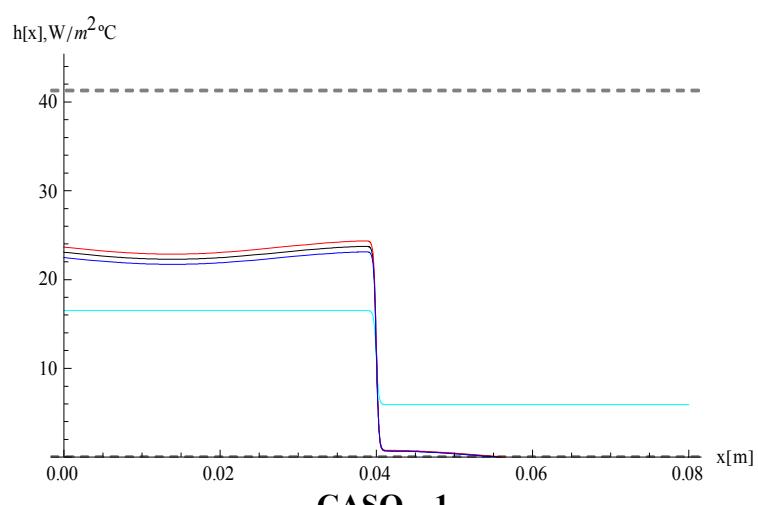
<b>P</b>	<b>Dados de Saída das Estimativas</b>			
	<b>Inicial</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	0.2789	0.2823	0.2812	0.2834
$\bar{k}_1$	$1 \times 10^{-6}$	$-5.840 \times 10^{-12}$	$-7.878 \times 10^{-11}$	$6.710 \times 10^{-11}$
$w_{x0}$	$1.7683 \times 10^6$	$1.761 \times 10^6$	$1.759 \times 10^6$	$1.763 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	$1 \times 10^{-6}$	$-1.945 \times 10^{-10}$	$-2.576 \times 10^{-10}$	$-1.315 \times 10^{-10}$
$h_{x0}$	16.518	23.067	23.037	23.097
$h_{xL}$	5.9020	0.0005205	-0.001048	0.002089
$\bar{h}_1$	$1 \times 10^{-6}$	0.01002	0.00549	0.0145
$\bar{h}_2$	$1 \times 10^{-6}$	-0.0340	-0.0388	-0.0292
$\bar{h}_3$	$1 \times 10^{-6}$	-0.1316	-0.1356	-0.1276
$b$	0.01	0.00878	0.00870	0.00886



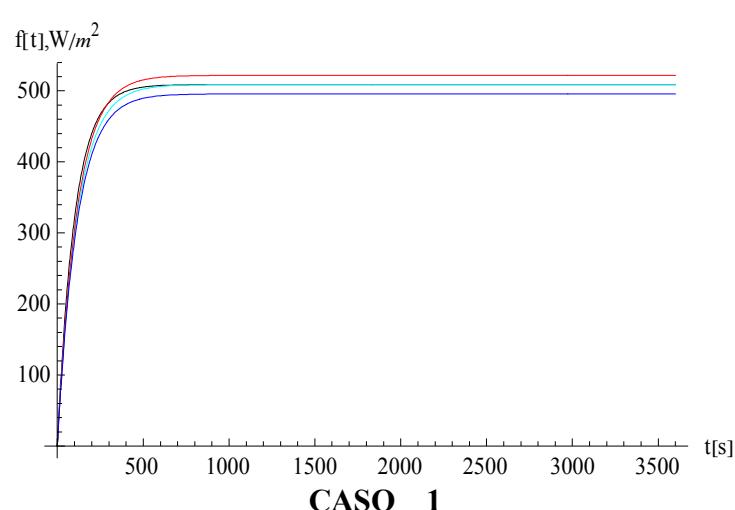
**Figura 6.85 - Condutividade térmica estimada  $k(x)$**



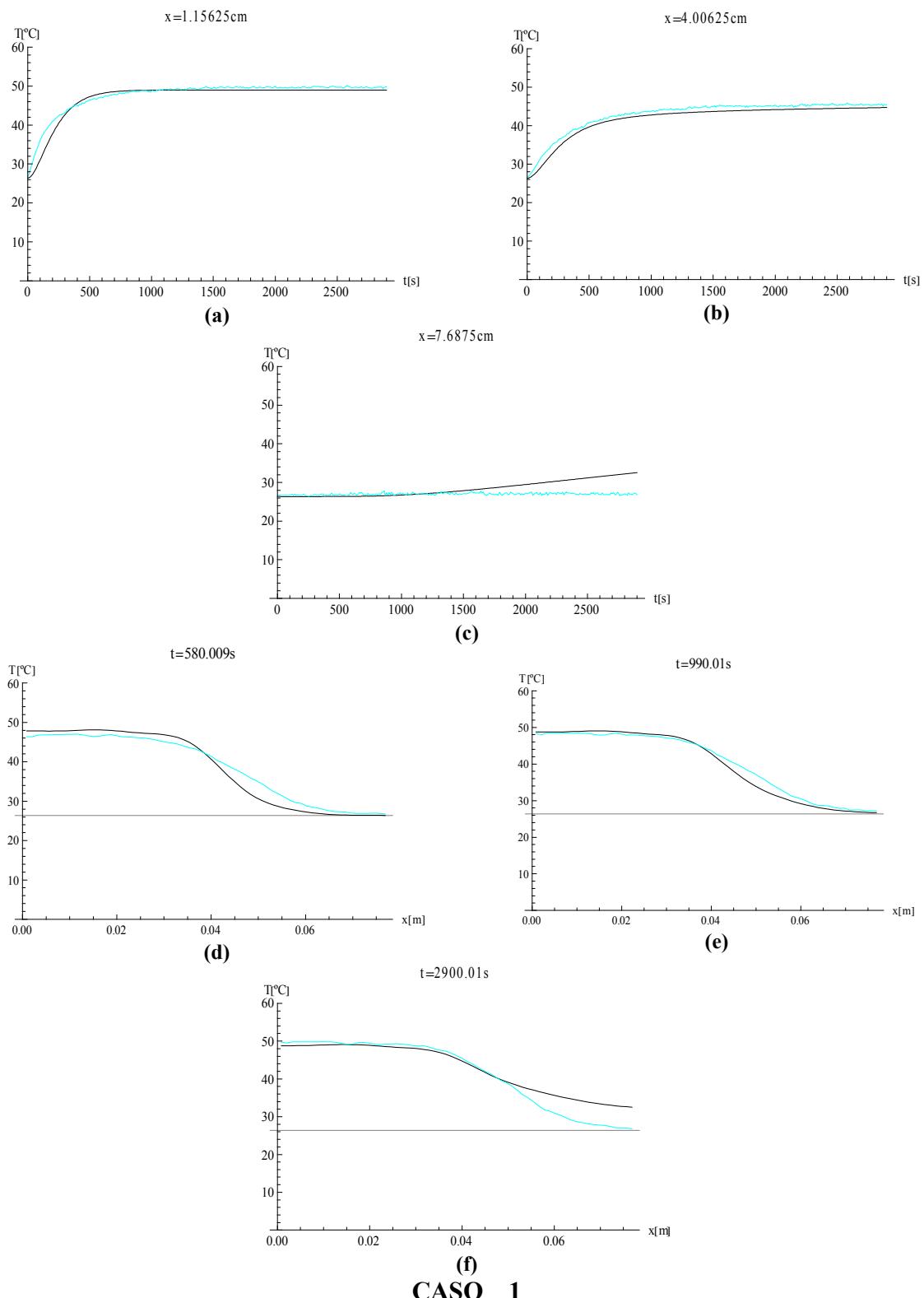
**Figura 6.86 - Capacidade térmica estimada –  $w(x)$**



