



SOLUÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO A TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Ricardo Hüntemann Deucher

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein
Paulo Couto

Rio de Janeiro
Julho de 2014

SOLUÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO A TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Ricardo Hüntemann Deucher

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Paulo Couto, Dr.Eng.

Prof^ª. Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc.

Dr. Marcos Vitor Barbosa Machado, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2014

Deucher, Ricardo Hüntemann

Solução do Balanço de Energia em Reservatórios de
Petróleo Utilizando a Transformada Integral Generalizada
/ Ricardo Hüntemann Deucher. – Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2014.

XXI, 151 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Paulo Couto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de
Engenharia Mecânica, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 136-140.

1. Balanço de energia no meio poroso. 2. Solução
híbrida 3. Técnica da Transformação Integral. I. Bodstein,
Gustavo César Rachid *et al.* II. Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia
Mecânica. III. Título.

À minha família,

Márcia, Rico e Marta.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar gratidão aos meus orientadores, Prof. Gustavo César Rachid Bodstein e Prof. Paulo Couto, pelo estímulo e cuidadosa orientação que foi dada durante este trabalho. As valiosas contribuições feitas foram decisivas para o bom andamento deste trabalho, que teria tomado outro rumo não fossem as suas precisas intervenções. Muito obrigado!

Aos colegas e professores do NIDF, pelo excelente ambiente de estudos proporcionado e pelas interessantes discussões que tivemos ao longo desta pesquisa.

Aos professores Carolina Palma Naveira Cotta e Renato Cotta e ao colega Kleber Lisbôa, pelas interessantes conversas que terminaram em importantes contribuições para o desenvolvimento da dissertação.

À PETROBRAS, por acreditar na realização deste trabalho e incentivar a realização de um sonho.

Ao meu antigo gerente, Walter Becker, quem inicialmente permitiu que eu buscase o objetivo de cursar o mestrado, dando um importante voto de confiança para um jovem engenheiro.

Aos colegas de trabalho que durante o período em que realizei o mestrado ficaram sobrecarregados, precisando suprir minha ausência. Agradeço todos os colegas da gerência de reservatórios de Marlim Sul pelo agradável e produtivo ambiente de trabalho proporcionado.

Ao amigo Roberto Motta, obrigado pelo apoio, incentivo e conhecimentos transmitidos, não apenas durante a elaboração deste trabalho, mas desde o início de minha carreira profissional na PETROBRAS.

Acima de tudo, gostaria de agradecer à minha maravilhosa família. Márcia, pelo amor de mãe e companheirismo incansável que recebo desde o dia em que nasci. Rico, pelo carinho de pai que sempre proporcionaste. Marta, minha irmã, parceira e orgulho do irmão, obrigado pelo seu carinho. Tenho vocês constantemente em meus pensamentos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO A TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Ricardo Hüntemann Deucher

Julho/2014

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Paulo Couto

Programa: Engenharia Mecânica

O monitoramento das temperaturas de fluxo em poços de petróleo tem recebido atenção nos últimos anos devido à possibilidade de explorar estes dados para caracterização de reservatórios e determinação de perfis de produção de um poço. Com isto, há um crescente interesse no desenvolvimento de soluções para as equações que governam o comportamento térmico de um reservatório. Neste trabalho, propõe-se o uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para obter soluções da equação do balanço de energia, considerando os efeitos térmicos associados à movimentação dos fluidos. Uma solução formal e generalizada para o balanço de energia em meios porosos é apresentada e validada. Aplicações da solução proposta em problemas unidimensionais e bidimensionais, que podem ser usadas na interpretação de dados de temperatura em poços horizontais, são apresentadas. O problema bidimensional, que considera as trocas térmicas com as formações rochosas adjacentes ao reservatório, é resolvido considerando um problema de domínio conjugado, abrindo a possibilidade de resolver o balanço de energia considerando as interações térmicas entre múltiplos reservatórios. A abordagem matemática empregada para obtenção destas soluções é rigorosa e válida para qualquer sistema de coordenadas ortogonais, apresentando a possibilidade de obter soluções estáveis e com precisão controlada, sendo uma importante contribuição para apoiar a aplicação de dados de temperatura na engenharia de reservatórios.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SOLUTION OF THE ENERGY BALANCE IN PETROLEUM RESERVOIRS BY
THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE

Ricardo Hüntemann Deucher

July/2014

Advisors: Gustavo César Rachid Bodstein

Paulo Couto

Department: Mechanical Engineering

Monitoring of downhole flowing temperatures is gaining attention in the recent years due to the possibility of exploring these data for reservoir characterization and determination of inflow profiles along the well completions, leading to an increased interest in the development of solutions for the equations governing the thermal behavior of a reservoir. In this work, it is proposed to use the Generalized Integral Transform Technique (GITT) to provide solutions for the energy balance equation, considering the thermal effects related to fluid flow. A formal and general solution for the energy balance in the porous media is presented and validated. It is presented the application of the proposed solution to onedimensional and bidimensional problems in the Cartesian coordinate system which can be used to the interpretation of downhole flowing temperatures in horizontal wells. The bidimensional problem, which considers heat transfer to the surrounding impermeable formations is tackled by a single domain formulation, opening the possibility of solving the energy balance for multiple reservoirs simultaneously. The mathematical approach taken to obtain these solutions is rigorous and valid for any orthogonal coordinate system, presenting the possibility of achieving stable solutions with controlled accuracy, being an important contribution to support the applications of temperature data for reservoir engineering problems.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS XI

LISTA DE TABELAS XVI

NOMENCLATURA XVIII

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos	2
1.2.1	Objetivos Específicos	2
1.3	Organização do Trabalho	3
2	REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1	Aplicações de Dados de Temperatura na Engenharia de Reservatório	5
2.2	Solução do Balanço de Energia em Meios Porosos	8
2.3	Aplicações da Transformada Integral em Engenharia de Reservatórios	10
3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	13
3.1	Descrição do Problema.....	13
3.2	Modelagem do balanço de energia em meios porosos levando em conta efeitos térmicos causados pela movimentação e expansão dos fluidos.....	15
3.3	Hipóteses Simplificadoras	19
4	SOLUÇÃO DA EDH ATRAVÉS DA CITT	23
4.1	Exemplo de Aplicação da Solução da EDH por CITT	25
4.1.1	Balanço Integral.....	32
5	SOLUÇÃO FORMAL DO BALANÇO DE ENERGIA ATRAVÉS DA GITT.....	37
5.1	Solução Generalizada do Balanço de Energia	38
6	SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA UNIDIMENSIONAL	42

6.1	Problema com Condições de Contorno do 1º e 2º Tipo	42
6.1.1	Solução da EDH	42
6.1.2	Solução do Balanço de Energia	42
6.2	Poço Localizado em um Reservatório com Fronteiras Seladas	49
6.2.1	Solução da EDH	50
6.2.2	Solução do Balanço de Energia	57
6.3	Poço Localizado em Posição Arbitrária no Interior do Reservatório, com uma Fronteira Selada e outra a Pressão Constante	61
6.3.1	Solução da EDH	62
6.3.2	Solução do Balanço de Energia	66
7	SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA BIDIMENSIONAL.....	68
7.1	Problema com Condições de Contorno do 1º e 2º Tipo	68
7.2	Poço Localizado em um Reservatório com Fronteiras Seladas	80
7.3	Reservatório com Duas Camadas Produtoras Hidraulicamente Isoladas	90
8	SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA CONSIDERANDO VAZÕES	
VARIÁVEIS	103	
8.1	Caso 1 – Aumento da Vazão	106
8.2	Caso 2 – Redução da Vazão	111
9	IMPACTO DOS PARÂMETROS NA TEMPERATURA	114
9.1	Impacto da Condutividade Térmica	115
9.1.1	Problema Unidimensional.....	115
9.1.2	Problema Bidimensional	116
9.2	Impacto das Trocas Térmicas em Reservatórios de Diferentes Espessuras.....	117

9.3	Compressibilidade da Rocha	119
9.4	Coeficiente de Expansão Térmica do Fluido	121
9.5	Variações de temperatura ao redor do poço e seu efeito na resposta da temperatura 121	
9.6	Impacto da Mobilidade (k/μ)	125
9.7	Impacto da Vazão.....	127
9.8	Impacto da Porosidade	130
10	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	133
10.1	Conclusões.....	133
10.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	135
	BIBLIOGRAFIA	136
	ANEXO I	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Esquema ilustrativo do problema alvo deste estudo.	14
Figura 3.2 – Relação entre pressão do reservatório e $p + \rho r C_p r T_i$	21
Figura 4.1 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.1.	25
Figura 4.2 – Perfil de pressões para diversos tempos.	28
Figura 4.3 – Pressão no poço com diferentes números de termos na série.	29
Figura 4.4 – Derivada temporal da pressão.	30
Figura 4.5 – Derivada espacial da pressão.	31
Figura 4.6 – Derivada espacial da pressão calculada com o balanço integral.	34
Figura 4.7 – Derivada espacial da pressão no tempo $t = 0,001$ dias, com diferentes números de termos na série.	35
Figura 6.1 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.1.	42
Figura 6.2 – Variação da temperatura no poço ($x = x_p$).	48
Figura 6.3 – Temperatura no poço ($x = x_p$), com e sem termo advectivo.	49
Figura 6.4 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.2.	50
Figura 6.5 – Pressão no poço ($x = x_p$) ao longo do tempo.	53
Figura 6.6 – Derivada temporal da pressão.	54
Figura 6.7 – Derivada espacial da pressão.	56
Figura 6.8 – Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) em escala logarítmica.	60
Figura 6.9 – Temperatura no poço ($x = x_p$) com e sem termo advectivo.	61
Figura 6.10 – Pressão ao longo do reservatório para diversos tempos.	63

Figura 6.11 – Pressão na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do tempo.	63
Figura 6.12 – Derivada temporal da pressão.	64
Figura 6.13 – Derivada espacial da pressão.	65
Figura 6.14 – Variação da temperatura ao longo do reservatório para diferentes tempos.	66
Figura 7.1 - Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado.	69
Figura 7.2 - Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) dada por GITT bidimensional e solução de referência.	74
Figura 7.3 – Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 0,3$ dias).	76
Figura 7.4 - Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 20$ dias).	76
Figura 7.5 - Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z para diferentes tempos.	77
Figura 7.6 – Comparação entre as soluções uni e bidimensional em $x = x_p$	78
Figura 7.7 – Evolução da temperatura com o tempo no poço ($x = x_p$), para diferentes posições z no interior do reservatório.	79
Figura 7.8 – Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado, com fronteiras impermeáveis.	80
Figura 7.9 - Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) dada por GITT 2D e GITT 1D.	86
Figura 7.10 – Variação da temperatura ao longo do reservatório ($t = 40$ dias) dada pela GITT 2D e GITT 1D.	87
Figura 7.11 – Temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 5$ dias).	88

Figura 7.12 - Temperatura em $x = x_p$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.....	89
Figura 7.13 - Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado com duas camadas produtoras isoladas.	91
Figura 7.14 – Comportamento de pressão no poço ($x = x_p$) de cada uma das camadas produtoras.....	94
Figura 7.15 – Temperatura na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ para os Reservatórios 1 e 2 em tempos curtos.....	95
Figura 7.16 – Temperatura na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ para os Reservatórios 1 e 2 em tempos longos.....	96
Figura 7.17 – Temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.	97
Figura 7.18 – Temperatura na posição $x = 0$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.	98
Figura 7.19 – Temperatura no topo e na base dos Reservatórios 1 e 2 ($x = x_p$).....	99
Figura 7.20 – Temperatura do Reservatório 1 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ considerando e desprezando a interferência da produção do Reservatório 2.	100
Figura 7.21 – Temperatura do Reservatório 2 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ considerando e desprezando a interferência da produção do Reservatório 1.	100
Figura 8.1 – Vazão dada pela equação (8.1) e impacto de ω	104
Figura 8.2 – Comportamento da vazão.	106
Figura 8.3 – Pressão no poço ($x = x_p$).....	107
Figura 8.4 – Derivada temporal da pressão para diferentes tempos.	107

Figura 8.5 – Derivada espacial da pressão para diferentes tempos com vazão variável.	109
Figura 8.6 – Temperatura no poço ($x = x_p$) considerando vazão variável, com diferentes números de termos na expansão.	110
Figura 8.7 – Vazão do poço.....	112
Figura 8.8 – Pressão do poço ($x = x_p$) com redução de vazão.....	112
Figura 8.9 – Comportamento da temperatura no poço ($x = x_p$) com redução de vazão.	113
Figura 9.1 – Pressão no poço ($x = x_p$) como função do tempo (caso base).....	115
Figura 9.2 – Impacto da condutividade térmica da rocha sobre a temperatura medida no poço.....	116
Figura 9.3 – Impacto da condutividade térmica da rocha sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$	117
Figura 9.4 – Impacto da espessura do reservatório sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$	118
Figura 9.5 – Impacto da espessura do reservatório sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, 1 \text{ m abaixo do topo do reservatório})$	119
Figura 9.6 – Impacto da compressibilidade da rocha sobre a temperatura medida no poço.....	120
Figura 9.7 – Impacto do coeficiente de expansão térmica do fluido sobre a temperatura medida no poço.....	121
Figura 9.8 – Condições iniciais procurando representar perturbações de temperatura causadas durante a construção do poço.....	123
Figura 9.9 – Impacto de diferentes condições iniciais sobre a temperatura no poço. ..	123

Figura 9.10 – Temperatura no poço ($x = x_p$) com e sem termo advectivo para a condição inicial 3.	124
Figura 9.11 – Impacto da mobilidade sobre o comportamento de pressão do poço.	125
Figura 9.12 – Impacto da mobilidade sobre a temperatura no poço ($x = x_p$).	126
Figura 9.13 – Relação linear entre o gradiente de temperatura com o tempo ($t > 2$ dias) e o inverso da mobilidade.	127
Figura 9.14 – Impacto da velocidade (vazão) sobre o comportamento de pressão do poço.	128
Figura 9.15 – Impacto da velocidade (vazão) sobre a temperatura no poço.	129
Figura 9.16 – Relação linear entre o gradiente de temperatura com o tempo ($t > 2$ dias) e o quadrado da velocidade.	130
Figura 9.17 – Impacto da porosidade sobre o comportamento de pressão do poço.	131
Figura 9.18 – Impacto da porosidade sobre o comportamento da temperatura do poço.	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Conjunto de dados para o problema unidimensional.....	27
Tabela 4.2 – Convergência da derivada temporal da pressão em $x = x_p$	30
Tabela 4.3 – Convergência da derivada espacial da pressão em $x = 0,1$ m.	32
Tabela 4.4 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.....	36
Tabela 6.1 – Conjunto de dados para o problema da seção 6.1.....	46
Tabela 6.2 – Convergência da temperatura na posição do poço ($x = x_p$).....	47
Tabela 6.3 – Conjunto de dados para o problema com fronteiras impermeáveis.....	52
Tabela 6.4 – Convergência da derivada temporal da pressão.	54
Tabela 6.5 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.....	56
Tabela 6.6 – Convergência da temperatura na posição do poço ($x = x_p$).....	60
Tabela 6.7 – Conjunto de dados para o problema da seção 6.3.....	62
Tabela 6.8 – Convergência da derivada temporal da pressão	64
Tabela 6.9 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.....	65
Tabela 7.1 – Convergência da temperatura no poço ($x = x_p$).....	80
Tabela 7.2 – Convergência da temperatura no poço ($x = x_p$).....	90
Tabela 7.3 – Conjunto de dados para o problema da seção 7.3.....	93

Tabela 7.4 – Convergência da temperatura do Reservatório 1 na posição $(x, z) = (x_p,$ centro do reservatório).	101
Tabela 7.5 – Convergência da temperatura do Reservatório 2 na posição $(x, z) = (x_p,$ centro do reservatório).	102
Tabela 8.1 – Conjunto de dados para o problema de vazão variável.....	105
Tabela 8.2 – Convergência da derivada temporal da pressão com vazão variável	108
Tabela 8.3 – Convergência da derivada espacial da pressão com vazão variável.....	109
Tabela 8.4 – Convergência da temperatura na posição do poço considerando vazões variáveis.	111
Tabela 9.1 – Conjunto de dados do caso base do Capítulo 9.	114
Tabela 9.2 – Parâmetros da equação (9.1) para diferentes condições iniciais.	122

NOMENCLATURA

a_d – gatilho para a condição de fluxo prescrito na fronteira S_d (0 ou 1)

A – função transformada associada às não-homogeneidades da equação da difusividade hidráulica

A_{ij}^* - função transformada associada ao termo convectivo do balanço de energia

b_d – gatilho para a condição de pressão prescrita na fronteira S_d (0 ou 1)

CITT – Transformada Integral Clássica

c_r – compressibilidade da rocha

c_t – compressibilidade total

C_p – calor específico

\bar{C}_p – calor específico médio do fluido e da rocha

DTS – *Distributed Temperature Sensor*

EDH – Equação da Difusividade Hidráulica

$f(\underline{x})$ – condição inicial do balanço de energia

f_d – função prescrita na fronteira S_d para a equação da difusividade hidráulica

F – condição inicial da equação da difusividade hidráulica

\bar{F} – condição inicial transformada da equação da difusividade hidráulica

g – termos fonte do balanço de energia

\bar{g} – função transformada associada aos termos fonte no balanço de energia

GITT – Transformada Integral Generalizada

H – entalpia

k – permeabilidade

$K_{(x)}$ – fator de escala do sistema de coordenadas

L_x – dimensão do reservatório na direção x

L_y – dimensão do reservatório na direção y

L_z – dimensão do reservatório na direção z

N – norma da autofunção

\mathbf{n} – vetor normal à superfície

p_i – pressão inicial do reservatório

p – pressão

\mathbf{q} – fluxo de calor

Q – vazão

S_d – fronteira d do domínio

T – temperatura

\bar{T} – temperatura

T_{min} – menor temperatura alcançada no poço

T_i – temperatura inicial

t_c – parâmetro da equação (8.1)

t_{Tmin} – tempo em que a menor temperatura do poço é atingida

U – energia interna

v – velocidade

W - termo fonte do poço na equação da difusividade hidráulica

\bar{W} – função transformada que representa o termo fonte do poço na equação da difusividade hidráulica

x_c – parâmetro da equação (9.1)

x_p – posição do poço na direção x

X – autofunção na direção x da EDH

Letras Gregas

$\alpha_{(x)}$ – função associada à condição de temperatura na fronteira

ρ – massa específica

$\bar{\rho}$ – massa específica média do fluido e da rocha

ϕ – porosidade

$\phi_{(x,t)}$ – função prescrita na fronteira

τ – tensor tensão de cisalhamento

μ – viscosidade

σ – autovalor na direção x do balanço de energia

γ – autovalor na direção z do balanço de energia

λ – condutividade térmica

ω – constante empregada nas equações (8.1) e (9.1)

β – coeficiente de expansão térmica

Γ – função associada à condição de fluxo térmico prescrito na fronteira

χ – autovalor na direção x da equação da difusividade hidráulica

η – difusividade hidráulica

Ω – autofunção da equação da difusividade hidráulica

$\hat{\Omega}$ – autofunção da equação da difusividade hidráulica

ψ – autofunção do balanço de energia

$\hat{\psi}$ – autofunção normalizada do balanço de energia

φ – autofunção do balanço de energia na direção z

$\hat{\varphi}$ – autofunção normalizada do balanço de energia na direção z

δ – função delta de Dirac

Subscritos

d – indexador das fronteiras da equação da difusividade hidráulica

f – fluido

i – índice na direção x do balanço de energia

j – índice na direção z do balanço de energia

m – índice na direção x da equação da difusividade hidráulica ou índice na direção x do balanço de energia

n – índice na direção z do balanço de energia

r – rocha

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Devido aos aumentos na precisão e confiabilidade de ferramentas que coletam dados de temperatura em poços de petróleo, existe um crescente interesse no desenvolvimento de modelos matemáticos para a interpretação destes dados, visando seu uso como uma fonte de informações complementar à tradicional avaliação de formações, que é baseada na interpretação de dados de pressão, perfilagem de produção¹, petrofísica, e correlações rocha-perfil.

A temperatura em reservatórios de petróleo é descrita por uma equação diferencial baseada no balanço de energia. A obtenção de soluções para esta equação é imperativa para a utilização de dados de temperatura na caracterização de reservatórios de petróleo. Nos últimos anos, diversos autores apresentaram soluções numéricas do balanço de energia em meios porosos (Maubeuge, *et al.*, 1994), (Dawkrajai, 2006), (App, 2010), (Duru, 2011), (App & Yoshioka, 2013), entretanto, ainda há carência do desenvolvimento de soluções computacionalmente exatas para este problema.

Conforme mencionado por Cotta (1993), soluções analíticas apresentam uma série de vantagens quando comparadas às soluções puramente numéricas: são melhores (mais exatas) e geralmente muito menos dispendiosas do que soluções numéricas; permitem a obtenção de tendências e soluções assintóticas sem requerer uma solução completa para todo o domínio; podem ser usadas como soluções de referência para a validação de soluções numéricas. A principal desvantagem das soluções analíticas é que sua aplicação é limitada a casos específicos.

¹ Medida da vazão de produção/injeção ao longo do intervalo aberto ao fluxo de um poço revestido.

Os métodos híbridos, como a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) combinam as vantagens de soluções analíticas e numéricas. A GITT apresenta a possibilidade de resolver problemas complexos, não tratáveis através de métodos analíticos, evitando as instabilidades associadas aos métodos numéricos, permitindo ao engenheiro determinar a precisão requerida na solução.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma solução generalizada do balanço de energia em reservatórios de petróleo utilizando a GITT, levando em conta as variações de temperatura relacionadas ao escoamento dos fluidos (expansão/compressão e dissipação viscosa), a difusão de calor e o termo de transporte advectivo de calor.

1.2.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Resolver a equação da difusividade hidráulica (EDH) através da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT);
- Acelerar a convergência da derivada espacial da pressão através do balanço integral;
- Apresentar uma solução formal e generalizada do balanço de energia em meios porosos;
- Obter analiticamente as integrais associadas à transformação integral do balanço de energia;
- Validar a solução através da comparação com resultados da literatura;
- Apresentar a aplicação da solução proposta em casos unidimensionais;
- Apresentar a aplicação da solução proposta em casos bidimensionais, utilizando a abordagem de domínio conjugado;
- Apresentar o uso da abordagem de domínio conjugado para resolver o balanço de energia considerando as interações térmicas entre reservatórios hidráulicamente isolados;

- Implementar o uso de vazões variáveis na solução da EDH por CITT e na solução do balanço de energia por GITT;
- Utilizar a solução desenvolvida para realizar análise de sensibilidade da temperatura aos parâmetros de fluido e rocha, procurando identificar os parâmetros que mais influenciam as variações de temperatura.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 é apresentada a revisão da literatura das aplicações de dados de temperatura na engenharia de reservatórios, das soluções existentes para o balanço de energia, bem como das aplicações da técnica da transformada integral em engenharia de reservatórios.

No Capítulo 3 é apresentada a modelagem matemática do problema alvo deste estudo.

O Capítulo 4 apresenta a solução da equação da difusividade hidráulica através da transformada integral clássica e o uso da técnica do balanço integral para acelerar a convergência da derivada espacial da pressão.

O Capítulo 5 apresenta a solução formal do balanço de energia através da transformada integral generalizada.

O Capítulo 6 apresenta aplicações da solução apresentada no Capítulo 5 em problemas unidimensionais, com diferentes condições de contorno.

O Capítulo 7 apresenta aplicações da solução formal apresentada para casos bidimensionais, em uma abordagem de domínio conjugado, com diferentes condições de contorno, bem como a aplicação da solução para um problema considerando as interações térmicas entre reservatórios hidráulicamente isolados.

O Capítulo 8 apresenta a aplicação do método de solução proposto considerando vazões de produção variáveis.

O Capítulo 9 apresenta uma análise do impacto de diversos parâmetros sobre o comportamento da temperatura.

No Capítulo 10 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros oriundas dos estudos realizados neste trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura\ apresentada neste capítulo é dividida em três seções: aplicações de dados de temperatura na engenharia de reservatório, solução do balanço de energia em meio poroso e aplicações da transformada integral em engenharia de reservatórios.

2.1 APLICAÇÕES DE DADOS DE TEMPERATURA NA ENGENHARIA DE RESERVATÓRIO

Apesar de ainda pouco utilizados na análise de testes em poços, a medição de dados de temperatura em poços de petróleo é uma das técnicas mais antigas de perfilagem de produção, utilizada pela primeira vez há mais de um século (Muradov, 2010).

O comportamento de transientes de pressão é frequentemente aplicado na análise de testes em poços, visando a caracterização de reservatório. Em condições controladas, os dados transientes de pressão podem ser interpretados com sucesso, permitindo a caracterização do reservatório (Duru, 2011). A interpretação destes dados é frequentemente realizada assumindo condições isotérmicas. Recentemente, tem sido observado crescente interesse na utilização de transientes de temperatura como informação complementar aos dados de pressão na interpretação de testes em poços. Bahrami & Siavoshi (2007) relataram que o uso conjunto de dados de temperatura e pressão reduz às incertezas inerentes a interpretação de testes e que os dados de temperatura podem ser empregados como ferramenta auxiliar na determinação do tempo de duração do período de estocagem.

A modelagem dos efeitos térmicos associados à movimentação dos fluidos é raramente feita com o intuito de avaliar os impactos das variações de temperatura sobre o escoamento dos fluidos, tendo em conta que as variações de pressão normalmente encontradas são pequenas para causar variações de temperatura que impactem a viscosidade dos fluidos de forma significativa. App (2010) determinou os impactos que variações de temperatura causadas pela movimentação dos fluidos podem causar na produtividade de poços em condições onde as variações de pressão necessárias para

atingir vazões comercialmente rentáveis são muito elevadas, chegando à conclusão que as variações de temperatura podem causar um aumento da mobilidade dos fluidos na região próxima ao poço.

Sui *et al.* (2008) apontam que a existência de dano à formação provoca uma assinatura nos dados de temperatura, permitindo diagnosticar se as causas de baixa produtividade de uma determinada porção do reservatório são causados por baixa permeabilidade ou dano à formação. Sui *et al.* (2008) e Duru (2011) mostram que é possível utilizar dados de temperatura para a determinação do raio danificado/estimulado em poços de petróleo. Os dados de pressão não permitem a obtenção do raio de danificado ou estimulado, sendo este um parâmetro útil para o dimensionamento e avaliação do desempenho de operações de estimulação realizadas em poços de petróleo.

Uma das ferramentas mais utilizadas para monitoramento permanente da temperatura de fluxo de um poço são os chamados “*Distributed Temperature Sensors*” (DTS), que permitem a medição da temperatura em tempo real ao longo do trecho produtivo do poço. As principais aplicações dos dados medidos através de DTS são na determinação da contribuição de cada trecho do reservatório para a produção total do poço, na detecção das regiões onde há entrada de água ou gás em poços de óleo e na determinação do gradiente térmico do reservatório. Ouyang & Belanger (2004) apresentaram uma revisão bibliográfica das aplicações de sensores DTS para a perfilagem de produção em poços de petróleo. Tardy *et al.* (2012) mostraram que dados de temperatura coletados por DTS após a realização de tratamentos ácidos permite avaliar se houve boa divergência do tratamento ao longo do poço, permitindo aos engenheiros otimizar estes tratamentos.

Duru & Horne (2010) apresentaram a aplicação conjunta de dados de temperatura e pressão na determinação da permeabilidade e porosidade do reservatório. Os resultados obtidos apontam que a incorporação dos dados de temperatura na avaliação de formações aumenta a resolução das estimativas de porosidade e permeabilidade, quando comparado ao uso de apenas dados de pressão. Li *et al.* (2011) desenvolveram um procedimento que combina o uso de dados de temperatura e o ajuste de histórico de

produção para caracterização do reservatório, mostrando que a incorporação dos dados de temperatura melhora a caracterização do reservatório.

Deucher *et al.* (2011) desenvolveram uma metodologia simplificada para estimar a razão gás-óleo de um poço através do uso de dados de temperatura e mostraram a existência de uma correlação entre a ocorrência de incrustação e variações na temperatura de fluxo do poço.

App (2013) mostrou a influência de fraturas hidráulicas sobre a temperatura em poços de petróleo. Os resultados mostram que poços com fraturamento hidráulico apresentam menores variações de temperatura quando comparados à poços sem fraturamento hidráulico. Com isso, medições de temperatura permitem avaliar quais intervalos de um poço foram fraturados com sucesso, bem como avaliar qualitativamente intervalos com diferentes condutividades de fraturas.

Ribeiro & Horne (2013) desenvolveram um modelo numérico capaz de calcular as respostas de pressão e temperatura durante um processo de fraturamento hidráulico de um poço. Os resultados obtidos apontam que os dados de temperatura podem ser empregados para minimizar incertezas quanto ao comprimento da fratura e a permeabilidade do reservatório

Wu, *et al.* (2013) apresentaram a aplicação de dados de temperatura medidos em poços *offshore* para obtenção de estimativas da real temperatura do reservatório, bem como para o monitoramento do índice de produtividade e fator de película dos poços. Além disto, foi mostrado que uma variação brusca na temperatura de fluxo de um poço após a irrupção da água de injeção indica que o par produtor/injetor provavelmente está conectado por um sistema de fraturas.

Ziabakhsh-Ganji & Kooi (2013) avaliaram o efeito da composição dos gases sobre o comportamento térmico de reservatórios onde é realizado descarte de CO₂, obtendo a conclusão que gases com diferentes teores de CO₂ e metano causam uma resposta térmica distinta. Estas conclusões abrem a perspectiva de utilizar dados de temperatura não apenas para detectar a irrupção de gás em um poço, mas também para detecção de locais onde ocorre a irrupção de gases com diferentes composições, aplicação esta que

pode ser útil em reservatórios onde se utiliza a injeção de CO₂ ou outros gases como mecanismo de recuperação secundária.

Ainda hoje, a maior parte das aplicações de dados de temperatura na caracterização do comportamento de poços e reservatórios de petróleo se baseia em análises em regime permanente. Entretanto, com o avanço de ferramentas para a resolução do balanço de energia transiente, aplicações de variações temporais de temperatura têm sido reportadas para a avaliação de reservatórios de petróleo. Muradov & Davies (2013) apresentaram o uso de gráficos diagnóstico com dados transientes de temperatura para detecção de regimes de fluxo quando os dados de pressão ainda estavam mascarados pelos efeitos de estocagem. Apesar dos recentes avanços, a análise de dados transientes de temperatura ainda é pouco desenvolvida, sendo necessário o aprimoramento e extensão das soluções das equações que modelam as variações de temperatura.

2.2 SOLUÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA EM MEIOS POROSOS

Os recentes avanços na precisão e confiabilidade das medições de temperatura aumentou o interesse em modelar e resolver o balanço de energia em reservatórios onde recuperação por métodos térmicos não é empregada (Muradov, 2010). Nesta seção, serão apresentadas soluções do balanço de energia em meios porosos, com foco na interpretação de dados de temperatura para caracterização de reservatório e avaliação da performance dos poços. Soluções clássicas utilizadas na análise da recuperação de petróleo através de métodos térmicos, como a de (Marx & Langenheim, 1959), não serão abordadas.

Atkinson & Ramey (1977) propuseram um dos primeiros modelos matemáticos para a transferência de calor em reservatórios de petróleo. O modelo desenvolvido era capaz de estimar a distribuição de temperatura causada pela injeção de fluidos em temperaturas diferentes da temperatura do reservatório. Kocabas (2004) desenvolveu um modelo analítico que considerava o escoamento linear em regime permanente capaz de calcular os transientes de temperatura causados pela injeção não-isotérmica de fluidos. Foram incluídos os efeitos de advecção no meio poroso e as trocas térmicas com as formações rochosas adjacentes.

Hossaim *et al.* (2007) resolveram o problema de injeção de fluidos não isotérmica numericamente, considerando duas situações: (a) existência de equilíbrio térmico local entre o fluido e a rocha (fluido e rocha com mesma temperatura) e (b) inexistência de equilíbrio térmico local entre o fluido e a rocha (fluido e rocha com diferenças de temperatura). Os resultados indicaram que a diferença de temperatura entre o fluido e a rocha é desprezível.

Maubeuge *et al.* (1994) apresentaram um esquema numérico que resolve o balanço de energia transiente considerando os efeitos térmicos causados pela movimentação dos fluidos.

Uma solução analítica para o problema de escoamento unidimensional em coordenadas cartesianas e regime permanente foi apresentada por (Yoshioka *et al.*, 2005). Ramanazov & Nagimov (2007) apresentaram uma solução analítica simplificada do balanço de energia, considerando efeitos térmicos associados à expansão/compressão e movimentação dos fluidos. O modelo apresentado considera escoamento transiente, assumindo difusividade hidráulica infinita. As trocas térmicas com as adjacências não foram consideradas.

Duru (2011) desenvolveu uma solução semianalítica para o balanço de energia transiente, considerando efeitos térmicos causados pela dissipação viscosa e expansão/compressão dos fluidos, usando o método *Operator Splitting*.

Muradov & Davies (2011) desenvolveram uma solução analítica assintótica para o balanço de energia transiente bidimensional, considerando os efeitos térmicos causados pela expansão/compressão e movimentação dos fluidos. A solução desenvolvida é capaz de representar o comportamento térmico de poços horizontais, considerando escoamento linear no interior do reservatório e as trocas de calor com as adjacências. Esta solução considera o poço situado no centro do reservatório, (o que permite aplicar uma condição de contorno de simetria na posição do poço). A solução obtida por Muradov & Davies (2011), será utilizada à frente com o intuito de validar a solução por GITT desenvolvida neste trabalho e é dada por:

$$\begin{aligned}
T_{(x=0,t)} = & \\
= T_i + & \left\{ \begin{array}{l}
-\frac{\phi\beta T_i}{\bar{\rho}\bar{C}_p} (p_i - p_{(x=0,t)}), \quad t < t_{Tmin} \\
(T_{min} - T_i) \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16 \frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p} (t - t_{Tmin}) \cdot \ln(2)}{L_z^2}}} + \\
+ \frac{(1 - \beta T_i) \mu}{\bar{\rho}\bar{C}_p} \frac{1}{k} |v_x|^2 \times (t - t_{Tmin}) \times \\
\left(1 - \frac{8}{L_z^2} \times \frac{\lambda}{|v_x| \rho_f C_{pf}} \times \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p \pi}} (t - t_{Tmin}) \times e^{-\frac{L_z^2}{16 \frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p} (t - t_{Tmin})}} \right), \quad t > t_{Tmin}
\end{array} \right. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Onde v_x é a velocidade do fluido escoando no interior do reservatório em regime permanente. T_{min} e t_{Tmin} representam a menor temperatura alcançada no poço e o tempo em que esta temperatura é atingida. Segundo Muradov & Davies (2011), T_{min} e t_{Tmin} devem ser obtidos analisando os dados de temperatura coletados nos poços.

2.3 APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA INTEGRAL EM ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

A transformada integral permite uma abordagem sistemática e eficiente para a solução de problemas de valores de contorno homogêneos e não-homogêneos (Ozisik, 1993). Fundamentos teóricos da transformada integral podem ser encontrados em diversos livros texto (Mikhailov & Ozisik, 1984), (Ozisik, 1993), (Cotta, 1993).

A técnica da transformação integral ainda é pouco utilizada na engenharia de reservatórios como método de solução do problema de fluxo em meios porosos (Marsilli, 2013).

O trabalho pioneiro de aplicação da transformada integral em engenharia de reservatórios é de Hovanessian (1961). Neste trabalho, soluções da equação da difusividade hidráulica em reservatórios retangulares com um único poço e fronteiras à pressão constante ou seladas foram desenvolvidas. A permeabilidade e a porosidade do

meio poroso foram assumidas constantes, assim como as propriedades do fluido escoante.

Almeida (1994) e Almeida & Cotta (1995 e 1996) foram os primeiros a utilizar a GITT para resolver problemas de engenharia de reservatórios. Os autores apresentaram uma solução analítica, até então inédita, para um problema clássico de injeção de traçadores em reservatórios de petróleo. Foram apresentadas análises de convergência das soluções por GITT e os resultados mostraram um elevado custo computacional, causado pela predominância do caráter advectivo do problema, entretanto, este custo é justificado para o estabelecimento de soluções *benchmark* ou quando se deseja máxima precisão na solução.

Rahman & Bentsen (2000) aplicaram a transformada integral clássica para a solução da equação da difusividade hidráulica tridimensional em coordenadas cartesianas, sistematizando o uso da técnica através de tabelas, ressaltando a generalidade da solução proposta e as possibilidades de aplicação na análise de testes em poços. A aplicação da técnica não foi demonstrada. Em um trabalho subsequente, Rahman & Bentsen (2001) estenderam a aplicação da transformada integral clássica para a resolução da equação da difusividade hidráulica de problemas tridimensionais em coordenadas cilíndricas.

Couto *et al.* (2011) utilizaram a GITT para obter soluções híbridas generalizadas da EDH em problemas multidimensionais em meios não homogêneos, anisotrópicos para qualquer sistema de coordenadas ortogonal. As não homogeneidades foram tratadas através da GITT, definindo uma expansão em autofunções de um problema mais simples e de solução conhecida que pode então ser usado para resolver o problema auxiliar não homogêneo.

Dias *et al.* (2012) apresentaram o uso da GITT para a análise do escoamento de óleo por água em meios porosos, comparando os resultados com a solução clássica de *Buckley-Leverett*.

Marsilli (2013) apresentou, de forma sistemática, uma solução generalizada para a equação da difusividade em coordenadas cartesianas para meios homogêneos em

problemas multidimensionais utilizando a CITT. Foram apresentadas análises de convergência da solução, bem como a aplicação em casos com múltiplos poços no interior do reservatório.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Inicialmente, o interesse em modelar o comportamento térmico de reservatórios de petróleo ocorria apenas para casos em que se empregavam métodos térmicos de recuperação de petróleo, que consistem na injeção de água quente ou vapor no interior do reservatório, procurando reduzir a viscosidade do óleo, aumentando a produtividade dos poços e/ou a eficiência de varrido.

Nos casos em que não são empregados métodos térmicos, as variações de temperatura causadas pela movimentação/expansão dos fluidos são comumente ignoradas, pois as variações de temperatura provocadas são relativamente pequenas, tendo pouco efeito sobre as propriedades dos fluidos, não afetando assim o escoamento no interior do reservatório. Assim sendo, assumir comportamento isotérmico é uma hipótese viável quando o objetivo é avaliar o comportamento produtivo de um campo de petróleo (Dawkrajai, 2006).

Conforme mostrado na seção 2.1, há um crescimento no interesse de utilizar as pequenas variações de temperatura causadas pela movimentação/expansão dos fluidos visando monitorar o desempenho dos poços e obter parâmetros do reservatório. Para tal, é fundamental a existência uma modelagem matemática apropriada do problema, bem como de ferramentas matemáticas capazes de resolver o balanço de energia no reservatório.

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 3.1 apresenta um esquema ilustrativo do problema que queremos resolver neste trabalho, descrevendo os mecanismos de transferência de calor atuantes, bem como os termos fonte presentes no problema.

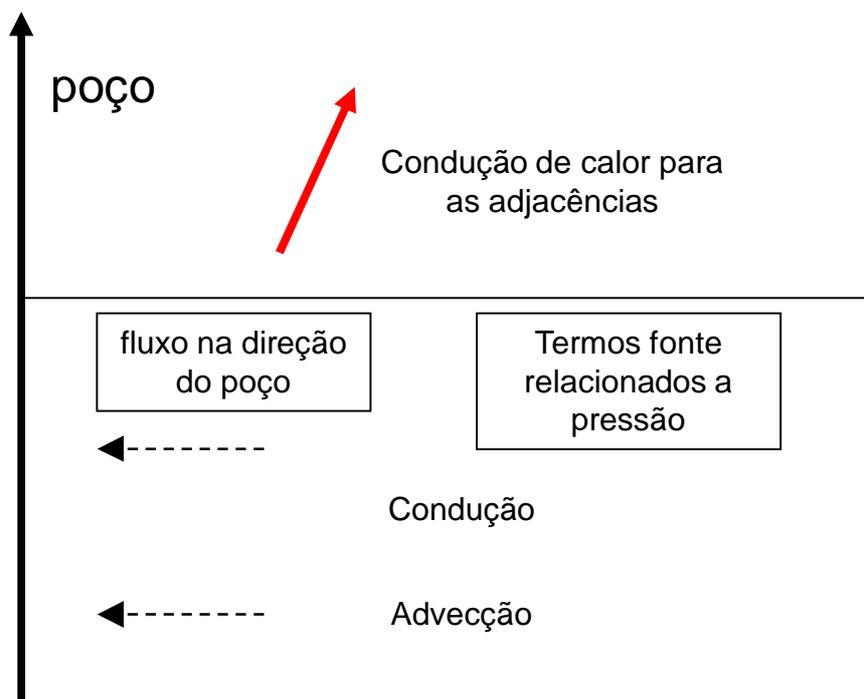


Figura 3.1 – Esquema ilustrativo do problema alvo deste estudo.

O esquema dado acima representa um problema advectivo-difusivo com termos fonte associados à movimentação/expansão dos fluidos, que por sua vez, estão relacionados às variações de pressão que ocorrem no reservatório. Para obter o campo de temperaturas, é fundamental se conhecer o campo de pressões no interior do reservatório. Assim, este trabalho, além de resolver o balanço de energia, apresentará também desenvolvimentos na solução do campo de pressões, principalmente no que diz respeito à convergência da derivada espacial da pressão.

Na próxima seção, serão apresentadas e desenvolvidas as equações que descrevem o comportamento térmico em reservatórios de petróleo, bem como introduzida a equação da difusividade hidráulica (EDH), que modela o campo de pressões.