**Figura 6.87 - Coef. transferência de calor estimado –  $h(x)$**

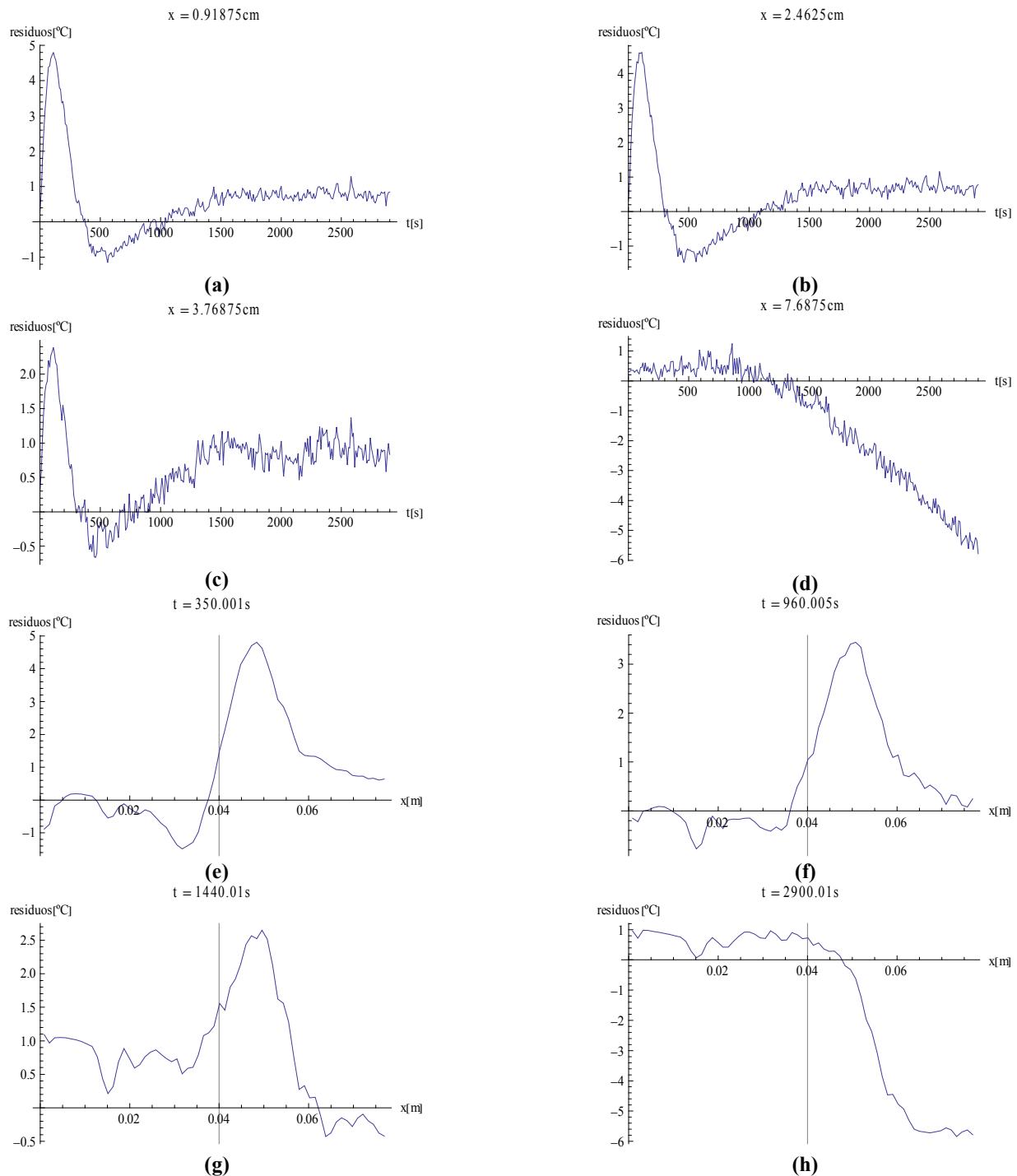


**Figura 6.88 - Variação do fluxo de calor no tempo –  $f(t)$**



### CASO 1

**Figura 6.89 – Comparação entre as temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm; para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;**



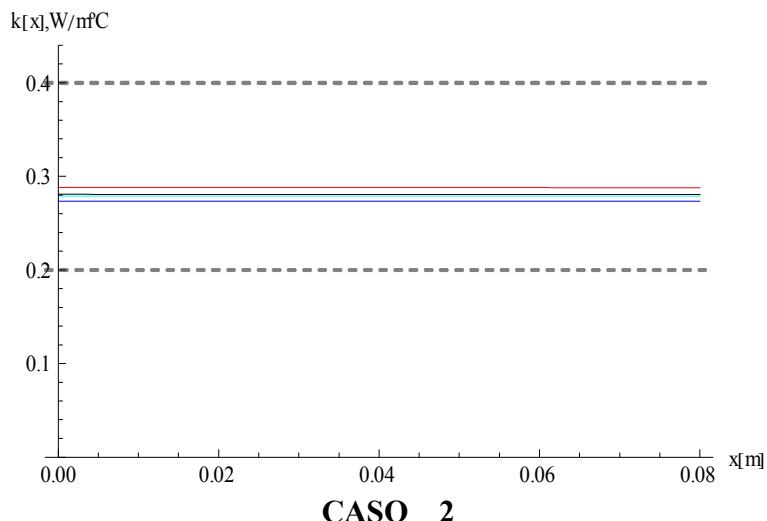
**Figura 6.90. CASO 1**

**Figura 6.90a-d – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

**Figura 6.90.e-h – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**

**Tabela 6.44 - Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 2**

<b>Dados de Saída das Estimativas</b>				
<b>P</b>	<b>Inicial</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	0.2789	0.2808	0.2804	0.2813
$k_{xL}$	0.2789	0.2807	0.2802	0.2813
$\bar{k}_1$	0.0005088	$-3.680 \times 10^{-10}$	$-4.201 \times 10^{-10}$	$-3.158 \times 10^{-10}$
$w_{x0}$	$1.7683 \times 10^6$	$1.7595 \times 10^6$	$1.7571 \times 10^6$	$1.7619 \times 10^6$
$w_{xL}$	$1.7683 \times 10^6$	$1.7741 \times 10^6$	$1.7722 \times 10^6$	$1.7760 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	0.000509	$-3.593 \times 10^{-11}$	$-9.238 \times 10^{-11}$	$2.051 \times 10^{-11}$
$h_{x0}$	16.518	23.044	23.012	23.077
$h_{xL}$	5.902	0.000552	-0.000856	0.00196
$\bar{h}_1$	$8.039 \times 10^{-7}$	0.0101	0.00510	0.0151
$\bar{h}_2$	$8.039 \times 10^{-7}$	-0.0290	-0.0336	-0.02448
$\bar{h}_3$	$8.039 \times 10^{-7}$	-0.136	-0.141	-0.131
$b$	0.01	0.00881	0.00868	0.00894