3.2 MODELAGEM DO BALANÇO DE ENERGIA EM MEIOS POROSOS LEVANDO EM CONTA EFEITOS TÉRMICOS CAUSADOS PELA MOVIMENTAÇÃO E EXPANSÃO DOS FLUIDOS

A modelagem apresentada a seguir foi baseada na previamente apresentada por (Sui, et al., 2008) e será incluída neste trabalho para proporcionar ao leitor o entendimento dos aspectos físicos relacionados ao problema abordado nesta dissertação.

Considerando um volume de controle infinitesimal, o balanço de energia generalizado é dado por (Bird, *et al.*, 2002):

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho U \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} - \tau : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.1)$$

O termo do lado esquerdo da equação representa a taxa de acúmulo de energia interna por unidade de volume; o primeiro termo do lado direito da equação representa a taxa de adição de energia interna por unidade de volume causada pelo transporte advectivo; o segundo termo do lado direito representa a taxa de acúmulo de energia interna por unidade de volume causada pela compressão do fluido, processo este reversível; o terceiro termo do lado direito da equação representa a taxa de aumento de energia interna por unidade de volume causada pela dissipação viscosa (processo irreversível); o quarto termo do lado direito da equação representa a taxa de aumento da energia interna por unidade de volume causada pela condução de calor.

A Lei de Fourier descreve o fluxo de calor:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (3.2)$$

Considerando a energia interna como uma média ponderada da energia interna da rocha e do fluido:

$$\rho U = \phi \rho_f U_f + (1 - \phi) \rho_r U_r \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (3.2) e (3.3) na equação (3.1),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\phi\rho_f U_f + (1-\phi)\rho_r U_r]}{\partial t} \\ & = -\nabla \cdot (\rho_f U_f \mathbf{v}) - p\nabla \cdot \mathbf{v} - \tau : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \end{aligned} \quad (3.4)$$

De acordo com Al-Hadhrami *et al.* (2003), para escoamento de fluidos em meios porosos, o termo de dissipação viscosa $-\tau : \nabla \mathbf{v}$ pode ser representado por $-\mathbf{v} \cdot \nabla p$. Assim sendo, a equação (3.4) se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\phi\rho_f U_f + (1-\phi)\rho_r U_r]}{\partial t} \\ & = -\nabla \cdot (\rho_f U_f \mathbf{v}) - p\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A energia interna de um fluido pode ser representada em termos de sua entalpia:

$$U_f = H_f - \frac{p}{\rho_f} \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) na equação (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\phi\rho_f H_f - \phi p + (1-\phi)\rho_r U_r]}{\partial t} \\ & = -\nabla \cdot (\rho_f H_f \mathbf{v}) + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p \\ & \quad + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Manipulando a equação (3.7),

$$\frac{\partial[\phi\rho_f H_f - \phi p + (1-\phi)\rho_r U_r]}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_f H_f \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (3.8)$$

Assumindo que a densidade da rocha é constante e que a variação de energia interna da rocha pode ser aproximada pelo calor específico da rocha multiplicado pela variação de temperatura, $dU_r \cong dH_r = C_{pr} dT_r$,

$$\begin{aligned}
& \phi \rho_f \frac{\partial H_f}{\partial t} + H_f \frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} - p \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho_r C_{pr} T_r \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
& + (1 - \phi) \rho_r C_{pr} \frac{\partial T_r}{\partial t} \\
& = -H_f \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) - \rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla H_f + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

O balanço de massa nos diz que $\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v})$, com isto o segundo termo do lado esquerdo e o primeiro termo do lado direito da equação (3.9) se cancelam:

$$\begin{aligned}
& \phi \rho_f \frac{\partial H_f}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} - p \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho_r C_{pr} T_r \frac{\partial \phi}{\partial t} + (1 - \phi) \rho_r C_{pr} \frac{\partial T_r}{\partial t} \\
& = -\rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla H_f + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Definindo a compressibilidade da rocha:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp} \rightarrow d\phi = \phi c_r dp \tag{3.11}$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \phi \rho_f \frac{\partial H_f}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} - p \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_r C_{pr} T_r \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} \\
& + (1 - \phi) \rho_r C_{pr} \frac{\partial T_r}{\partial t} \\
& = -\rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla H_f + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A entalpia do fluido pode ser expressa por:

$$dH_f = C_{pf} dT_f + \frac{1}{\rho_f} (1 - \beta T_f) dp \tag{3.13}$$

Substituindo a equação (3.13) na equação (3.12) e realizando manipulações algébricas:

$$\begin{aligned}
& \phi \rho_f C_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial t} + (1 - \phi) \rho_r C_{pr} \frac{\partial T_r}{\partial t} - \phi \beta T_f \frac{\partial p}{\partial t} \\
& - \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} (p + \rho_r C_{pr} T_r) \\
& = -\rho_f C_{pf} \mathbf{v} \cdot \nabla T_f + (\beta T_f - 1) \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Se assumirmos que o fluido e a rocha encontram-se em equilíbrio térmico local, a diferença de temperaturas entre o fluido e a rocha pode ser negligenciada. Esta é uma hipótese amplamente utilizada no desenvolvimento do balanço de energia em meios porosos, e sua validade foi abordada em trabalhos publicados por Atkinson & Ramey (1977) e Hossaim *et al.* (2007). Bear (1972) apresentou estimativas do tempo requerido para que as temperaturas do fluido e da rocha se igualem em meios porosos saturados com água e reportou tempos de 1,3 segundos para meio poroso com esferas de vidro de 1mm de diâmetro e 2 horas para rochas fraturadas com diâmetro de 100 mm. Considerando as propriedades médias do fluido e da rocha:

$$\bar{\rho} \bar{C}_p = \phi \rho_f C_{pf} + (1 - \phi) \rho_r C_{pr} \tag{3.15}$$

E assumindo equilíbrio térmico local, ou seja, $T_f = T_r = T$, a equação (3.14) se torna:

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho} \bar{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f C_{pf} \mathbf{v} \cdot \nabla T \\
& = \phi \beta T \frac{\partial p}{\partial t} + (p + \rho_r C_{pr} T) \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} \\
& + (\beta T - 1) \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

A condutividade térmica do meio pode ser calculada a partir de (Bear, 1972):

$$\lambda = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_r \tag{3.17}$$

Outras expressões para a condutividade térmica podem ser encontradas na literatura (Lake, 1989) e usadas em substituição à equação (3.17).

A equação (3.16) é o balanço de energia aplicado ao escoamento de fluidos em meios porosos. As variações de temperatura, dadas pelo primeiro termo do lado esquerdo da equação são causadas por:

- Advecção (2º termo do lado esquerdo da equação);
- Compressão ou expansão transiente do fluido (1º termo do lado direito da equação);
- Compressão ou expansão transiente da rocha (2º termo do lado direito da equação);
- Compressão ou expansão espacial do fluido e dissipação viscosa (3º termo do lado direito da equação). Este termo está diretamente relacionado ao coeficiente Joule-Thomson do fluido, que é dado por $\mu_{JT} = (1 - \beta T) / \rho_f C_{pf}$;
- Condução (4º termo do lado direito da equação);

Ao analisar a equação (3.16), percebe-se que os termos fonte são associados às variações de pressão. A equação da difusividade hidráulica modela o campo de pressões e é dada por:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) + W_p \quad (3.18)$$

onde W_p é um termo fonte responsável por representar a produção do poço. A equação da difusividade, na forma dada pela equação (3.18), despreza os efeitos gravitacionais e é aplicável para fluxo monofásico de líquidos pouco compressíveis.

3.3 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Abaixo serão introduzidas hipóteses que visam simplificar as equações (3.16) e (3.18), facilitando o tratamento matemático adotado na solução do problema:

- as propriedades do fluido são constantes. Esta hipótese é amplamente empregada na análise de testes de pressão em poços e tem se mostrado útil e aplicável (Muradov, 2010);

- a formação é homogênea e isotrópica. Esta é outra hipótese comumente empregada na análise de testes de pressão em poços;
- fluxo monofásico de líquidos pouco compressíveis;
- compressibilidade total do sistema constante;
- as variações de temperatura no reservatório ($\sim 2\text{K}$) são pequenas quando comparadas com a temperatura inicial do reservatório ($\sim 350\text{K}$) (Muradov & Davies, 2011), sendo possível considerar que $\phi\beta T \cong \phi\beta T_i$, $\rho_r C_{pr} T \cong \rho_r C_{pr} T_i$ e que $(\beta T - 1) \cong (\beta T_i - 1)$, linearizando a equação (3.16).

Será assumido também que $p + \rho_r C_{pr} T_i \approx p_i + \rho_r C_{pr} T_i$. A validade desta hipótese é verificada através da Figura 2, que mostra a dependência de $p + \rho_r C_{pr} T_i$ com a pressão do reservatório, assumindo $\rho_r = 2200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $C_{pr} = 1250 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ e $T_i = 350 \text{ K}$. Conforme pode ser observado, ao variar a pressão de 700 bar para 100 bar, a variação de $p + \rho_r C_{pr} T_i$ é menor do que 6%. Cabe lembrar que muito dificilmente um reservatório de petróleo é submetido a variações de pressão de 600 bar e os desvios causados pela hipótese aqui mencionada no cálculo de $p + \rho_r C_{pr} T_i$ serão normalmente inferiores ao valor de 6%. À título de exemplo, em um reservatório que sofre variação de pressão de cerca de 100 bar, os desvios no cálculo de $p + \rho_r C_{pr} T_i$ serão de apenas 1%.

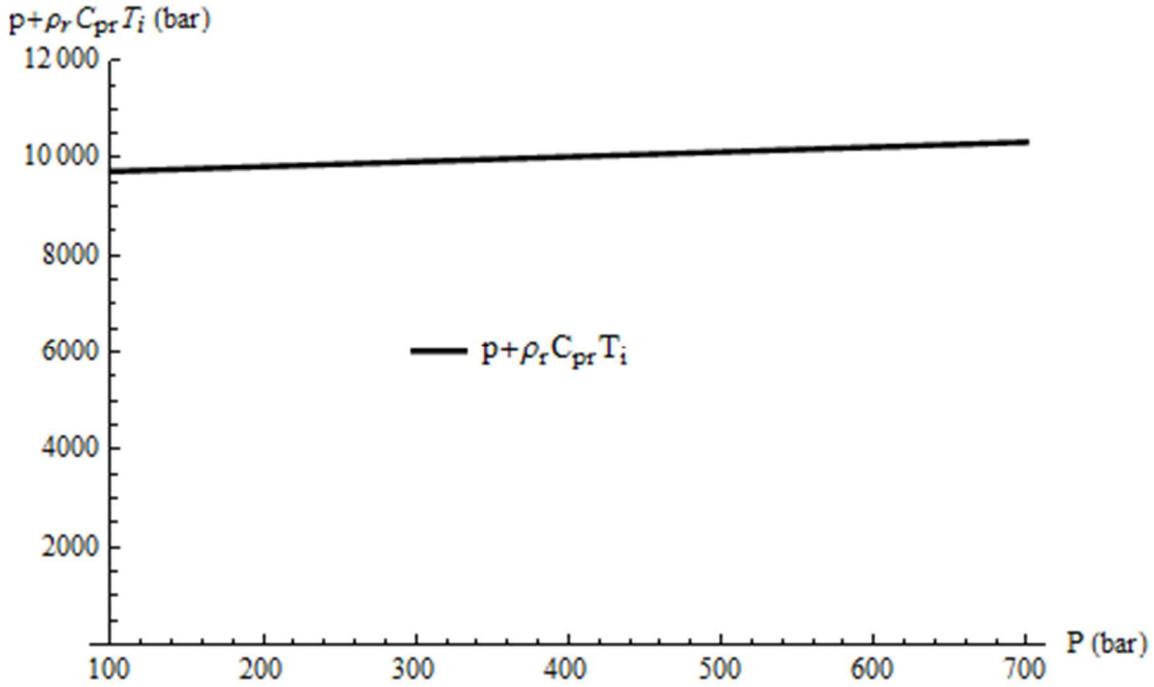


Figura 3.2 – Relação entre pressão do reservatório e $p + \rho_r C_{pr} T_i$.

Cabe lembrar que a solução do balanço de energia por GITT não exige a aplicação das hipóteses apresentadas acima, de tal forma que, é possível remover algumas destas hipóteses em trabalhos futuros. Por exemplo, a hipótese de meio homogêneo e isotrópico pode ser aliviada considerando desenvolvimentos como o apresentado em Naveira-Cotta *et al.* (2009), que apresentaram o uso da GITT para resolver problemas transientes de difusão de calor e massa em meios heterogêneos.

Dadas estas hipóteses, as equações (3.16) e (3.18) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 & \bar{\rho} \bar{C}_p \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} + \rho_f C_{pf} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla T_{(x,t)} \\
 & = \phi \beta T_i \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} + (p_i + \rho_r C_{pr} T_i) \phi c_r \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} \\
 & + (\beta T_i - 1) \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla p_{(x,t)} + \lambda \nabla^2 T_{(x,t)}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} = \nabla^2 p_{(x,t)} + W_{(x,t)} \tag{3.20}$$

Onde $\eta = \frac{k}{\phi\mu c_t}$ é a constante de difusividade hidráulica. Nota-se que $W_{(x,t)}$ incorporou o termo μ/k , fazendo com que o termo fonte tenha dimensões $kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-2}$. A velocidade $\mathbf{v}_{(x,t)}$ é dada pela Lei de Darcy:

$$\mathbf{v}_{(x,t)} = -\frac{k}{\mu} \nabla p_{(x,t)} \quad (3.21)$$

4 SOLUÇÃO DA EDH ATRAVÉS DA CITT

Neste capítulo, a solução da equação (3.20) em coordenadas cartesianas pela técnica da transformada integral clássica (CITT) será brevemente apresentada. Maiores detalhes podem ser encontrados em Marsilli (2013), Couto *et al.* (2011) e Rahman & Bentsen (2000).

É importante mencionar que existem soluções clássicas (Dake, 1983) para problemas transientes da equação da difusividade hidráulica em coordenadas cartesianas para fluxo linear e vazão constante, dadas em termos da função erro. Tais soluções do campo de pressões podem ser empregadas na solução do balanço de energia a ser apresentada a seguir, entretanto, optou-se por empregar a solução da EDH por CITT, visto que as integrações necessárias para a solução do balanço de energia são obtidas analiticamente, minimizando o trabalho numérico e aumentando a robustez da solução. Outra vantagem do emprego da CITT é que, diferentemente das soluções clássicas, é válida para todos os regimes de fluxo: transiente, pseudo-permanente e permanente, estendendo a aplicabilidade da solução do campo de pressões e conseqüentemente do balanço de energia, como será visto ao longo do trabalho.

Matematicamente, o problema que queremos resolver é dado por:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) + W(\mathbf{x}, t), \quad \text{em } \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

com condições de contorno generalizadas,

$$a_d \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}_d} + b_d p(\mathbf{x}_d, t) = f_d(\mathbf{x}_d, t), \quad \text{em } \mathbf{x}_d \in S_d, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

e condição inicial,

$$p(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}), \quad \text{em } \mathbf{x} \in V, \quad t = 0 \quad (4.3)$$

A solução analítica deste problema através da Técnica da Transformação Integral Clássica é dada por:

$$p(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\eta\chi_m^2 t} \widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}) \left[\bar{F}(\chi_m) + \eta \int_0^t e^{\eta\chi_m^2 t'} A_{(\chi_m, t')} dt' \right] \quad (4.4)$$

onde

$$A_{(\chi_m, t)} = \bar{W}_{(\chi_m, t)} + \sum_{d=1}^N \int_{S_d} \frac{\widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}_i)}{a_d} f_d(\mathbf{x}_d, t) dS_d \quad (4.5)$$

$$\bar{F}(\chi_m) = \int_V \widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.6)$$

$$\bar{W}_{(\chi_m, t)} = \int_V \widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (4.7)$$

$$\widehat{\Omega}(\chi_m, \mathbf{x}) \equiv \widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Omega_m(\mathbf{x})}{N_m^{1/2}} \quad (4.8)$$

$$N(\chi_m) \equiv N_m = \int_V \psi_m^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

Para as fronteiras sujeitas à condição de contorno do primeiro tipo ($a_d = 0$), a seguinte substituição deve ser feita na equação (4.5):

$$\frac{\widehat{\Omega}_m(\mathbf{x}_i)}{a_d} = -\frac{1}{b_d} \frac{\partial \widehat{\Omega}_m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_d} \quad (4.10)$$

$\Omega_m(\mathbf{x})$, χ_m e N_m , são as autofunções, autovalores e a norma do problema auxiliar escolhido para a solução da equação da difusividade hidráulica. As equações de (4.4) até (4.10) envolvem uma série de cálculos intermediários e cuidados na interpretação simbólica; recomenda-se consultar Marsilli (2013) para o passo-a-passo da escolha dos problemas auxiliares e cálculo das autofunções e autovalores.

O termo fonte $W(x, t)$, responsável por representar o poço no equacionamento proposto, é dado em termos da função delta de Dirac. Tal representação permite resolver o problema com o poço localizado em diferentes posições no interior do reservatório, bem como trabalhar com vazões dependentes do tempo, evitando o uso do Princípio da Superposição de Efeitos (Rahman & Bentsen, 2001).

A seguir, será apresentado um exemplo de aplicação da solução da EDH através da CITT em coordenadas cartesianas, considerando escoamento linear, aplicável em poços horizontais.

4.1 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO DA EDH POR CITT

Nesta seção, será aplicada a solução da EDH por CITT apresentada anteriormente para um problema transiente unidimensional em coordenadas cartesianas (escoamento linear), considerando que uma das condições de contorno é do 2º tipo e a outra do 1º tipo. A Figura 4.1 apresenta um esquema ilustrativo do problema.

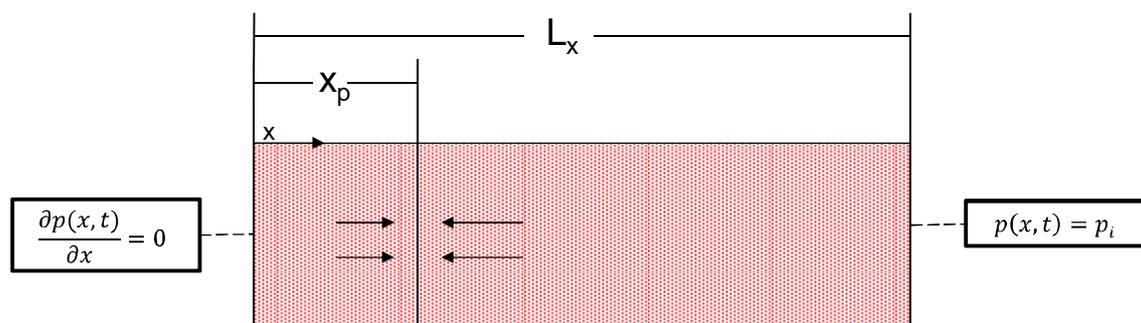


Figura 4.1 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.1.

Este problema é aplicável em duas diferentes situações:

- Escoamento linear com o poço situado no centro do reservatório, com ambas as fronteiras mantidas a pressão constante, resultando em condição de simetria na posição do poço, sendo possível resolver apenas metade do sistema assumindo $x_p = 0$. Tal situação pode ser encontrada, por exemplo, em reservatórios onde há um grande aquífero atuante, que mantém a pressão no interior do reservatório constante.

- Escoamento linear com o poço situado em qualquer posição no interior do reservatório, sendo uma das fronteiras considerada impermeável (poço situado próximo à borda do reservatório, perto de uma falha selante, etc.) e a outra mantida a pressão constante (e.g. aquífero atuante).

Para o problema acima, as equações (4.1) até (4.3) podem ser escritas como:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \delta(x - x_p), \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \quad t > 0 \quad (4.12)$$

$$p(x, t) = p_i, \quad em \ x = L_x, \quad t > 0 \quad (4.13)$$

$$p(x, 0) = p_i, \quad t = 0 \quad (4.14)$$

onde L_y e L_z representam as dimensões do reservatório nas direções y e z , respectivamente. Substituindo $p^*(x, t) = p(x, t) - p_i$, é possível homogeneizar o problema acima.

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \delta(x - x_p), \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \quad t > 0 \quad (4.16)$$

$$p^*(x, t) = 0, \quad em \ x = L_x, \quad t > 0 \quad (4.17)$$

$$p^*(x, 0) = 0, \quad t = 0 \quad (4.18)$$

A autofunção, a norma e os autovalores para o problema de autovalor na direção x são obtidos diretamente das tabelas apresentadas em Ozisik (1993):

$$X(\beta_m, x) = \cos(\chi_m, x) \quad (4.19)$$

$$N(\chi_m) = \frac{L_x}{2} \quad (4.20)$$

$$\chi_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L_x}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Fazendo a correspondência das equações (4.15) a (4.18) com a solução geral dada pela equação (4.4) e usando as autofunções, normas e autovalores, chegamos na seguinte expressão analítica para o campo de pressões:

$$p^*(x, t) = \frac{8L_x}{\pi^2} \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x \right] \times \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x_p \right] \left[1 - e^{-\eta \frac{(2m-1)^2 \pi^2 t}{4L_x^2}} \right] \quad (4.22)$$

Aplicando os parâmetros da Tabela 4.1 na equação (4.22) obtemos a solução do campo de pressões ao longo do reservatório, apresentada na Figura 4.2, usando 100 termos na série.

Tabela 4.1 – Conjunto de dados para o problema unidimensional

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q	-0,04 m ³ /s	-3456 m ³ /d
Permeabilidade, k	10 ⁻¹⁴ m ²	10,1 mD
Porosidade, ϕ	30%	30%
Compressibilidade total, c_t	10 ⁻⁹ Pa ⁻¹	10 ⁻⁴ bar ⁻¹
Viscosidade, μ	2 x 10 ⁻⁴ Pa·s	0,2 cP
Pressão inicial, p_i	3 x 10 ⁷ Pa	300 bar
Espessura, L_z	2 m	2 m
Comprimento em x, L_x	50 m	50 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Comprimento em y, L_y	2000 m	2000 m

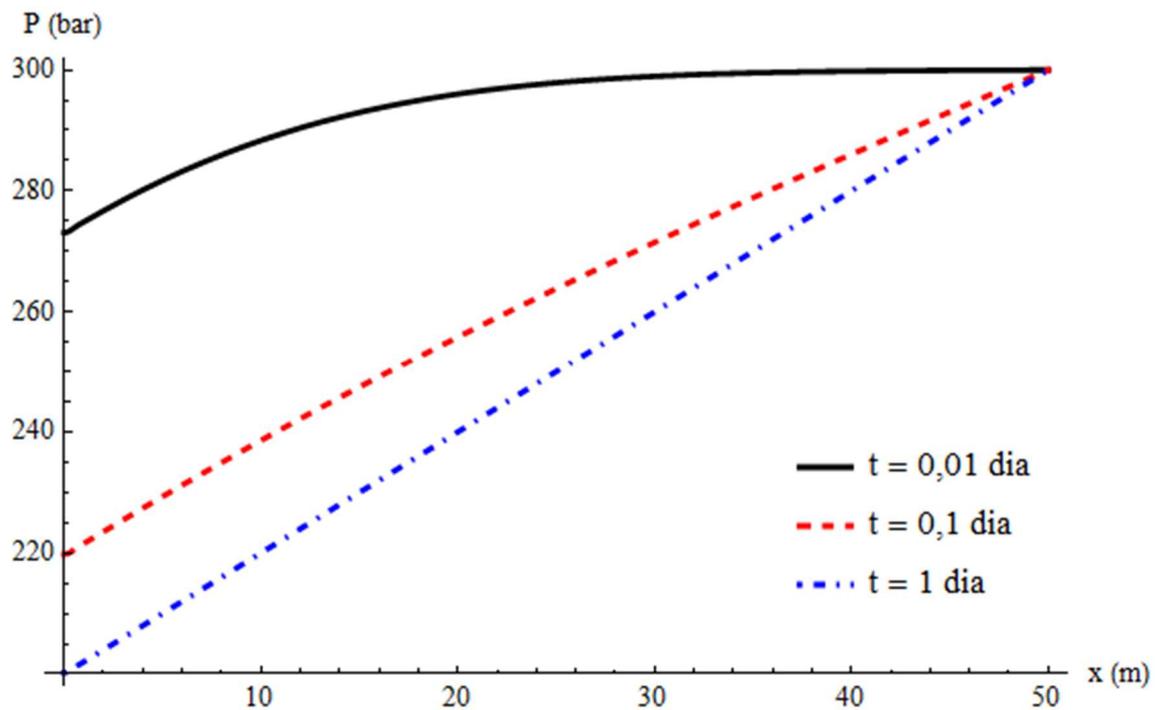


Figura 4.2 – Perfil de pressões para diversos tempos.

A Figura 4.3 apresenta o comportamento da pressão no poço ($x = x_p$) com o tempo, utilizando diferentes números de termos na série. Conforme pode ser observado pela Figura 4.3, há uma convergência gráfica satisfatória da solução do campo de pressões com apenas 15 termos na série. Maiores detalhes sobre a análise de convergência desta solução podem ser encontrados em Marsilli (2013).

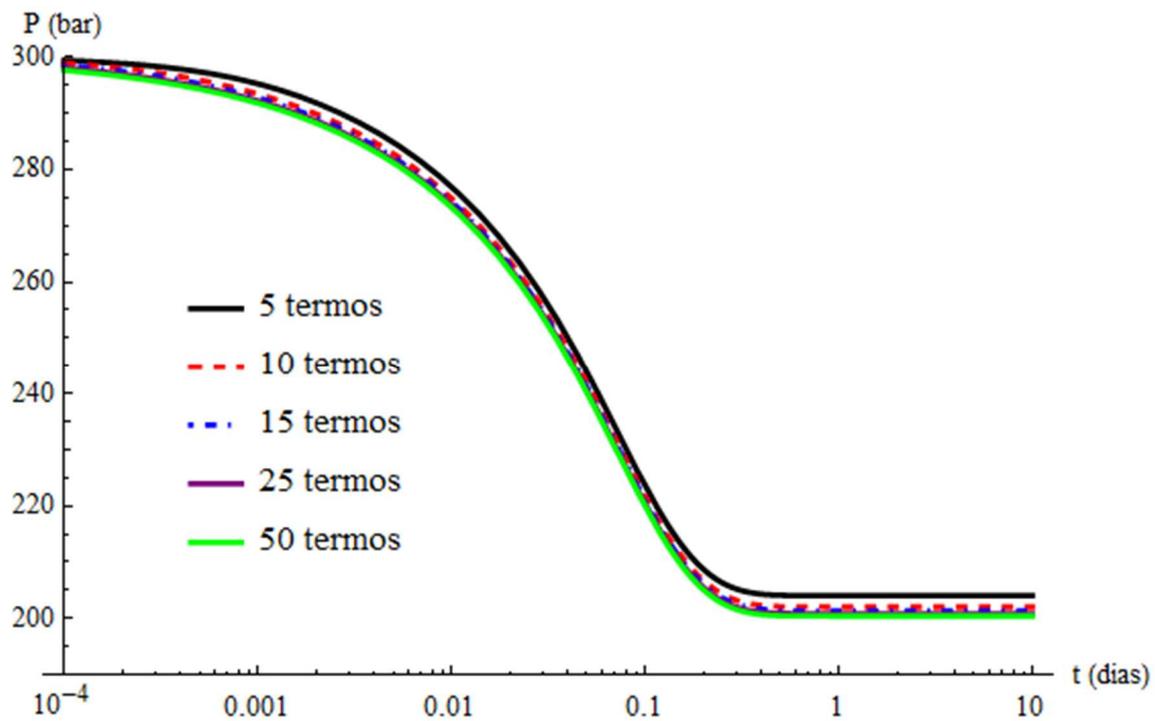


Figura 4.3 – Pressão no poço com diferentes números de termos na série.

Para solucionar o campo de temperaturas explicitamente, é necessário conhecer as derivadas espaciais e temporais da pressão (vide equação (3.19)). Derivando a expressão (4.22) com relação ao tempo, obtemos os resultados apresentados na Figura 4.4, com 25 termos na série.

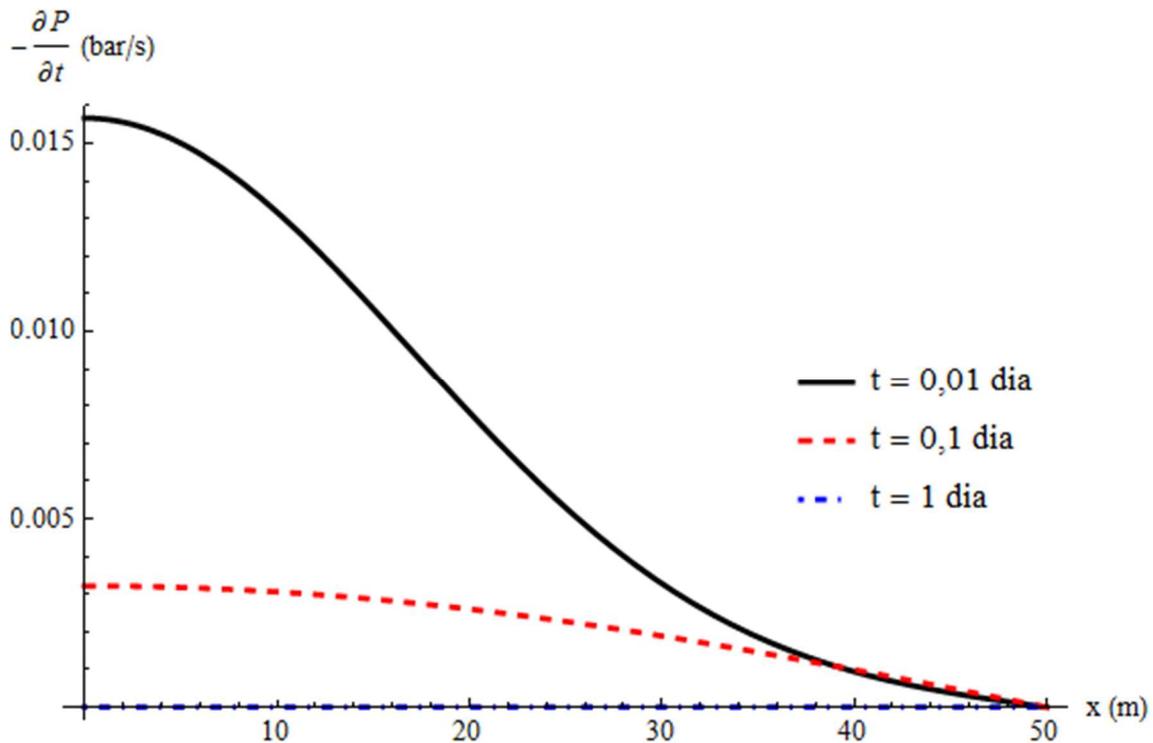


Figura 4.4 – Derivada temporal da pressão.

A Tabela 4.2 apresenta uma análise de convergência da derivada temporal da pressão para a posição $x = x_p$, que é a posição onde se encontra o termo fonte, logo aonde se espera maior dificuldade na convergência da solução.

Tabela 4.2 – Convergência da derivada temporal da pressão em $x = x_p$.

Tempo, dias	$\partial P/\partial t \times 10^3$ (bar/s)				
	Número de Termos (N)				
	5	10	15	20	25
0,001	-45,086	-49,524	-49,559	-49,559	-49,559
0,01	-15,672	-15,672	-15,672	-15,672	-15,672
0,02	-11,078	-11,078	-11,078	-11,078	-11,078
0,1	-3,219	-3,219	-3,219	-3,219	-3,219
0,2	-0,777	-0,777	-0,777	-0,777	-0,777

Conforme pode ser observado na Tabela 4.2, com 15 termos na expansão em série já se obtém a convergência de 3 casas decimais na derivada temporal da pressão.

Derivando a equação (4.22) em relação a x , obtemos uma expressão para a derivada espacial da pressão, que fornece os resultados apresentados na Figura 4.5, com 100 termos na série.

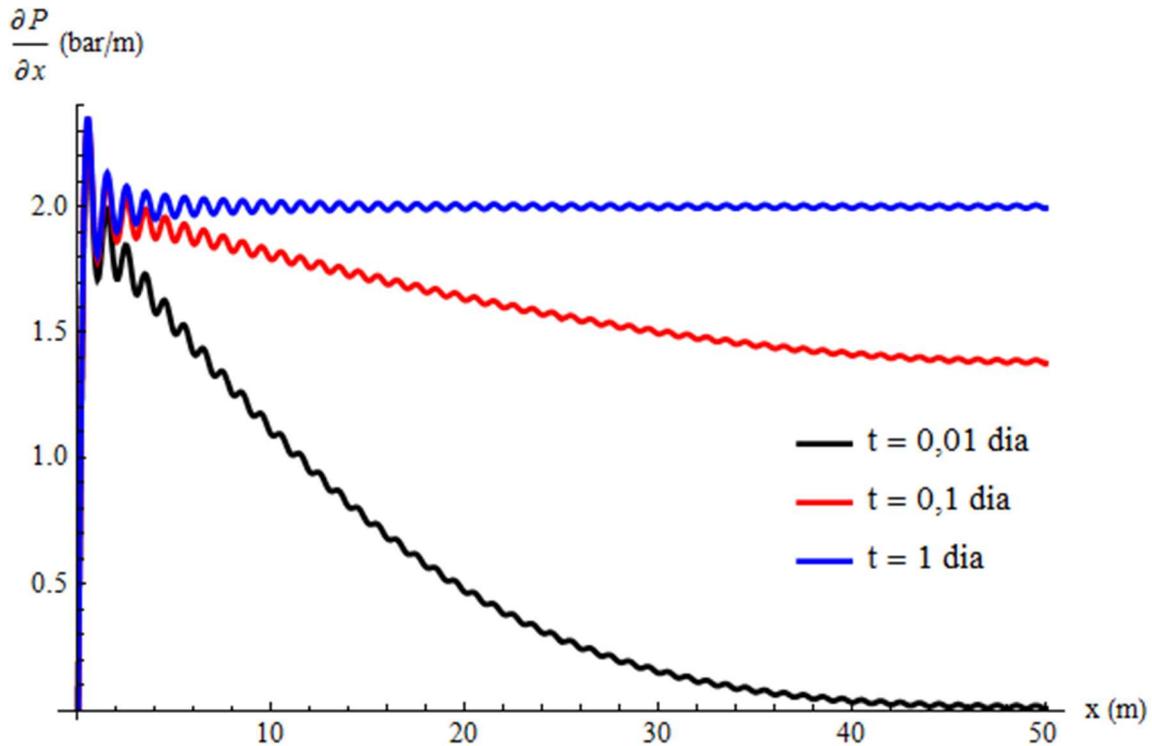


Figura 4.5 – Derivada espacial da pressão.

Conforme pode ser observado na Figura 4.5, a derivada da pressão apresenta caráter fortemente oscilatório, principalmente perto da posição do poço, indicando a não convergência da solução. Este fato é evidenciado na Tabela 4.3, que apresenta uma análise de convergência da derivada espacial da pressão para a posição $x = 0,1$ m, localizada próximo ao termo fonte.

Tabela 4.3 – Convergência da derivada espacial da pressão em $x = 0,1$ m.

Tempo, dias	$\partial P/\partial x$ (bar/m)				
	Número de Termos (N)				
	10	100	250	500	1000
0,001	0,0503	0,7529	1,7156	2,3282	1,7759
0,01	0,0706	0,7733	1,7359	2,3486	1,7962
0,1	0,0781	0,7807	1,7434	2,3560	1,8037
0,5	0,0800	0,7827	1,7453	2,3580	1,8056
1,0	0,0800	0,7827	1,7453	2,3580	1,8056

Analisando a Tabela 4.3, verifica-se que mesmo com 1000 termos na série, não se obtém convergência no 1º dígito. Assim, procurando evitar as oscilações da derivada espacial da pressão, que impedem a obtenção de uma solução estável, será utilizada a técnica do balanço integral para acelerar a convergência da derivada espacial da pressão.

4.1.1 Balanço Integral

Uma alternativa para acelerar a convergência de soluções de problemas não homogêneos foi apresentada em Scofano Neto *et al.* (1990), Leiroz & Cotta (1990) e Cotta (1993). Essa técnica é baseada na integração da equação diferencial parcial original no domínio espacial e manipulações das condições de contorno e será aplicada a seguir para o problema representado pelas equações (4.15) à (4.18).

Aplicando o operador $\int_0^x dx$ na equação (4.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^x p^*(x, t) dx \right] \\
 &= \left. \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x} - \left. \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \\
 &+ \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \int_0^x \delta(x - x_p) dx
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Aplicando a condição de contorno (4.16) e substituindo o termo na integral pela equação (4.22), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x} \\
&= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^x \left(\frac{8L_x}{\pi^2} \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x \right] \right. \right. \\
& \times \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x_p \right] \times \left. \left. \left[1 - e^{-\eta \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4L_x^2} t} \right] \right) dx \right] \tag{4.24} \\
& - \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \int_0^x \delta(x - x_p) dx
\end{aligned}$$

As integrais da equação (4.24) são obtidas analiticamente e poderão ser encontradas no Anexo I. A Figura 4.6 apresenta a derivada espacial da pressão calculada utilizando a equação (4.24) com 25 termos na série.

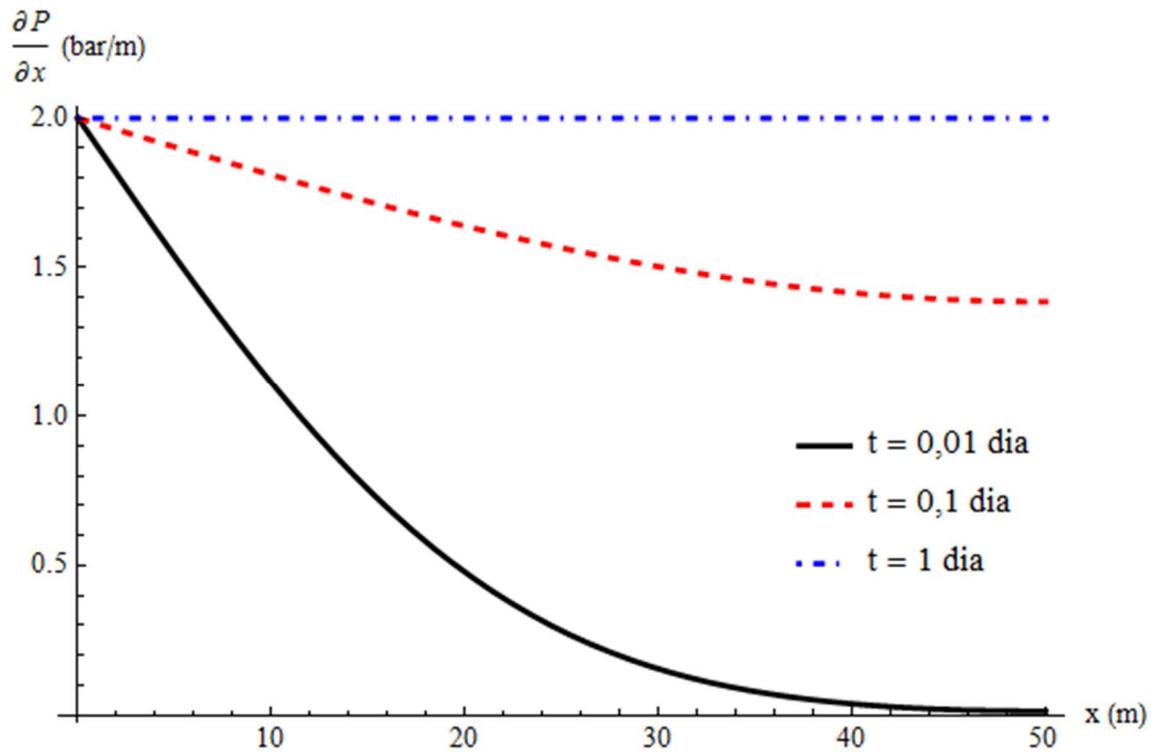


Figura 4.6 – Derivada espacial da pressão calculada com o balanço integral.

Ao comparar a Figura 4.5 e a Figura 4.6, verifica-se que o uso do balanço integral promoveu grande melhora na convergência.

A Figura 4.7 apresenta uma análise de convergência da derivada espacial em todo o domínio do problema.

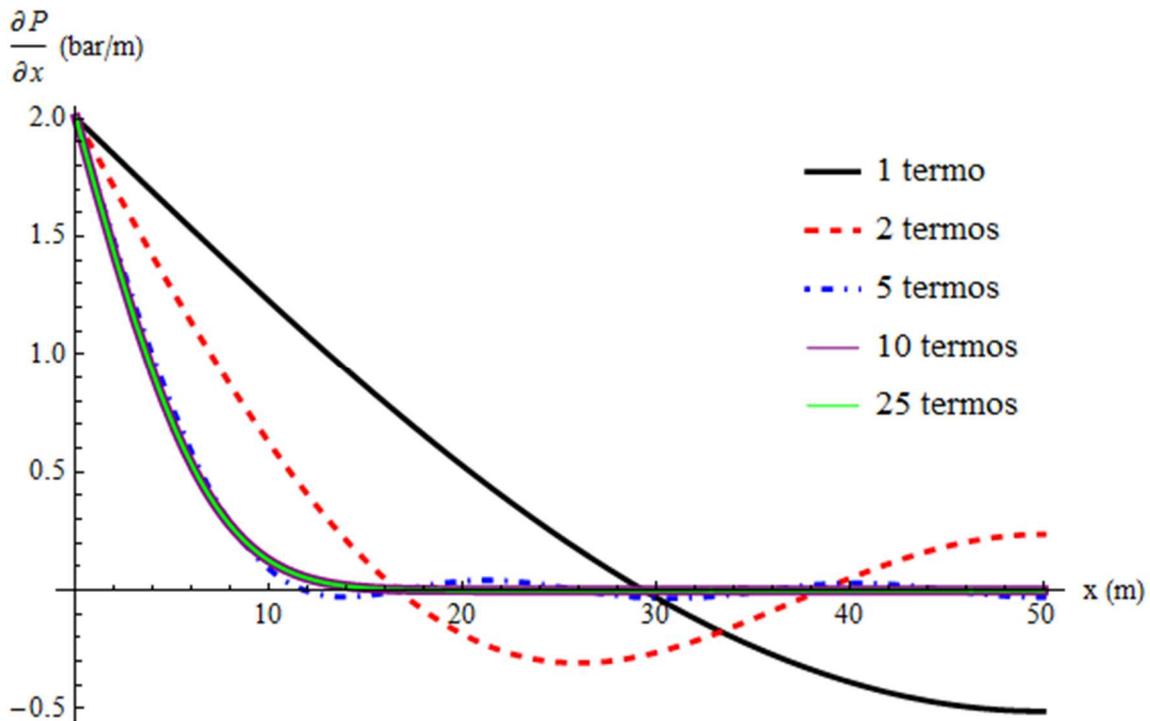


Figura 4.7 – Derivada espacial da pressão no tempo $t = 0,001$ dias, com diferentes números de termos na série.

A análise da Figura 4.7 mostra que com o uso do balanço integral, diferentemente do que ocorria no cálculo da deriva espacial utilizando a derivada da equação (4.22), onde os problemas de convergência eram maiores nas posições próximas ao poço, a convergência próximo ao poço ocorre mais rapidamente do que em regiões mais afastadas do poço. Além disto, é possível observar que com 10 autovalores já se obtém convergência satisfatória da derivada espacial da pressão.

A Tabela 4.4 apresenta uma análise de convergência da derivada espacial da pressão (utilizando a equação (4.24)) para a posição $x = 25$ m.

Tabela 4.4 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.

Tempo, dias	$\partial P/\partial x$ (bar/m)				
	Número de Termos (N)				
	1	2	5	10	25
0,01	0,4379	0,2709	0,2814	0,2814	0,2814
0,05	1,1153	1,1143	1,1143	1,1143	1,1143
0,1	1,5653	1,5653	1,5653	1,5653	1,5653
0,5	1,9985	1,9985	1,9985	1,9985	1,9985
1,0	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000

Conforme pode ser observado pela análise da Tabela 4.4, a convergência de 4 dígitos é obtido com apenas 5 termos na série, mostrando a eficiência computacional obtida ao se utilizar o balanço integral na análise da derivada espacial da pressão.

Neste capítulo, foi apresentada a solução da EDH por CITT em coordenadas cartesianas, bem como a obtenção das derivadas espacial e temporal da pressão, necessárias para a resolução do balanço de energia. Cabe lembrar que a solução da EDH por CITT pode ser aplicada para problemas multidimensionais em coordenadas cartesianas (Marsilli, 2013), bem como problemas em coordenadas cilíndricas (Rahman & Bentsen, 2001).

5 SOLUÇÃO FORMAL DO BALANÇO DE ENERGIA ATRAVÉS DA GITT

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) consiste de uma extensão da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT), que permite a resolução de problemas inicialmente não transformáveis. Ambos os métodos transformam a equação diferencial parcial original em um conjunto de equações diferenciais ordinárias ou algébricas que podem ser resolvidas por técnicas bem estabelecidas (Cotta & Mikhailov, 1993). Diferentemente da CITT, na GITT, a transformação do problema original não necessariamente resulta em um sistema de equações desacopladas (Sphaier, et al., 2011).

De acordo com Cotta (1993), os passos básicos envolvidos na aplicação da GITT consistem de:

- escolher o problema auxiliar adequado ao problema que se deseja resolver;
- desenvolver o par transformada-inversa adequado;
- tentar transformar a equação diferencial parcial original, resultando em um sistema de equações algébricas ou diferenciais parciais/ordinárias acopladas;
- truncar o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas em uma ordem suficientemente grande para atingir a precisão necessária e resolver os potenciais transformados através de uma das seguintes alternativas:
 - numericamente, através de rotinas bem estabelecidas em pacotes de computação científica que permitem prescrever a precisão desejada da solução, como o *Mathematica* (Wolfram, 2005) e a IMSL Library (IMSL, 1991), disponível nas linguagens de programação *Fortran*, *C*, *Java* e *Python*;
 - em determinadas situações, os termos não diagonais resultantes da transformação podem ser negligenciados, permitindo a obtenção de soluções analíticas (solução de baixa-ordem);
- utilizar a fórmula de inversão para obter o potencial original.

Na próxima seção, o procedimento descrito acima será aplicado para obter a solução geral do balanço de energia em reservatórios de petróleo (equação (3.19)) através da GITT. O balanço de energia consiste de um problema advectivo-difusivo e maiores detalhes no desenvolvimento da solução para esta classe de problemas através da GITT podem ser encontrados em Cotta (1993).

5.1 SOLUÇÃO GENERALIZADA DO BALANÇO DE ENERGIA

Nesta seção, consideraremos o balanço de energia apresentado no capítulo 3, com condições de contorno e condição inicial generalizadas:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\rho}C_p}{\lambda} \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla T_{(x,t)} \\
&= \frac{\phi \beta T_i}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \phi c_r \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} \\
&+ \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla p_{(x,t)} + \nabla \cdot (K_{(x)} \nabla T_{(x,t)}), \mathbf{x} \in V, \\
&t > 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Onde $K_{(x)}$ é um fator de escala associado ao sistema de coordenadas empregado. Para o sistema de coordenadas Cartesiano, $K_{(x)} = 1$.

$$\left[\alpha_{(x)} + \Gamma_{(x)} K_{(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] T_{(x,t)} = \phi_{(x,t)}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \tag{5.2}$$

$$T_{(x,0)} = f_{(x)}, \quad \mathbf{x} \in V \tag{5.3}$$

Aplicando a separação de variáveis ao problema homogêneo sem o termo advectivo, o seguinte problema auxiliar é escolhido:

$$\nabla \cdot (K_{(x)} \nabla \psi_{(\sigma_i, x)}) + \frac{\bar{\rho}C_p}{\lambda} \sigma_i^2 \psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad \mathbf{x} \in V \tag{5.4}$$

Com condições de contorno:

$$\left[\alpha_{(x)} + \Gamma_{(x)} K_{(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (5.5)$$

O par transformada-inversa apropriado é dado por:

$$\bar{T}_i(t) = \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \int_V \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) T_{(x,t)} dV \quad (5.6)$$

$$T_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) \bar{T}_i(t) \quad (5.7)$$

Onde $\psi_i(\mathbf{x})$, σ_i e N_i são as autofunções, autovalores e normas do problema de autovalor. $\hat{\psi}_i(\mathbf{x})$ é a autofunção normalizada, dada por:

$$\hat{\psi}_i(\mathbf{x}) = \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{N_i^{1/2}} \quad (5.8)$$

Ozisik (1993) apresenta tabelas com as autofunções, autovalores e normas para problemas de Sturm-Liouville em diferentes sistemas de coordenadas.

Operando a equação (5.1) com $\int_V \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) dV$, obtemos:

$$\frac{\partial \bar{T}_i(t)}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \int_V \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) \left[\mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla T_{(x,t)} \right] dV = -\sigma_i^2 \bar{T}_i(t) + \bar{g}_i(t), \quad (5.9)$$

$$t > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

onde o termo fonte é conhecido e dado por:

$$\begin{aligned}
\bar{g}_i(t) = & \int_V \left(\frac{\phi\beta T_i}{\lambda} + \phi c_r \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \right) \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) dV \\
& + \int_V \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla p_{(x,t)} \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) dV \\
& + \int_S K_{(x)} \left[\hat{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial \mathbf{n}} - T_{(x,t)} \frac{\partial \hat{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right] dS
\end{aligned} \tag{5.10}$$

A integração na equação (5.9) pode ser feita fazendo uso da fórmula de inversão, equação (5.7).

$$\frac{\partial \bar{T}_i(t)}{\partial t} + \sigma_i^2 \bar{T}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \tag{5.11}$$

onde:

$$A_{ij}^*(t) = \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \int_V \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) [\mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla \hat{\psi}_j(\mathbf{x})] dV \tag{5.12}$$

A condição inicial transformada é dada por:

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \int_V \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) f_{(x)} dV, \quad i = 1, 2, \dots \tag{5.13}$$

As equações (5.11) e (5.12) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas para os potenciais transformados. Neste trabalho, o sistema formado pelas equações (5.11) e (5.12) é resolvido utilizando a rotina *NDSolve* do *Mathematica*.

Assim que o sistema de EDOs acopladas for resolvido, é possível utilizar a fórmula inversa, dada pela equação (5.7), para obter o potencial desejado. Do ponto de vista

computacional, o sistema de equações é truncado na N -ésima linha e coluna, com N suficientemente grande para obter a precisão desejada.

A solução apresentada acima pode ser aplicada em diferentes sistemas de coordenadas ortogonais em problemas multidimensionais, com condições de contorno generalizadas, que podem ser do 1º, 2º ou 3º tipo. A condição inicial pode ser escolhida de forma a representar o gradiente geotérmico do reservatório ou outra distribuição de temperatura considerada adequada ao problema.

Tendo sido apresentada a solução formal e generalizada do balanço de energia através da GITT, nos capítulos subsequentes, tal solução será empregada para problemas em coordenadas cartesianas uni e bidimensionais.

6 SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo, serão apresentadas soluções do balanço de energia, considerando escoamento linear no interior do reservatório e diferentes condições de contorno, sem considerar as trocas térmicas com as formações rochosas adjacentes.

6.1 PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DO 1º E 2º TIPO

Será apresentada a seguir a aplicação da solução geral apresentada no Capítulo 5 à um problema transiente unidimensional em coordenadas cartesianas, considerando que uma das condições de contorno é do 2º tipo e a outra do 1º tipo. A Figura 6.1 apresenta um esquema ilustrativo do problema.

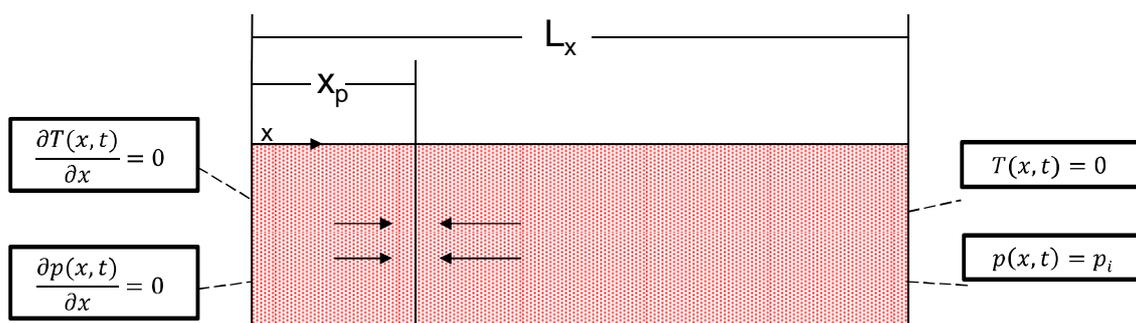


Figura 6.1 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.1.

Este problema é aplicável às mesmas situações descritas na seção 4.1

6.1.1 Solução da EDH

A solução do campo de pressões para tal problema foi apresentada previamente na seção 4.1.

6.1.2 Solução do Balanço de Energia

O balanço de energia, com suas condições de contorno e iniciais é dado por:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla T_{(x,t)} \\
&= \frac{\phi \beta T_i}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i) \phi c_r}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} \\
&+ \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla p_{(x,t)} + \nabla^2 T_{(x,t)}, \quad 0 < x < L_x, \\
&t > 0
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \ t > 0 \tag{6.2}$$

$$T(x,t) = 0, \quad em \ x = L_x, \ t > 0 \tag{6.3}$$

$$T(x,0) = 0, \quad em \ t = 0 \tag{6.4}$$

Ao analisar as condições de contorno aplicadas no problema acima, percebe-se que a condição de contorno de temperatura constante em $x = L_x$ é incompatível com a condição de contorno de pressão constante em $x = L_x$, visto que a condição de contorno da pressão implica em uma derivada espacial da pressão não-nula em $x = L_x$, causando assim variações de temperatura nesta posição, bem como a ocorrência do fenômeno de Gibbs, levando à oscilações na solução por expansão em série para posições próximas às fronteiras do reservatório. Entretanto, a advecção e a difusão térmica no interior do reservatório são pouco significativas, de tal forma que a mencionada inconsistência nas condições de contorno não impacta a solução do balanço de energia na posição do poço, $x = x_p$.

O problema de autovalor apropriado é:

$$\frac{\partial^2 \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \sigma_i^2 \psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad 0 < x < L_x \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0 \tag{6.6}$$

$$\psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad \text{em } x = L_x \quad (6.7)$$

Consultando as tabelas apresentadas em Ozisik (1993), as autofunções, normas e autovalores são dados por:

$$\psi_{(\sigma_i, x)} = \cos \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} \sigma_i x \right] \quad (6.8)$$

$$\sigma_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho} \bar{C}_p}} \quad (6.9)$$

$$N_{x,i} = \frac{L_x \bar{\rho} \bar{C}_p}{2 \lambda} \quad (6.10)$$

Utilizando a solução geral, o par transformada-inversa apropriado é dado por:

$$\bar{T}_i(t) = \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \int_0^{L_x} \frac{\cos \left[\frac{(2i - 1)\pi}{2L_x} x \right]}{N_{x,i}^{1/2}} T_{(x,t)} dx \quad (6.11)$$

$$T_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \cos \left[\frac{(2i - 1)\pi}{2L_x} x \right] \bar{T}_i(t) \quad (6.12)$$

Operando a equação (6.1) com

$$\int_0^{L_x} \frac{\cos \left[\frac{(2i - 1)\pi}{2L_x} x \right]}{N_{x,i}^{1/2}} dx$$

e fazendo as operações indicadas na solução geral, chegamos ao sistema de equações diferenciais ordinárias a ser resolvido.

$$\frac{\partial \bar{T}_i(t)}{\partial t} + \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho C_p}} \right]^2 \bar{T}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t), \quad (6.13)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

onde:

$$A_{ij}^*(t) = \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda N_{x,i}^{1/2} N_{x,j}^{1/2}} \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \times \frac{d \cos \left[\frac{(2j-1)\pi}{2L_x} x \right]}{dx} \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right) dx \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & \bar{g}_i(t) \\ = & \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \times \left[\frac{\phi \beta T_i}{\lambda} + \phi c_r \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \right] \\ & \times \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} dx \quad (6.15) \\ & + \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \left(-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

A parcela do termo fonte associada às condições de contorno é nula, visto que as condições de contorno são homogêneas.

A condição inicial transformada é dada por:

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

O cálculo das integrais das equações (6.14) e (6.15) é feito substituindo as expressões para as derivadas da pressão apresentadas no Capítulo 4 e envolve extensas manipulações simbólicas que não serão demonstradas no texto. Foi possível obter todas

as integrais necessárias analiticamente, trazendo velocidade e robustez para os cálculos. Os resultados das integrações podem ser consultados nos códigos do *Mathematica* presentes no Anexo I.

Conforme mencionado anteriormente, a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias para obter os potenciais transformados é feita utilizando a rotina *NDSolve* do *Mathematica*.

Aplicando os parâmetros da Tabela 6.1 para resolver o balanço de energia, obtemos a solução do campo de temperatura apresentada a seguir.

Tabela 6.1 – Conjunto de dados para o problema da seção 6.1.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q	-0,04 m ³ /s	-3456 m ³ /d
Permeabilidade, k	10 ⁻¹⁴ m ²	10,1 mD
Porosidade, ϕ	30%	30%
Compressibilidade total, c_t	10 ⁻⁹ Pa ⁻¹	10 ⁻⁴ bar ⁻¹
Viscosidade, μ	2 x 10 ⁻⁴ Pa·s	0,2 cP
Pressão inicial, p_i	3 x 10 ⁷ Pa	300 bar
Espessura, L_z	2 m	2 m
Comprimento em x, L_x	50 m	50 m
Comprimento em y, L_y	2000 m	2000 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Coefficiente de expansão térmica, β	0,0008 K ⁻¹	0,0008 °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	0 Pa ⁻¹	0 bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m·K)	0,16 W/(m·K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m·K)	3,0 W/(m·K)
Massa específica do fluido, ρ_f	570 kg/m ³	570 kg/m ³
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	1350 J/(kg·K)	1350 J/(kg·K)
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg·K)	1250 J/(kg·K)

Para facilitar a comparação dos resultados, os parâmetros da Tabela 6.1 são os mesmos considerados por Muradov & Davies (2011), com exceção do coeficiente de expansão térmica. A compressibilidade da rocha foi considerada nula, visto que a solução

apresentada por Muradov & Davies (2011) despreza os efeitos térmicos causados pela expansão da rocha.

A Tabela 6.2 apresenta uma análise de convergência da temperatura para a posição $x = x_p$, que é a posição onde se encontra o termo fonte da EDH, logo, onde se espera maior dificuldade na convergência da solução. Os sensores de temperatura empregados em campos de petróleo possuem uma resolução da ordem de $0,001^\circ\text{C}$, assim sendo, na análise de convergência, serão considerados apenas 3 casas decimais, visto que a utilização de mais casas decimais não é de interesse prático.

Tabela 6.2 – Convergência da temperatura na posição do poço ($x = x_p$).

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ\text{C}$					
	Número de Termos (N)					
	10	25	50	100	150	200
0,01	-0,096	-0,100	-0,102	-0,102	-0,103	-0,103
0,1	-0,295	-0,300	-0,301	-0,302	-0,302	-0,302
0,2	-0,347	-0,351	-0,352	-0,353	-0,353	-0,353
0,5	-0,347	-0,350	-0,352	-0,353	-0,353	-0,353
1	-0,319	-0,321	-0,323	-0,323	-0,323	-0,323
5	-0,088	-0,084	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086
10	0,207	0,210	0,209	0,209	0,209	0,209
20	0,808	0,801	0,800	0,799	0,799	0,799

A Tabela 6.2 mostra que se obtém convergência de 3 casas decimais com 150 termos na série para todos os tempos estudados e que com 25 termos já se obtém a convergência de dois dígitos decimais.

A Figura 6.2 apresenta a variação de temperatura no poço calculada pela GITT (200 termos na série) e pela solução de referência, apresentada por Muradov & Davies (2011).

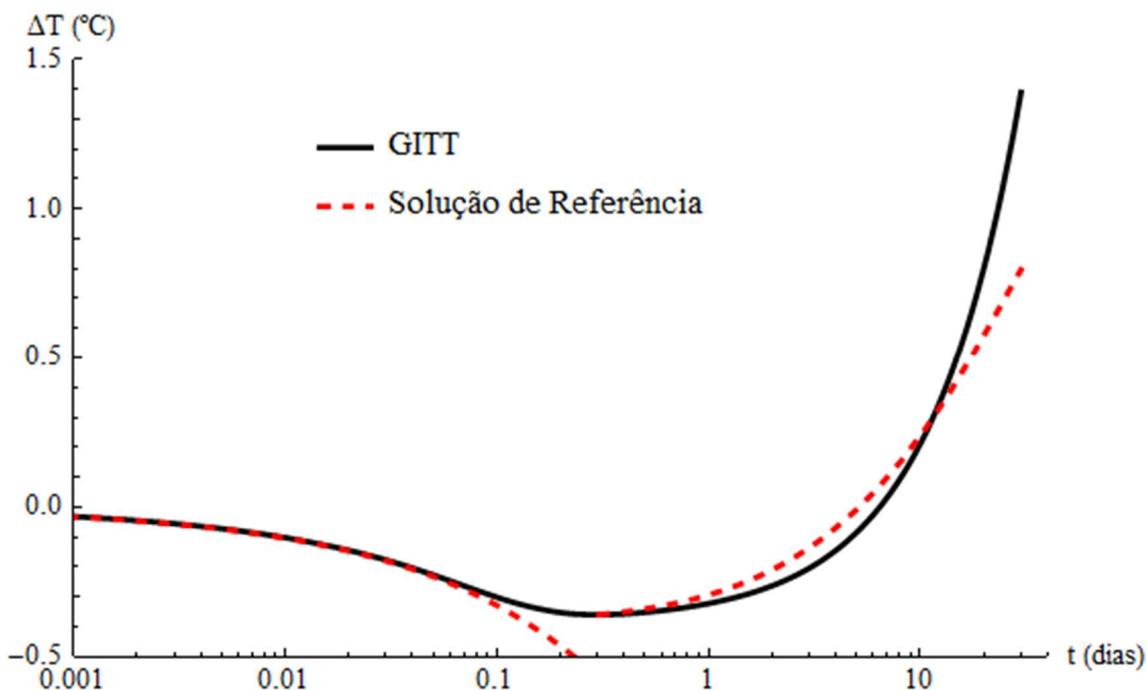


Figura 6.2 – Variação da temperatura no poço ($x = x_p$).

A análise da Figura 6.2 mostra um perfil de temperaturas semelhante ao comparar os resultados apresentados pela GITT e pela solução de referência, entretanto, é fácil notar alguns desvios significativos entre as duas soluções. Conforme mencionado anteriormente, a solução de referência é composta de duas soluções, uma para tempos curtos, que considera apenas os efeitos térmicos causados pela expansão transiente do fluido e outra solução para tempos intermediários, que leva em conta os efeitos térmicos causados pela expansão espacial do fluido e dissipação viscosa, o transporte advectivo e as trocas térmicas com as adjacências. A solução unidimensional dada por GITT considera a expansão transiente do fluido/rocha, a expansão espacial e dissipação viscosa e a advecção durante todo o domínio de tempo, bem como condução no interior do reservatório, que é desprezada na solução de referência. O desvio encontrado entre 0,1 e 0,2 dias pode ser explicado pelos efeitos térmicos causados pela expansão espacial do fluido e dissipação viscosa, que não são considerados na solução de referência para tempos curtos. Nota-se também que para tempos entre 1 e 10 dias, a GITT apresenta valores de temperatura menores do que os da solução de referência, sendo este desvio causado principalmente pelo fluxo de calor proveniente das adjacências (não considerado na solução por GITT unidimensional) e pelos efeitos térmicos transientes, que tem impacto para tempos pouco maiores do que $t_{\tau_{min}}$. Para tempos maiores do que

10 dias, a perda de calor do reservatório para as adjacências causa desvios entre a solução de referência e a solução por GITT.

Uma análise de sensibilidade da solução ao termo advectivo mostrou que este termo tem pouca importância para o problema, especialmente para tempos curtos, conforme pode ser observado na Figura 6.3. Na Figura 6.3, as soluções foram obtidas considerando 200 termos na série.

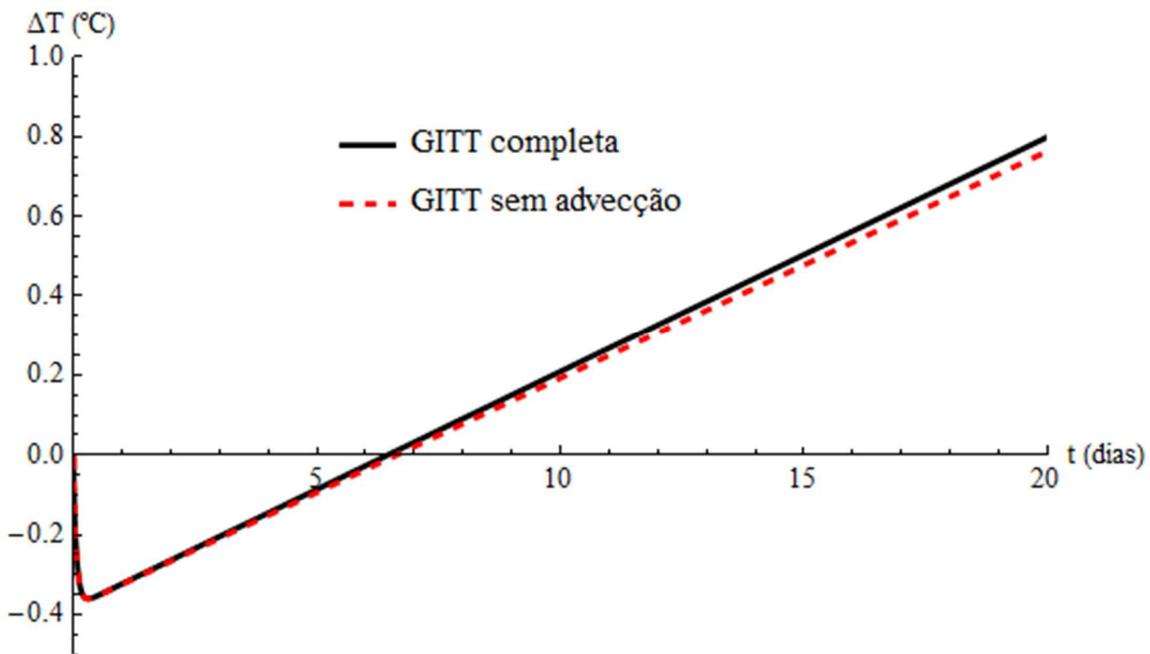


Figura 6.3 – Temperatura no poço ($x = x_p$), com e sem termo advectivo.

A possibilidade de desprezar o termo advectivo permite desacoplar os potenciais transformados, sendo possível assim resolver a equação (6.13) analiticamente, melhorando o desempenho computacional e a robustez da solução. É evidente que análises específicas devem ser feitas para cada caso em que se deseja desprezar a convecção.

6.2 POÇO LOCALIZADO EM UM RESERVATÓRIO COM FRONTEIRAS SELADAS

Será apresentada a seguir a aplicação da solução geral apresentada no Capítulo 5 à um problema transiente unidimensional em coordenadas cartesianas, aplicável em casos

onde o poço se situa em qualquer posição no interior do reservatório (incluindo a borda), sendo as fronteiras do reservatório impermeáveis. A Figura 6.4 apresenta um esquema ilustrativo do problema.

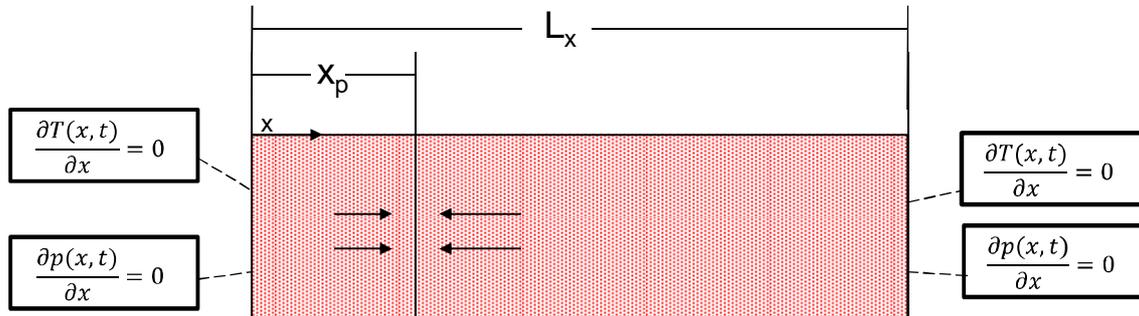


Figura 6.4 – Esquema ilustrativo do problema da seção 6.2.

6.2.1 Solução da EDH

A EDH para tal problema é escrita como:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \delta(x - x_p), \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0 \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{em } x = 0, \quad t > 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{em } x = L_x, \quad t > 0 \quad (6.19)$$

$$p^*(x, 0) = 0, \quad t = 0 \quad (6.20)$$

A autofunção, a norma e os autovalores para o problema de autovalor na direção \$x\$ são obtidos diretamente das tabelas apresentadas em Ozisik (1993):

$$X(\chi_m, x) = \cos(\chi_m, x) \quad (6.21)$$

$$N(\chi_m) = \begin{cases} \frac{L_x}{2}, & m \neq 0 \\ L_x, & m = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\chi_m = \frac{m\pi}{L_x}, \quad m = 0,1,2 \dots \quad (6.23)$$

Quando todas as condições de contorno forem do segundo tipo, χ_0 também é um autovalor e deve ser considerado na solução.

Fazendo a correspondência das equações (6.17) a (6.20) com a solução geral dada pela equação (4.4) e usando as autofunções, normas e autovalores apresentados acima, chegamos na expressão analítica do campo de pressões:

$$p^*(x, t) = \frac{\eta\mu Q}{kL_x L_y L_z} t + \frac{2L_x}{\pi^2} \frac{\mu Q}{kL_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos\left[\frac{m\pi}{L_x} x\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L_x} x_p\right] \left[1 - e^{-\eta \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} t} \right] \quad (6.24)$$

Utilizando os parâmetros da Tabela 6.3, na equação (6.24) obtemos a solução da pressão no poço ($x = x_p$) ao longo do tempo, apresentada na Figura 6.5, usando 100 termos na série.

Tabela 6.3 – Conjunto de dados para o problema com fronteiras impermeáveis.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q	-0,00463 m ³ /s	-400 m ³ /d
Permeabilidade, k	4,9346 x 10 ⁻¹⁴ m ²	50 mD
Porosidade, ϕ	30%	30%
Compressibilidade total, c_t	6 x 10 ⁻⁹ Pa ⁻¹	6 x 10 ⁻⁴ bar ⁻¹
Viscosidade, μ	10 ⁻³ Pa·s	1 cP
Pressão inicial, p_i	5 x 10 ⁷ Pa	500 bar
Espessura, L_z	2 m	2 m
Comprimento em x, L_x	600 m	600 m
Comprimento em y, L_y	500 m	500 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Coefficiente de expansão térmica, β	0,0004 K ⁻¹	0,0004 °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	10 ⁻¹¹ Pa ⁻¹	10 ⁻⁶ bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m·K)	0,16 W/(m·K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m·K)	3,0 W/(m·K)
Massa específica do fluido, ρ_f	750 kg/m ³	750 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	2200 J/(kg·K)	2200 J/(kg·K)
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg·K)	1250 J/(kg·K)

O comprimento do poço horizontal, de 500 m, correspondente ao comprimento em y apresentado na Tabela 6.3, se refere a um comprimento de poço horizontal típico, encontrado em poços produtores no Brasil e no exterior. A porosidade, permeabilidade e outras propriedades dos fluidos e do meio poroso são valores situados dentro da faixa de valores encontrados em reservatórios de petróleo.

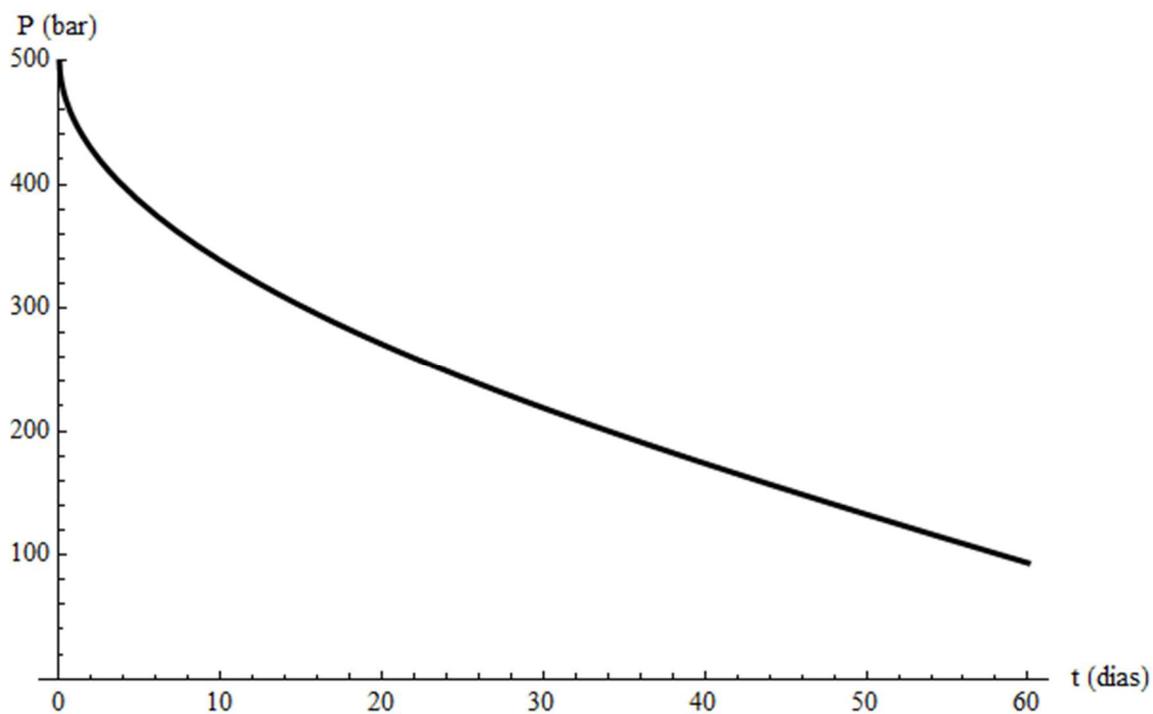


Figura 6.5 – Pressão no poço ($x = x_p$) ao longo do tempo.

Para obter a derivada temporal da pressão, basta derivar a expressão (6.24) com relação ao tempo. A Figura 6.6 apresenta a derivada temporal da pressão, com 40 termos na série.

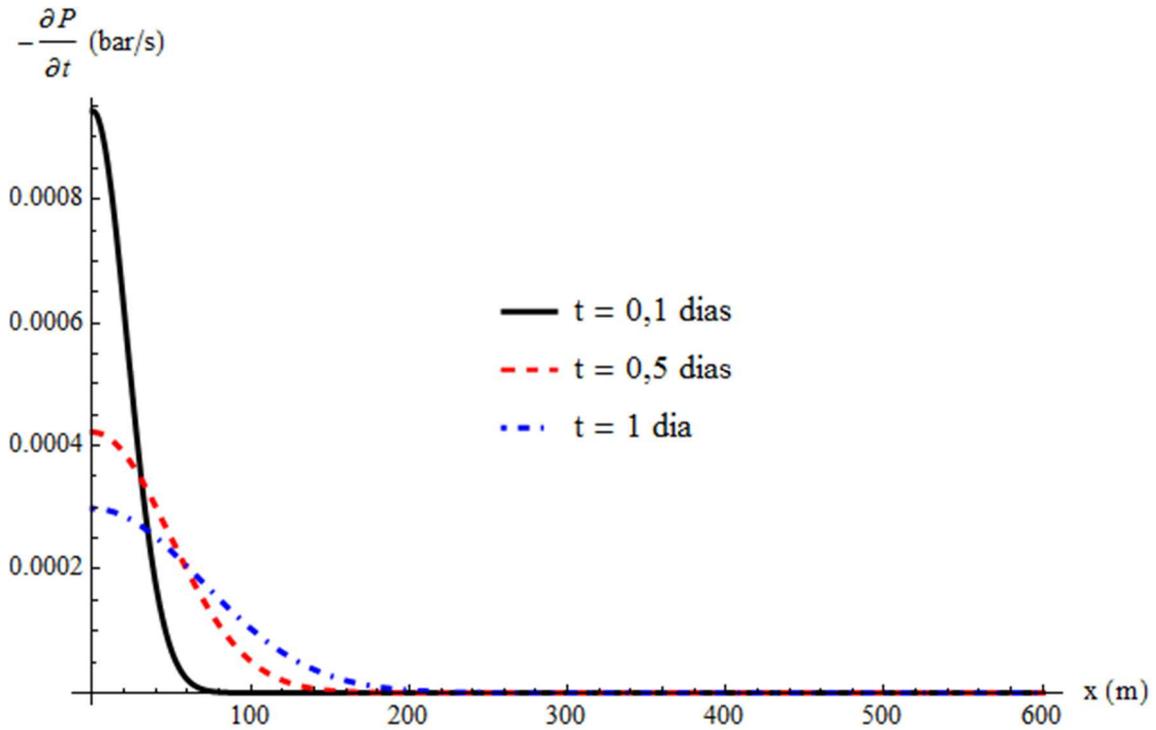


Figura 6.6 – Derivada temporal da pressão.

A Tabela 6.4 apresenta uma análise de convergência da derivada temporal da pressão para a posição $x = x_p$, que é a posição onde se encontra o poço, logo aonde se espera maior dificuldade na convergência da solução.

Tabela 6.4 – Convergência da derivada temporal da pressão.

Tempo, dias	$\partial P/\partial t \times 10^3$ (bar/s)				
	Número de Termos (N)				
	10	20	30	40	50
0,1	-0,7249	-0,9246	-0,9424	-0,9429	-0,9429
0,5	-0,4186	-0,4217	-0,4217	-0,4217	-0,4217
1	-0,2981	-0,2982	-0,2982	-0,2982	-0,2982
2	-0,2108	-0,2108	-0,2108	-0,2108	-0,2108
5	-0,1333	-0,1333	-0,1333	-0,1333	-0,1333

Conforme pode ser observado na Tabela 6.4, com 40 termos na expansão em série já se obtém a convergência de 4 dígitos na derivada temporal da pressão.

Para obter a derivada espacial da pressão, será aplicado novamente a técnica do balanço integral. Neste caso, o balanço integral será aplicado operando a equação (6.17) com $\int_0^x dx$ para $x < x_p$ e $\int_{L_x}^x dx$ para $x > x_p$, obtendo:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^x p^*(x, t) dx \right] = \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x} - \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad x < x_p \quad (6.25)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{L_x}^x p^*(x, t) dx \right] = \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x} - \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x}, \quad x > x_p \quad (6.26)$$

Aplicando as condições de contorno (6.18) e (6.19) e substituindo o termo na integral pela equação (6.24), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^x \left(\frac{\eta \mu Q}{k L_x L_y L_z} t + \frac{2 L_x}{\pi^2} \frac{\mu Q}{k L_y L_z} \right. \right. \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \times \cos \left[\frac{m \pi}{L_x} x \right] \times \cos \left[\frac{m \pi}{L_x} x_p \right] \\ &\left. \left. \times \left[1 - e^{-\eta \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} t} \right] \right) dx \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

para $x < x_p$, e:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x} &= -\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{L_x}^x \left(\frac{\eta \mu Q}{k L_x L_y L_z} t + \frac{2 L_x}{\pi^2} \frac{\mu Q}{k L_y L_z} \right. \right. \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \times \cos \left[\frac{m \pi}{L_x} x \right] \times \cos \left[\frac{m \pi}{L_x} x_p \right] \times \left[1 \right. \\ &\left. \left. - e^{-\eta \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} t} \right] \right) dx \end{aligned} \quad (6.28)$$

para $x > x_p$.

A Figura 6.7 apresenta a derivada espacial da pressão calculada utilizando as equações (6.27) e (6.28) com 25 termos na série.

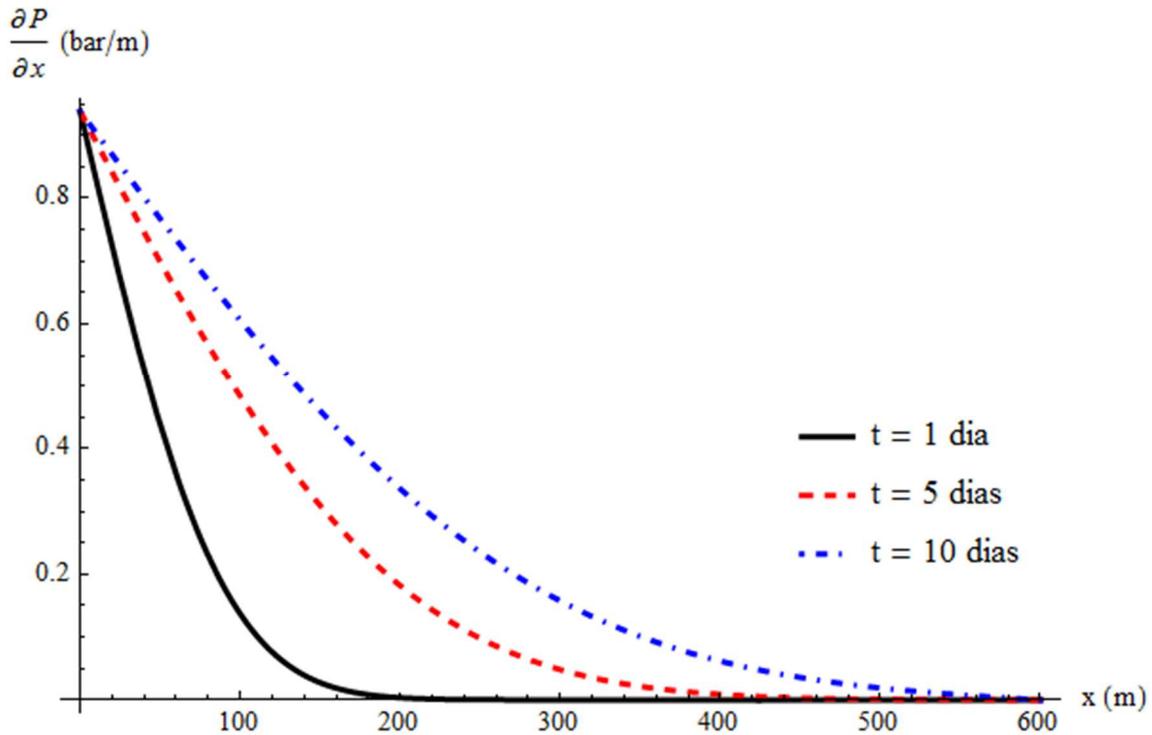


Figura 6.7 – Derivada espacial da pressão.

A Tabela 6.5 apresenta uma análise de convergência da derivada espacial da pressão (utilizando a equação (4.24)) para a posição $x = 50$ metros.

Tabela 6.5 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.