**Figura 6.91 - Condutividade térmica estimada  $k(x)$**

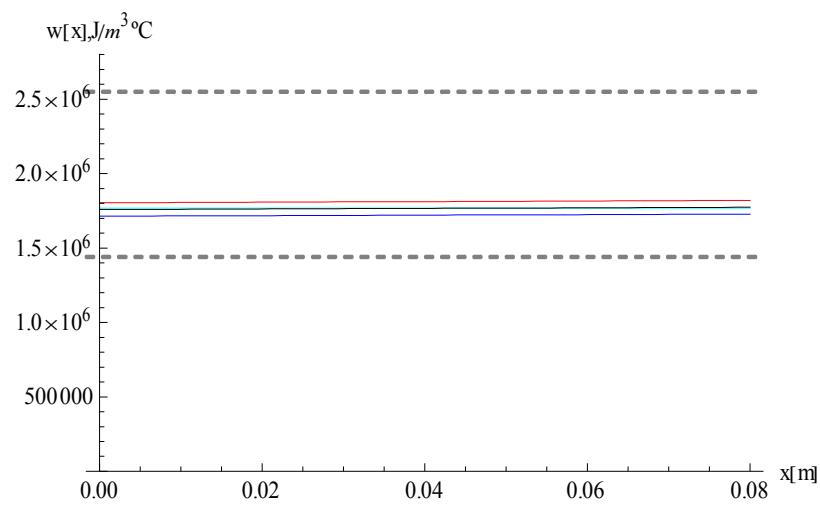


Figura 6.92 - Capacidade térmica estimada –  $w(x)$

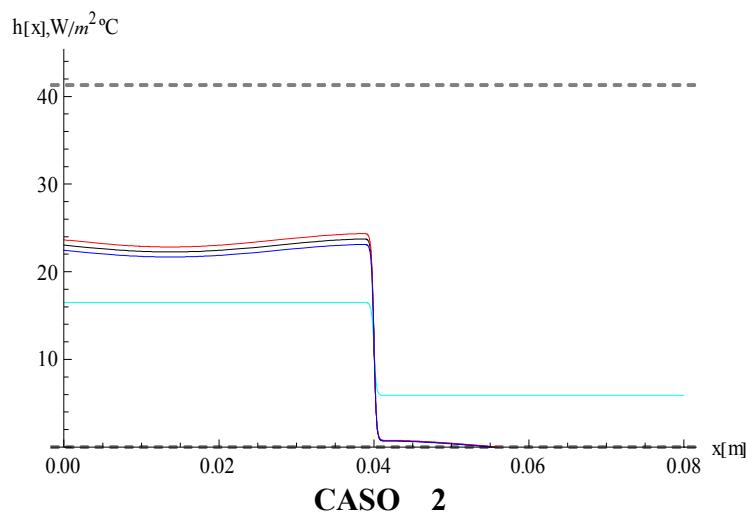


Figura 6.93 - Coef. transferência de calor estimado –  $h(x)$

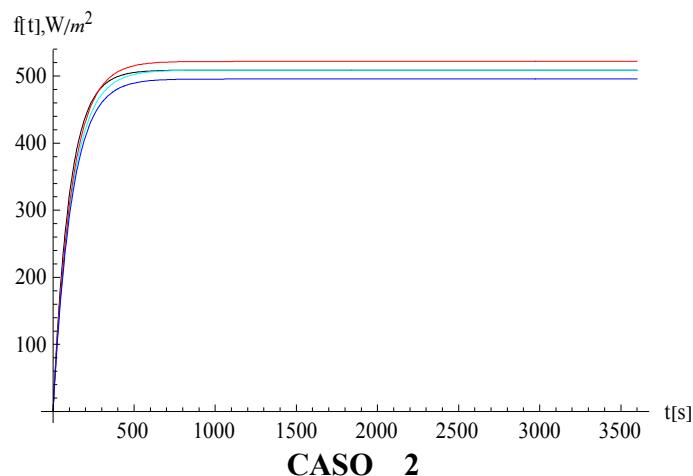
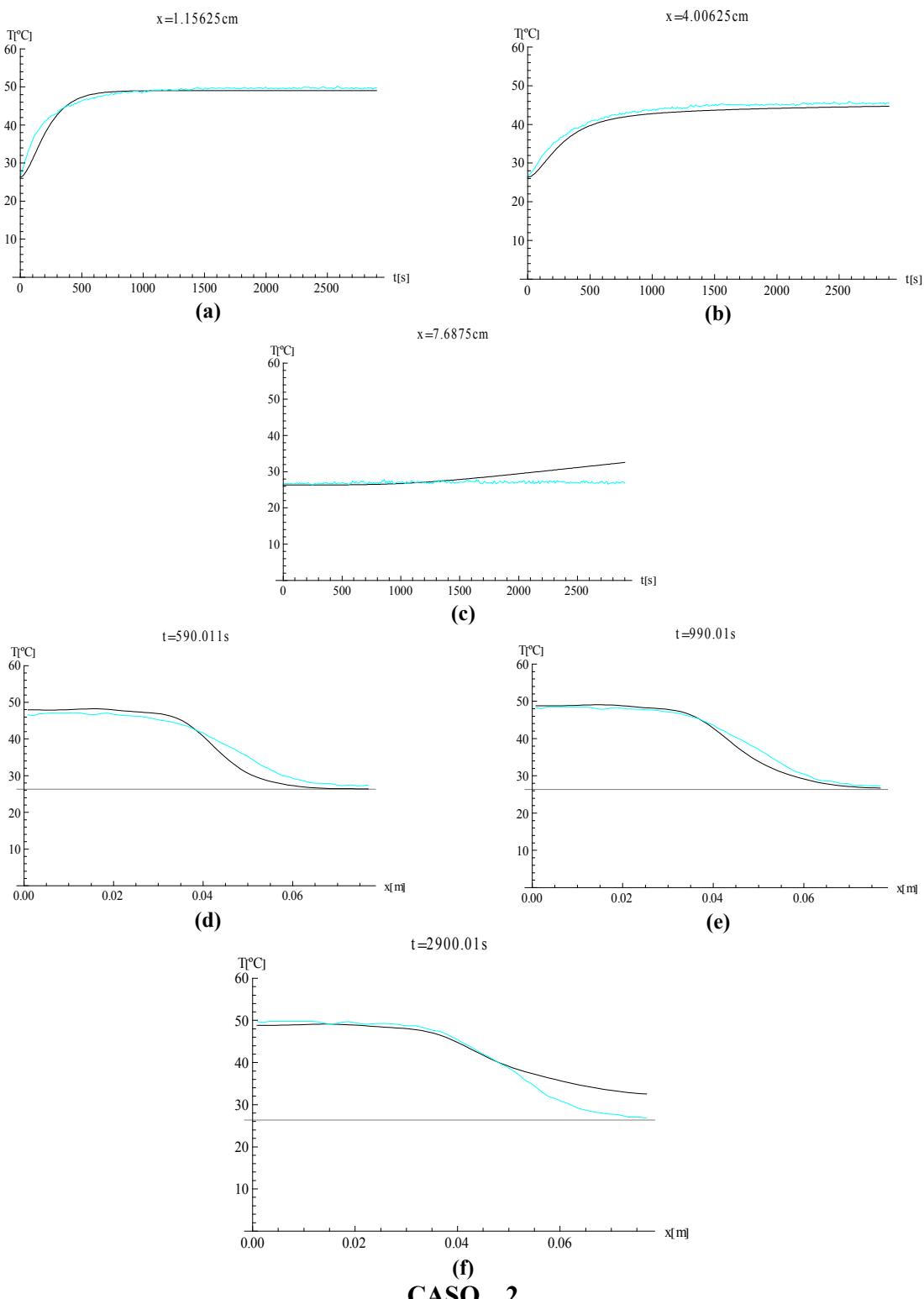
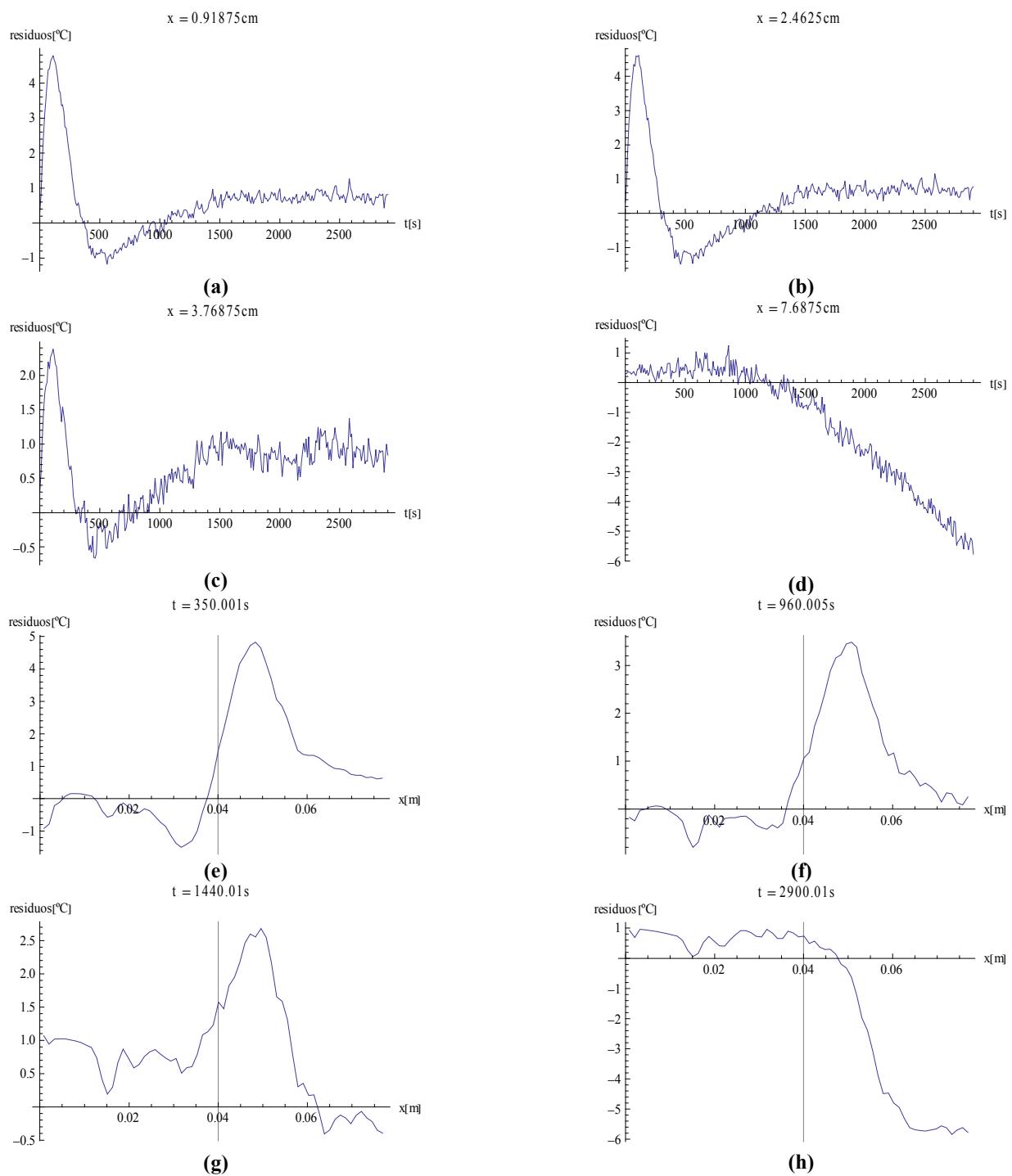


Figura 6.94 - Variação do fluxo de calor no tempo –  $f(t)$



### CASO 2

**Figura 6.95 – Comparação entre as temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm; para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;**



**Figura 6.96. CASO 2**

**Figura 6.96.a-d – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

**Figura 6.96.e-h – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**

Percebe-se pela análise das figuras 6.90 e 6.96, que em ambos os casos, 1 e 2, os resíduos apresentam um pico bem no inicio do transiente para os primeiros centímetros da placa, mas é na parte não aquecida que ele apresenta os desvios mais significativos, principalmente para tempos grandes. Como uma tentativa de se reduzir os resíduos para esta região não aquecida considerou-se um terceiro caso onde estimativas foram realizadas com um número reduzido de medidas no tempo (150 medidas das 291 medidas disponíveis), privilegiando-se a informação ao longo do período de fato transiente e assim reduzindo-se a importância da informação sobre o comportamento não-linear dos coeficientes de transferência de calor na região não-aquecida.