Tempo, dias	$\partial P/\partial x$, bar/m				
	Número de Termos (N)				
	5	10	15	20	25
0,5	0,3460	0,2856	0,2854	0,2854	0,2854
1	0,4530	0,4387	0,4387	0,4387	0,4387
2	0,5710	0,5699	0,5699	0,5699	0,5699
5	0,6992	0,6992	0,6992	0,6992	0,6992
10	0,7677	0,7677	0,7677	0,7677	0,7677

Conforme pode ser observado pela análise da Tabela 6.5, a convergência de 4 dígitos é obtido com apenas 15 termos na série.

6.2.2 Solução do Balanço de Energia

O balanço de energia, com suas condições de contorno e iniciais é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla T_{(x,t)} \\
 = & \frac{\phi \beta T_i}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i) \phi c_r}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} \\
 & + \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,t)} \cdot \nabla p_{(x,t)} \\
 & + \nabla^2 T_{(x,t)}, \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \quad t > 0 \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = L_x, \quad t > 0 \tag{6.31}$$

$$T(x,0) = 0, \quad em \ t = 0 \tag{6.32}$$

O problema de autovalor escolhido é:

$$\frac{\partial^2 \psi_{(\sigma_i,x)}}{\partial x^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \sigma_i^2 \psi_{(\sigma_i,x)} = 0, \quad 0 < x < L_x \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i,x)}}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0 \tag{6.34}$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i,x)}}{\partial x} = 0, \quad em \ x = L_x \tag{6.35}$$

Consultando as tabelas apresentadas em Ozisik (1993), as autofunções, normas e autovalores são dados por:

$$\psi_{(\sigma_i, x)} = \cos \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} \sigma_i x \right] \quad (6.36)$$

$$\sigma_i = \frac{i\pi}{L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho} \bar{C}_p}} \quad (6.37)$$

$$N_{x,i} = \begin{cases} \frac{L_x \bar{\rho} \bar{C}_p}{2 \lambda}, & i \neq 0 \\ L_x \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}, & i = 0 \end{cases} \quad (6.38)$$

Assim como na solução da EDH, quanto todas as condições de contorno forem do 2º tipo, σ_0 também é um autovalor e deve ser considerado na solução. Utilizando a solução geral, o par transformada-inversa apropriado é dado por:

$$\bar{T}_i(t) = \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \int_0^{L_x} \frac{\cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right]}{N_{x,i}^{1/2}} T_{(x,t)} dx \quad (6.39)$$

$$T_{(x,t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \bar{T}_i(t) \quad (6.40)$$

Operando a equação (6.29) com

$$\int_0^{L_x} \frac{\cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right]}{N_{x,i}^{1/2}} dx$$

e fazendo as operações indicadas na solução geral, chegamos ao sistema de equações diferenciais ordinárias a ser resolvido.

$$\frac{\partial \bar{T}_i(t)}{\partial t} + \left[\frac{i\pi}{L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho C_p}} \right]^2 \bar{T}_i(t) + \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t), \quad (6.41)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

onde:

$$A_{ij}^*(t) = \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda N_{x,i}^{1/2} N_{x,j}^{1/2}} \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \times \frac{d \cos \left[\frac{j\pi}{L_x} x \right]}{dx} \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right) dx \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \times \left[\frac{\phi \beta T_i}{\lambda} + \phi c_r \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \right] \\ & \times \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial t} dx \\ & + \frac{1}{N_{x,i}^{1/2}} \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \int_0^{L_x} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \left(-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (6.43)$$

A parcela do termo fonte associada às condições de contorno é nula, visto que as condições de contorno são homogêneas. A condição inicial transformada é dada por:

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.44)$$

O cálculo das integrais das equações (6.42) e (6.43) é feito substituindo as expressões para as derivadas da pressão apresentadas na seção 6.2.1. Foi possível obter todas as integrais necessárias analiticamente.

Aplicando os parâmetros da Tabela 6.3 para resolver o balanço de energia, obtemos a solução do campo de temperatura apresentada na Tabela 6.6, que apresenta uma análise de convergência da temperatura para a posição $x = x_p = 0$, que é a posição onde há maior dificuldade na convergência da solução.

Tabela 6.6 – Convergência da temperatura na posição do poço ($x = x_p$).

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ C$					
	Número de Termos (N)					
	25	50	100	150	200	250
0,1	-0,018	-0,022	-0,023	-0,023	-0,023	-0,023
0,5	-0,045	-0,048	-0,050	-0,050	-0,050	-0,050
1	-0,062	-0,065	-0,067	-0,066	-0,066	-0,066
5	-0,103	-0,104	-0,105	-0,105	-0,105	-0,105
10	-0,103	-0,103	-0,103	-0,103	-0,103	-0,103
20	-0,064	-0,062	-0,061	-0,061	-0,061	-0,061
50	0,130	0,134	0,137	0,138	0,138	0,139

A Tabela 6.6 mostra que se obtém convergência de 3 casas decimais com 150 termos na série para todos os tempos avaliados.

A Figura 6.8 apresenta a variação de temperatura no poço calculada pela GITT com 300 termos na série.

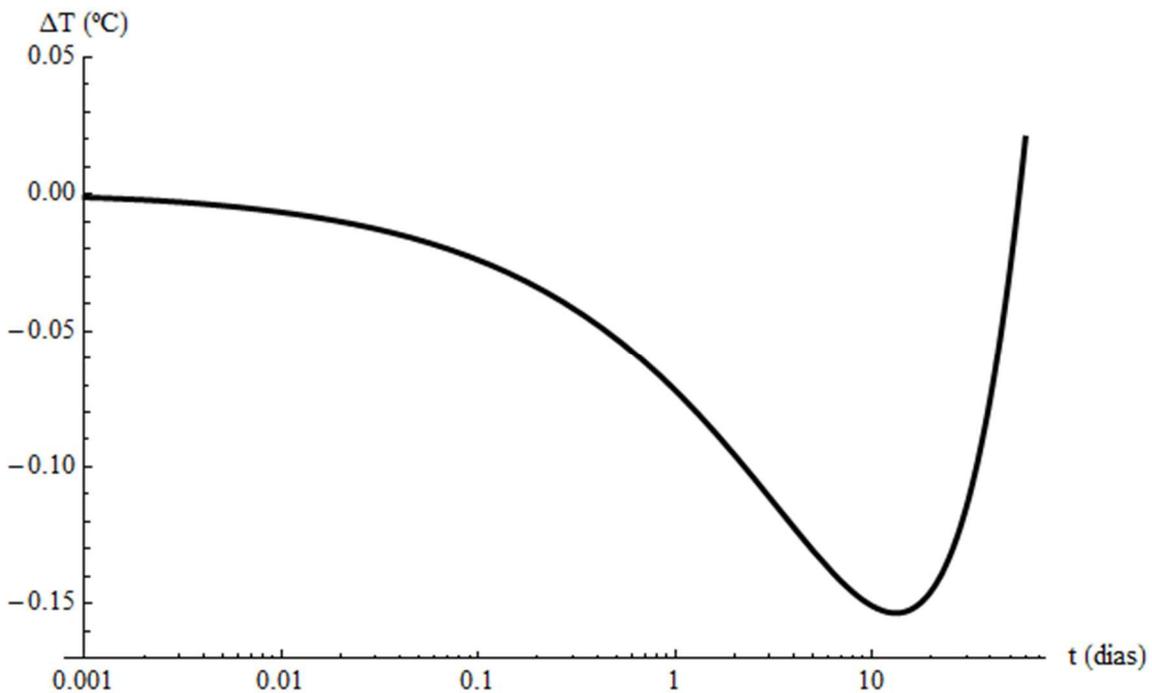


Figura 6.8 – Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) em escala logarítmica.

Uma análise de sensibilidade da solução ao termo advectivo mostrou que este termo tem um pequeno impacto na solução, principalmente para tempos curtos, conforme pode ser

observado na Figura 6.9. Na Figura 6.9, as soluções foram obtidas considerando 300 termos na série.

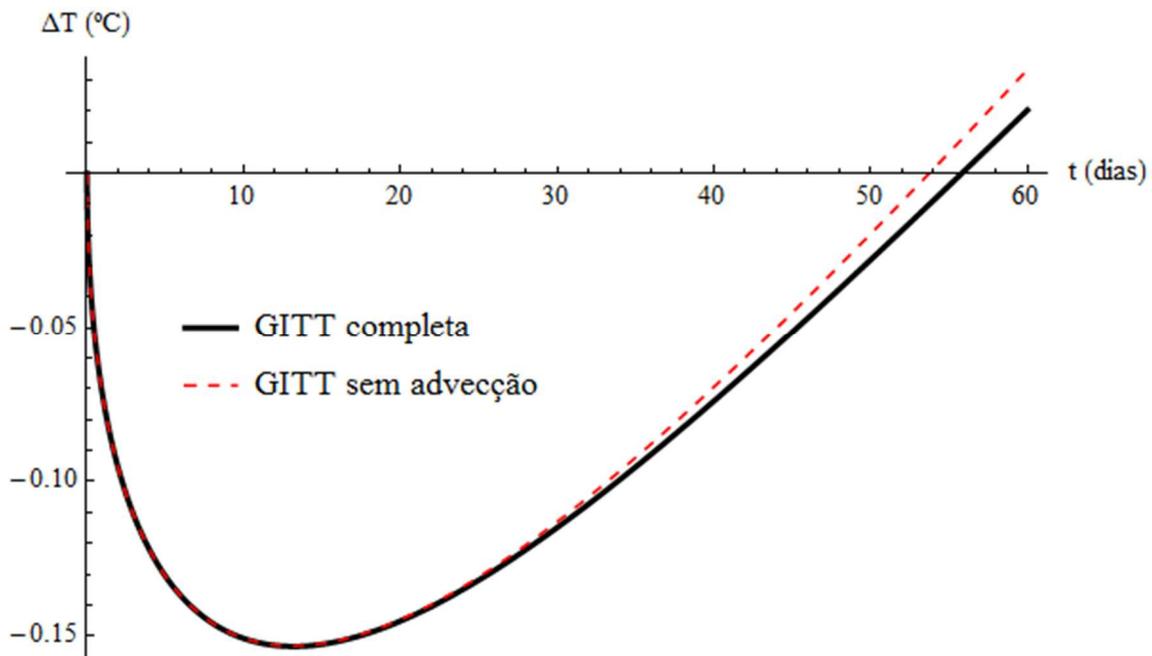


Figura 6.9 – Temperatura no poço ($x = x_p$) com e sem termo advectivo.

6.3 POÇO LOCALIZADO EM POSIÇÃO ARBITRÁRIA NO INTERIOR DO RESERVATÓRIO, COM UMA FRONTEIRA SELADA E OUTRA A PRESSÃO CONSTANTE

A solução da EDH e do balanço de energia deste problema é a mesma apresentada na seção 6.1. Nesta seção, será apresentada a aplicação para um caso onde o poço se situa no interior do reservatório, com o intuito de mostrar o impacto que as condições de contorno do reservatório podem ter sobre o comportamento térmico do mesmo. Os parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Conjunto de dados para o problema da seção 6.3.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q	-0,005787 m ³ /s	-500 m ³ /d
Permeabilidade, k	9,8692 x 10 ⁻¹⁴ m ²	100 mD
Porosidade, ϕ	30%	30%
Compressibilidade total, c_t	2 x 10 ⁻⁹ Pa ⁻¹	2 x 10 ⁻⁴ bar ⁻¹
Viscosidade, μ	10 ⁻³ Pa.s	1 cP
Pressão inicial, p_i	5 x 10 ⁷ Pa	500 bar
Espessura, L_z	2 m	2 m
Comprimento em x, L_x	500 m	500 m
Comprimento em y, L_y	500 m	500 m
Posição do poço, x_p	250 m	250 m
Coefficiente de expansão térmica, β	0,0008 K ⁻¹	0,0008 °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	5 x 10 ⁻¹¹ Pa ⁻¹	5 x 10 ⁻⁶ bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m.K)	0,16 W/(m.K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m.K)	3,0 W/(m.K)
Massa específica do fluido, ρ_f	750 kg/m ³	750 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	2200 J/(kg.K)	2200 J/(kg.K)
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg.K)	1250 J/(kg.K)

6.3.1 Solução da EDH

Utilizando os parâmetros da Tabela 6.7 na equação (6.24), obtemos a solução do campo de pressões, apresentada na Figura 6.10 e Figura 6.11 , usando 100 termos na série.

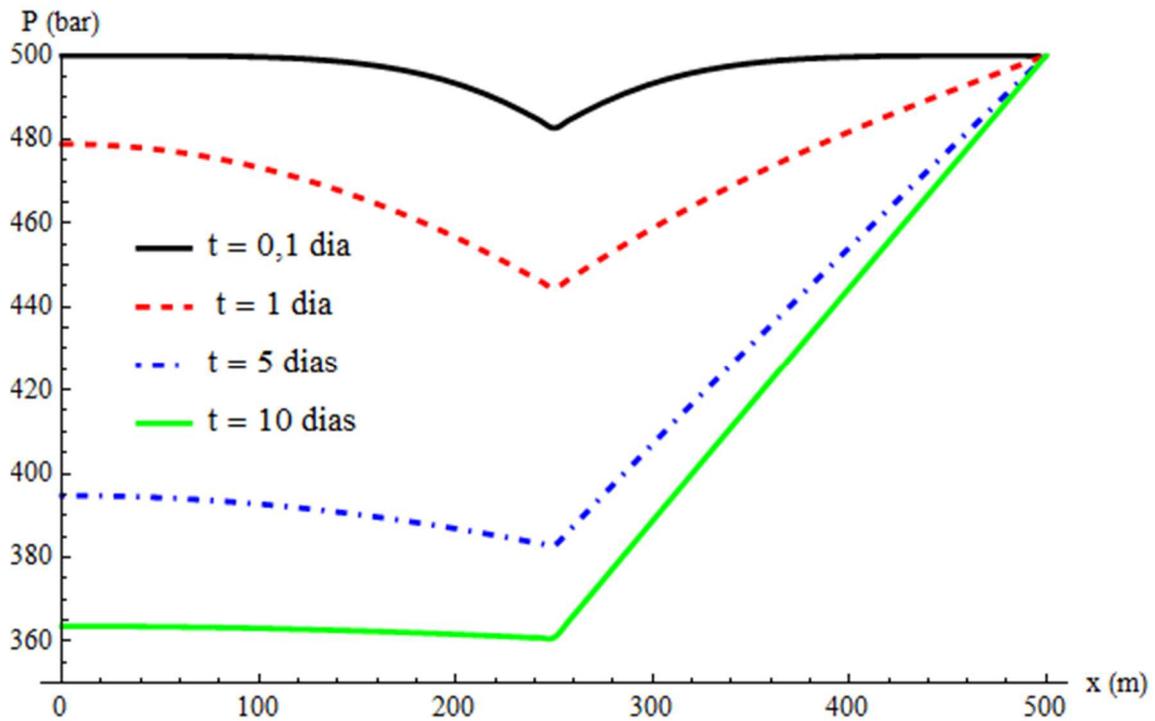


Figura 6.10 – Pressão ao longo do reservatório para diversos tempos.

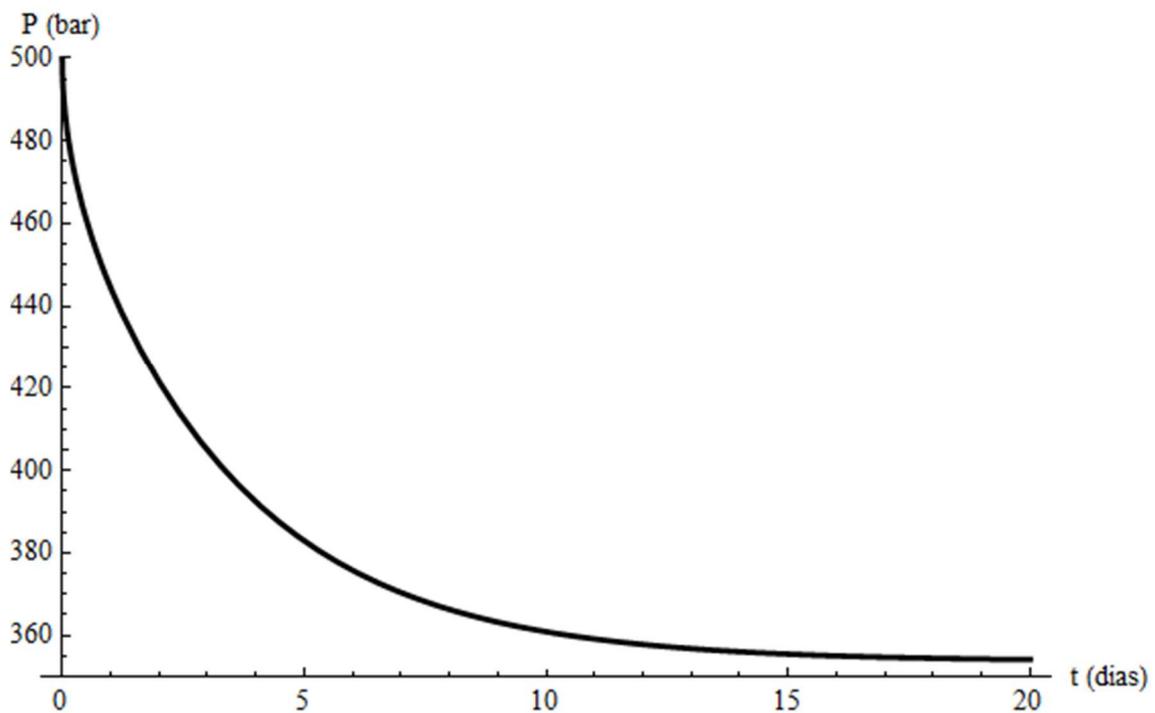


Figura 6.11 – Pressão na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do tempo.

A Figura 6.12 apresenta a derivada temporal da pressão, com 25 termos na série.

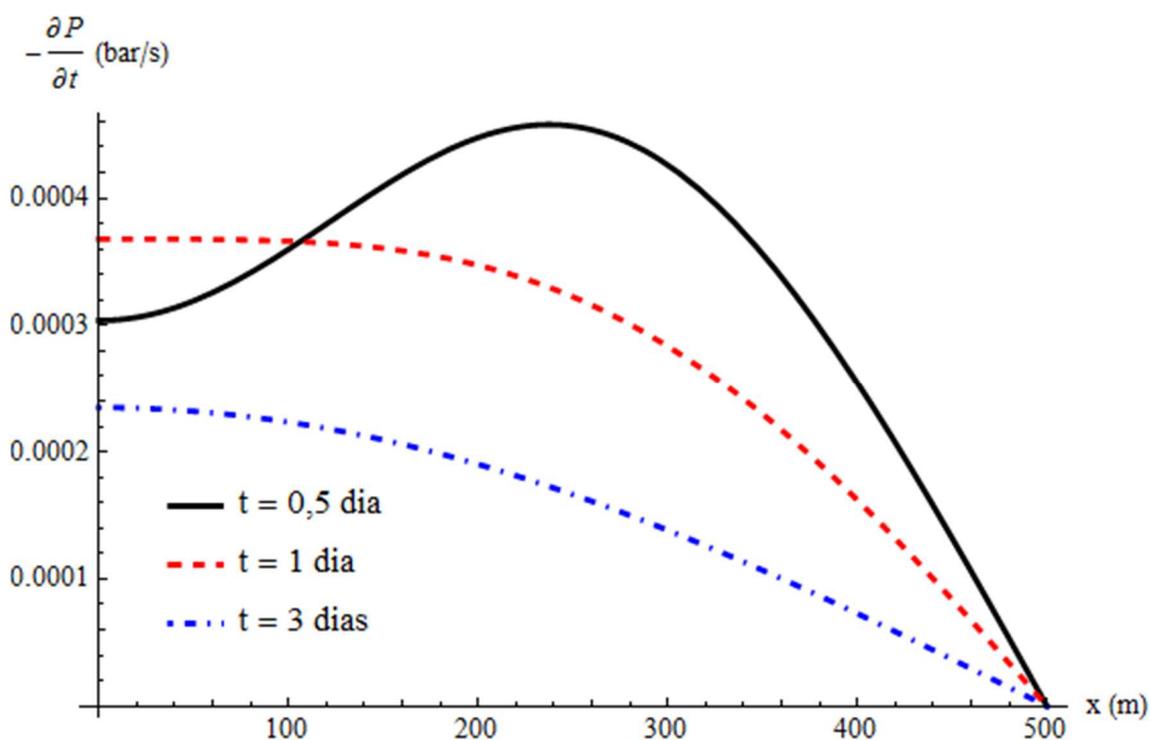


Figura 6.12 – Derivada temporal da pressão.

A Tabela 6.8 apresenta uma análise de convergência da derivada temporal da pressão para a posição $x = x_p$, que é a posição onde se encontra o poço, logo aonde se espera maior dificuldade na convergência da solução.

Tabela 6.8 – Convergência da derivada temporal da pressão

Tempo, dias	$\partial P / \partial t \times 10^3$ (bar/s)				
	Número de Termos (N)				
	5	10	15	20	25
0,05	-1,3101	-1,4424	-1,4435	-1,4435	-1,4435
0,1	-1,0035	-1,0207	-1,0207	-1,0207	-1,0207
1	-0,3227	-0,3227	-0,3227	-0,3227	-0,3227
2	-0,2226	-0,2226	-0,2226	-0,2226	-0,2226
5	-0,0949	-0,0949	-0,0949	-0,0949	-0,0949

Conforme pode ser observado na Tabela 6.8, com 15 termos na expansão em série já se obtém a convergência de 4 dígitos decimais na derivada temporal da pressão.

A Figura 6.13 apresenta a derivada espacial da pressão calculada utilizando a equação (4.24), com 25 termos na série.

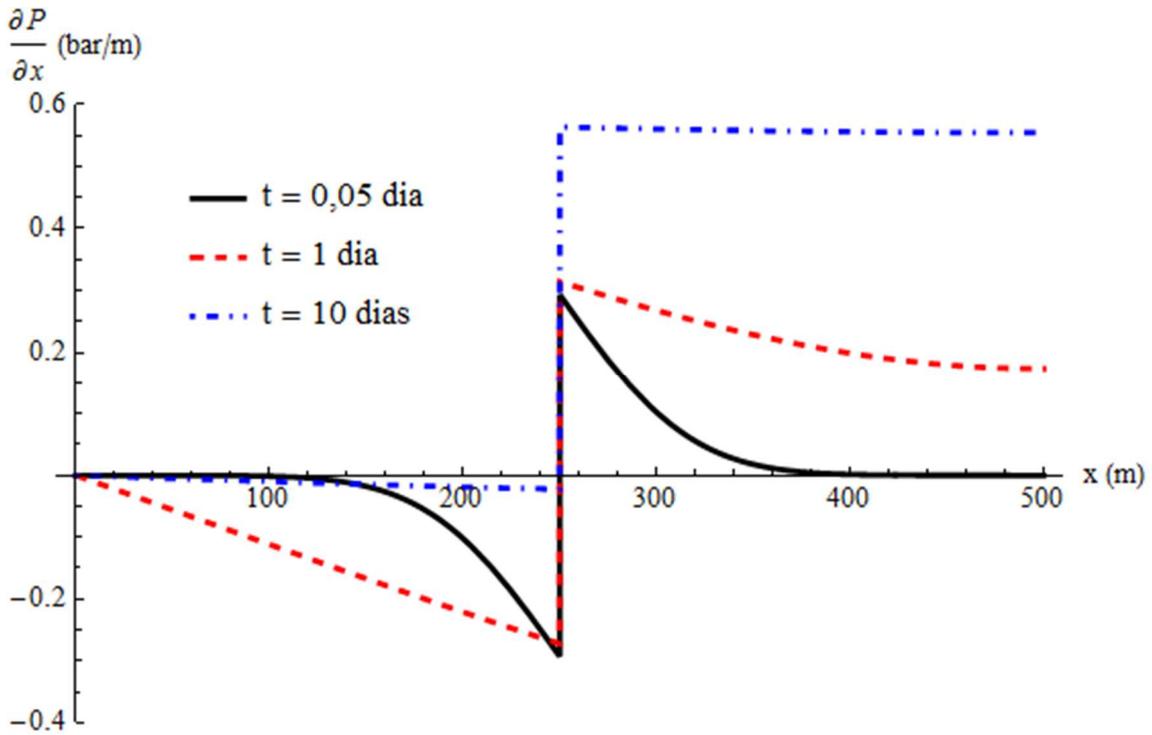


Figura 6.13 – Derivada espacial da pressão.

A Tabela 6.9 apresenta uma análise de convergência da derivada espacial da pressão (utilizando a equação (4.24)) para a posição $x = 300$ metros.

Tabela 6.9 – Convergência da derivada espacial da pressão utilizando o balanço integral.

Tempo, dias	$\partial P / \partial x$, bar/m				
	Número de Termos (N)				
	2	5	10	15	20
0,05	0,2132	0,1118	0,1021	0,1021	0,1021
0,1	0,2133	0,1502	0,1487	0,1487	0,1487
0,5	0,2306	0,2274	0,2274	0,2274	0,2274
1	0,2681	0,2680	0,2680	0,2680	0,2680
2	0,3430	0,3430	0,3430	0,3430	0,3430

Conforme pode ser observado pela análise da Tabela 6.9, a convergência de 4 dígitos é obtido com apenas 10 termos na série.

6.3.2 Solução do Balanço de Energia

Aplicando os parâmetros da Tabela 6.7 para resolver o balanço de energia, obtemos a solução do campo de temperatura apresentada na Figura 6.14, que apresenta a variação de temperatura ao longo do reservatório para diferentes tempos, com 200 termos na série.

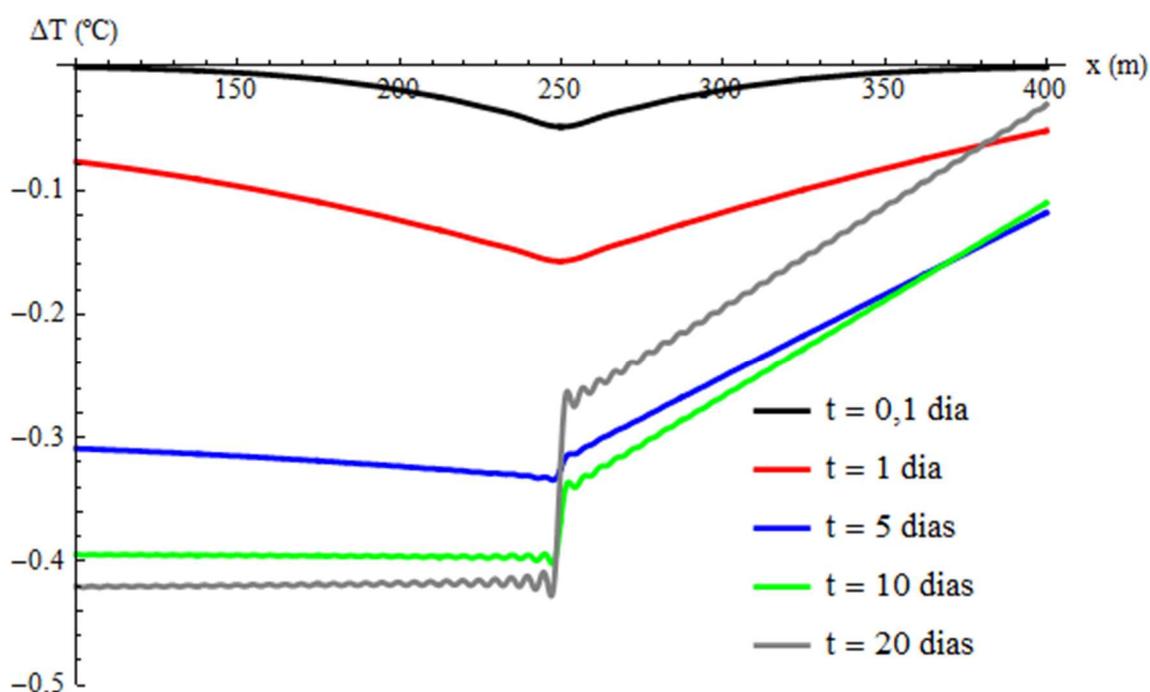


Figura 6.14 – Variação da temperatura ao longo do reservatório para diferentes tempos.

Conforme pode ser observado na Figura 6.14, para tempos curtos, antes de o efeito da produção do poço afetar as fronteiras do reservatório, o campo de temperaturas é simétrico. Entretanto, para tempos maiores, a produção proveniente da porção do reservatório cuja fronteira é selada passa a ser cada vez menor, havendo pouco fluxo nesta região (vide Figura 6.10), portanto, os efeitos térmicos associados à expansão espacial e a dissipação viscosa são pequenos quando comparados à porção do reservatório que é mantida com pressão constante, fazendo com que ocorra uma diferença significativa da temperatura entre os dois lados do reservatório. Observa-se

também na Figura 6.14 que a descontinuidade da temperatura na posição do poço promove a ocorrência do fenômeno de “Gibbs”² na solução por GITT, impedindo a convergência da solução nesses casos.

² Comportamento oscilatório da série de Fourier nas proximidades de uma descontinuidade.

7 SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA BIDIMENSIONAL

Neste Capítulo, será apresentada a aplicação da solução geral desenvolvida no Capítulo 5 para resolver o balanço de energia em duas dimensões. Será considerado o problema de escoamento linear transiente (tal qual na seção 6.1) e as trocas térmicas que ocorrem entre o reservatório, cuja temperatura é alterada pelas variações de pressão, e as formações rochosas adjacentes. Com tal intuito, será aplicada a transformada integral generalizada utilizando uma formulação de domínio único, seguindo as ideias apresentadas em Knupp *et al.* (2012). Tal abordagem permite resolver o balanço de energia do meio poroso e das formações impermeáveis adjacentes em um único domínio espacial. É importante salientar que neste Capítulo, as propriedades térmicas ($\bar{\rho}$, \bar{C}_p e λ) do reservatório e das formações rochosas adjacentes serão consideradas iguais e constantes, da mesma forma que nos desenvolvimentos apresentados por Muradov & Davies (2011). Estas simplificações são úteis, já que simplificam a aplicação da solução proposta. Entretanto, em trabalhos futuros, é possível aplicar a solução formal apresentada no Capítulo 5 em conjunto com os desenvolvimentos apresentados por Naveira-Cotta *et al.* (2009) para atacar o problema com propriedades térmicas distintas.

7.1 PROBLEMA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DO 1º E 2º TIPO

A Figura 7.1 apresenta um esquema ilustrativo do problema, destacando as condições de contorno e as dimensões do sistema.

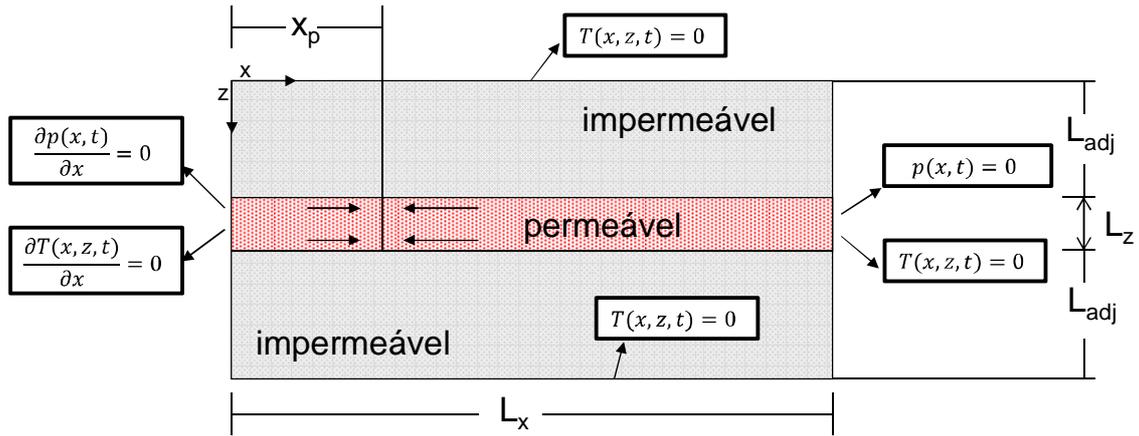


Figura 7.1 - Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado.

Este problema é aplicável às mesmas situações apresentadas na seção 6.1 e a solução do campo de pressões para tal problema foi apresentada previamente na seção 4.1.

O balanço de energia, com suas condições de contorno e iniciais é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{\rho} C_p}{\lambda} \frac{\partial T_{(x,z,t)}}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,z,t)} \cdot \nabla T_{(x,z,t)} \\
 &= \frac{\phi \beta T_i}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i) \phi c_r}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} \\
 &+ \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,z,t)} \cdot \nabla p_{(x,z,t)} + \nabla^2 T_{(x,z,t)}, \quad 0 < x < L_x, \\
 &0 < z < L_z + 2L_{adj}, \quad t > 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \quad t > 0 \tag{7.2}$$

$$T(x, z, t) = 0, \quad em \ x = L_x, \quad t > 0 \tag{7.3}$$

$$T(x, z, t) = 0, \quad em \ z = 0, \quad t > 0 \tag{7.4}$$

$$T(x, z, t) = 0, \quad em \ z = L_z + 2L_{adj}, \quad t > 0 \tag{7.5}$$

$$T(x, z, 0) = 0, \text{ em } t = 0 \quad (7.6)$$

Onde

$$\mathbf{v}_{(x,z,t)} = \begin{cases} \mathbf{v}_{(x,t)}, & L_{adj} < z < L_z + L_{adj} \\ 0, & z \leq L_{adj} \text{ e } z \geq L_z + L_{adj} \end{cases} \quad (7.7)$$

$$p_{(x,z,t)} = \begin{cases} p_{(x,t)}, & L_{adj} < z < L_z + L_{adj} \\ 0, & z \leq L_{adj} \text{ e } z \geq L_z + L_{adj} \end{cases} \quad (7.8)$$

Onde $p_{(x,t)}$ e $\mathbf{v}_{(x,t)}$ são dados pela solução da EDH através da CITT, conforme apresentado na seção 4.1. Notar que o fluxo geotérmico de calor não é incluído na modelagem, visto que tal fluxo não afeta os resultados, de acordo com o princípio da superposição de efeitos (Muradov, 2010). No problema acima, as trocas térmicas na direção x , que ocorrem entre o reservatório e as adjacências são desprezadas; esta hipótese é justificada, pois a espessura do reservatório é pequena quando comparada às dimensões areais, fazendo com que a área onde ocorre a troca térmica na direção x seja muito menor do que a área de troca térmica na direção z . As condições de contorno em z implicam que L_{adj} deve ser escolhido de forma a ser suficientemente grande para que as temperaturas em $z = 0$ e $z = L_z + 2L_{adj}$ não sejam afetadas pelas mudanças de temperatura no interior do reservatório.

Os problemas de autovalor apropriados são:

$$\frac{\partial^2 \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \sigma_i^2 \psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad 0 < x < L_x \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x} = 0, \quad \text{em } x = 0 \quad (7.10)$$

$$\psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad \text{em } x = L_x \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{(\gamma_j, z)}}{\partial z^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \gamma_j^2 \varphi_{(\gamma_j, z)} = 0, \quad 0 < z < L_z + 2L_{adj} \quad (7.12)$$

$$\varphi_{(\gamma_j,z)} = 0, \text{ em } z = 0 \quad (7.13)$$

$$\varphi_{(\gamma_j,z)} = 0, \text{ em } z = L_z + 2L_{adj} \quad (7.14)$$

Consultando as tabelas apresentadas em Ozisik (1993), as autofunções, normas e autovalores são dados por:

$$\psi_{(\sigma_i,x)} = \cos \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho}\bar{C}_p}{\lambda}} \sigma_i x \right] \quad (7.15)$$

$$\sigma_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p}} \quad (7.16)$$

$$N_{x,i} = \frac{L_x}{2} \sqrt{\frac{\bar{\rho}\bar{C}_p}{\lambda}} \quad (7.17)$$

$$\varphi_{(\gamma_j,z)} = \text{sen} \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho}\bar{C}_p}{\lambda}} \gamma_j z \right] \quad (7.18)$$

$$\gamma_j = \frac{j\pi}{(L_z + 2L_{adj})} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p}} \quad (7.19)$$

$$N_{z,j} = \frac{L_z + 2L_{adj}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}\bar{C}_p}{\lambda}} \quad (7.20)$$

Utilizando a solução geral, o par transformada-inversa apropriado é dado por:

$$\bar{T}_{ij}(t) = \frac{\bar{\rho}\bar{C}_p}{\lambda} \times \int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2\cdot L_{adj}} \frac{\cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x}x\right]}{N_{x,i}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\text{sen}\left[\frac{j\pi}{(L_z+2L_{adj})}z\right]}{N_{z,j}^{1/2}} \times T_{(x,z,t)} dx dz \quad (7.21)$$

$$T_{(x,z,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \times \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x}x\right] \times \text{sen}\left[\frac{j\pi}{(L_z+2\cdot L_{adj})}z\right] \times \bar{T}_{ij}(t) \quad (7.22)$$

Operando a equação (7.1) com

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2\cdot L_{adj}} \frac{\cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x}x\right] \text{sen}\left[\frac{j\pi}{(L_z+2L_{adj})}z\right]}{N_{x,i}^{\frac{1}{2}} N_{z,j}^{1/2}} dx dz$$

e fazendo as operações indicadas na solução geral (Capítulo 5), chegamos ao sistema de equações diferenciais ordinárias a ser resolvido.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_{ij}(t)}{\partial t} + \left(\left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p}} \right]^2 + \left[\frac{j\pi}{(L_z+2\cdot L_{adj})} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho}\bar{C}_p}} \right]^2 \right) \bar{T}_{ij}(t) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{imjn}^*(t) \bar{T}_{mn}(t) = \bar{g}_{ij}(t), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$i = 1, 2, \dots e j = 1, 2, \dots$

onde:

$$\begin{aligned}
A_{imjn}^*(t) &= \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \times \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2} N_{x,m}^{1/2} N_{z,n}^{1/2}} \\
&\times \int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2 \cdot L_{adj}} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \times \frac{d \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x \right]}{dx} \\
&\times \sin \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right] \times \frac{d \sin \left[\frac{n\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right]}{dz} \\
&\times \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial x} \right) dx dz
\end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij}(t) &= \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \times \left[\frac{\phi \beta T_i}{\lambda} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \phi c_r \right] \\
&\times \int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2L_{adj}} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \\
&\times \sin \left[\frac{j\pi}{L_z + 2L_{adj}} z \right] \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} dx dz \\
&+ \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2L_{adj}} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \right] \\
&\times \sin \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2L_{adj})} z \right] \left(-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right)^2 \right) dx dz
\end{aligned} \tag{7.25}$$

A parcela do termo fonte associada às condições de contorno é nula, visto que as condições de contorno são homogêneas.

A condição inicial transformada é dada por:

$$\bar{T}_{ij}(0) = \bar{f}_{ij} = 0, \quad i = 1, 2 \dots, j = 1, 2 \dots \tag{7.26}$$

O cálculo das integrais das equações (7.24) e (7.25) é feito substituindo as expressões para as derivadas da pressão apresentadas no Capítulo 4. Foi possível obter todas as integrais necessárias analiticamente. Os resultados das integrações podem ser consultados nos códigos do *Mathematica* presentes no Anexo I.

Aplicando os mesmos parâmetros empregados para resolver o problema unidimensional (Tabela 6.1) para resolver o balanço de energia, e considerando $L_{adj} = 9$ metros, obtemos a solução do campo de temperatura apresentada a seguir, que foi obtida desprezando o termo advectivo, devido ao seu pequeno impacto no comportamento da solução, conforme mostrado na Figura 6.3. Desprezar o termo advectivo permitiu desacoplar os potenciais transformados, facilitando a tarefa numérica e acelerando a obtenção da solução.

A Figura 7.2 apresenta a variação de temperatura no poço ($x = x_p$), calculada pela GITT com 200 termos na série em cada direção, em posição vertical equivalente ao centro do reservatório ($z = 10$ m), bem como a temperatura dada pela solução de referência (Muradov & Davies, 2011).

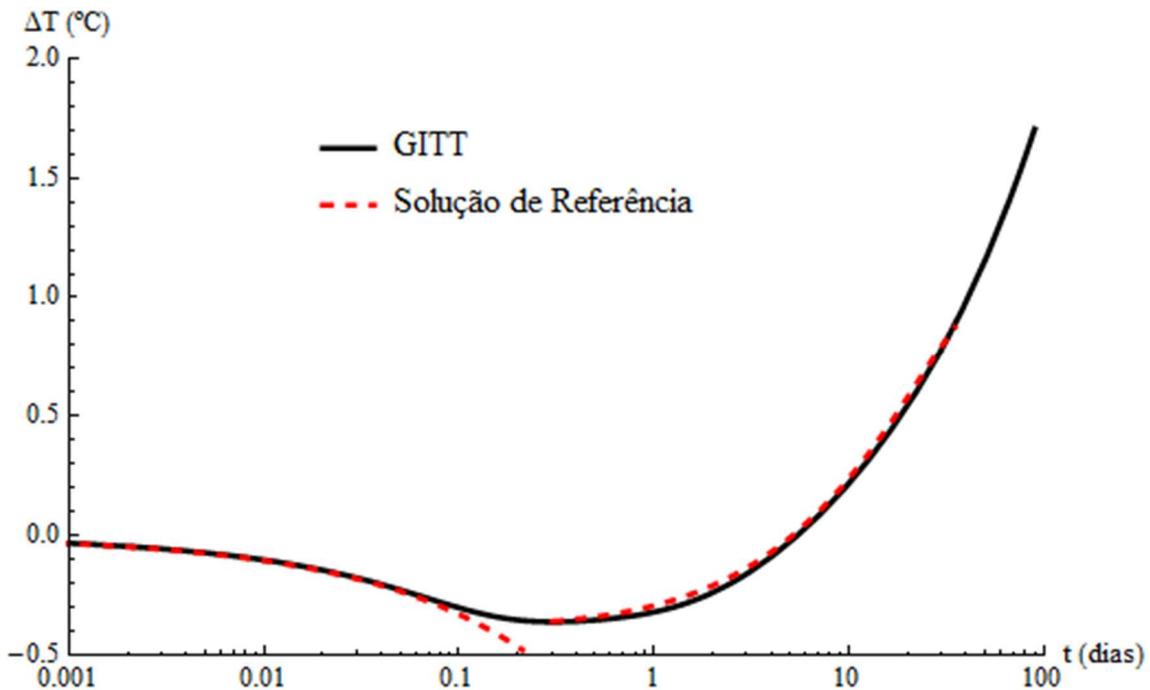


Figura 7.2 - Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) dada por GITT bidimensional e solução de referência.

A análise da Figura 7.2 mostra que a temperatura calculada pela GITT apresenta boa concordância com a temperatura calculada pela solução de referência. Da mesma forma que na Figura 6.2, o desvio encontrado entre 0,1 e 0,2 dias pode ser explicado pelos efeitos térmicos causados pela expansão espacial do fluido e dissipação viscosa, que não são considerados na solução de referência para tempos curtos. Os desvios causados pela não consideração das trocas térmicas com as adjacências que ocorriam na Figura 6.2 foram corrigidos na Figura 7.2. A solução de referência foi apresentada apenas para $t < 40$ dias, visto que não é válida para tempos posteriores. Os resultados apresentados na Figura 7.2 permitem validar a solução do balanço de energia por GITT apresentada neste trabalho.

A solução do balanço de energia pela GITT permite obter a distribuição vertical de temperatura em uma posição x arbitrária. A Figura 7.3 e a Figura 7.4 apresentam a variação da temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo vertical, para $t = 0,3$ e 20 dias, respectivamente, com diferentes números de termos na série. Devido à simetria em z , apenas metade do sistema é exibido no gráfico. A posição onde está o reservatório está destacada pelas linhas verticais entre $z = 9$ metros (topo do reservatório) e $z = 10$ metros (centro do reservatório).

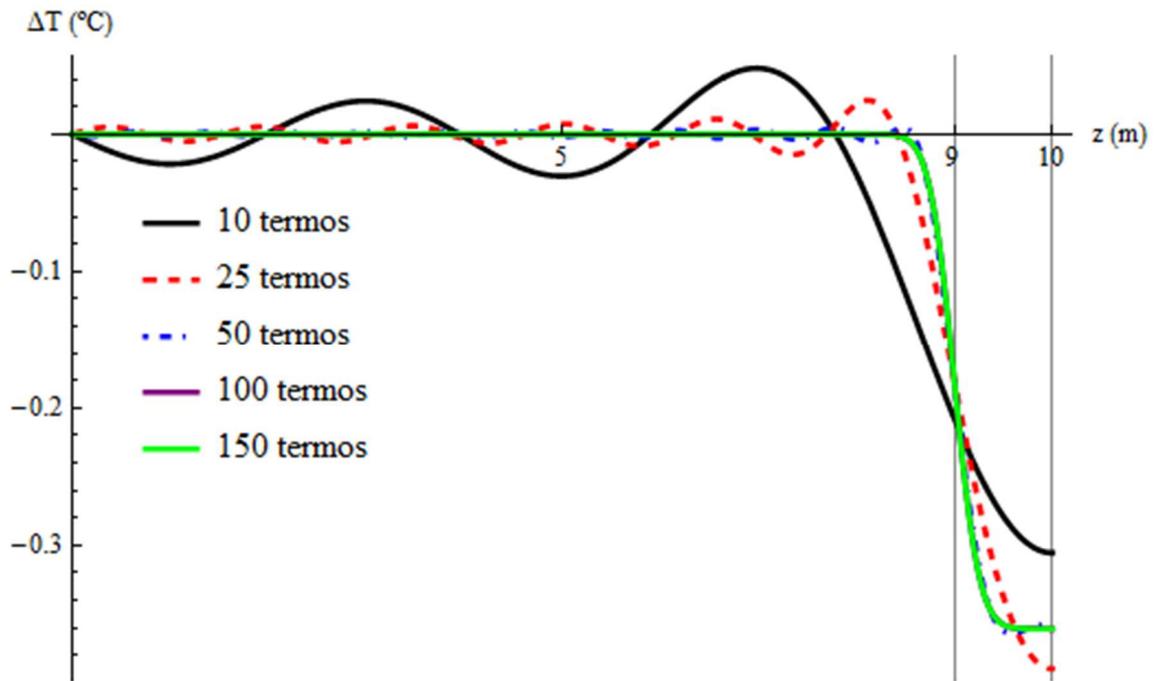


Figura 7.3 – Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 0,3$ dias).

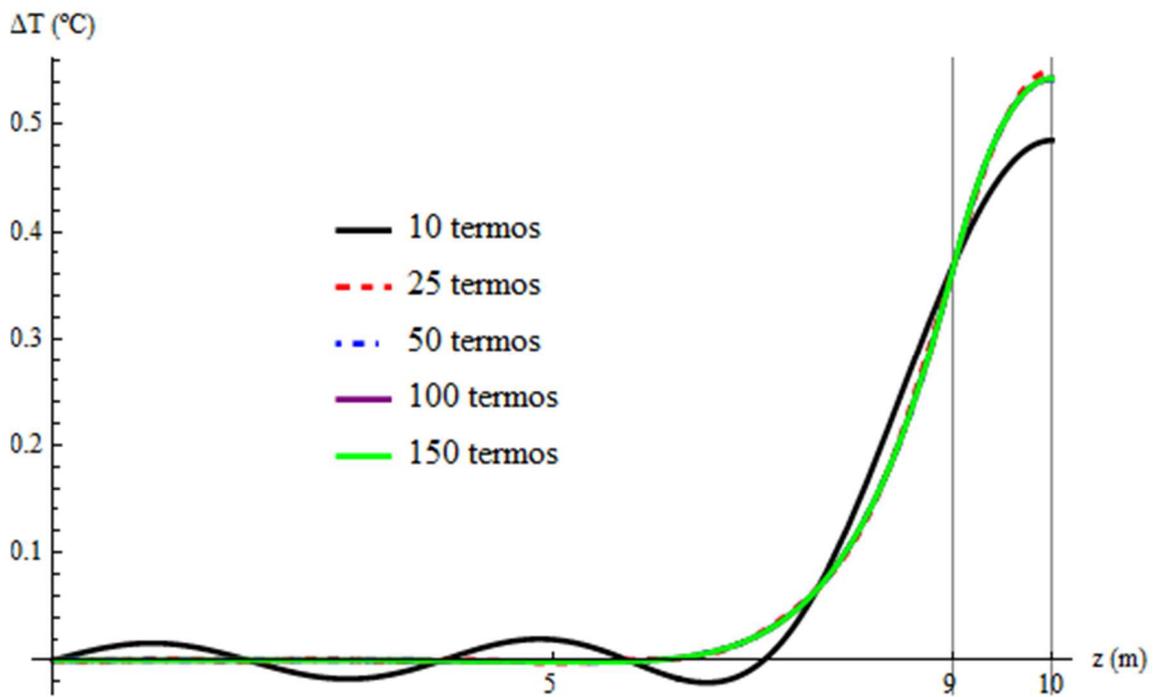


Figura 7.4 - Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 20$ dias).

Analisando a Figura 7.3, percebe-se que com 100 termos na expansão em série já há convergência gráfica da solução.

Ao comparar a convergência da Figura 7.3 ($t = 0,3$ dias) e Figura 7.4 ($t = 20$ dias), percebe-se que para tempos longos, a solução converge mais rapidamente, permitindo o uso de menor número de termos na expansão em série, poupando esforço computacional. Na Figura 7.4, é obtida convergência gráfica da solução com apenas 50 termos na série.

A Figura 7.5 apresenta a variação da temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo vertical, para diferentes tempos, com 150 termos na expansão em série. A posição onde está o reservatório está destacada pelas linhas verticais entre $z = 9$ metros (topo do reservatório) e $z = 10$ metros (centro do reservatório).

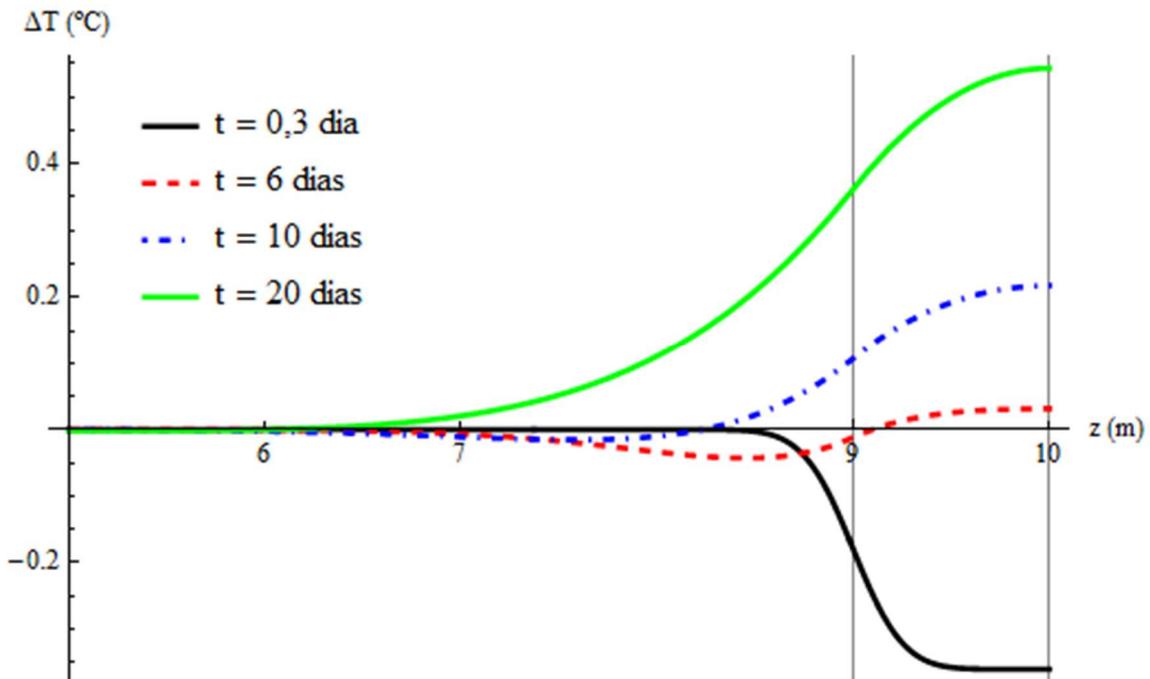


Figura 7.5 - Temperatura na posição do poço ($x = x_p$) ao longo do eixo z para diferentes tempos.

O comportamento da temperatura ao longo do eixo z , apresentado na Figura 7.5, mostra que com os parâmetros empregados, a temperatura no interior do reservatório é consideravelmente afetada pelas trocas térmicas com as adjacências, sendo este um fator

importante na interpretação de dados de temperatura em reservatórios de baixa espessura, mesmo para tempos curtos ($t = 0,3$ dias).

A Figura 7.6 mostra um comparação entre as soluções por GITT bidimensional e unidimensional, nas posições $x = x_p$ e $z =$ centro do reservatório, em escala de tempo linear, procurando ilustrar os efeitos das trocas térmicas com as adjacências. A solução unidimensional foi obtida com 200 termos na expansão em série e a solução bidimensional foi obtida com 200 termos na série em cada direção ortogonal.

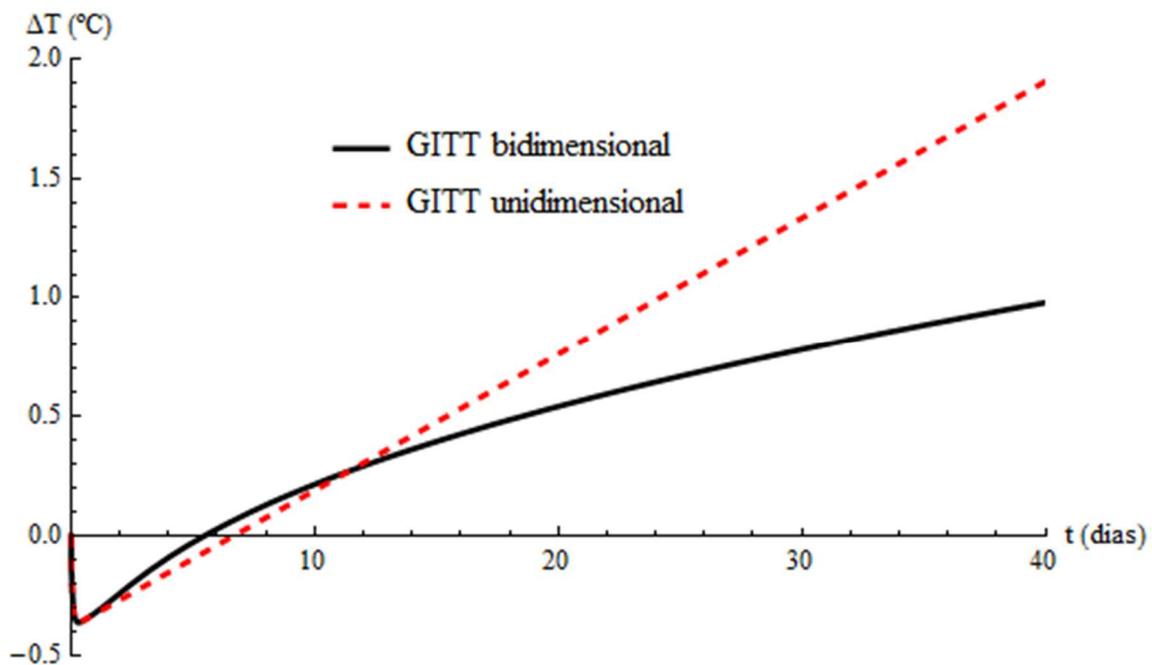


Figura 7.6 – Comparação entre as soluções uni e bidimensional em $x = x_p$.

A análise da Figura 7.6 mostra que para tempos curtos (neste caso para tempos menores que ~ 10 dias), as trocas térmicas com as adjacências aumentam a temperatura no interior do reservatório, visto que inicialmente o reservatório foi resfriado pelos efeitos transientes de expansão do fluido e da rocha, fazendo com que o mesmo receba energia das adjacências. Para tempos longos, a dissipação viscosa aumenta a temperatura no interior do reservatório e este passa então a perder energia para as adjacências, que se encontram a uma temperatura mais baixa.

A Figura 7.7 apresenta a evolução da temperatura com o tempo na posição $x = x_p$, para diferentes posições z no interior do reservatório, com 200 termos na série em cada direção.

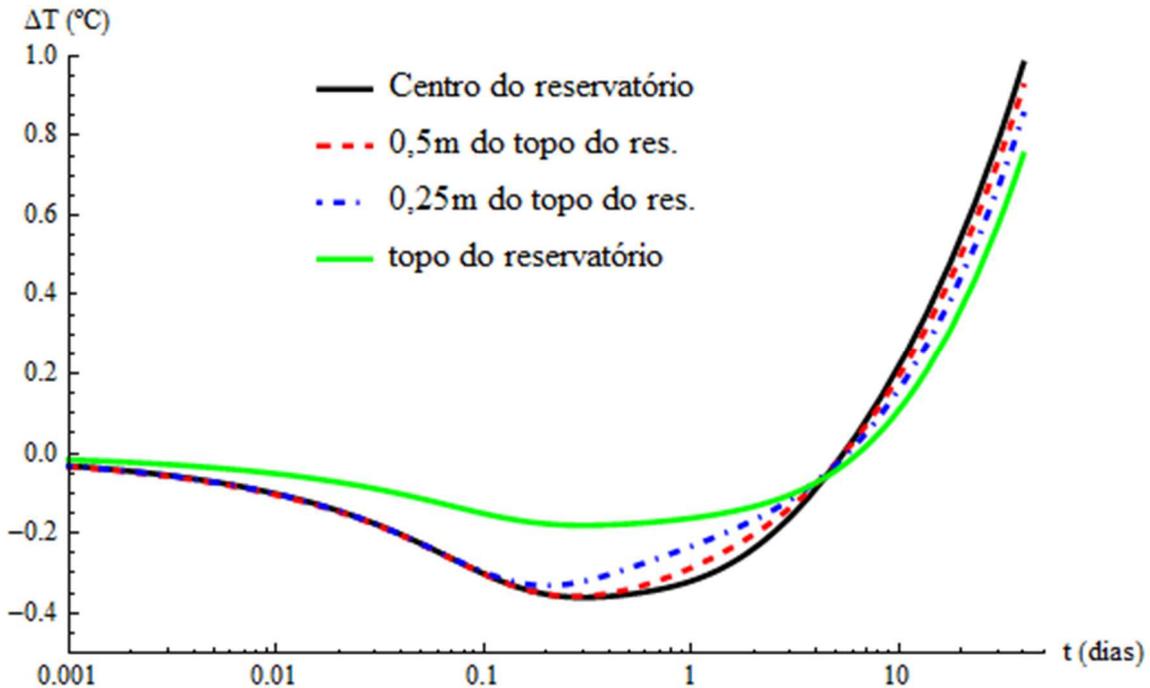


Figura 7.7 – Evolução da temperatura com o tempo no poço ($x = x_p$), para diferentes posições z no interior do reservatório.

A análise da Figura 7.7 mostra que para posições próximas ao topo do reservatório, as variações de temperatura são atenuadas pelas trocas térmicas com as adjacências, sendo este um fator a ser considerado na análise de dados de temperatura coletados em sensores situados próximos ao topo ou base do reservatório. Por fim, a Tabela 7.1 apresenta uma análise de convergência da temperatura para a posição $x = x_p$, em posição vertical equivalente ao centro do reservatório ($z = 10$ m).

Tabela 7.1 – Convergência da temperatura no poço ($x = x_p$).

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ C$					
	Número de Termos (N)					
	10	25	50	100	150	200
0,1	-0,257	-0,331	-0,298	-0,305	-0,302	-0,302
0,2	-0,300	-0,384	-0,349	-0,354	-0,353	-0,353
0,5	-0,296	-0,375	-0,351	-0,353	-0,353	-0,353
1	-0,264	-0,326	-0,320	-0,320	-0,320	-0,320
5	-0,041	-0,019	-0,026	-0,026	-0,026	-0,026
10	0,173	0,225	0,217	0,218	0,218	0,218
20	0,485	0,550	0,542	0,543	0,543	0,543
40	0,918	0,989	0,981	0,981	0,981	0,981

7.2 POÇO LOCALIZADO EM UM RESERVATÓRIO COM FRONTEIRAS SELADAS

A mesma abordagem empregada na seção 7.1 será aqui empregada para resolver o problema para um reservatório com fronteiras seladas. A Figura 7.8 apresenta um esquema ilustrativo do problema a ser resolvido.

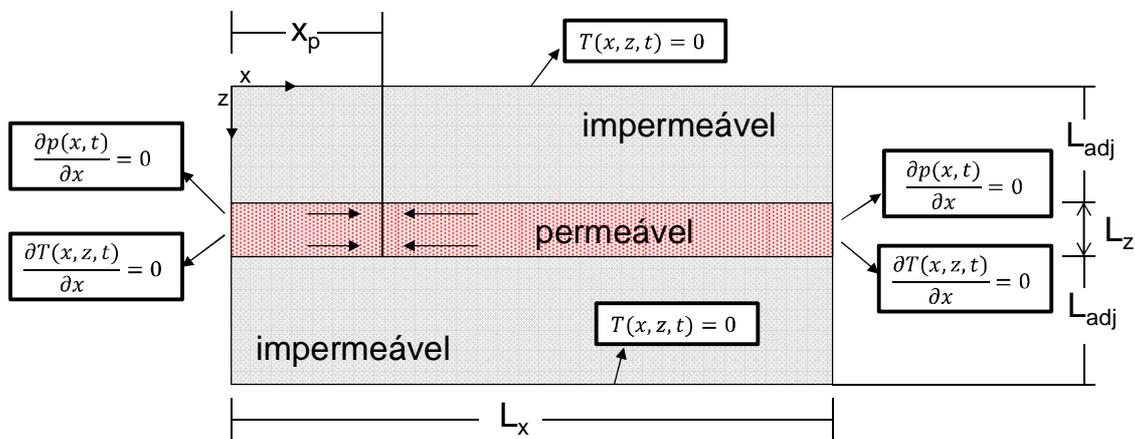


Figura 7.8 – Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado, com fronteiras impermeáveis.

A solução do campo de pressões para tal problema foi apresentada previamente na seção 6.2.1.

O balanço de energia, com suas condições de contorno e iniciais é dado por:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \frac{\partial T_{(x,z,t)}}{\partial t} + \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,z,t)} \cdot \nabla T_{(x,z,t)} \\
&= \frac{\phi \beta T_i}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i) \phi c_r}{\lambda} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} \\
&+ \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \mathbf{v}_{(x,z,t)} \cdot \nabla p_{(x,z,t)} + \nabla^2 T_{(x,z,t)}, \quad 0 < x < L_x, \\
&0 < z < L_z + 2L_{adj}, \quad t > 0
\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0, \quad t > 0 \tag{7.28}$$

$$\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial x} = 0, \quad em \ x = L_x, \quad t > 0 \tag{7.29}$$

$$T(x, z, t) = 0, \quad em \ z = 0, \quad t > 0 \tag{7.30}$$

$$T(x, z, t) = 0, \quad em \ z = L_z + 2L_{adj}, \quad t > 0 \tag{7.31}$$

$$T(x, z, 0) = 0, \quad em \ t = 0 \tag{7.32}$$

Onde

$$\mathbf{v}_{(x,z,t)} = \begin{cases} \mathbf{v}_{(x,t)}, & L_{adj} < z < L_z + L_{adj} \\ 0, & z \leq L_{adj} \ e \ z \geq L_z + L_{adj} \end{cases} \tag{7.33}$$

$$p_{(x,z,t)} = \begin{cases} p_{(x,t)}, & L_{adj} < z < L_z + L_{adj} \\ 0, & z \leq L_{adj} \ e \ z \geq L_z + L_{adj} \end{cases} \tag{7.34}$$

Onde $p_{(x,t)}$ e $\mathbf{v}_{(x,t)}$ são dados pela solução da EDH através da CITT, conforme apresentado na seção 6.2.1. Notar que assim como na seção 7.1, o fluxo geotérmico de calor não é incluído na modelagem, visto que tal fluxo não afeta os resultados, de acordo com o princípio da superposição de efeitos (Muradov, 2010). No problema

acima, as trocas térmicas na direção x entre o reservatório e as adjacências são desprezadas. As condições de contorno em z implicam que L_{adj} deve ser suficientemente grande para que as temperaturas em $z = 0$ e $z = L_z + 2L_{adj}$ não sejam afetadas pelas mudanças de temperatura no interior do reservatório.

Os problemas de autovalor apropriados são:

$$\frac{\partial^2 \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \sigma_i^2 \psi_{(\sigma_i, x)} = 0, \quad 0 < x < L_x \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x} = 0, \quad em \ x = 0 \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial \psi_{(\sigma_i, x)}}{\partial x} = 0, \quad em \ x = L_x \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{(\gamma_j, z)}}{\partial z^2} + \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \gamma_j^2 \varphi_{(\gamma_j, z)} = 0, \quad 0 < z < L_z \quad (7.38)$$

$$\varphi_{(\gamma_j, z)} = 0, \quad em \ z = 0 \quad (7.39)$$

$$\varphi_{(\gamma_j, z)} = 0, \quad em \ z = L_z + 2L_{adj} \quad (7.40)$$

Consultando as tabelas apresentadas em Ozisik (1993), as autofunções, normas e autovalores são dados por:

$$\psi_{(\sigma_i, x)} = \cos \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} \sigma_i x \right] \quad (7.41)$$

$$\sigma_i = \frac{i\pi}{L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho} \bar{C}_p}} \quad (7.42)$$

$$N_{x,i} = \begin{cases} \frac{L_x}{2} \sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}}, & i \neq 0 \\ \sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} L_x, & i = 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

$$\varphi_{(\gamma_j, z)} = \text{sen} \left[\sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} \gamma_j z \right] \quad (7.44)$$

$$\gamma_j = \frac{j\pi}{(L_z + 2L_{adj})} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{\rho} \bar{C}_p}} \quad (7.45)$$

$$N_{z,j} = \frac{L_z + 2L_{adj}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda}} \quad (7.46)$$

utilizando a solução geral, o par transformada-inversa apropriado é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}(t) = & \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \times \int_0^{L_x} \int_0^{L_z + 2 \cdot L_{adj}} \frac{\cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right]}{N_{x,i}^{\frac{1}{2}}} \\ & \times \frac{\text{sen} \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right]}{N_{z,j}^{1/2}} \times T_{(x,z,t)} dx dz \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} T_{(x,z,t)} = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \times \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \times \text{sen} \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2L_{adj})} z \right] \\ & \times \bar{T}_{ij}(t) \end{aligned} \quad (7.48)$$

Operando a equação (7.27) com

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2 \cdot L_{adj}} \frac{\cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right]}{N_{x,i}^{\frac{1}{2}}} \frac{\text{sen} \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2L_{adj})} z \right]}{N_{z,j}^{1/2}} dx dz$$

e fazendo as operações indicadas na solução geral, chegamos ao sistema de equações diferenciais ordinárias a ser resolvido.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_{ij}(t)}{\partial t} + \left(\left[\frac{i\pi}{L_x} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho C_p}} \right]^2 + \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho C_p}} \right]^2 \right) \bar{T}_{ij}(t) \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{imjn}^*(t) \bar{T}_{mn}(t) = \bar{g}_{ij}(t), \end{aligned} \quad (7.49)$$

$i = 0,1,2, \dots e j = 1,2,..$

onde:

$$\begin{aligned} A_{imjn}^*(t) &= \frac{\rho_f C_{pf}}{\lambda} \times \frac{1}{N_{x,i}^{\frac{1}{2}} N_{z,j}^{\frac{1}{2}} N_{x,m}^{\frac{1}{2}} N_{z,n}^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \int_0^{L_x} \int_0^{L_z+2 \cdot L_{adj}} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \times \frac{d \cos \left[\frac{m\pi}{L_x} x \right]}{dx} \\ &\times \sin \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right] \times \frac{d \sin \left[\frac{n\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right]}{dx} \\ &\times \left(-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial x} \right) dx dz \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij}(t) &= \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \\
&\times \left[\frac{\phi \beta T_i}{\lambda} + \frac{(p_i + \rho_r C_{pr} T_i)}{\lambda} \phi c_r \right] \int_0^{L_x} \int_0^{L_z + 2 \cdot L_{adj}} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \\
&\times \text{sen} \left[\frac{j\pi}{L_z + 2 \cdot L_{adj}} z \right] \frac{\partial p_{(x,z,t)}}{\partial t} dx dz \\
&+ \frac{1}{N_{x,i}^{1/2} N_{z,j}^{1/2}} \frac{(\beta T_i - 1)}{\lambda} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z + 2 \cdot L_{adj}} \cos \left[\frac{i\pi}{L_x} x \right] \\
&\times \text{sen} \left[\frac{j\pi}{(L_z + 2 \cdot L_{adj})} z \right] \left(-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p_{(x,t)}}{\partial x} \right)^2 \right) dx dz
\end{aligned} \tag{7.51}$$

A parcela do termo fonte associada às condições de contorno é nula, visto que as condições de contorno são homogêneas.

A condição inicial transformada é dada por:

$$\bar{T}_{ij}(0) = \bar{f}_{ij} = 0, \quad i = 0,1,2 \dots, j = 1,2 \dots \tag{7.52}$$

O cálculo das integrais das equações (7.50) e (7.51) é feito substituindo as expressões para as derivadas da pressão apresentadas na seção 6.2.1. Foi possível obter todas as integrais necessárias analiticamente.

Aplicando os parâmetros da Tabela 6.3 (mesmos parâmetros empregados na seção 6.2) para resolver o balanço de energia, e considerando $L_{adj} = 9$ metros, obtemos a solução do campo de temperatura apresentada a seguir.

A Figura 7.9 apresenta a variação de temperatura no poço ($x = x_p$), calculada pela GITT bidimensional, convergida com 200 termos na série em cada direção, na posição $z = 10$ metros, equivalente ao centro do reservatório, bem como a temperatura dada pela solução unidimensional apresentada na seção 6.2.

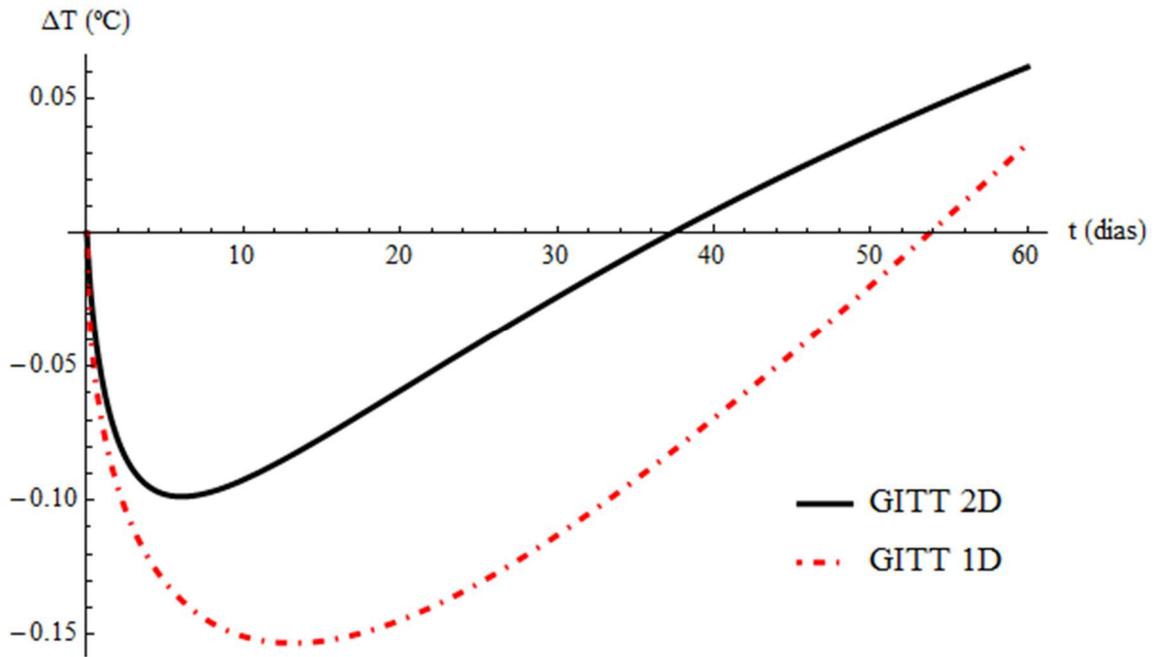


Figura 7.9 - Variação da temperatura no poço ($x = x_p$) dada por GITT 2D e GITT 1D.

A análise da Figura 7.9 mostra que ao considerar as trocas térmicas com as adjacências, a queda da temperatura causada pela expansão do fluido é atenuada e que o tempo onde se atinge a temperatura mínima é reduzido. A Figura 7.10 mostra a variação da temperatura ao longo do reservatório utilizando as soluções por GITT bi e unidimensional, no tempo $t = 40$ dias.

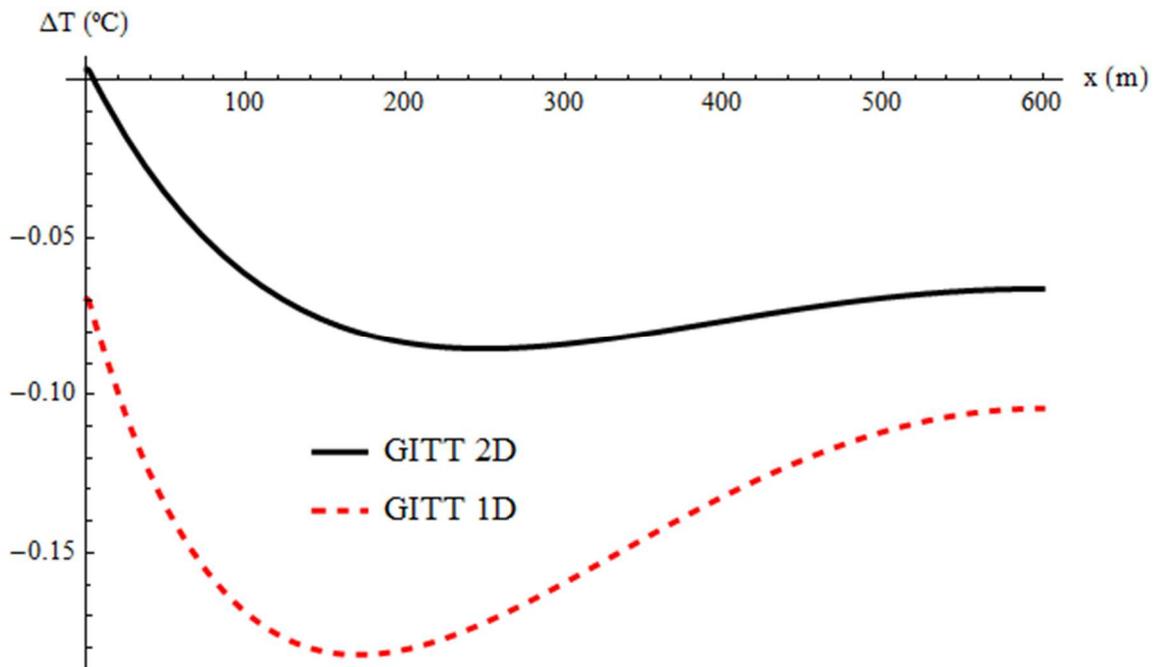


Figura 7.10 – Variação da temperatura ao longo do reservatório ($t = 40$ dias) dada pela GITT 2D e GITT 1D.

A análise da Figura 7.10 ilustra bem os fenômenos que regem o comportamento térmico do reservatório. O aumento da temperatura que ocorre próximo ao poço (localizado em $x = 0$) é causado pela dissipação viscosa, que nesta situação ($t = 40$ dias) é mais significativa do que os efeitos térmicos causados pela expansão/compressão dos fluidos e da rocha. O comportamento inverso é observado para $x > 200\text{m}$, a partir de onde os efeitos térmicos associados à expansão transiente do fluido e da rocha são mais expressivos do que a dissipação viscosa, já que a fronteira selada do reservatório faz com que para posições mais próximas da borda o gradiente de pressão em x seja reduzido, fazendo que os efeitos térmicos causados pela expansão transiente do fluido/rocha sejam dominantes frente à dissipação viscosa. Ademais, percebe-se que as perdas de calor para as adjacências tendem a atenuar as variações de temperatura constatadas.

A Figura 7.11 apresenta a variação da temperatura em $t = 5$ dias na posição $x = x_p$ ao longo do eixo vertical, com diferentes números de termos na série. Devido à simetria, apenas metade do sistema é exibido no gráfico. A posição onde está o reservatório está destacada pelas linhas verticais entre $z = 9$ metros (topo do reservatório) e $z = 10$ metros (centro do reservatório).

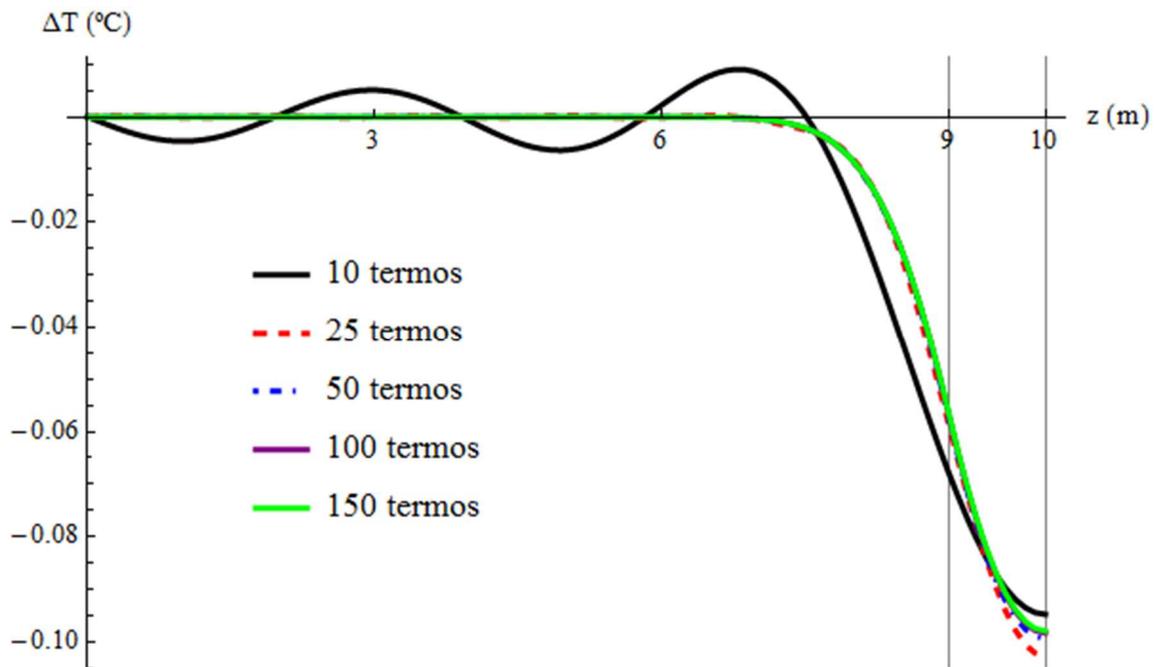


Figura 7.11 – Temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo z com diferentes números de termos na série ($t = 5$ dias).

Analisando a Figura 7.11, percebe-se que com 50 termos na expansão em série já há convergência gráfica da solução.

A Figura 7.12 apresenta a variação da temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo vertical, para diferentes tempos, com 150 termos na expansão em série. A posição onde está o reservatório está destacada pelas linhas verticais entre $z = 9$ metros (topo do reservatório) e $z = 10$ metros (centro do reservatório).

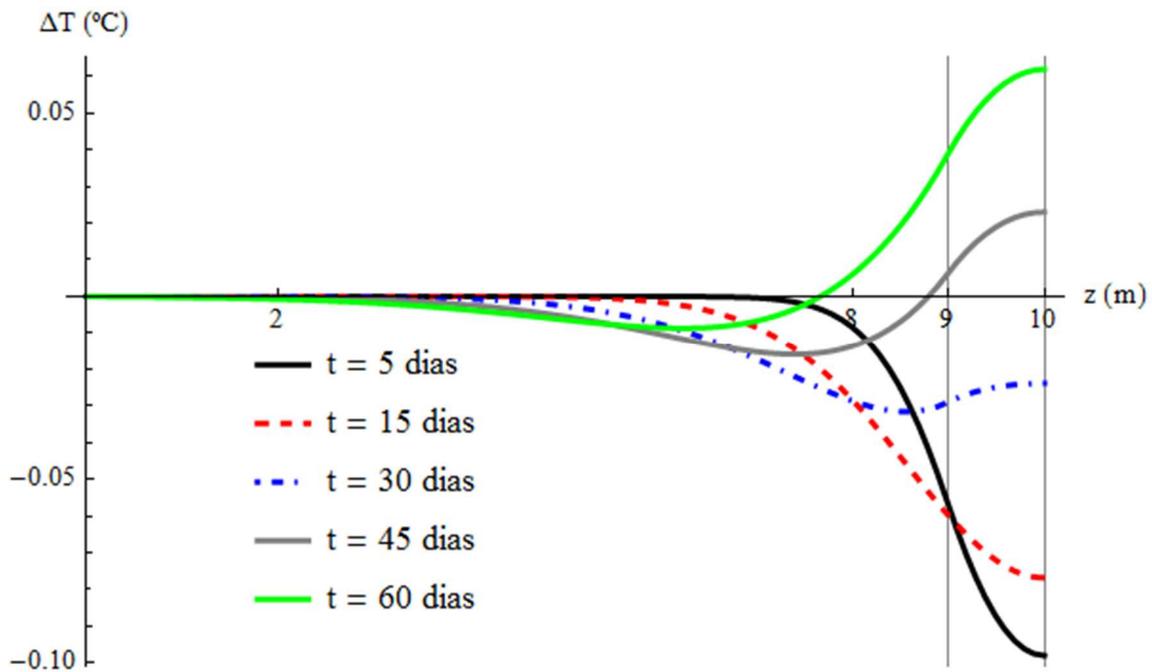


Figura 7.12 - Temperatura em $x = x_p$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.

A análise da Figura 7.12 mostra que as variações de temperatura não atingiram as fronteiras do sistema, indicando que o valor de $L_{adj} = 9$ metros é suficiente para representar corretamente o comportamento térmico para tempos tão longos quanto 60 dias.

A Tabela 7.2 apresenta uma análise de convergência da temperatura para a posição $x = x_p$, em posição vertical equivalente ao centro do reservatório ($z = 10$ m).

Tabela 7.2 – Convergência da temperatura no poço ($x = x_p$).

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ C$					
	Número de Termos (N)					
	10	25	50	100	150	200
0,1	-0,010	-0,021	-0,022	-0,024	-0,024	-0,024
0,5	-0,034	-0,053	-0,051	-0,053	-0,053	-0,053
2	-0,071	-0,093	-0,092	-0,093	-0,093	-0,093
5	-0,095	-0,111	-0,110	-0,111	-0,110	-0,110
10	-0,098	-0,104	-0,103	-0,102	-0,102	-0,102
20	-0,073	-0,069	-0,067	-0,067	-0,066	-0,066
40	-0,011	0,000	0,002	0,003	0,003	0,003
60	0,041	0,054	0,056	0,058	0,058	0,058

A análise da Tabela 7.2 mostra que com 150 termos na série, se obtém a convergência de 3 dígitos e que com 50 termos na série já se obtém uma boa aproximação da solução.