A tabela 6.45 apresenta os parâmetros considerados neste terceiro caso assim como as prioris adotadas para cada um.

**Tabela 6.45 – Definição dos dados de entrada para a solução do problema inverso.**

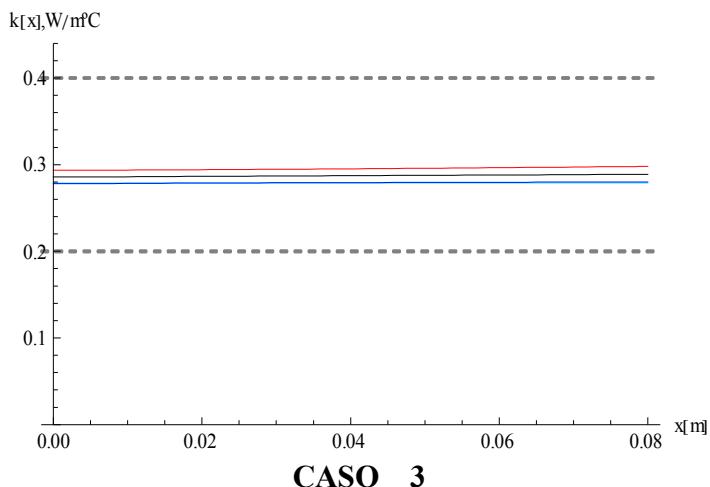
Caso	P	Priori
3	$N_p = 12$ $(k_{x0}, k_{xL}, \bar{k}_1, w_{x0}, w_{xL}, \bar{w}_1, h_{x0}, h_{xL}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, b);$	N, N, U, N, N, U, N, N, U, U, U, U

A tabela 6.46 e as figuras 6.97 a 6.102 apresentam os resultados das estimativas para este terceiro caso.

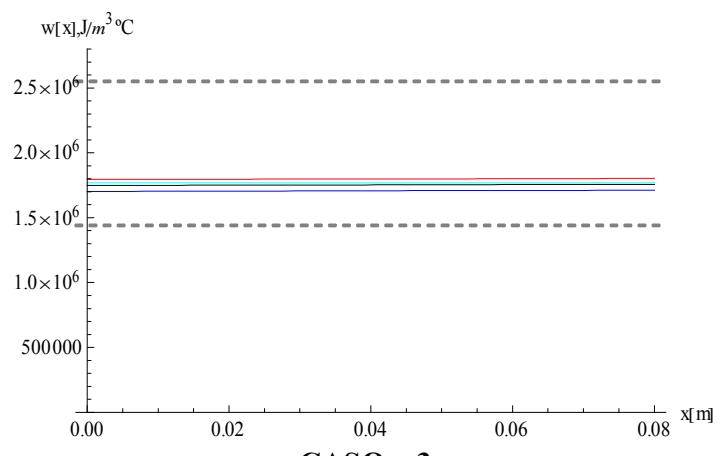
Para este caso pode-se observar, através das figuras 6.101.a-f, uma melhor aderência entre as temperaturas calculadas com os parâmetros estimados e as temperaturas experimentais de modo que os resíduos também diminuiram, quando comparados aos resíduos encontrados para os casos 1 e 2, como apresentado nas figuras 6.102.a-h, atingindo valores máximos de 4°C na parcela não aquecida da placa.

**Tabela 6.46 - Estimativas e intervalos de confiança para o CASO 3**

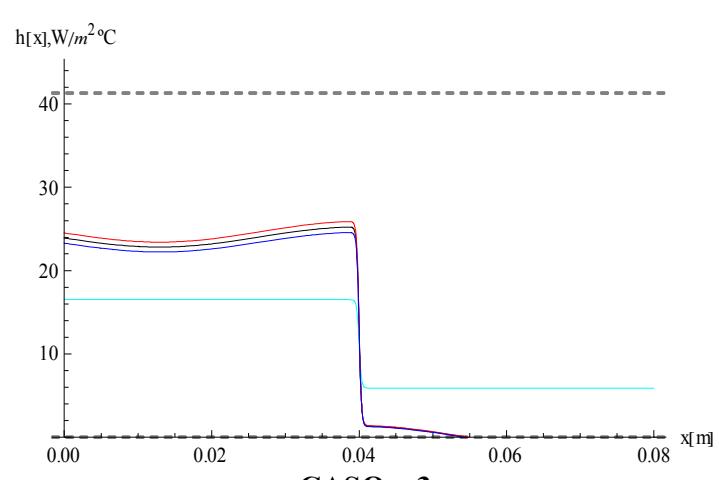
<b>P</b>	<b>Dados de Saída das Estimativas</b>			
	<b>Inicial</b>	<b>Estimado</b>	<b>ICmin-99%</b>	<b>ICmax-99%</b>
$k_{x0}$	0.2789	0.2856	0.2833	0.2880
$k_{xL}$	0.2789	0.2889	0.2837	0.2941
$\bar{k}_1$	0.0005088	$-1.260 \times 10^{-10}$	$-3.722 \times 10^{-10}$	$1.203 \times 10^{-10}$
$w_{x0}$	$1.7683 \times 10^6$	$1.7487 \times 10^6$	$1.7373 \times 10^6$	$1.7601 \times 10^6$
$w_{xL}$	$1.7683 \times 10^6$	$1.7570 \times 10^6$	$1.752 \times 10^6$	$1.7620 \times 10^6$
$\bar{w}_1$	0.000509	$4.928 \times 10^{-10}$	$3.856 \times 10^{-10}$	$5.999 \times 10^{-10}$
$h_{x0}$	16.518	23.902	23.847	23.958
$h_{xL}$	5.902	0.00135	-0.00210	0.00480
$\bar{h}_1$	$8.039 \times 10^{-7}$	0.0372	0.0284	0.0461
$\bar{h}_2$	$8.039 \times 10^{-7}$	-0.00211	-0.00863	0.00441
$\bar{h}_3$	$8.0398 \times 10^{-7}$	-0.231	-0.236	-0.227
$b$	0.01	0.0103	0.0102	0.0104



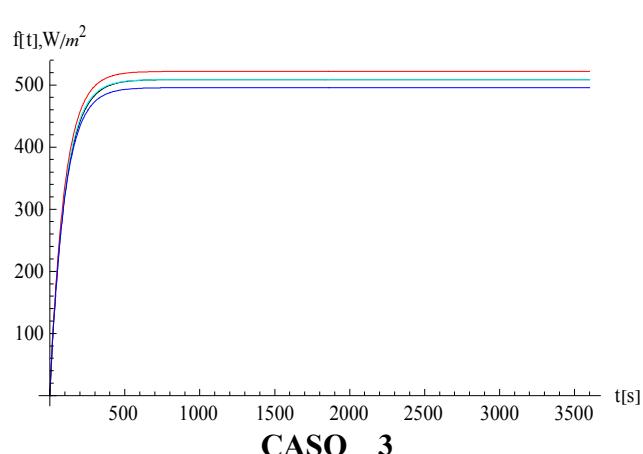
**Figura 6.97 - Condutividade térmica estimada  $k(x)$**