7.3 RESERVATÓRIO COM DUAS CAMADAS PRODUTORAS HIDRAULICAMENTE ISOLADAS

Nesta seção, será apresentada a solução para um problema similar ao resolvido na seção 7.1, entretanto, a formulação de domínio único será utilizada com o intuito de considerar a existência de duas camadas produtoras hidráulicamente isoladas, com características distintas e operando com vazões diferentes. A Figura 7.13 apresenta um esquema ilustrativo do problema. As condições de contorno, tanto para a pressão, quanto para a temperatura, são as mesmas apresentadas na Figura 7.1.

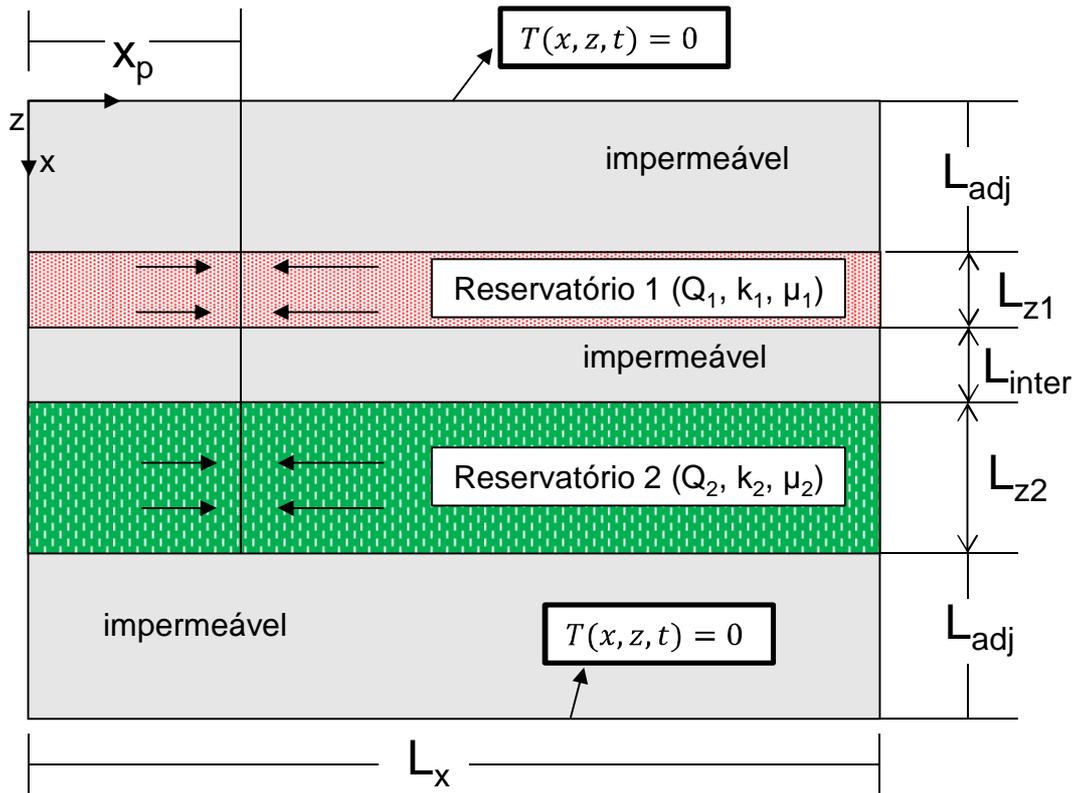


Figura 7.13 - Esquema ilustrativo do problema de transferência de calor conjugado com duas camadas produtoras isoladas.

A resolução de problemas como o apresentado na Figura 7.13 permite considerar o impacto da produção em um reservatório sobre o comportamento térmico em um outro reservatório, sendo um importante avanço para a interpretação de dados de temperatura em poços de petróleo. Cabe lembrar que é possível estender a solução para casos incluindo não apenas dois e sim múltiplos reservatórios.

As equações do balanço de energia, bem como sua solução são idênticas às apresentadas na seção 7.1, bastando considerar que os termos fonte associados às variações de pressão são calculados individualmente em cada reservatório, onde:

$$v_{(x,z,t)} = \begin{cases} v_1(x,t), & L_{adj} < z < L_{z1} + L_{adj} \\ v_2(x,t), & L_{adj} + L_{z1} + L_{inter} < z < L_{adj} + L_{z1} + L_{inter} + L_{z2} \\ 0, & \text{outro} \end{cases} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned}
& p_{(x,z,t)} \\
= & \begin{cases} p_1(x,t), & L_{adj} < z < L_{z1} + L_{adj} \\ p_2(x,t), & L_{adj} + L_{z1} + L_{inter} < z < L_{adj} + L_{z1} + L_{inter} + L_{z2} \\ constante, & outro \end{cases} \quad (7.54)
\end{aligned}$$

Onde $v_{1(x,t)}$, $v_{2(x,t)}$, $p_1(x,t)$ e $p_2(x,t)$ são dados pela solução da EDH através da CITT, desprezando as forças gravitacionais e resolvendo cada reservatório separadamente, conforme apresentado na seção 4.1.

Utilizando os parâmetros da Tabela 7.3 para resolver o problema, obtemos os resultados apresentados a seguir.

Tabela 7.3 – Conjunto de dados para o problema da seção 7.3.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q_1	-0,013889 m ³ /s	-1200 m ³ /d
Vazão de fluido, Q_2	-0,011574 m ³ /s	-1000 m ³ /d
Permeabilidade, k_1	4×10^{-14} m ²	40,4 mD
Permeabilidade, k_2	10^{-14} m ²	10,1 mD
Viscosidade, μ_1	10^{-3} Pa·s	1 cP
Viscosidade, μ_2	10^{-3} Pa·s	1 cP
Espessura, L_{z1}	2 m	2 m
Espessura, L_{z2}	4 m	4 m
Esp. da camada intermediária, L_{inter}	2 m	2 m
Espessura, L_{adj}	9 m	9 m
Compressibilidade total, c_t	10^{-9} Pa ⁻¹	10^{-4} bar ⁻¹
Porosidade, ϕ	30%	30%
Pressão inicial, p_i	5×10^7 Pa	500 bar
Comprimento em x, L_x	50 m	50 m
Comprimento em y, L_y	2000 m	2000 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Coefficiente de expansão térmica, β	$0,0008$ K ⁻¹	$0,0008$ °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	0 Pa ⁻¹	0 bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m·K)	0,16 W/(m·K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m·K)	3,0 W/(m·K)
Massa específica do fluido, ρ_f	750 kg/m ³	750 kg/m ³
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	2200 J/(kg·K)	2200 J/(kg·K)
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg·K)	1250 J/(kg·K)

A Figura 7.14 apresenta o comportamento da pressão no poço ($x = x_p$) de cada um dos reservatórios.

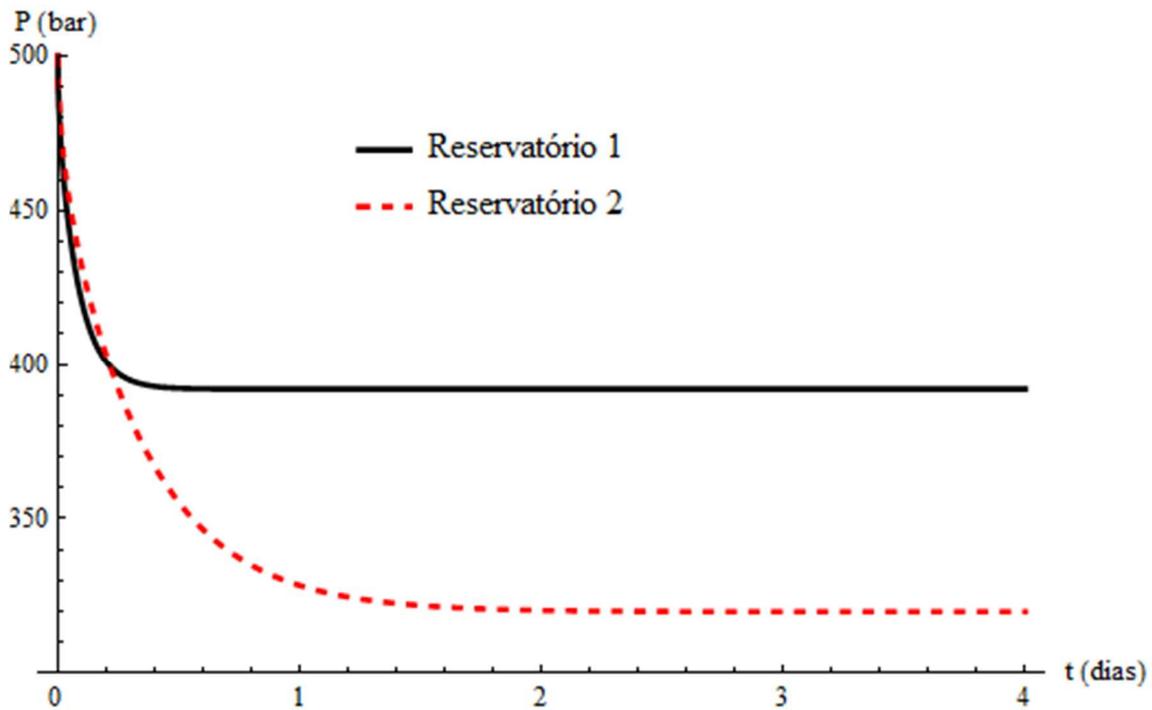


Figura 7.14 – Comportamento de pressão no poço ($x = x_p$) de cada uma das camadas produtoras.

Conforme pode ser observado na Figura 7.14, o Reservatório 2 apresenta as maiores variações de pressão, de onde se espera que este reservatório sofra as maiores reduções de temperatura causadas pela expansão dos fluidos e das rochas.

A Figura 7.15 e a Figura 7.16 apresentam a variação de temperatura em posição vertical equivalente aos centros dos Reservatórios 1 e 2 ($z = 10$ m e $z = 15$ m, respectivamente) na posição do poço ($x = x_p$).

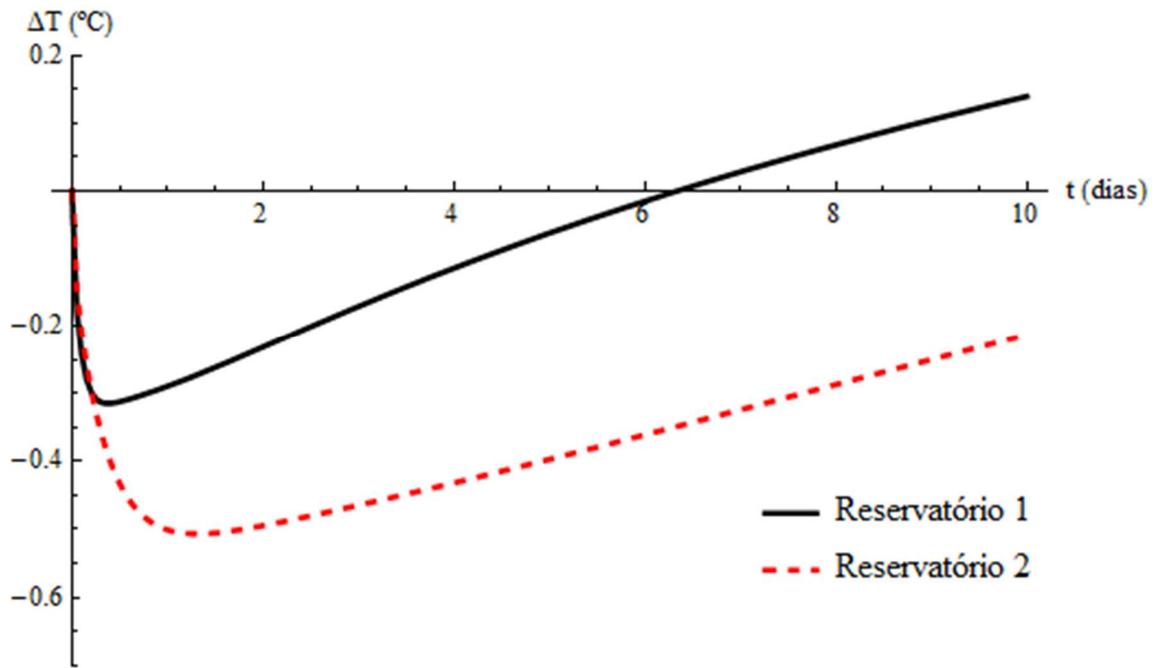


Figura 7.15 – Temperatura na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ para os Reservatórios 1 e 2 em tempos curtos.

Conforme pode ser observado na Figura 7.15, o Reservatório 2 resfria mais do que o Reservatório 1, devido às maiores variações de pressão observadas no início da produção deste reservatório, consequência da menor difusividade hidráulica do mesmo.

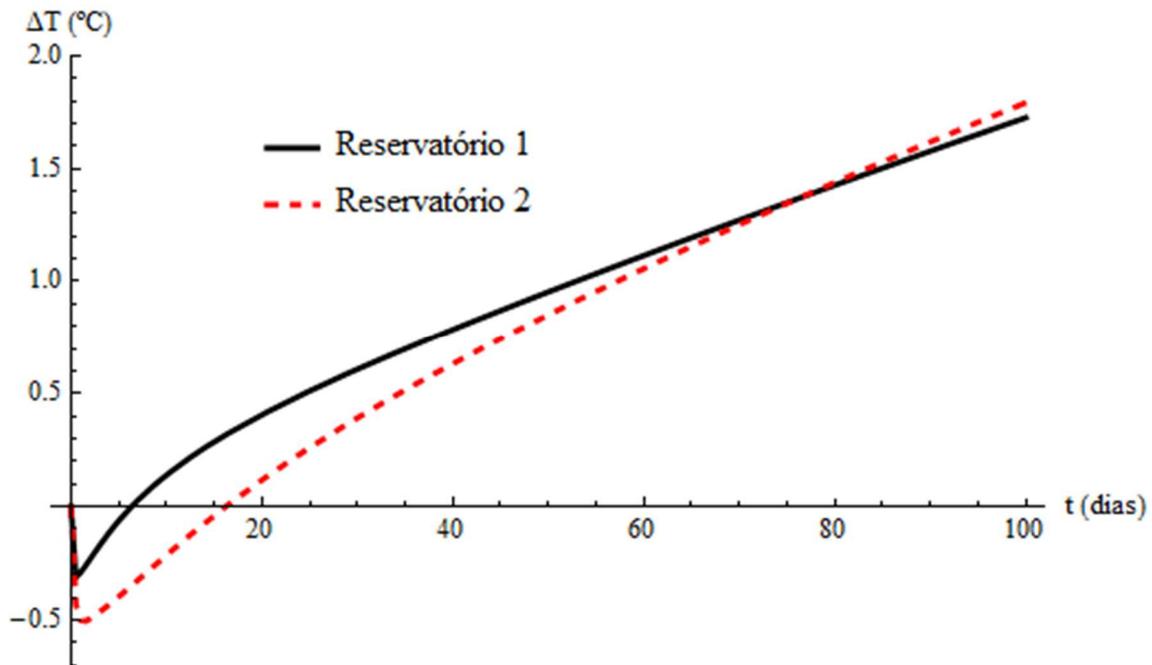


Figura 7.16 – Temperatura na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ para os Reservatórios 1 e 2 em tempos longos.

Na análise da Figura 7.16, percebe-se que após o período inicial de resfriamento, o Reservatório 2 passa a aquecer em uma taxa maior do que o Reservatório 1. Uma análise do segundo termo do lado direito da equação (3.19), responsável pelo aquecimento causado pela dissipação viscosa, indica que o comportamento esperado seria um maior aquecimento do Reservatório 1, entretanto, sua menor espessura faz com que a temperatura seja mais afetada pelas perdas de calor para as camadas adjacentes. Este tipo de comportamento pode levar à erros de interpretação caso não sejam consideradas as interações térmicas entre reservatórios adjacentes.

A Figura 7.17 e a Figura 7.18 apresentam a variação da temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo vertical, para diferentes tempos. As posições onde estão os reservatórios e a camada intermediária estão demarcadas pelas linhas verticais e indicadas nas próprias figuras.

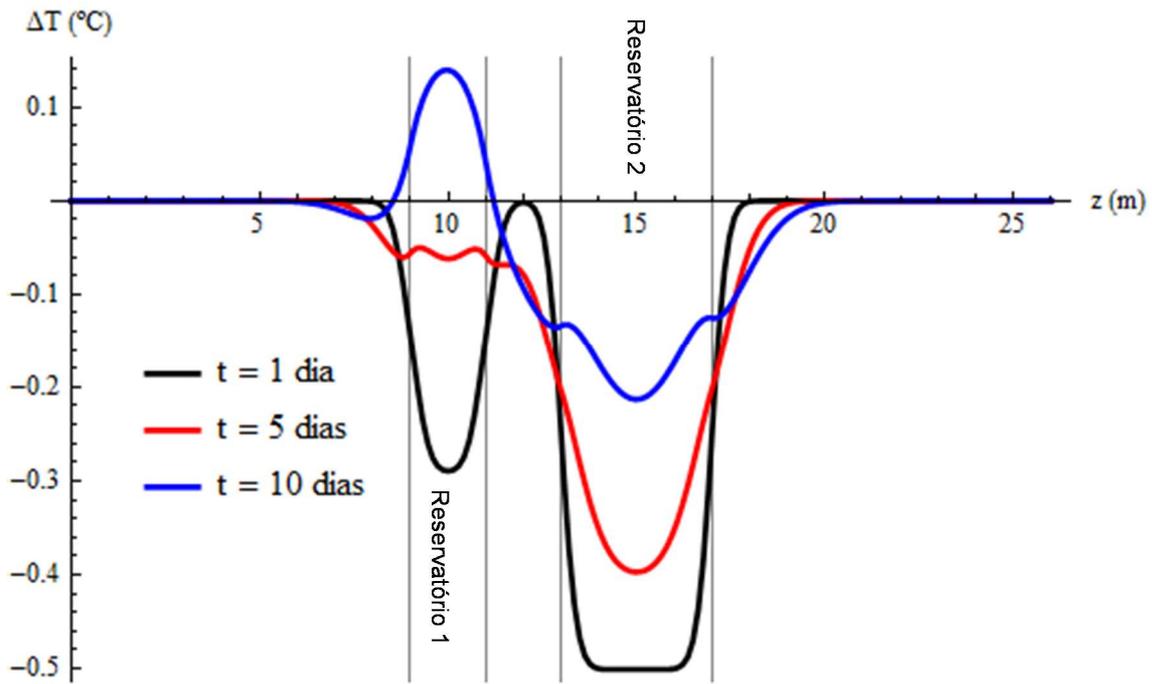


Figura 7.17 – Temperatura na posição $x = x_p$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.

Conforme pode ser observado na análise da Figura 7.17, para tempo $t = 1$ dia, a difusão da onda de calor não chega a atingir o centro da camada intermediária situada entre os dois reservatórios, e até este momento, a temperatura em cada reservatório se comporta como se não houvesse a presença de outro reservatório. Para tempo $t = 5$ dias, já se observa variação de temperatura ao longo de toda a camada intermediária, e as temperaturas em cada um dos reservatórios já passam a ser dependentes do comportamento térmico do outro reservatório.

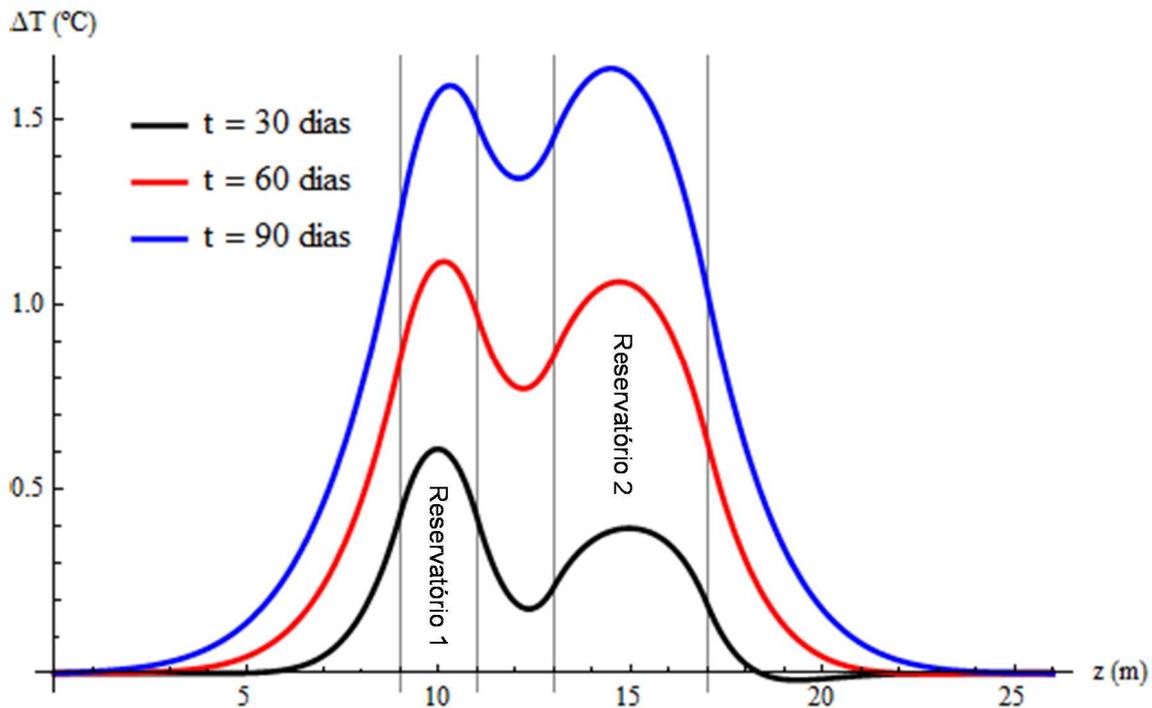


Figura 7.18 – Temperatura na posição $x = 0$ ao longo do eixo z para diferentes tempos.

Na Figura 7.18 é possível avaliar o comportamento térmico de cada reservatório para tempos longos e observa-se que diferentemente do que ocorre em reservatórios produzindo sem influência térmica de outro reservatório, onde as maiores variações de temperatura ocorrem no centro do reservatório (vide seções 7.1 e 7.2), as maiores variações de temperatura passam a ocorrer em regiões mais próximas à camada intermediária do reservatório. Este é um fator relevante na análise de dados de temperatura para a estimativa do perfil de produção ao longo de uma zona produtora, visto que regiões com comportamento produtivo idêntico (por exemplo as posições de topo e base do Reservatório 2) podem ter comportamento térmico distinto, causado pela interferência da produção do Reservatório 1. Este fator é evidenciado na Figura 7.19, que mostra a evolução da temperatura com o tempo no topo e na base dos Reservatórios 1 e 2, respectivamente.

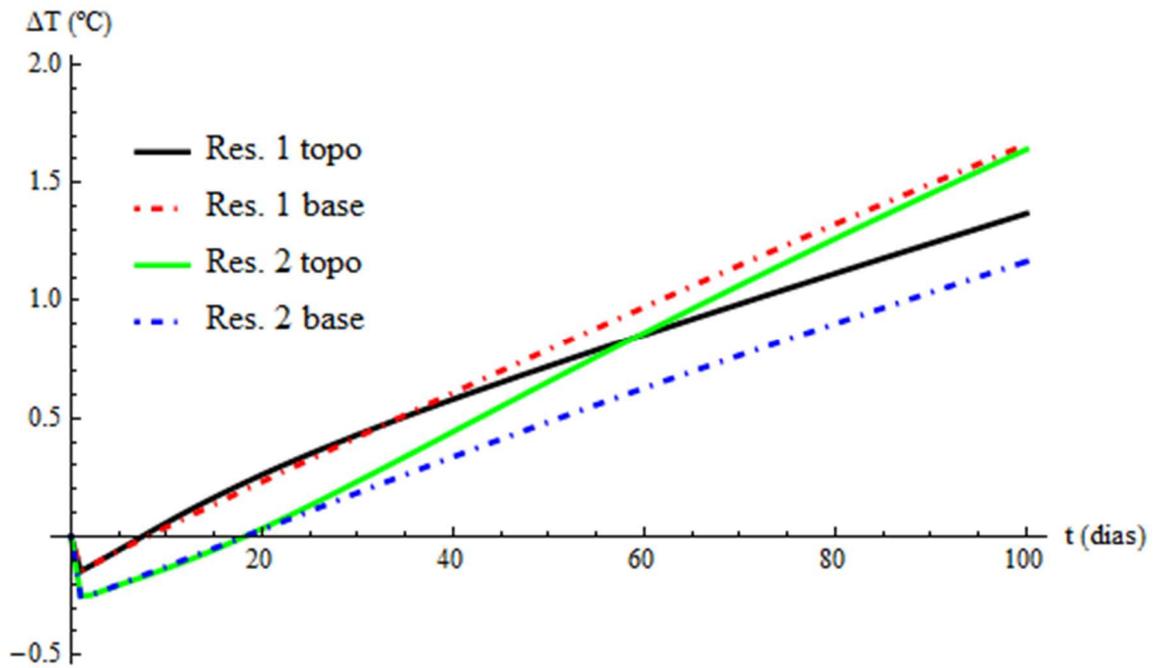


Figura 7.19 – Temperatura no topo e na base dos Reservatórios 1 e 2 ($x = x_p$).

Procurando melhor ilustrar o impacto da produção de um reservatório sobre o comportamento térmico de um outro reservatório, a Figura 7.20 e a Figura 7.21 apresentam a temperatura no centro dos Reservatórios 1 e 2 para a posição $x = x_p$, considerando e desprezando a interferência da produção dos reservatórios produtores adjacentes.

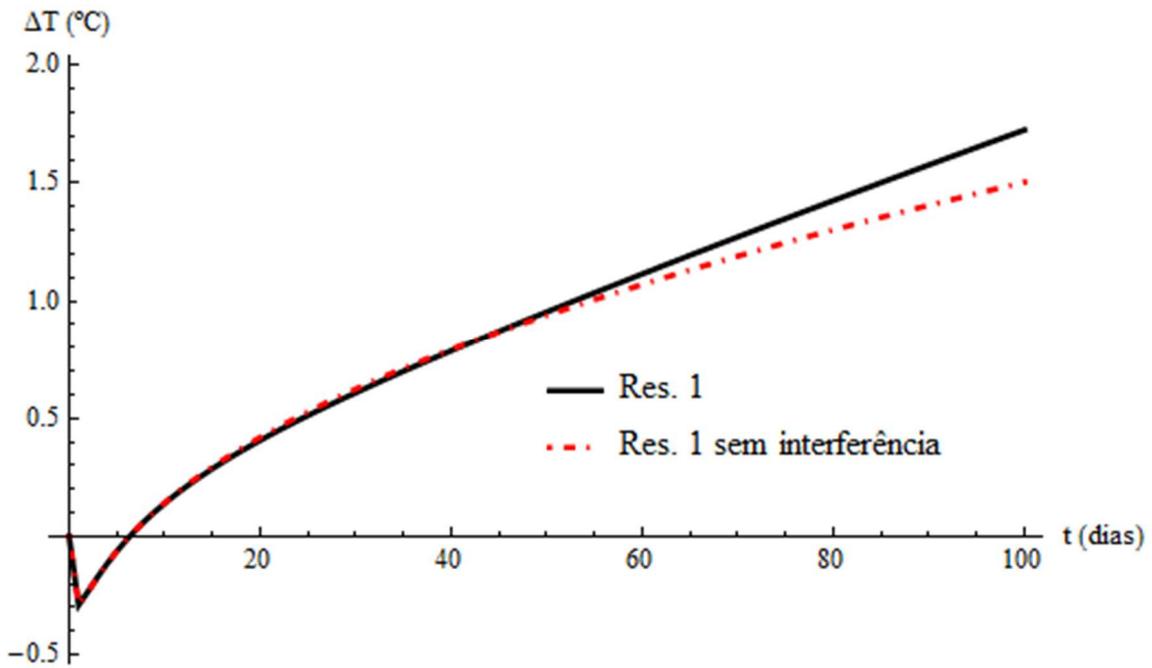


Figura 7.20 – Temperatura do Reservatório 1 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ considerando e desprezando a interferência da produção do Reservatório 2.

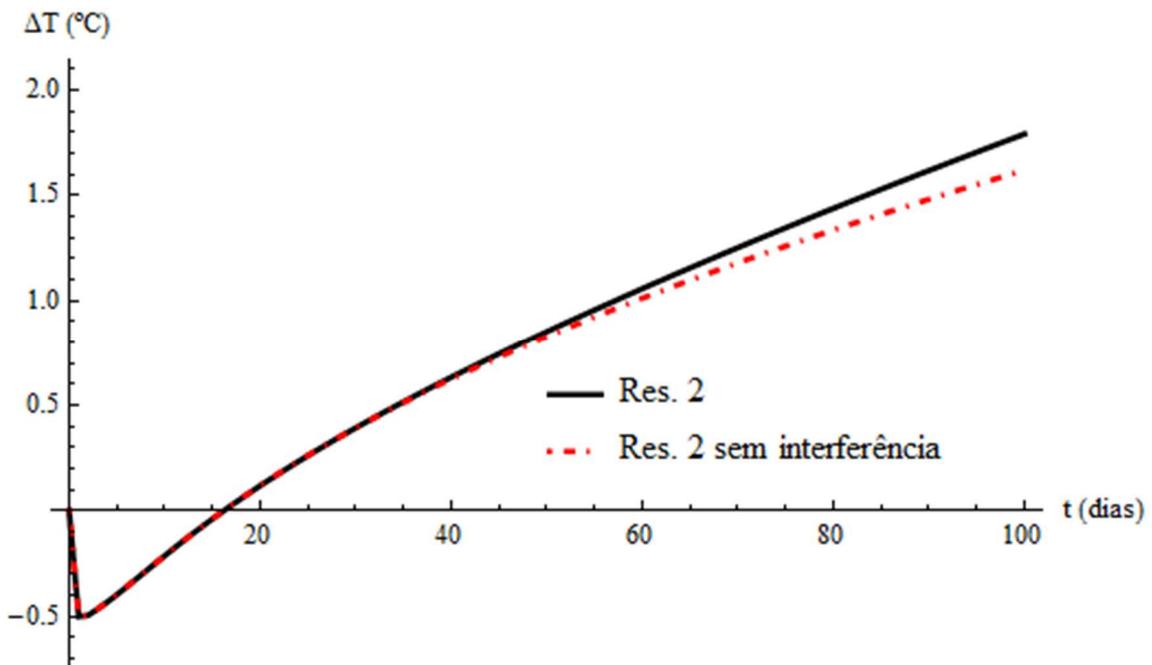


Figura 7.21 – Temperatura do Reservatório 2 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ considerando e desprezando a interferência da produção do Reservatório 1.

Conforme pode ser observado na Figura 7.20 e Figura 7.21, a interferência da produção do outro reservatório somente passa a ser significativa para tempos maiores do que ~50 dias. Este resultado mostra que na interpretação de dados de temperatura em testes de formação em poços, que tipicamente duram poucos dias, é possível desprezar a interferência da produção em camadas adjacentes, permitindo simplificar a modelagem do fenômeno e facilitando a estimativa de parâmetros. Por fim, a Tabela 7.4 e a Tabela 7.5 apresentam a análise de convergência da temperatura para os reservatórios 1 e 2, respectivamente, na posição $x = x_p$, em posição vertical equivalente ao centro dos reservatórios.

Tabela 7.4 – Convergência da temperatura do Reservatório 1 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$.

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ\text{C}$					
	Número de Termos (N)					
	10	25	50	100	150	200
0,2	-0,200	-0,340	-0,283	-0,296	-0,298	-0,298
0,5	-0,203	-0,343	-0,307	-0,312	-0,312	-0,312
2	-0,147	-0,228	-0,233	-0,231	-0,231	-0,231
5	-0,053	-0,053	-0,063	-0,062	-0,062	-0,062
10	0,083	0,149	0,138	0,140	0,140	0,140
30	0,497	0,617	0,606	0,607	0,608	0,608
60	0,996	1,124	1,113	1,115	1,115	1,115
90	1,457	1,586	1,575	1,577	1,577	1,577

Tabela 7.5 – Convergência da temperatura do Reservatório 2 na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$.

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ\text{C}$					
	Número de Termos (N)					
	10	25	50	100	150	200
0,2	-0,319	-0,268	-0,287	-0,293	-0,294	-0,294
0,5	-0,473	-0,400	-0,426	-0,433	-0,433	-0,433
2	-0,526	-0,482	-0,495	-0,495	-0,495	-0,495
5	-0,398	-0,398	-0,398	-0,397	-0,397	-0,397
10	-0,207	-0,214	-0,214	-0,213	-0,213	-0,213
30	0,374	0,391	0,392	0,392	0,392	0,392
60	1,030	1,056	1,056	1,057	1,057	1,057
90	1,588	1,616	1,617	1,618	1,618	1,618

A análise da Tabela 7.4 e da Tabela 7.5 mostra que com 150 termos na série, se obtém a convergência de 3 dígitos e que com 50 termos na série já se obtém uma boa aproximação da solução, principalmente para tempos longos.

8 SOLUÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA CONSIDERANDO VAZÕES VARIÁVEIS

Procurando ilustrar o potencial de uso da solução do balanço de energia através da GITT na interpretação de dados de temperatura em poços com vazão variável, bem como a flexibilidade adquirida ao empregar a CITT como método de solução da EDH, será apresentada neste Capítulo a solução do problema resolvido na seção 6.1 considerando vazões variáveis. O método de solução do campo de pressões é o mesmo apresentada no capítulo 4, sendo a vazão dada pela seguinte expressão:

$$Q = Q_{(t)} = Q_1 + \frac{(Q_2 - Q_1)}{e^{-\omega \cdot (t-t_c)}} \quad (8.1)$$

A equação (8.1) permite aproximar uma variação de vazão em degrau por uma função contínua em todo o domínio de tempo, permitindo a realização de todas as manipulações simbólicas necessárias à solução do problema, incluindo a obtenção das integrais de forma analítica. A Figura 8.1 apresenta como se comporta a vazão dada pela equação (8.1) para diferentes valores de ω . Quanto maior o valor de ω , mais bruscamente ocorrerá a variação de vazão, aproximando a modelagem matemática do que ocorre em poços de petróleo ao realizar a abertura de uma válvula de controle.

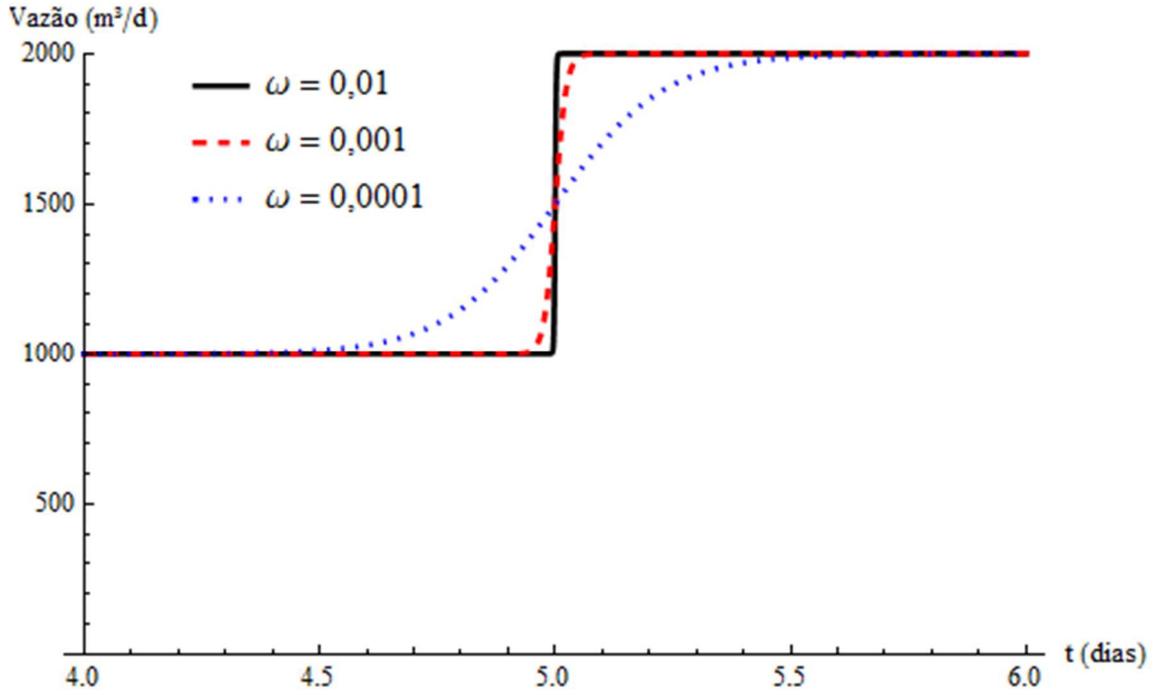


Figura 8.1 – Vazão dada pela equação (8.1) e impacto de ω .

Aplicando a equação (8.1) para representar a vazão na solução da EDH por CITT apresentada no Capítulo 4, obtemos:

$$p^*(x, t) = \frac{2\mu\eta}{kL_xL_yL_z} \times \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\eta \frac{(2m-1)^2\pi^2}{4L_x^2} t} \times \cos\left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x\right] \times \cos\left[\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x_p\right] \times \int_0^t e^{\eta \left(\frac{(2m-1)\pi}{2L_x} x\right)^2 t'} \left(\frac{Q_1 e^{\omega t_c} + Q_2 e^{\omega t'}}{e^{\omega t'} + e^{\omega t_c}}\right) dt' \quad (8.2)$$

Tendo obtido a solução para a pressão, o cálculo das derivadas temporal e espacial da pressão é feito utilizando os mesmos passos da seção 4.1.

Como o campo de temperaturas é dependente das variações de pressão, a incorporação de vazões variáveis na solução da EDH (equação (3.20)) é suficiente para transferir o impacto das variações de vazão para o balanço de energia. Assim sendo, a solução do balanço de energia para este caso é a mesma apresentada na seção 6.1. As integrações

necessárias foram obtidas analiticamente. Os resultados das integrações podem ser consultados nos códigos do *Mathematica* presentes no Anexo I.

A Tabela 8.1 contém os parâmetros empregados na obtenção da solução com vazão variável, que será apresentada a seguir.

Tabela 8.1 – Conjunto de dados para o problema de vazão variável.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Vazão de fluido, Q_1	-0,011574 m ³ /s	-1000 m ³ /d
Vazão de fluido, Q_2	-0,023148 m ³ /s	-2000 m ³ /d
Permeabilidade, k	7,40175 x 10 ⁻¹⁴ m ²	750 mD
Porosidade, ϕ	30%	30%
Compressibilidade total, c_t	2 x 10 ⁻⁹ Pa ⁻¹	2 x 10 ⁻⁴ bar ⁻¹
Viscosidade, μ	10 ⁻³ Pa·s	1 cP
Pressão inicial, p_i	5 x 10 ⁷ Pa	500 bar
Espessura, L_z	2 m	2 m
Comprimento em x, L_x	200 m	200 m
Comprimento em y, L_y	500 m	500 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Coefficiente de expansão térmica, β	0,0008 K ⁻¹	0,0008 °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	10 ⁻¹⁰ Pa ⁻¹	10 ⁻⁵ bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m·K)	0,16 W/(m·K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m·K)	3,0 W/(m·K)
Massa específica do fluido, ρ_f	750 kg/m ³	750 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	2200 J/(kg·K)	2200 J/(kg·K)
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg·K)	1250 J/(kg·K)
ω	3 x 10 ⁻⁴ s ⁻¹	3 x 10 ⁻⁴ s ⁻¹
t_c	432000 s	5 dias

Cabe lembrar que o tratamento matemático dado nas soluções da EDH por CITT e do balanço de energia por GITT permite que se utilize qualquer função diferenciável em todo o domínio do tempo para representar o comportamento de vazão do poço, não sendo obrigatório o uso da expressão (8.1).

8.1 CASO 1 – AUMENTO DA VAZÃO

Aplicando os dados da Tabela 8.1 nas equações (8.1) e (8.2), obtemos os comportamentos de vazão e pressão (com 25 termos na série) apresentados na Figura 8.2 e Figura 8.3:

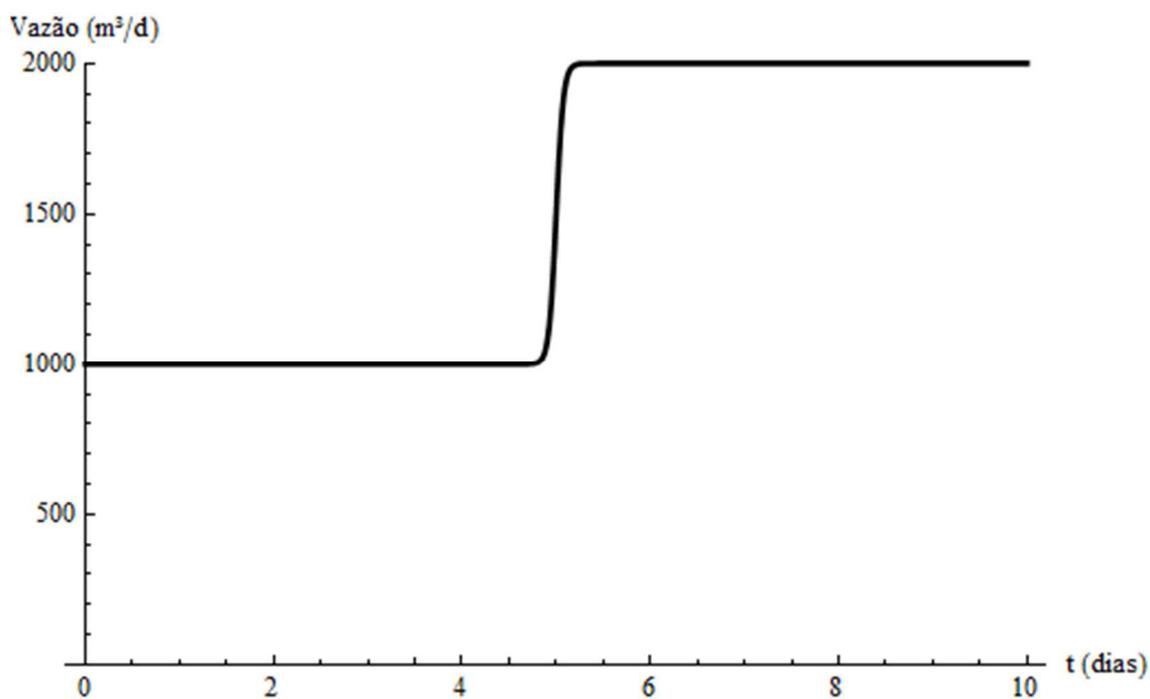


Figura 8.2 – Comportamento da vazão.