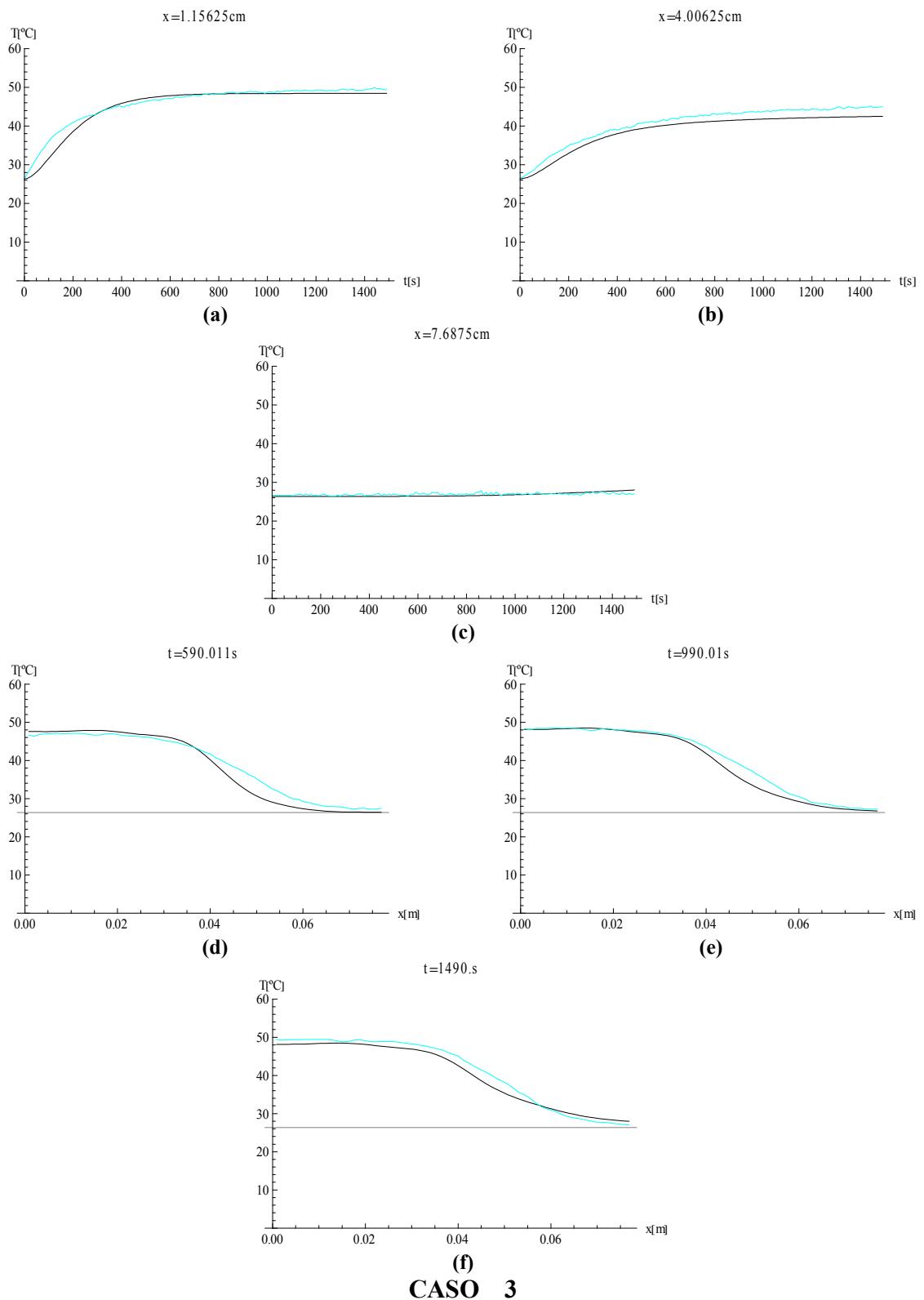
**Figura 6.98 - Capacidade térmica estimada –  $w(x)$**



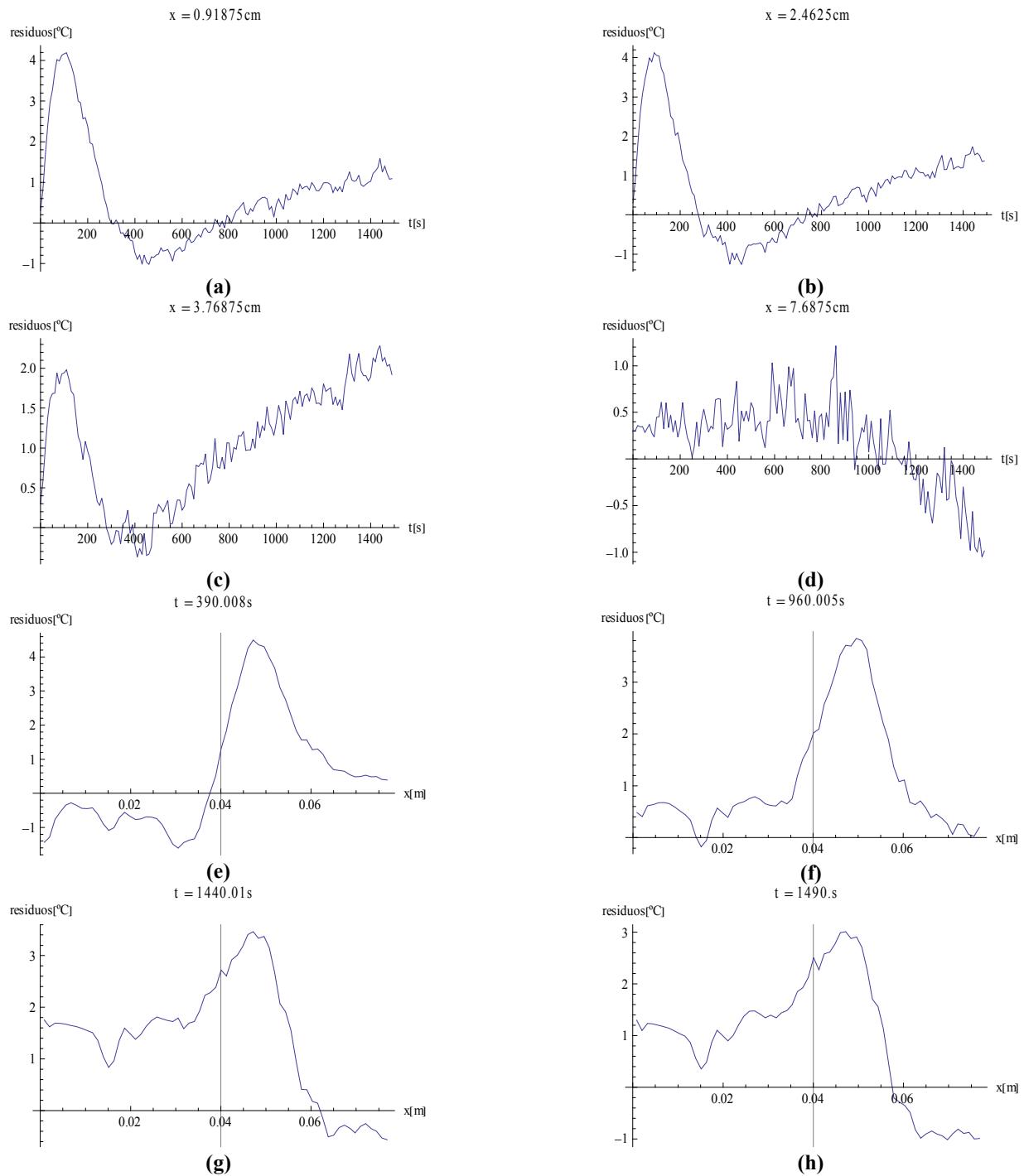
**Figura 6.99 - Coef. transferência de calor estimado –  $h(x)$**



**Figura 6.100 - Variação do fluxo de calor no tempo –  $f(t)$**



**Figura 6.101 – Comparação entre as temperatura experimental (curva cyan) e a temperatura estimada (curva preta) para três diferentes posições: (a) 1.15cm; (b) 4cm; (c) 7.68cm; para três diferentes tempos: (d) 580s; (e) 990s; (f) 2900s;**



**Figura 6.102. CASO 3**

**Figura 6.102a-d – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do tempo, para 4 posições diferentes**

**Figura 6.102e-h – Resíduos entre as temperaturas estimadas e as experimentais ao longo do comprimento da placa, para 4 tempos diferentes**

A seguir, na Tabela 6.47, apresenta-se a consolidação dos resultados experimentais para a difusividade térmica, condutividade térmica e calor específico, obtidas com o equipamento Nanoflash da UNIMET/LTTC, nas temperaturas selecionadas de 25, 30, 35, 40, 45 e 50°C, condizentes com a faixa de temperatura dos experimentos aqui realizados. Apresenta-se também, na última coluna, os valores da condutividade térmica do baquelite variando com a temperatura segundo Dashora *et.al.* (1992), em boa concordância com aqueles calculados a partir das medidas de difusividade térmica e calor específico do Nanoflash, para uma massa específica medida de  $\rho=1392 \text{ kg/m}^3$ . Vale observar a excelente concordância com os valores aqui estimados, a partir do caso 3, com valor médio de 0.288 W/mC.

**Tabela 6.47– Análise das propriedades termofísicas das amostras de baquelite das placas ensaiadas;**

Propriedade	Amostras 1	Amostras 2	Médias	Dashora <i>et.al.</i> (1992)
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 25^\circ\text{C}$	0.164 (0.001)*	0.168 (0.001)*	0.166	-
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 30^\circ\text{C}$	0.163 (0.002)*	0.161 (0.008)*	0.162	-
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 35^\circ\text{C}$	0.160 (0.001)*	0.157 (0.014)*	0.159	-
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 40^\circ\text{C}$	0.156 (0.001)*	0.156 (0.013)*	0.156	-
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 45^\circ\text{C}$	0.154 (0.000)*	0.163 (0.007)*	0.159	-
$\alpha[\text{mm}^2/\text{s}] 50^\circ\text{C}$	0.150 (0.001)*	0.155 (0.001)*	0.153	-
$k [\text{W/mC}] 25^\circ\text{C}$	0.282	0.274	0.278	0.295
$k [\text{W/mC}] 30^\circ\text{C}$	0.243	0.292	0.268	0.296
$k [\text{W/mC}] 35^\circ\text{C}$	0.264	0.278	0.271	0.298
$k [\text{W/mC}] 40^\circ\text{C}$	0.266	0.274	0.270	0.299
$k [\text{W/mC}] 45^\circ\text{C}$	0.291	0.278	0.284	0.300
$k [\text{W/mC}] 50^\circ\text{C}$	0.289	0.278	0.283	0.301
$C_p [\text{J/gC}] 25^\circ\text{C}$	1.236	1.200	1.218	-
$C_p [\text{J/gC}] 30^\circ\text{C}$	1.073	1.287	1.180	-
$C_p [\text{J/gC}] 35^\circ\text{C}$	1.187	1.248	1.218	-
$C_p [\text{J/gC}] 40^\circ\text{C}$	1.226	1.260	1.243	-
$C_p [\text{J/gC}] 45^\circ\text{C}$	1.359	1.294	1.327	-
$C_p [\text{J/gC}] 50^\circ\text{C}$	1.383	1.331	1.357	-

(\*) desvio padrão das medidas

# Capítulo 7

---

---

## 7. Conclusões e Sugestões

No presente trabalho, foram estabelecidas as bases fundamentais e construídas as ferramentas para a análise teórico-experimental da condução de calor em meios heterogêneos. Especificamente, o presente trabalho apresentou o uso combinado da transformação integral, da inferência Bayesiana e da técnica experimental de medição de temperatura por termografia de infravermelho em problemas inversos de estimativa simultânea de propriedades termofísicas e condições de contorno em problemas unidimensionais. O problema direto foi abordado de forma analítica através do Método de Transformação Integral Clássica (C.I.T.T.), enquanto que o problema de autovalor relacionado foi resolvido via Técnica da Transformada Integral Generalizada (G.I.T.T.). Os coeficientes variáveis na formulação do problema direto são eles próprios expandidos em autofunções, o que permite a obtenção totalmente analítica da matrix de coeficientes na transformação integral. Na solução do problema inverso adotou-se abordagem de inferência Bayesiana empregando o Método de Monte Carlo via Cadeia de Marckov (MCMC), através do uso do algoritmo de Metropolis-Hastings como procedimento de amostragem. Para a solução do problema inverso as funções espaciais a estimar foram também expandidas em termos de autofunções, o que representou uma relevante contribuição do presente trabalho, uma vez que os comportamentos funcionais representativos das propriedades termofísicas variáveis foram recuperados com um número bastante reduzido de parâmetros, em comparação com técnicas mais usuais de parametrização. Todas as implementações computacionais empregada neste trabalho foram construídas na plataforma de computação simbólica *Mathematica*, o que reduziu bastante o esforço de manipulação algébrica e derivação das etapas analíticas.

Os resultados obtidos no presente trabalho revelaram que ambas as abordagens de estimativa, na temperatura e no campo transformado, são robustas com relação aos erros de medidas e capazes de prover resultados mesmo para distribuições a priori pouco informativas. A análise inversa baseada no campo transformado mostrou-se particularmente útil e apropriada na redução de dados, em situações onde se tem um grande número de medidas espaciais disponível, como no caso de experimentos envolvendo a termografia por infravermelho. Esta idéia aqui avançada se destaca como uma das principais contribuições do presente estudo, tendo em vista o ganho significativo em robustez e custo computacional obtido na solução do problema inverso de estimativa simultânea das propriedades termofísicas, em relação à estimativa tradicional a partir de medidas e simulações do campo de temperatura, como destacado na seção 6.2.3.

Não obstante, a própria realização desses estudos gerou novas idéias e possibilidades de refinamento dos desenvolvimentos, mesmo para as situações unidimensionais aqui tratadas. Assim, como proposta para trabalhos futuros, tem-se a modificação do problema físico proposto de forma a estender o presente estudo a situações multidimensionais e/ou não-lineares.

Na extensão do método de solução direta para situações multidimensionais, que seria requerido no tratamento combinado acima proposto, deve-se lembrar que a solução formal geral já foi nesta fase apresentada. Entretanto alguns novos aspectos computacionais são propostos como extensão, relacionados ao reordenamento de termos nas expansões das autofunções, tanto para a representação do problema original, quanto para a representação dos coeficientes variáveis. Neste caso, técnicas de aceleração de convergência de seqüências não-lineares podem ter um papel relevante para a representação dos coeficientes com um número reduzido de parâmetros, reduzindo então o esforço de identificação finalmente pretendido.

Novas perspectivas foram também abertas na extensão da presente metodologia de análise de problemas inversos para outras caracterizações em meios heterogêneos, envolvendo nanocompósitos e "functionally graded materials", incluindo estimativas de propriedades variáveis também na profundidade do material a partir de medidas de temperatura na superfície apenas. Esse é um grande desafio que passa possivelmente pela combinação de metodologias, mas que em vista dos resultados aqui

obtidos sugere a expansão em autofunções das propriedades desconhecidas abaixo da fronteira onde se tomam as medidas. Por fim, tais objetivos só serão factíveis a partir de um equipamento termográfico mais preciso e amigável, para adequação da qualidade das medidas à robustez e precisão dos métodos de solução dos problemas diretos e inversos aqui desenvolvidos.

## Referências Bibliográficas

---

---

- Agari , Y. e Uno T. (1986), Estimation on Thermal Conductivities of Filled Polymers, *J. Applied Polymer Science*, vol.32, no.7, pp.5705-5712.
- Alifanov, O.M. (1994), “*Inverse Heat Transfer Problems*”, Springer-Verlag, New York.
- Astarita, T., Cardone, G., e Carlomagno, G.M. (2006), "Infrared Thermography: An Optical Method in Heat Transfer and Fluid Flow Visualisation", *Optics and Lasers in Eng.*, v.44, pp.261-281.
- Bailey P.B., Gordon M.K., Shampine L.F. (1978), “Automatic Solution of the Sturm-Liouville Problem”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v.4, pp. 193-208.
- Bailey P.B., Garbow B.S., Kaper H.G., e Zettl A. (1991), “Eigenvalue and Eigenfunction Computations for Sturm-Liouville Problems”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v.17, pp.491-499.
- Bamford, M., Florian, M., Vignoles, G.L., Batsale, J.C., Cairo, C.A.A., e Maillé, L. (2009), "Global and Local Characterization of the Thermal Diffusivities of SiCf/SiC Composites with Infrared Thermography and Flash Method", *Composites Science & Technology*, v.69, pp.1131-1141.
- Barker, A.A. (1965), "Monte Carlo Calculation of the Radial Distribution Functions for a Proton-electron Plasma", *Australian Journal of Physics*, v.18, pp.119-133.
- Beck, J. V. e Arnold, K. J. (1977), “*Parameter Estimation in Engineering and Science*”, Wiley-Interscience, New York
- Bejan, A. (1993), “Heat Transfer”, John Wiley, New York.
- Bozzoli, F., Rainieri, S., e Pagliarini, G. (2008), "Estimation of the Local Heat Transfer Coefficient in Forced Convection of Moist Air in Presence of Water Vapour

- Surface Condensation", *Prof. of the 5th European Thermal Sciences Conference*, Netherlands, 2008.
- Colaço, M.J., Orlando H.R.B e Dulikravich, G.S. (2006a), "Inverse and Optimization Problem in Heat Transfer", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, ABCM, v.28, no.1.
- Colaço, M.J., Orlando H.R.B, Robety, N.C. Alves, e Leitão, V. (2006b), "On the use of MFS in linear inverse diffusion problems", *Proc. of the 11<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT*, Curitiba – Brazil, Dec. 5-8.
- Cotta, R.M. (1990), "Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems", *Num. Heat Transfer, Part B*, v. 127, pp. 217-226.
- Cotta, R.M. (1993), "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL.
- Cotta, R.M. (1994), "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method", *Int J. Heat & Mass Transfer* (Invited Paper), v. 37, Suppl. 1, pp. 381-394, March.
- Cotta, R.M., Ed., (1998), "The Integral Transform Method in Thermal and Fluid Sciences and Engineering", Begell House, New York.
- Cotta, R.M., e Mikhailov, M.D. (1997), "Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", Wiley-Interscience, Chichester, UK.
- Cotta, R.M. e Nogueira, E. (1988), "On the Eigenvalues Basic to Diffusion through Composite Media", *Computational and Applied Math.*, v.7, pp.201-213.
- Cotta, R.M., Alves, L.S.B. e Mikhailov, M.D. (2001), "Applied Numerical Analysis with Mathematica", Editora E-Papers, Rio de Janeiro, Brasil.
- Cotta, R. M. e Orlando, H.R.B. (2003), "Hybrid Approaches in Heat and Mass Transfer:- A Brazilian Experience with Applications in National Strategic Projects", *Heat Transfer Eng.*, Invited Editorial, v.24, no.4, pp.1-5.
- Cotta, R.M., Santos, C.A.C., Quaresma, J.N.N., e Perez-Guerrero, J.S. (2005), " Hybrid Integral Transforms in Convection-Diffusion: Recent Applications in Internal Flow Simulation", Invited Lecture, *Proc. of the 4th Int. Conf. Computational Heat and Mass Transfer, 4th ICCHMT*, Paris-Cachan, France, May 2005