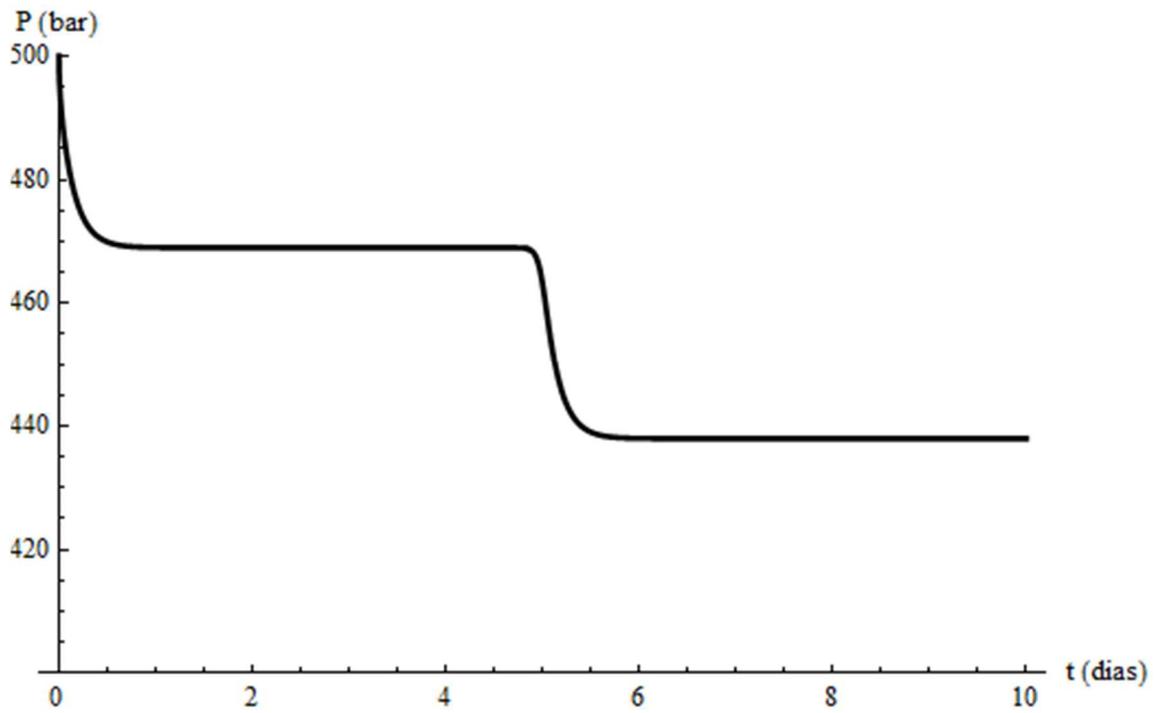


Figura 8.3 – Pressão no poço ($x = x_p$).

A Figura 8.4 apresenta a derivada temporal da pressão com 25 termos na série.

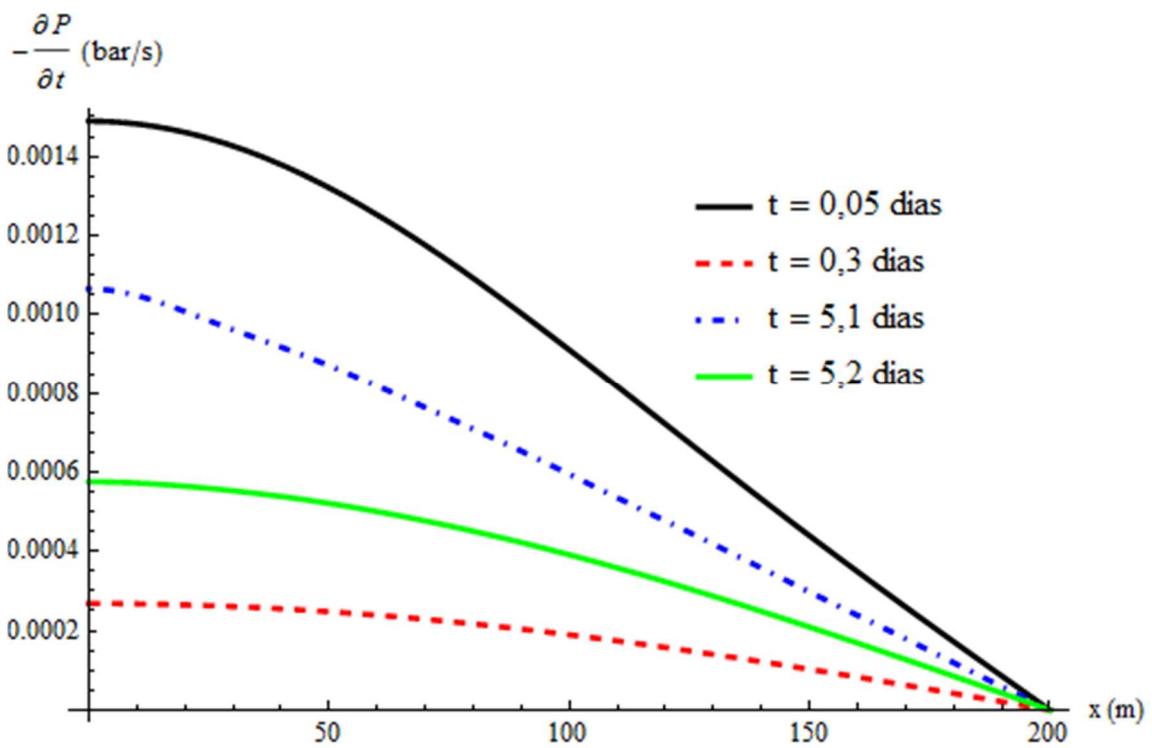


Figura 8.4 – Derivada temporal da pressão para diferentes tempos.

A Tabela 8.2 apresenta uma análise de convergência da derivada temporal da pressão para a posição $x = x_p$, que é a posição onde se encontra o termo fonte, logo aonde se espera maior dificuldade na convergência da solução.

Tabela 8.2 – Convergência da derivada temporal da pressão com vazão variável.

Tempo, dias	$\partial P / \partial t \times 10^3$ (bar/s)				
	Número de Termos (N)				
	5	10	15	20	25
0,001	-7,9014	-10,3147	-10,5358	-10,5417	-10,5417
0,2	-0,5179	-0,5179	-0,5179	-0,5179	-0,5179
0,5	-0,0721	-0,0721	-0,0721	-0,0721	-0,0721
5,25	-0,4147	-0,4150	-0,4151	-0,4151	-0,4152
5,5	-0,0803	-0,0803	-0,0803	-0,0803	-0,0803

Conforme pode ser observado na Tabela 8.2, com 20 termos na expansão em série já se obtém a convergência de 4 dígitos decimais na derivada temporal da pressão, incluindo tempos antes e após a variação de vazão.

A Figura 8.5 apresenta a derivada espacial da pressão calculada utilizando o procedimento apresentado na seção 4.1.1, com 5 termos na série.

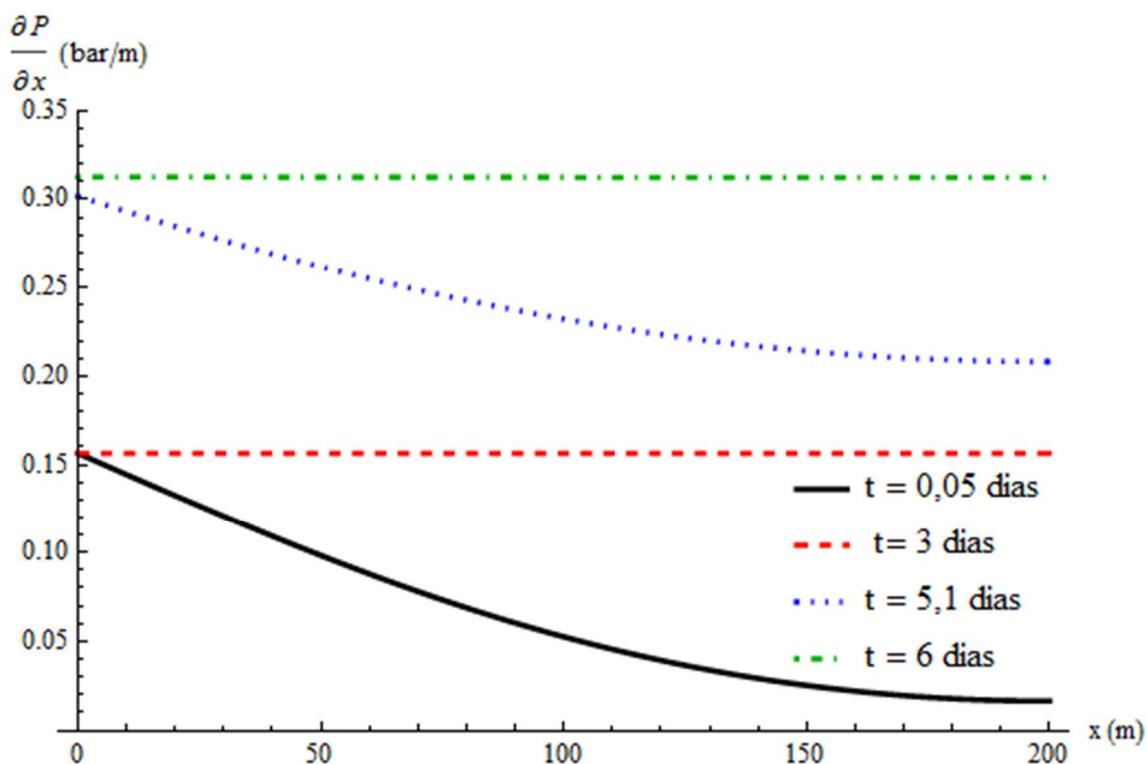


Figura 8.5 – Derivada espacial da pressão para diferentes tempos com vazão variável.

A Tabela 8.3 apresenta uma análise de convergência da derivada espacial da pressão (utilizando a equação (4.24)) para a posição $x = 25$ metros.

Tabela 8.3 – Convergência da derivada espacial da pressão com vazão variável.

Tempo, dias	$\partial P / \partial x$, bar/m				
	Número de Termos (N)				
	1	2	5	10	25
0,01	0,1200	0,0996	0,0920	0,0920	0,0920
0,20	0,1459	0,1459	0,1459	0,1459	0,1459
0,50	0,1549	0,1549	0,1549	0,1549	0,1549
5,01	0,2289	0,2251	0,2229	0,2228	0,2228
5,50	0,3111	0,3111	0,3111	0,3111	0,3111

Conforme pode ser observado pela análise da Tabela 8.3, a convergência de 4 dígitos é obtido com apenas 5 termos na série.

Tendo obtido as derivadas espacial e temporal da pressão, é possível resolver o balanço de energia com vazões variáveis, através da solução apresentada na seção 6.1. A Figura 8.6 a temperatura no poço ($x = x_p$) como função do tempo para diferentes números de termos na série. Para obter esta solução, o termo advectivo foi desprezado, devido ao seu pequeno impacto, conforme mencionado na seção 6.1.2.

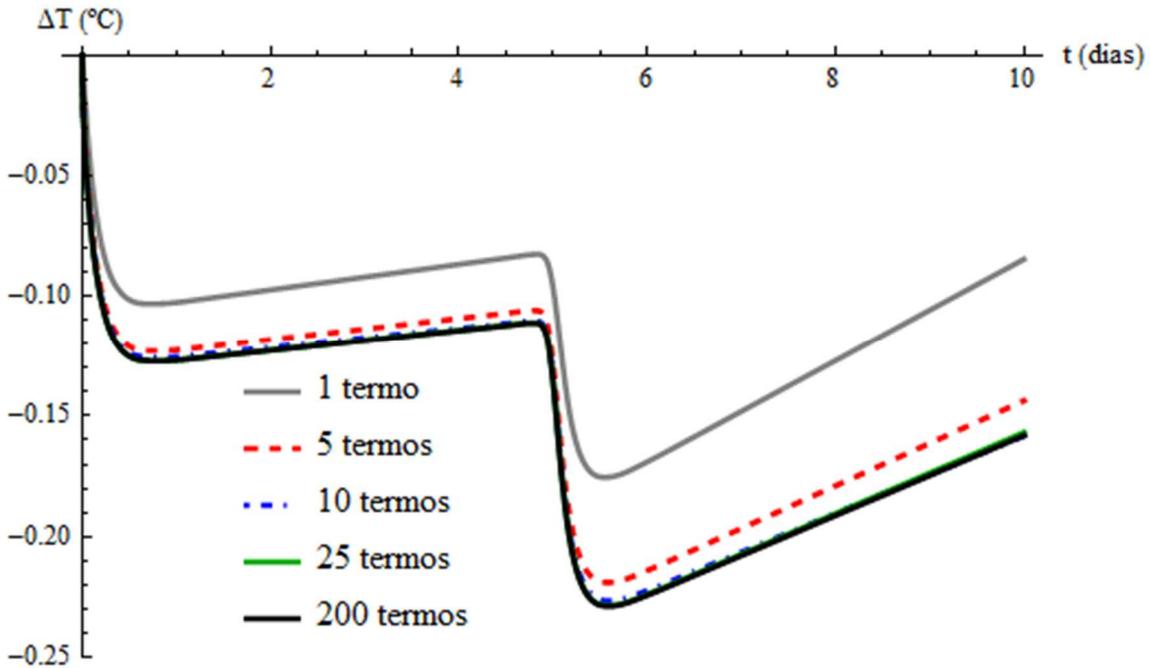


Figura 8.6 – Temperatura no poço ($x = x_p$) considerando vazão variável, com diferentes números de termos na expansão.

A análise da Figura 8.6 mostra que com 10 termos na série já se obtém convergência gráfica satisfatória da temperatura no poço. O comportamento térmico mostrado na Figura 8.6 mostra que quando ocorre a variação da vazão do poço, ocorre uma queda acentuada na temperatura do poço, causada pela expansão do fluido e da rocha. Esta redução da temperatura é seguida de um período de maior aquecimento quando comparado ao aquecimento observado antes do aumento da vazão. Tal comportamento é causado pelo aumento da dissipação viscosa ao submeter o poço à uma maior vazão de produção.

A Tabela 8.4 apresenta uma análise de convergência da temperatura para a posição do poço, $x = x_p$.

Tabela 8.4 – Convergência da temperatura na posição do poço considerando vazões variáveis.

Tempo, dias	$\Delta T, ^\circ C$						
	Número de Termos (N)						
	5	10	25	50	100	150	200
0,2	-0,097	-0,100	-0,101	-0,101	-0,101	-0,101	-0,101
0,5	-0,121	-0,124	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125
1	-0,122	-0,125	-0,127	-0,127	-0,127	-0,127	-0,127
2	-0,118	-0,121	-0,123	-0,123	-0,123	-0,123	-0,123
5.1	-0,169	-0,176	-0,178	-0,178	-0,178	-0,178	-0,178
5.2	-0,196	-0,204	-0,206	-0,206	-0,206	-0,206	-0,206
8	-0,179	-0,190	-0,191	-0,192	-0,191	-0,191	-0,191
10	-0,144	-0,158	-0,157	-0,159	-0,158	-0,158	-0,158

A Tabela 8.4 mostra que se obtém convergência de 3 casas decimais com 100 termos na série para todos os tempos avaliados.

A adoção da expressão (8.1) para representar vazões variáveis se mostrou uma alternativa de sucesso, evitando o uso do princípio da superposição de efeitos ao resolver a EDH por CITT e o balanço de energia por GITT.

8.2 CASO 2 – REDUÇÃO DA VAZÃO

Procurando estudar o comportamento térmico ao realizar uma redução na vazão do poço, iremos utilizar a mesma abordagem apresentada na seção 8.1, com os mesmos parâmetros da Tabela 8.1, variando apenas os valores de Q_1 e Q_2 . A Figura 8.7 e a Figura 8.8 apresentam a vazão e a pressão no poço ($x = x_p$).

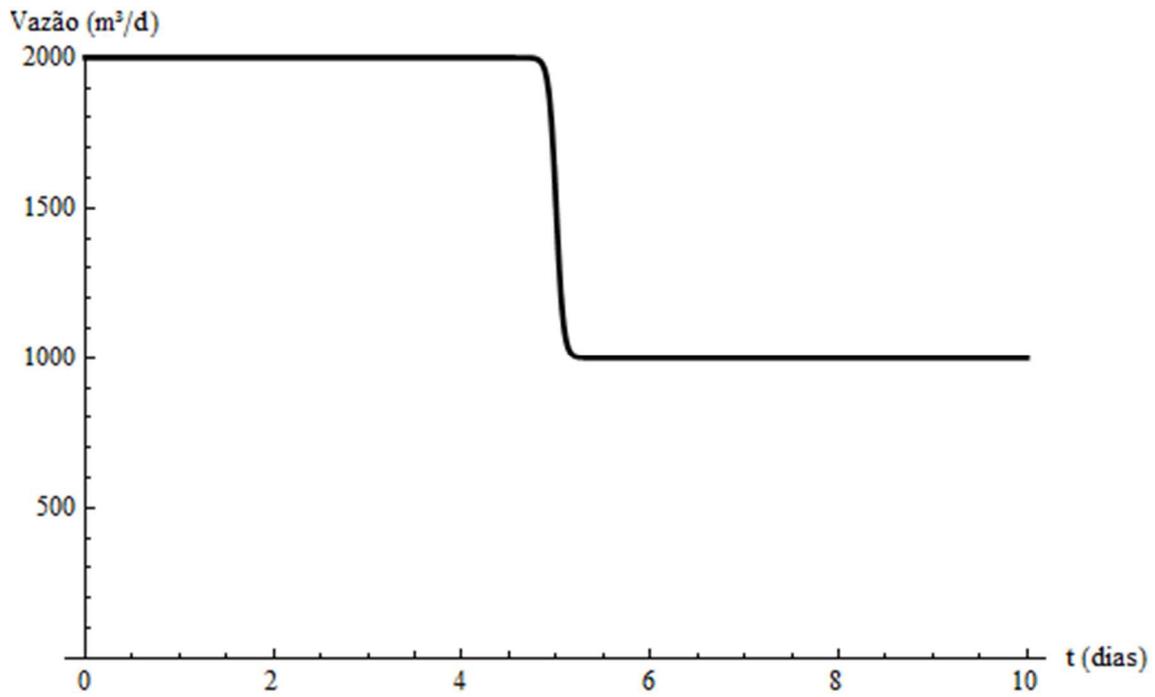


Figura 8.7 – Vazão do poço.

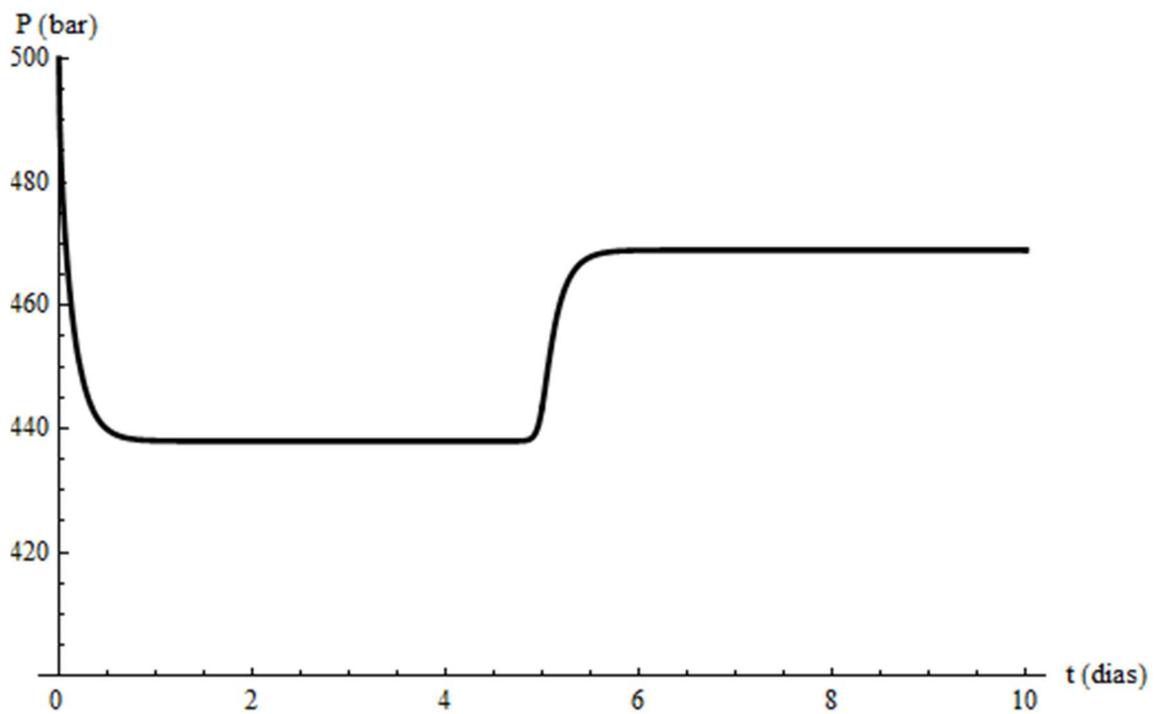


Figura 8.8 – Pressão do poço ($x = x_p$) com redução de vazão.

A Figura 8.9 apresenta a solução do balanço de energia com 200 termos na série. Assim como na seção 8.1, o termo advectivo foi desprezado.

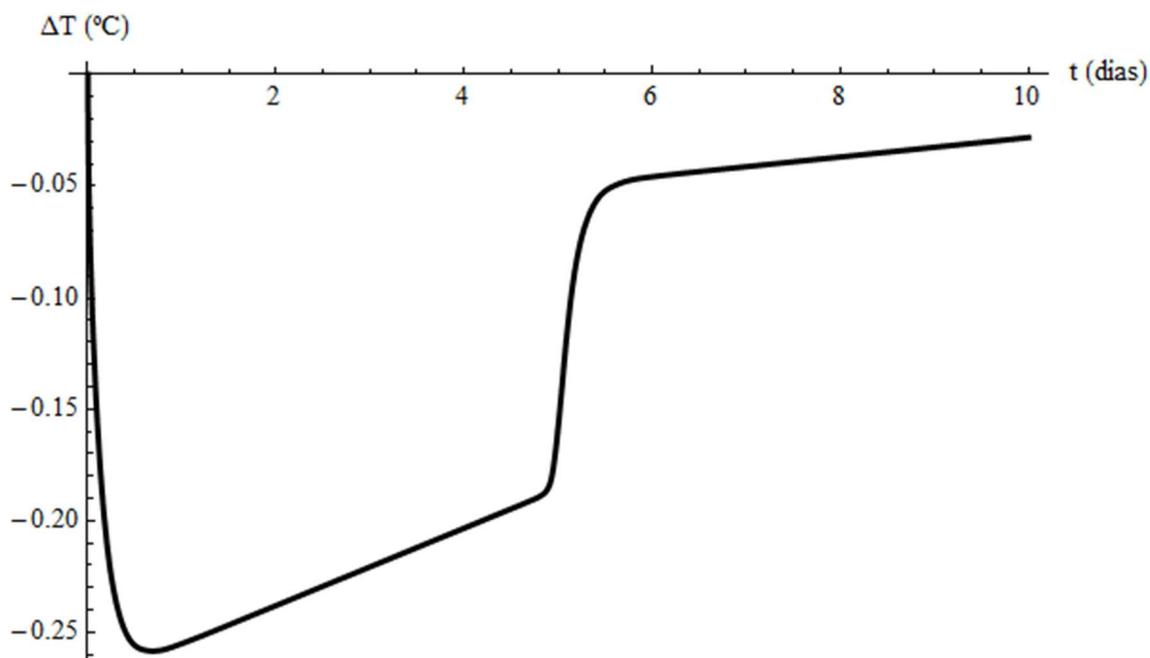


Figura 8.9 – Comportamento da temperatura no poço ($x = x_p$) com redução de vazão.

A Figura 8.9 mostra que quando ocorre a redução da vazão do poço, os efeitos são contrários aos observados na Figura 8.6.

A extensão da solução do balanço de energia considerando vazões variáveis apresentada neste capítulo abre a possibilidade de buscar um ajuste do comportamento térmico de um poço em testes sujeitos à vazões variáveis, bem como em situações normais de produção, visando a caracterização do reservatório.

9 IMPACTO DOS PARÂMETROS NA TEMPERATURA

Neste capítulo, a solução do balanço de energia desenvolvida anteriormente será empregada para avaliar o impacto dos parâmetros sobre a temperatura de fluxo em reservatórios de petróleo, procurando avaliar os parâmetros que mais afetam o comportamento térmico da temperatura de fundo em um poço de petróleo e que, teoricamente, podem ser estimados através da análise de dados de temperatura.

A avaliação dos impactos dos parâmetros será feita tendo como base as soluções desenvolvidas nas seções 6.1 e 7.1. O impacto de cada parâmetro será avaliado de forma individual, partindo de um caso base, que considera os parâmetros apresentados na Tabela 9.1.

Tabela 9.1 – Conjunto de dados do caso base do Capítulo 9.

<i>Parâmetro</i>	<i>Unidades métricas</i>	<i>Unidades convencionais</i>
Velocidade, $Q/L_z L_y$	$7,63889 \times 10^{-6}$ m/s	0,66 m/d
Permeabilidade, k	$1,97385 \times 10^{-14}$ m ²	20 mD
Porosidade, ϕ	25%	25%
Compressibilidade total, c_t	10^{-9} Pa ⁻¹	10^{-4} bar ⁻¹
Viscosidade, μ	10^{-3} Pa·s	1 cP
Pressão inicial, p_i	5×10^7 Pa	500 bar
Espessura, L_z	10 m	10 m
Comprimento em x , L_x	50 m	50 m
Comprimento em y , L_y	500 m	500 m
Posição do poço, x_p	0 m	0 m
Coefficiente de expansão térmica, β	$0,0008$ K ⁻¹	$0,0008$ °C ⁻¹
Temperatura inicial, T_i	350 K	76,85 °C
Compressibilidade da rocha, c_r	10^{-11} Pa ⁻¹	10^{-6} bar ⁻¹
Condutividade térmica do fluido, λ_f	0,16 W/(m·K)	0,16 W/(m·K)
Condutividade térmica da rocha, λ_r	3,0 W/(m·K)	3,0 W/(m·K)
Massa específica do fluido, ρ_f	750 kg/m ³	750 kg/m ³
Massa específica da rocha, ρ_r	2200 kg/m ³	2200 kg/m ³
Calor específico do fluido, C_{pf}	2200 J/(kg·K)	2200 J/(kg·K)
Calor específico da rocha, C_{pr}	1250 J/(kg·K)	1250 J/(kg·K)

O comportamento da pressão no poço para o caso base da tabela acima é apresentado na Figura 9.1.

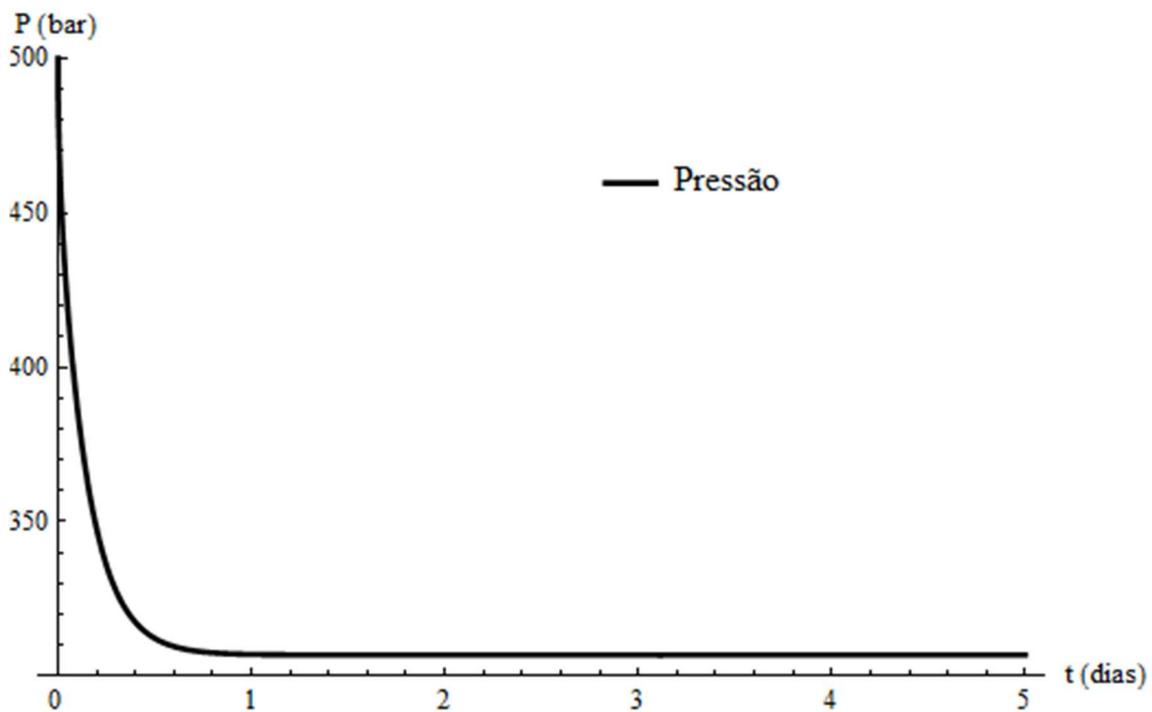


Figura 9.1 – Pressão no poço ($x = x_p$) como função do tempo (caso base).

9.1 IMPACTO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Nesta seção, será avaliado o impacto da condutividade térmica em problemas unidimensionais e bidimensionais.

9.1.1 Problema Unidimensional

Aplicando os mesmos parâmetros da Tabela 9.1 na solução unidimensional apresentada na seção 6.1, variando apenas os valores de λ_r , obtemos o resultado apresentado na Figura 9.2, que apresenta a variação da temperatura no poço ($x = x_p$) para diferentes valores do parâmetro λ_r . A solução é convergida, com 200 termos na série.

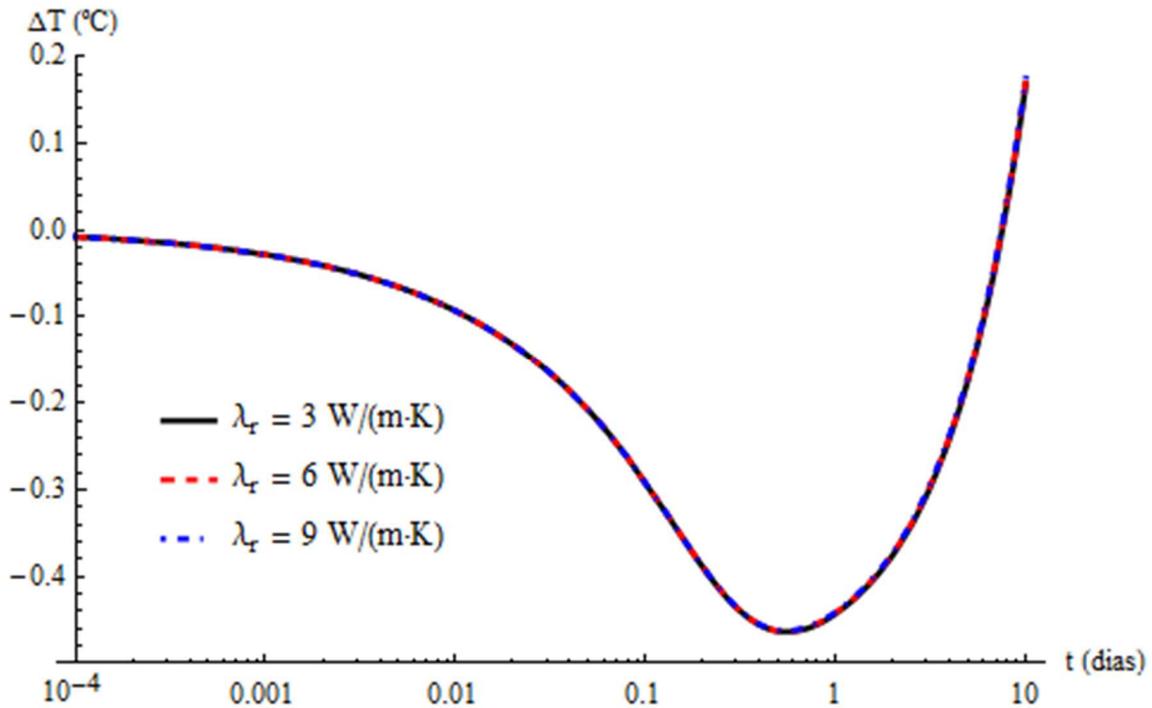


Figura 9.2 – Impacto da condutividade térmica da rocha sobre a temperatura medida no poço.

Conforme pode ser observado ao analisar a Figura 9.2, a variação da condutividade térmica no problema unidimensional não causou nenhum impacto na solução do balanço de energia, indicando que a condução no sentido do fluxo não é relevante para o problema, conforme já havia sido mencionado por Muradov & Davies (2011).

9.1.2 Problema Bidimensional

Procurando dar destaque às perdas de calor para as adjacências, de forma a permitir melhor avaliar o impacto da condutividade térmica em problemas bidimensionais, serão considerados os mesmos parâmetros da Tabela 9.1, com exceção da espessura L_z , que será $L_z = 2$ metros. Aplicando a solução desenvolvida na seção 7.1, obtemos o resultado apresentado na Figura 9.3, que apresenta o impacto da variação de λ_r na temperatura do poço ($x = x_p$), em posição z equivalente ao centro do reservatório. A solução é convergida, com 200 termos na série.

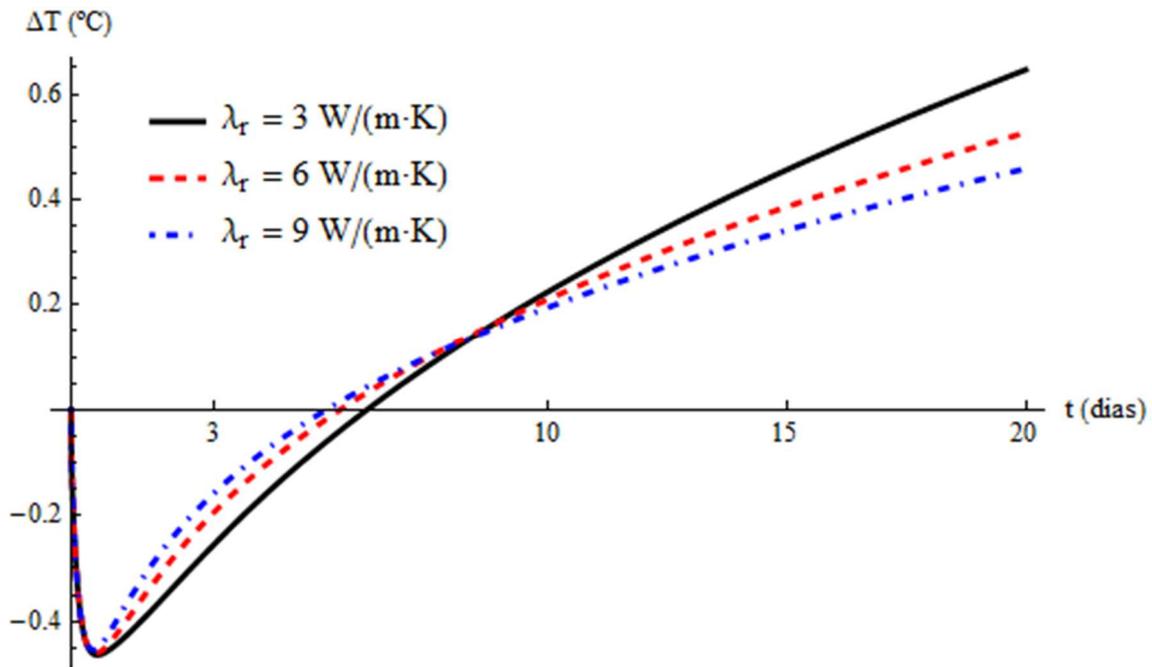


Figura 9.3 – Impacto da condutividade térmica da rocha sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$.

Conforme pode ser observado na análise da Figura 9.3, o aumento da λ_r faz com que para tempos curtos (neste caso, menores do que ~ 6 dias), as temperaturas aumentem, devido ao maior aporte de energia proveniente das formações rochosas adjacentes. Para tempos longos, onde o reservatório encontra-se mais quente do que as formações rochosas adjacentes, o aumento da condutividade térmica implica em menores aumentos de temperatura, visto que o reservatório irá perder mais calor para as adjacências. De uma maneira geral, o aumento da condutividade térmica causa uma atenuação das variações de temperatura causadas pela expansão/movimentação dos fluidos no interior do reservatório.

9.2 IMPACTO DAS TROCAS TÉRMICAS EM RESERVATÓRIOS DE DIFERENTES ESPESSURAS

Aplicando a solução desenvolvida na seção 7.1, obtemos o resultado apresentado na Figura 9.4, que apresenta a temperatura na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$ e ilustra o impacto das trocas térmicas com as camadas adjacentes para reservatórios de diferentes espessuras. A solução é convergida, com 200 termos na série.

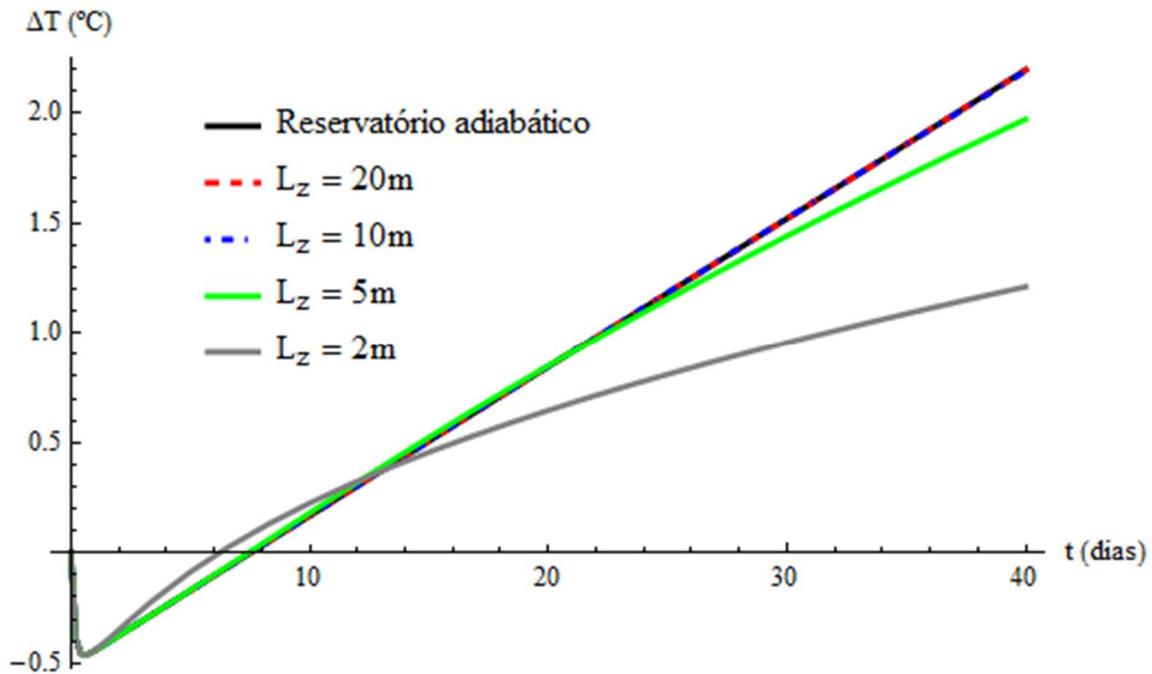


Figura 9.4 – Impacto da espessura do reservatório sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, \text{centro do reservatório})$.

Conforme pode ser observado ao analisar a Figura 9.4, para tempos menores do que 40 dias, a temperatura no centro de reservatórios com espessuras maiores do que 10 metros se comporta como se não houvesse perda de calor para as adjacências. No exemplo estudado, o efeito das trocas térmicas com as adjacências se manifestou apenas para reservatórios de 2 e 5 metros. Este comportamento é causado pela menor relação área de troca térmica / volume de reservatório.

É evidente que, mesmo para reservatórios espessos, as trocas térmicas terão efeitos sobre o comportamento térmico das regiões localizadas próximas ao topo e a base do reservatório, conforme pode ser observado na Figura 9.5, que apresenta a temperatura na posição $(x, z) = (x_p, 1 \text{ m abaixo do topo do reservatório})$ para reservatórios de diferentes espessuras.