- Cotta R. M. e Mikhailov M.D. (2006), "Hybrid Methods and Symbolic Computations", in: W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, and J.Y. Murthy, Handbook of Numerical Heat Transfer, 2<sup>nd</sup> edition, Chapter 16, John Wiley, New York , pp.493-522.
- Cotta, R.M., Naveira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A. e Quaresma, J.N.N. (2009a) "Unified Integral Transforms in Convection Diffusion: The Unit Code With Symbolic Computation", *First International Conference on Computational Methods for Thermal Problems - ThermaComp2009*, September, 2009, Napoli, Italy.
- Cotta, R.M., Naveira-Cotta, C.P., e Orlande, H.R.B. (2009b), "Combining Integral Transforms and Bayesian Inference in the Direct and Inverse Analysis of Heat Transfer Problems", *Proc. of the 11<sup>th</sup> UK National Heat Transfer Conference*, (Invited Keynote Lecture), Londres, Inglaterra, Setembro.
- Cotta, R.M., Naveira-Cotta, C.P., Orlande, H.R.B., e S. Kakaç (2009c), "Direct and Inverse Problems Solutions in Micro-Scale Forced Convection with Slip Flow", *NATO Advanced Study Institute on Microsystems for Security – Fundamentals and Application*, Cesme-Izmir, Turquia, August 23 – September 4.
- Dai, Y., Tan, W., Sun, Q., e Li, Y.D. (2007), "Effect of Different Thermal Conductivity Functions on Temperature Fields in FGM", *J. Materials Processing Tech.*, v.187-188, pp.212-214.
- Danes, F., Garnier, B., e Dupuis, T. (2003), "Predicting, Measuring, and Tailoring the Transverse Thermal Conductivity of Composites from Polymer Matrix and Metal Filler", *Int. J. of Thermophysics*, v.24, pp.771-784.
- Dashora, P. Saxena, N.S., Saksena, M.P., Bala, K., Sachdev, K., Pradhan, P.R. e Ladiwala, G.D., (1992), "A Theoretical Study of the Temperature Dependence of the Thermal Conductivity of Polymers", *Physica Scripta*. Vol.45, pp.399-401.
- Divo, E., Kassab, A. e Rodriguez F. (2000), "Characterization of space dependent thermal conductivity with a BEM-based genetic algorithm", *Numerical Heat Transfer, Part A*, v. 37, pp. 845-875
- Ehlers, R.S. (2003), "Introdução a Inferência Bayesiana", Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná.
- Ehlers, R.S. (2004), "Métodos Computacionalmente Intensivos em Estatística", Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná.

- Evans, W., Prasher, R., Fish, J., Meakin, P., Phelan e P., Kebbinski, P. (2008), "Effect of aggregation and interfacial thermal resistance on thermal conductivity of nanocomposites and colloidal nanofluids", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.51, pp. 1431-1438.
- Fan, C., Sun, F. e Yang, L. (2008), "A numerical method for determining thermal conductivity distribution of the interlayer of a sandwich plate based on thermographic temperature measurement", *Journal of Physics D: Applied Physics*, v.41 (9pp.).
- Fieberg, C. e Kneer, R. (2008), "Determination of Thermal Contact Resistance from Transient Temperature Measurements", *Int. J. Heat & Mass Transfer*, v.51, pp.1017-1023.
- Flach, G.P. e Ozisik, M.N. (1989), "Inverse Heat Conduction Problem of Simultaneously Estimating Spatially Varying Thermal Conduction and Heat Capacity per Unit Volume", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v.16, pp. 249-266.
- Fudym, O., Ladevie, B. e Batsale, J.C., (2002), "A Seminumerical Approach for Heat Diffusion in Heterogeneous Media: One Extension of the Analytical Quadrupole Method ", *Num. Heat Transfer, Part B - Fundamentals*, v.42, pp. 325-348.
- Fudym, O., Batsale, J.C. e Lecomte, D. (2004), "Heat Diffusion at The Boundary of Stratified Media Homogenized Temperature Field and Thermal Constriction", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.47, pp. 2437-2447.
- Fudym, O. (2006), "Velocity and heat transfer parameters mapping: thermal quadrupoles and infrared image processing", *11<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT*, Curitiba – Brazil, Dec. 5-8.
- Fudym, O., Batsale, J.C. e Battaglia, J.L. (2007), "Thermophysical properties mapping in semi-infinite longitudinally cracked plates by temperature image processing", *Inverse Problems in Science and Engineering*, v.15, No.2, pp.163-176.
- Fudym, O., Orlande, H.R.B., Bamford, M. e Batsale, J.C. (2008), "Bayesian Approach for Thermal Diffusivity Mapping from Infrared Images Processing with Spatially Random Heat Pulse Heating", *6<sup>th</sup> ICIPE Proceedings, 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Inverse*

*Problems in Engineering: Theory and Practice*, Dourdan, France, June 15<sup>th</sup>-19<sup>th</sup>.

- Gamerman, D. e Lopes, H. F. (2006), "Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference", Chapman & Hall/CRC, 2nd edition.
- Ganapathysubramania, B. e Zabaras, N. (2008), "Modeling multiscale diffusion process in random heterogeneous media", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, in press.
- Hastings, W.K. (1970), "Monte Carlo Sampling Methods using Markov Chains and their Applications", *Biometrika*, v.57, pp.97-109.
- Huang, C.H. e Ozisik, M.N. (1990), "A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, v. 11, No. 3.
- Huang, C.H. e Huang, C.Y. (2007), "An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue", *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, pp. 1785-1797.
- Huttunen, J.M.J., Huttunen, T., Malinen, M. e Kaipio, J. (2006), "Determination of heterogeneous thermal parameters using ultrasound induced heating and MR thermal mapping", *Institute of Physics Publishing: Phys. Med. Biol.*, v.51, pp. 1011-1032.
- Jiang, F. e Souza, A.C.M. (2007), "Effective thermal conductivity of heterogeneous multi-component materials: an SPH implementation", *Heat & Mass Transfer*, v. 43. pp. 479-491.
- Kaipio, J.P. e Somersalo, E. (2004), "Computational and Statistical Methods for Inverse Problems", Springer, Berlin.
- Kolehmainen, V., Kaipio, J.P. e Orlande, H.R.B. (2007), "Reconstruction of thermal conductivity and heat capacity using a tomographic approach", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.50, pp.5150-5160.
- Krapez, J.C., Spagnolo, L., Frieb, M., Maier, H.P., e Neuer, G. (2004), "Measurement of In-plane Diffusivity in Non-homogeneous Slabs by Applying Flash Thermography", *Int. J. Thermal Sciences*, v.43, pp.967-977.

- Kumlutas, D., Tavman, I.H., e Çoban, M.T., (2003), Thermal Conductivity of Particle Filled Polyethylene Composite Materials, *Composite Science & Technology*, vol.63, no.1, pp.113-117.
- Kumlutas, D. e Tavman , I.H., (2006), A Numerical and Experimental Study on Thermal Conductivity of Particle Filled Polymer Composites, *J. Thermoplastic Composite Materials*, vol.19, pp.441-455.
- Lee, P., (2004), *Bayesian Statistics*, Oxford University Press, London.
- Legaie, D., Pron, H., e Bissieux, C. (2008), "Resolution of an Inverse Heat Conduction Problem with a Non-linear Least Square Method in the Hankel Space. Application to Photothermal Infrared Thermography", *Proc. of the 6th Int. Conf. Inverse Problems in Eng.: Theory and Practice, Journal of Physics: Conference Series* 135 (2008).
- Leonard, T. e Hsu, J.S.J. (1999), "*Bayesian Methods: An Analysis for Statisticians and Interdisciplinary Researchers*", Cambridge University Press.
- Lesnic D., Elliot, L., Ingham, D.B., Clennell, B. e Knioe, R.J. (1999), "The Identification of the Piecewise Homogeneous Thermal Conductivity of Conductors Subjected to a Heat Flow Test", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.42, pp. 143-152.
- Lewis ,T. e Nielsen ,L., (1970), Dynamic Mechanical Properties of Particulate-filled Polymers, *J. Applied Polymer Science*, vol.14, no.6, pp.1449-1471,.
- Lin, S.H. (1992), "Transient Conduction in Heterogeneous Media", *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, v.10, 165-174.
- Magnani, F.S. e Silva, R. N. T. (2007), "Infrared Thermography Applied to Quantitative Determination of Spatial and Thermophysical Parameters of Hidden Included Objects", *Applied Thermal Engineering*, v.27, pp.2378-2384.
- Matt, C.F. e Cruz, M. (2008), "Effective Thermal Conductivity of Composite Materials with 3-D Microstructures and Interfacial Thermal Resistance", *Numerical Heat Transfer, Part-A: Applications*, v. 53, Issue 6, pp577-604.
- Maxwell , J.C., (1954),*A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Inc., NY.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E. (1953), "Equations of State Calculations by Fast Computating Machines", *Journal of Chemical Physics*, v. 21, pp.1087-92.

- Migon, H.S. e Gamerman, D. (1999), "Statistical Inference: an Integrated Approach", Arnold, London, UK.
- Mikhailov M.D., Vulchanov N.L. (1983), "A Computational Procedure for Sturm-Liouville Problems", *J. Computational Physics*, v.50, pp.323-336.
- Mikhailov, M.D. e Ozisik, M.N. (1984), "Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion", John Wiley.
- Mikhailov, M.D. e Cotta, R.M. (1994), "Integral Transform Method for Eigenvalue Problems", *Comm. Num. Meth. Eng.*, v.10, pp. 827-835.
- Mota, C.A.A. (2007), "Estimativa Simultânea do Fluxo de Calor e de Propriedade Termodinâmica de Materiais em Altas Temperaturas", Tese de Doutorado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEM/COPPE
- Mota, C.A.A., Orlande, H.R.B. e Wellele, O.J.M. (2007), "Inverse Problem of Simultaneous Identification of Thermophysical Properties and Boundary Heat Flux", *19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering –COBEM*, Brasília, Brazil, Nov. 5-9.
- Naveira, C.P., Fudym, O., Cotta, R. M., e Orlande, H.R.B. (2008a), "Integral Transform Solutions for Diffusion in Heterogeneous Media", *Proceedings of IMECE2008, ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, Paper no. IMECE2008-69114, Boston, MA, USA, November 1-6.
- Naveira, C.P., Cotta, R.M., Orlande, H.R.B., e Fudym, O. (2008b), "Generalized Integral Transform Technique for Sturm-Liouville Problems in Heterogeneous Media", *12<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2008*, Belo Horizonte, Brazil, November 10-14, 2008.
- Naveira, C.P., Lachi, M., Cotta, R. M., e Padet. J. (2009a), "Hybrid Formulation and Solution for Transient Conjugated Conduction-External Convection", *Int. J. Heat & Mass Transfer*, v. 52, Issues 1-2, pp. 112-123.
- Naveira-Cotta, C.P., Cotta, R.M. e Orlande, H.R.B., and Fudym, O. (2009b), "Eigenfunction Expansions for Transient Diffusion in Heterogeneous Media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.52, pp.5029-5039.

- Oliveira, M.C., Ramos, R. e Cotta, R.M., (1995), "On the Eigenvalues Basic to the Analytical Solution of Convective Heat Transfer with Axial Diffusion Effects", *Comm. Num. Meth. Eng.*, v.11, pp. 287-296.
- Orlande, H.R.B., Colaço, M. e Dulikravich, G.S. (2008), "Approximation of the Likelihood Function in the Bayesian Technique for the Solution of Inverse Problems", *Inverse Problems in Science and Engineering*, v.16, pp. 677-692.
- Ozisik, M. N. e Orlande, H. R. B. (2000), "*Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*", Taylor & Francis, New York.
- Parthasarathy, S. e Balaji, C.(2008), "Estimation of Parameters in Multi-Mode Heat Transfer Problems Using Bayesian Inference – Effect of Noise and a Priori", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v.51, pp.2313-2334.
- Peskun, P.H. (1973), "Optimum Monte Carlo Sampling Using Markov Chain", *Biometrika*, v.60, pp.607-612.
- Plana, V., Reulet, P., e Millan, P. (2005), "Experimental Characterization of the Thermophysical Properties of Composite Materials by an Inverse Heat Conduction Method", *J. Composite Materials*, Online First, September 20, 2005.
- Prasher R. (2006), "Thermal Interface Materials: Historical Perspective, Status and Future Directions", *Proceedings of the IEEE*, v. 94, No.8, Agosto.
- Putnam, S.A., Cahill, D.G., Ash, B.J. e Schadler, L.S. (2003), "High-Precision Thermal Conductivity Measurements as a Probe of Polymer/Nanoparticle Interfaces", *Journal of Applied Physics*, v.94, No. 10, pp. 6785-6788.
- Qiulin, F., Xingcheng, X., Xingfang, H., Jingkun, G. (1999), "Calculating Method of the Equivalent Thermal Conductivity of Functionally Gradient Materials", *Materials Science & Engineering*, A261, pp. 84-88.
- Rainieri, S., Bozzoli, F., e Pagliarini, G. (2008), "Characterization of an Uncooled Infrared Thermographic System Suitable for the Solution of the 2-D Inverse Heat Conduction Problem", *Exp. Thermal & Fluid Science*, v.32, pp.1492-1498.
- Remy, B. e Degiovanni, A. (2005), "Parameters Estimation and Measurement of Thermophysical Properties of Liquids", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v.48, pp.4103-4120.

- Rodrigues, F.A., Orlande, H.R.B. e Dulikravich, G.S. (2004), "Simultaneous Estimation of Spatially Dependent Diffusion Coefficient and Source Term in a Nonlinear 1D Diffusion Problem", *Mathematics and Computers in Simulation*, v.66, pp. 409-424.
- Santos, C.A.C., Quaresma, J.N.N., e Lima, J.A., Eds. (2001), "Benchmark Results for Convective Heat Transfer in Ducts: - The Integral Transform Approach", ABCM Mechanical Sciences Series, Editora E-Papers, Rio de Janeiro.
- Souza, P.F.B., Fernandes, A.P., Borges, V.L., Carvalho, S. R. e Guimarães, G. (2008), "A Recursive System for Inverse Heat Conduction Problems", *12<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering –COBEM*, Belo Horizonte, Brazil, Nov. 10-14.
- Sphaier, L.A., Cotta, R.M. (2000), "Integral Transform Analysis of Multidimensional Eigenvalue Problems Within Irregular Domains", *Num. Heat Transfer, Part B-Fundamentals*, v.38, pp. 157-175.
- Sphaier, L.A., Cotta, R.M., Naveira-Cotta, C.P. e Quaresma, J.N.N. (2009), "The UNIT (Unified Integral Transforms) Symbolic-Numerical Computational Platform for Benchmarks in Convection-Diffusion Problems", *30º CILAMCE - Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Armação de Búzios, RJ, November 2009
- Sutradhar, A., Paulino, G.H., e Gray, L.J., (2002), "Transient Heat Conduction in Homogeneous and Non-Homogeneous Materials by the Laplace Transform Galerkin Boundary Element Method", *Eng. Analysis Boundary Elements*, v.26, 119-132.
- Sutradhar, A. e Paulino, G.H. (2004), "The Simple Boundary Element Method for Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v.193, pp. 4511-4539.
- Tavman, I.H., (1996), Thermal and Mechanical Properties of Aluminum Powder-Filled High-Density Polyethylene Composites, *J. Applied Polymer Science*, vol.62, pp.2161-2167.
- Tavman, I.H. e Akinci, H. (2000), "Transverse Thermal Conductivity of Fiber Reinforced Polymer Composites", *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, v.27, pp.253-261.

- Wang, J., Zabaras, N. (2004), "A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.47, pp.3927-3941.
- Wang, J., Zabaras, N. (2005), "Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction", Institute of Physics Publishing: Inverse Problems, v.21, pp. 183-206.
- Wolfram S. (2005), "*The Mathematica Book*", version 5.2, Cambridge-Wolfram Media
- Zabaras, N. (2006), "*Inverse Problems in Heat Transfer*", Handbook of Numerical Heat Transfer, cap.17, pp.525 – 557.
- Zhang, H., Ge. X. e Ye, H. (2005), "Effectiveness of the Heat Conduction Reinforcement of Particle Filled Composites", *Institute of Physics Publishing: Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, v.13, pp. 401-412.
- Zmywaczuk, J., Madura, H., Konioreczyk, P., e Dabrowski, M. (2007), "Estimation of Thermophysical Properties by an Inverse Method with Experimentally Determined Heating Region of a Thin-Layer Heater", *Infrared Physics & Technology*, v.49, pp.277-280.