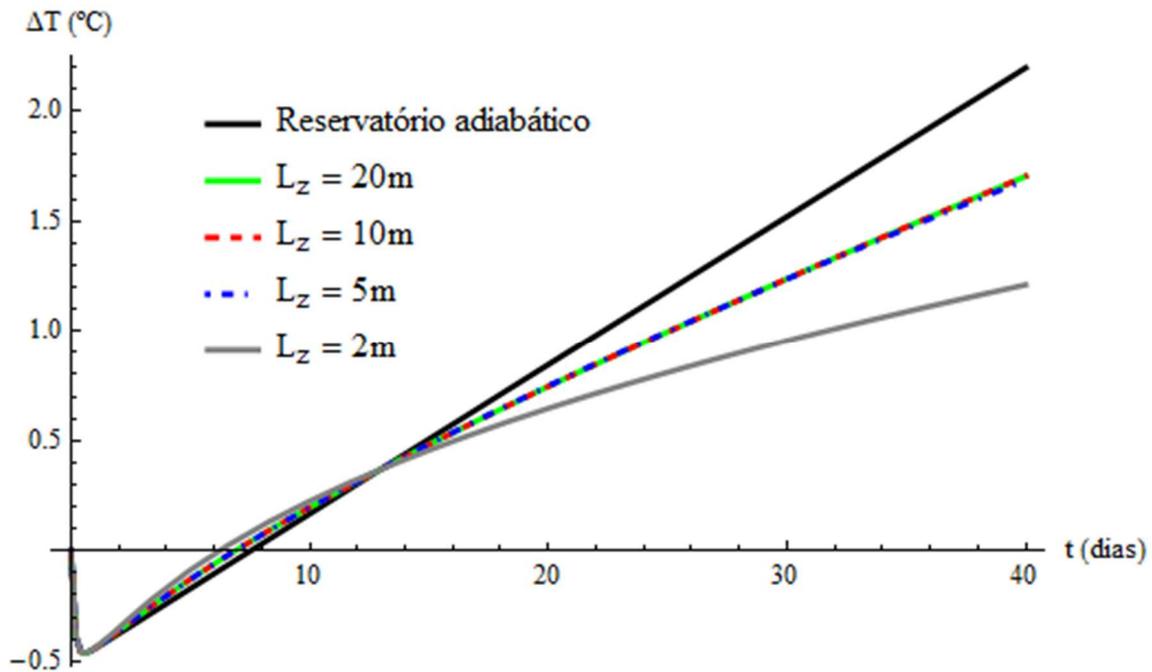


Figura 9.5 – Impacto da espessura do reservatório sobre a temperatura medida na posição $(x, z) = (x_p, 1 \text{ m abaixo do topo do reservatório})$.

Tendo em conta a pequena influência das trocas térmicas sobre o comportamento térmico em reservatórios com espessuras relativamente modestas, nas seções subsequentes, o impacto dos parâmetros será avaliado considerando a solução apresentada na seção 6.1 (caso unidimensional).

9.3 COMPRESSIBILIDADE DA ROCHA

Nesta seção, será avaliado o impacto da expansão da rocha (2º termo do lado direito da equação (3.19)) sobre a temperatura do poço. Procurando isolar o efeito da expansão da rocha na temperatura, a compressibilidade total do sistema será considerada independente da compressibilidade da rocha. Considerando os parâmetros da Tabela 9.1, com diferentes valores de compressibilidade da rocha, obtemos o resultado apresentado na Figura 9.6.

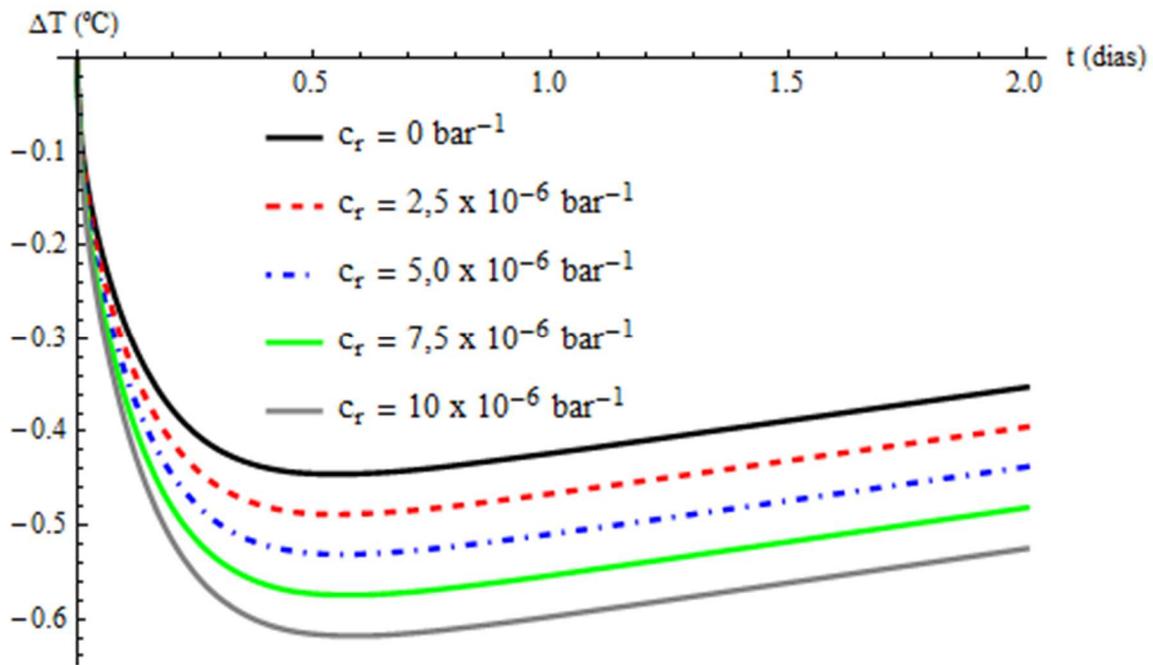


Figura 9.6 – Impacto da compressibilidade da rocha sobre a temperatura medida no poço.

Os resultados apresentados na Figura 9.6 mostram que a compressibilidade da rocha, a depender da sua magnitude, é um fator importante na modelagem da temperatura em poços de petróleo, afetando o resfriamento que ocorre em tempos curtos. É possível perceber também que após o a pressão estabilizar ($t > 1$ dia), o coeficiente angular da temperatura com o tempo é independente da compressibilidade da rocha, visto que o termo fonte associado às variações espaciais da pressão é independente da compressibilidade da rocha, conforme pode ser observado ao analisar a equação (3.19).

Os resultados da Figura 9.6 indicam que, ao menos em teoria, é possível usar dados de temperatura para estimar a compressibilidade da rocha. Esta aplicação é de grande interesse para a indústria, tendo em conta que as medidas de compressibilidade da rocha são normalmente realizadas em laboratório através de testemunhos, havendo poucos métodos para determinação da compressibilidade da rocha *in situ*. Ao coletar o testemunho, o estado de tensões original não é preservado, o que pode causar importantes alterações nas medidas de compressibilidade da rocha feitas em laboratório frente à compressibilidade existente em condições de subsuperfície.

9.4 COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA DO FLUIDO

Considerando os parâmetros da Tabela 9.1, com diferentes valores para o coeficiente de expansão térmica do fluido, obtemos o resultado apresentado na Figura 9.7.

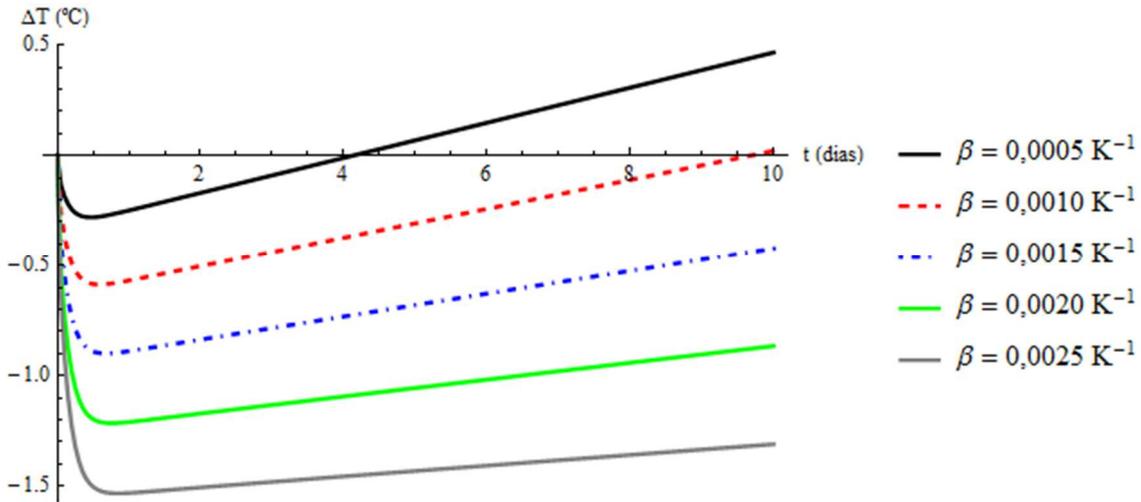


Figura 9.7 – Impacto do coeficiente de expansão térmica do fluido sobre a temperatura medida no poço.

A análise da Figura 9.7 revela dois aspectos importantes do impacto do coeficiente de expansão térmica sobre o comportamento térmico do poço. Para tempos curtos, o aumento de β amplifica as variações de temperatura causadas pela expansão dos fluidos, como era de se esperar ao analisar o 1º termo do lado direito da equação (3.19). Para tempos longos, o aumento de β minimiza o aumento de temperatura causado pelo 3º termo do lado direito da equação (3.19), que é proporcional a $(1 - \beta T_i)$. Para valores de β onde $(1 - \beta T_i)$ passa a ser positivo (situação não apresentada acima), este termo passa a causar resfriamento dos fluidos, como é comumente observado em poços de petróleo quando ocorre a irrupção de gás livre nos poços (Deucher, et al., 2011).

9.5 VARIAÇÕES DE TEMPERATURA AO REDOR DO POÇO E SEU EFEITO NA RESPOSTA DA TEMPERATURA

Durante a perfuração e completção de poços de petróleo, é comum a ocorrência de perturbações na temperatura do reservatório nas imediações do poço, perturbações estas causadas por trocas térmicas entre o reservatório e o fluido de perfuração/completção

ou pela invasão dos fluidos de perfuração/completação, que normalmente se encontra em temperatura inferior à temperatura do reservatório.

Procurando avaliar o impacto destas perturbações sobre a temperatura registrada no poço durante o fluxo, será avaliado o problema da seção 6.1 alterando a condição inicial dada pela equação (6.4). Procurando representar uma alteração da temperatura nas imediações do poço, a condição inicial será dada por:

$$T(x, 0) = T_1 + \frac{(T_{res} - T_1)}{e^{-\omega \cdot (x - x_c)}}, \text{ em } t = 0 \quad (9.1)$$

A condição inicial transformada, equação (6.16), fica sendo:

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = \frac{\bar{\rho} \bar{C}_p}{\lambda} \int_0^{L_x} \frac{\cos \left[\frac{(2i - 1)\pi}{2L_x} x \right]}{N_{x,i}^{1/2}} \times \left(T_1 + \frac{(T_{res} - T_1)}{e^{-\omega \cdot (x - x_c)}} \right) dx, \quad i = 1, 2 \dots \quad (9.2)$$

Considerando a equação (9.1) e os parâmetros da Tabela 9.2, as diferentes condições iniciais que serão avaliadas são apresentadas na Figura 9.8.

Tabela 9.2 – Parâmetros da equação (9.1) para diferentes condições iniciais.

Condição Inicial	T_1 (K)	ω (m^{-1})	x_c (m)
CI 1	0	5	0,2
CI 2	-0,2	5	0,2
CI 3	-0,4	5	0,5
CI 4	-0,5	3	1,0
CI 5	-0,5	2	2,0

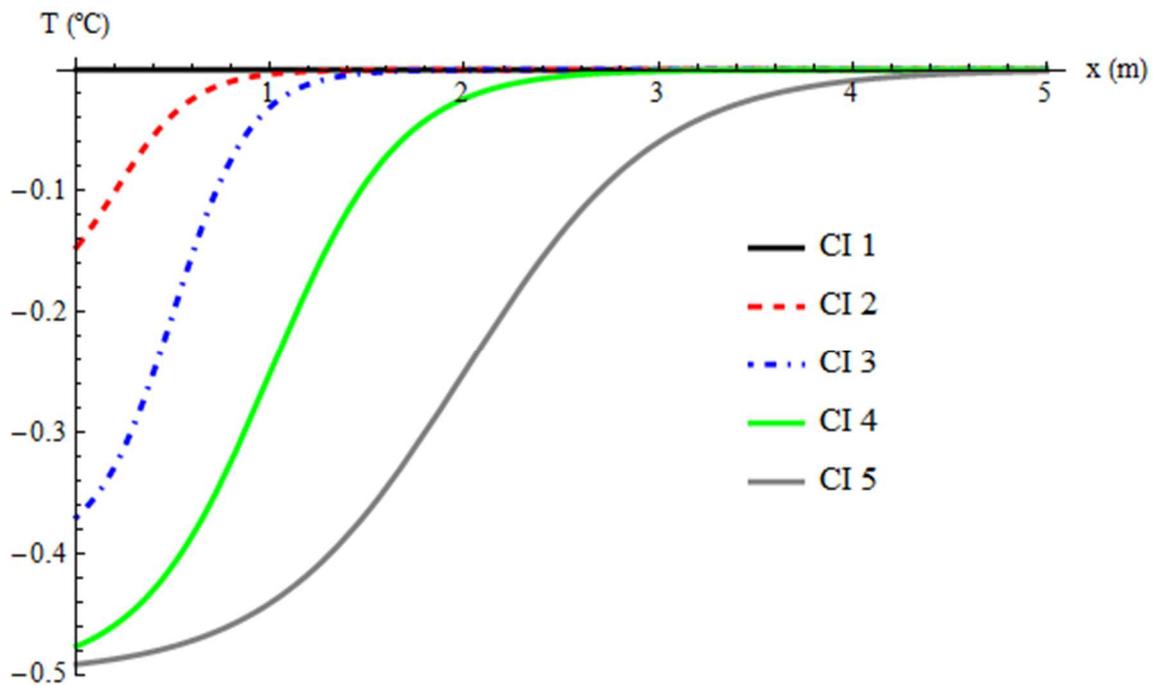


Figura 9.8 – Condições iniciais procurando representar perturbações de temperatura causadas durante a construção do poço.

Resolvendo o balanço de energia usando o desenvolvimento da seção 6.1, variando apenas a condição inicial, obtemos os resultados da Figura 9.9, que mostra as variações de temperatura no poço para as condições iniciais apresentadas na Figura 9.8.

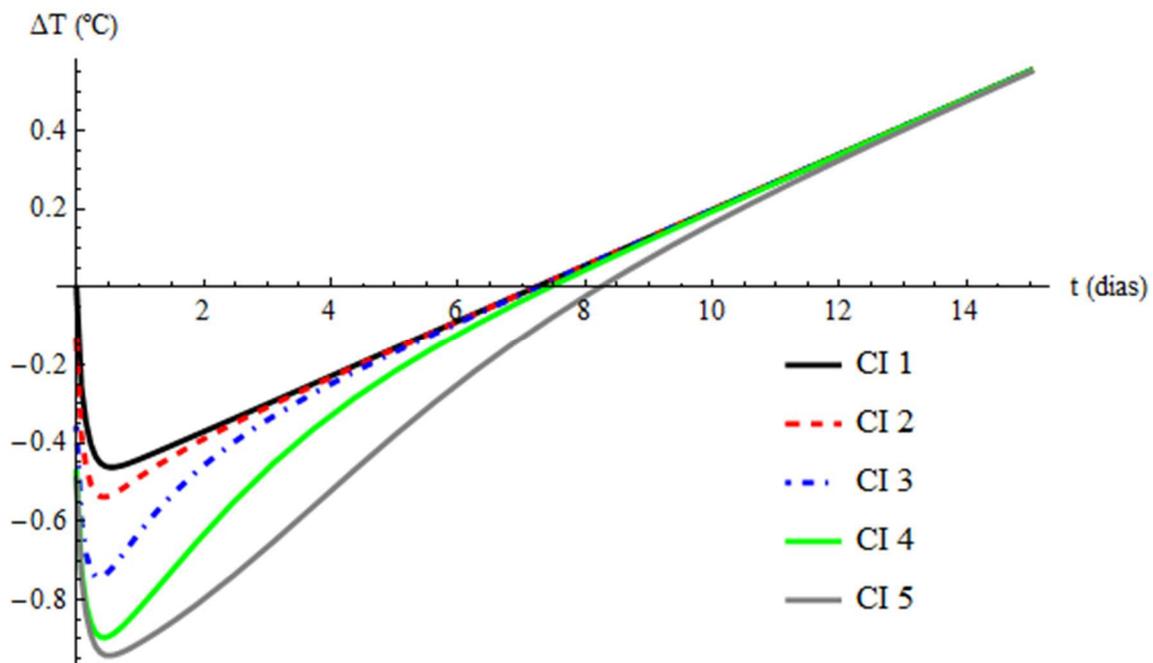


Figura 9.9 – Impacto de diferentes condições iniciais sobre a temperatura no poço.

Analisando a Figura 9.9, percebe-se que desvios da temperatura inicial, mesmo que pequenos, afetam significativamente o comportamento térmico de um poço, merecendo destaque a maior taxa de aumento de temperatura após o período inicial de resfriamento. Estes desvios, se não considerados adequadamente na interpretação dos dados de temperatura, podem levar à erros na interpretação dos dados e estimativas de parâmetros da formação.

Ao considerar as condições iniciais não uniformes dadas acima, o termo advectivo, que tinha se mostrado pouco importante para casos onde a condição inicial era de temperatura uniforme, passou a ter grande importância no resultado da solução, conforme pode ser observado na Figura 9.10, que mostra a temperatura no poço ($x = x_p$) com a condição inicial 3 da Tabela 9.2, considerando e desprezando o termo advectivo.

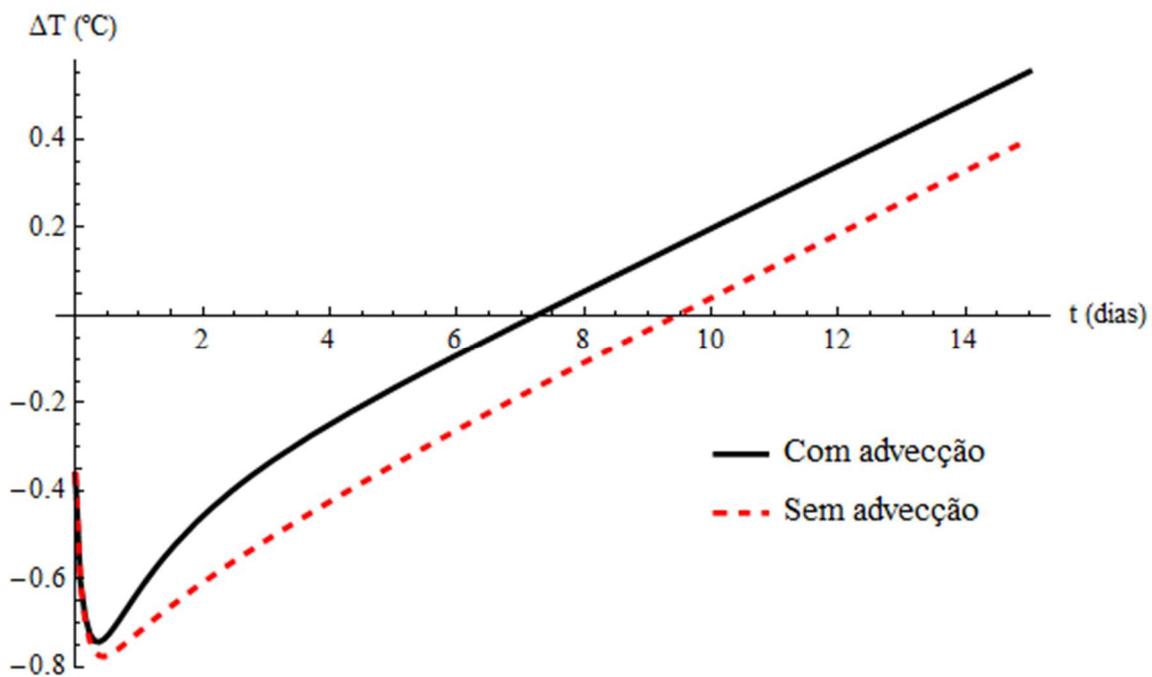


Figura 9.10 – Temperatura no poço ($x = x_p$) com e sem termo advectivo para a condição inicial 3.

Cabe lembrar que nas análises realizadas nesta seção, não foram consideradas as variações que ocorrem nas propriedades dos fluidos nas imediações do poço quando ocorre invasão da formação por fluido de perfuração/completação. Entretanto, mesmo com esta simplificação, é possível concluir que a condição inicial tem grande impacto sobre o comportamento térmico do poço.

9.6 IMPACTO DA MOBILIDADE (k/μ)

Diferentemente dos parâmetros avaliados nas seções anteriores, a mobilidade (k/μ) afeta o comportamento de pressão do poço. Assim sendo, a Figura 9.11 apresenta o comportamento de pressão para diferentes mobilidades, considerando os demais parâmetros os mesmos dados na Tabela 9.1.

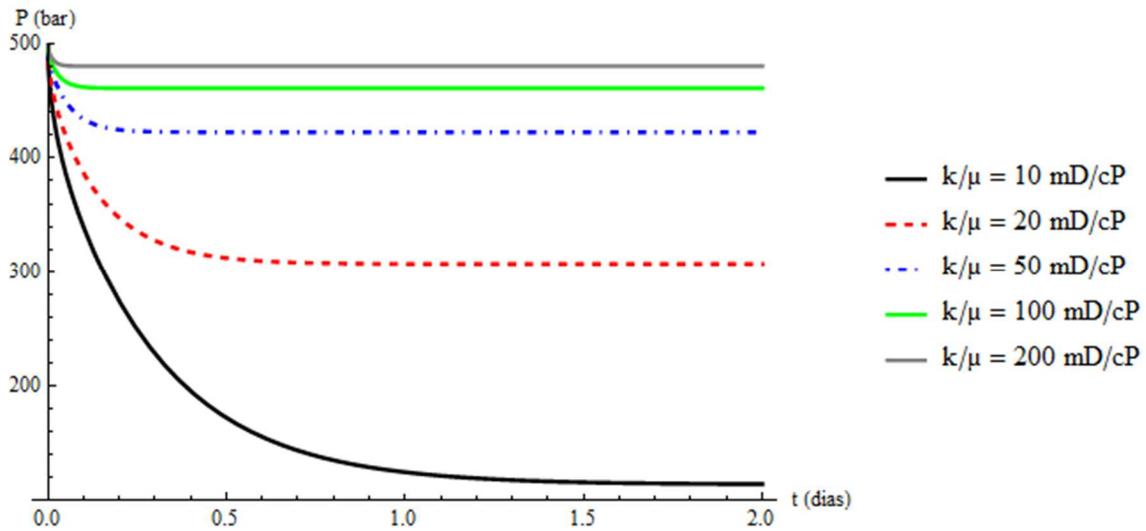


Figura 9.11 – Impacto da mobilidade sobre o comportamento de pressão do poço.

A Figura 9.12 apresenta o comportamento da temperatura no poço para diferentes mobilidades.

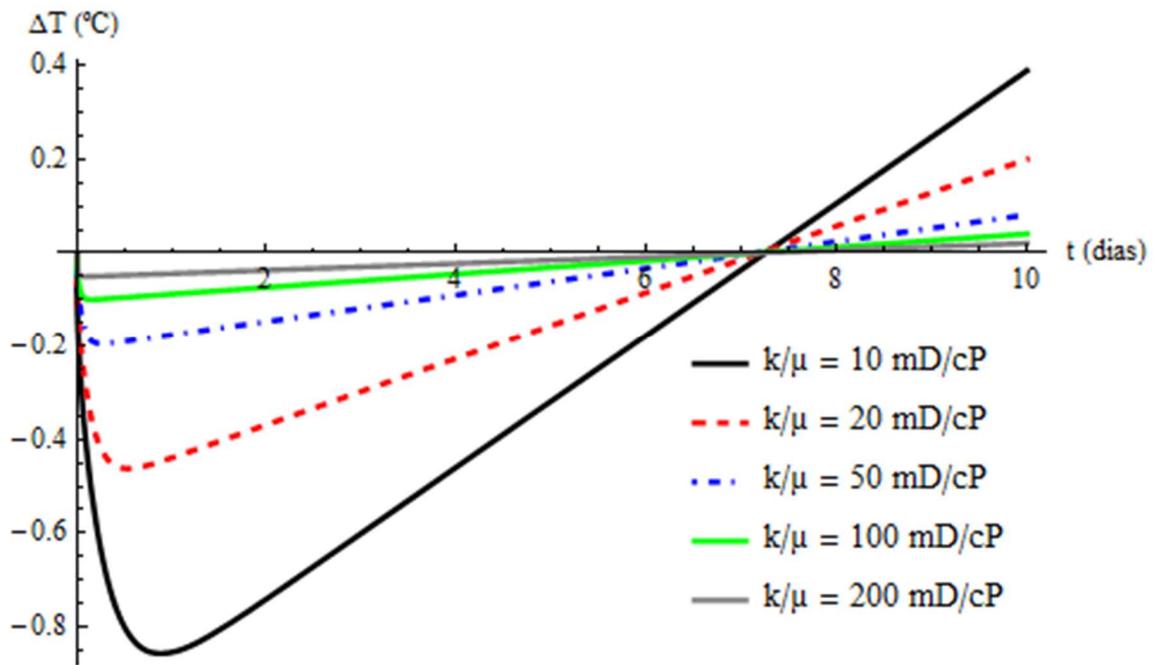


Figura 9.12 – Impacto da mobilidade sobre a temperatura no poço ($x = x_p$).

A análise da Figura 9.12 mostra que reservatórios com menor razão mobilidade, por sofrerem as maiores variações de pressão, são os que apresentam as maiores variações de temperatura. Além disto, o coeficiente angular da reta formada entre temperatura e tempo para $t > 2$ dias é inversamente proporcional à mobilidade, conforme pode ser observado na Figura 9.13, que apresenta nos pontos vermelhos os coeficientes angulares obtidos a partir da análise dos dados da Figura 9.12 e em preto a reta que melhor se ajusta a estes pontos ($R^2 = 0,9999$).

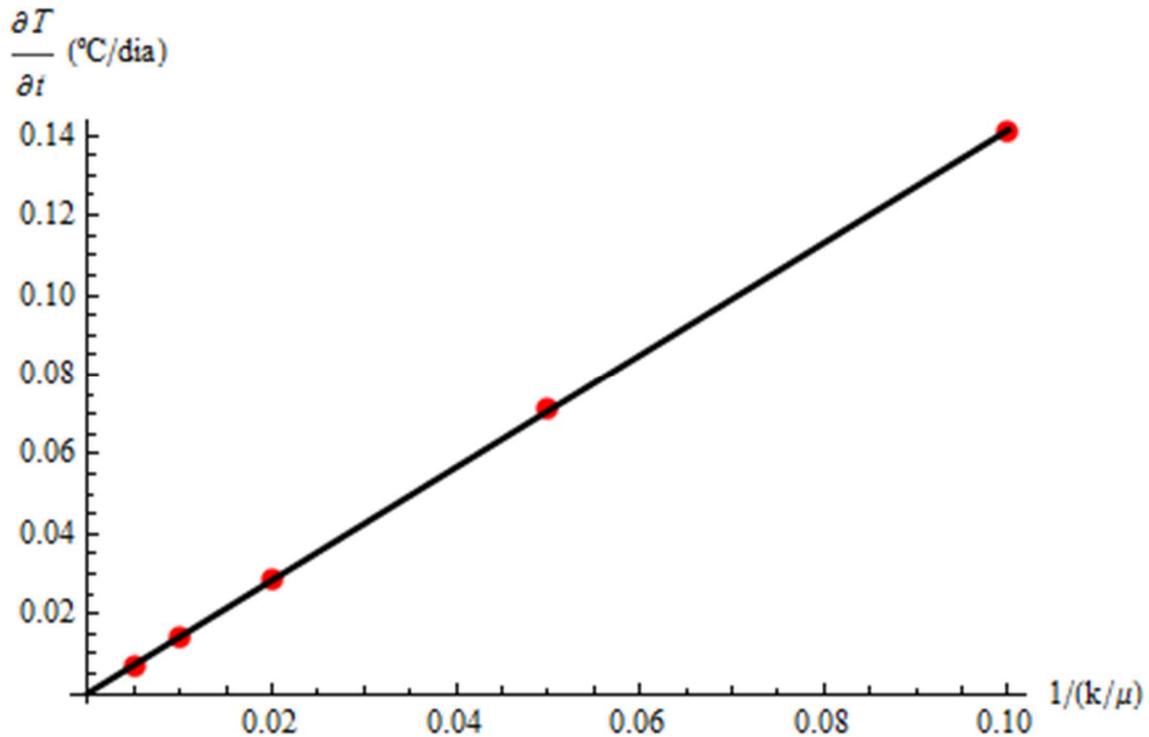


Figura 9.13 – Relação linear entre o gradiente de temperatura com o tempo ($t > 2$ dias) e o inverso da mobilidade.

Este resultado indica que a análise de dados transientes de temperatura pode atuar como um dado complementar aos já tradicionalmente empregados dados de pressão para a caracterização de reservatório.

É importante reforçar que o impacto da mobilidade sobre a temperatura se manifesta por causa das variações que a mobilidade causa no comportamento de pressão. Conforme pode ser observado na análise da (3.19), não há dependência direta do balanço de energia com a mobilidade.

9.7 IMPACTO DA VAZÃO

Procurando avaliar o impacto de diferentes vazões sobre o comportamento térmico, serão mantidos os parâmetros da Tabela 9.1, variando apenas a velocidade do escoamento definida por $v = Q/(L_z L_y)$. A Figura 9.14 apresenta o comportamento de pressão para diferentes valores de velocidade (vazão).

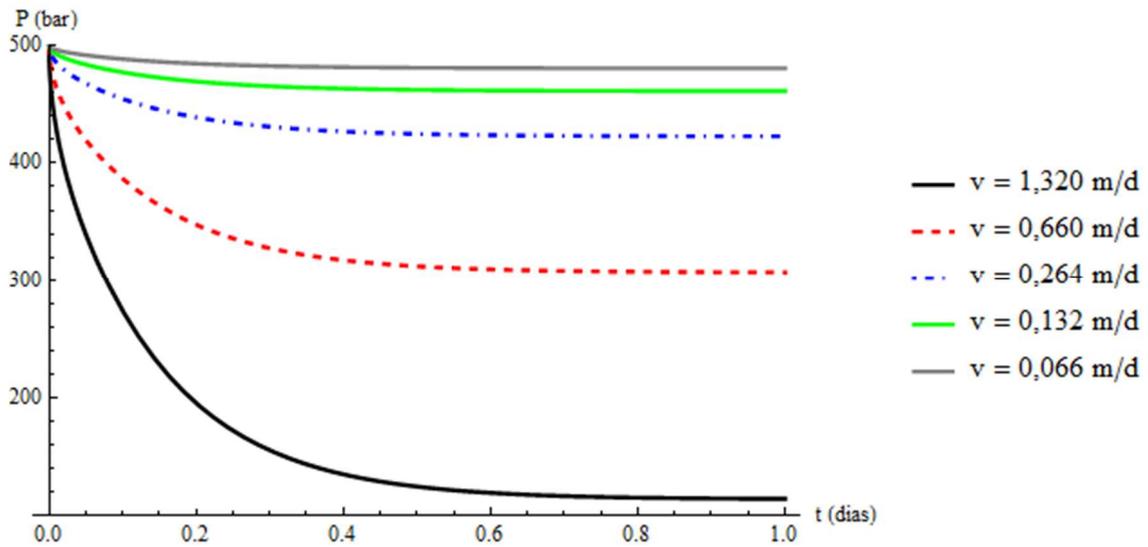


Figura 9.14 – Impacto da velocidade (vazão) sobre o comportamento de pressão do poço.

Para permitir uma comparação do impacto da vazão com o impacto da mobilidade, as variações de vazão utilizadas na análise ocorrem na mesma proporção do que as variações da mobilidade. Ao comparar o resultado da Figura 9.11 e da Figura 9.14, observa-se que o estado estacionário de pressão atingido é o mesmo, ocorrendo, entretanto, alterações no transiente de pressão devido às variações da difusividade hidráulica do reservatório ao variar a mobilidade.

A Figura 9.15 apresenta o comportamento da temperatura no poço para as diferentes velocidades (vazões).

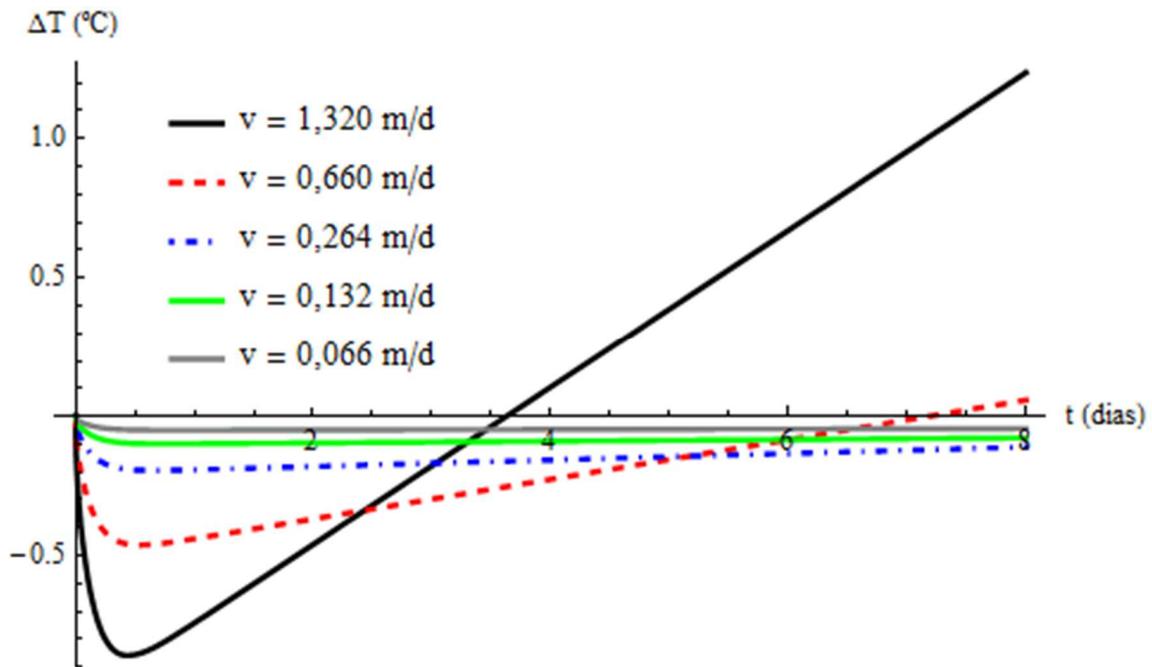


Figura 9.15 – Impacto da velocidade (vazão) sobre a temperatura no poço.

A análise da Figura 9.15 mostra que quanto maior a vazão, maiores serão as variações de temperatura. Ao comparar as variações de temperatura observadas na Figura 9.12 e na Figura 9.15, percebe-se que a dependência da temperatura com a vazão é mais forte do que a dependência da temperatura com a mobilidade.

Existe uma relação diretamente proporcional entre o coeficiente angular que descreve as variações da temperatura para tempos longos e o quadrado da velocidade (vazão), conforme pode ser observado na Figura 9.16, que apresenta nos pontos vermelhos os coeficientes angulares obtidos a partir da análise dos dados da Figura 9.15 e em preto a reta que melhor se ajusta a estes pontos ($R^2 = 0,9999$).

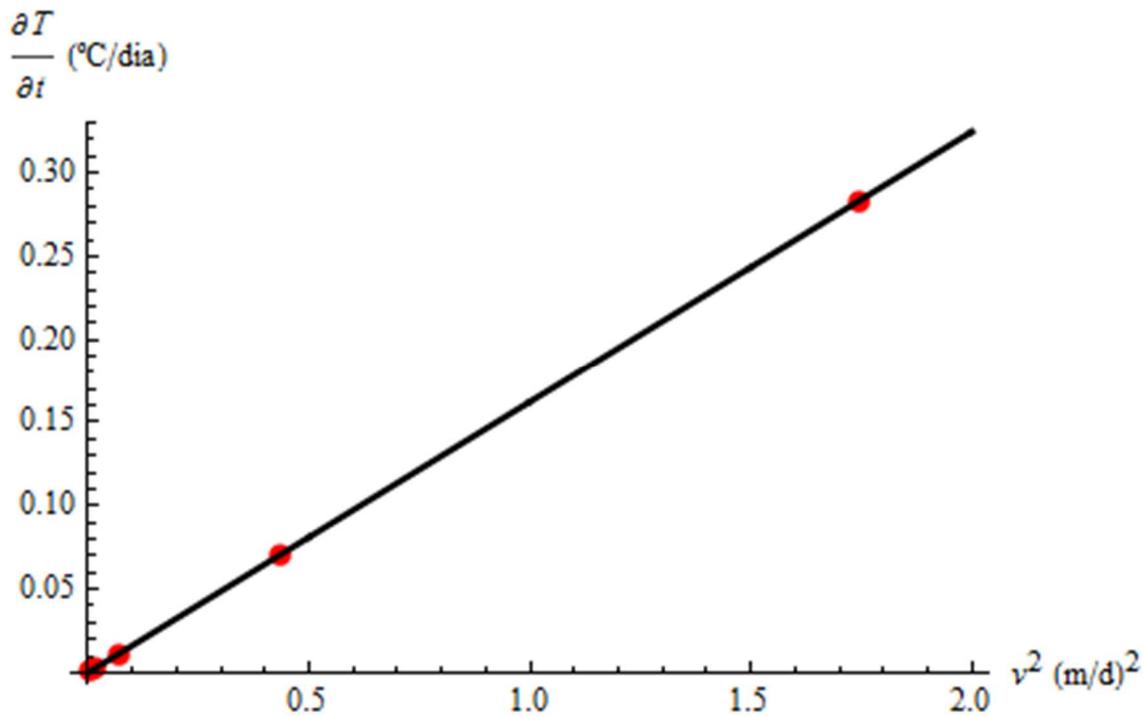


Figura 9.16 – Relação linear entre o gradiente de temperatura com o tempo ($t > 2$ dias) e o quadrado da velocidade.

Esta forte dependência das variações de temperatura com a vazão indica que a análise de dados de temperatura pode ser empregada para realizar medições indiretas da vazão de poços. Atualmente, já são feitas perfilagens de produção em poços baseando-se na medição de temperatura de forma distribuída ao longo da formação, sendo esta aplicação fundamentada na forte relação existente entre vazão e temperatura, conforme pode ser observado na Figura 9.16.

9.8 IMPACTO DA POROSIDADE

A Figura 9.17 apresenta o comportamento de pressão para diferentes valores de porosidade, considerando os demais parâmetros como sendo os mesmos da Tabela 9.1.

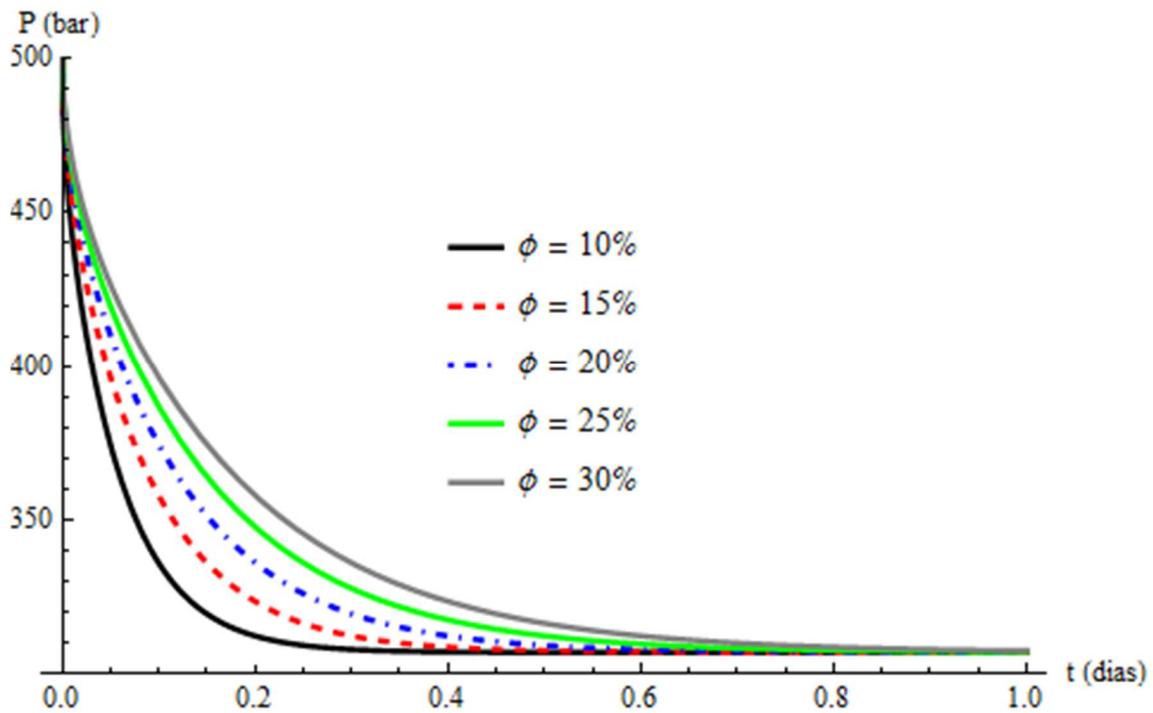


Figura 9.17 – Impacto da porosidade sobre o comportamento de pressão do poço.

Conforme pode ser observado, o estado estacionário de pressão atingido é o mesmo, com pequenas variações no transiente de pressão, causado por variações na difusividade hidráulica do reservatório com a variação da porosidade.

A Figura 9.18 apresenta o comportamento da temperatura no poço para as diferentes porosidades.

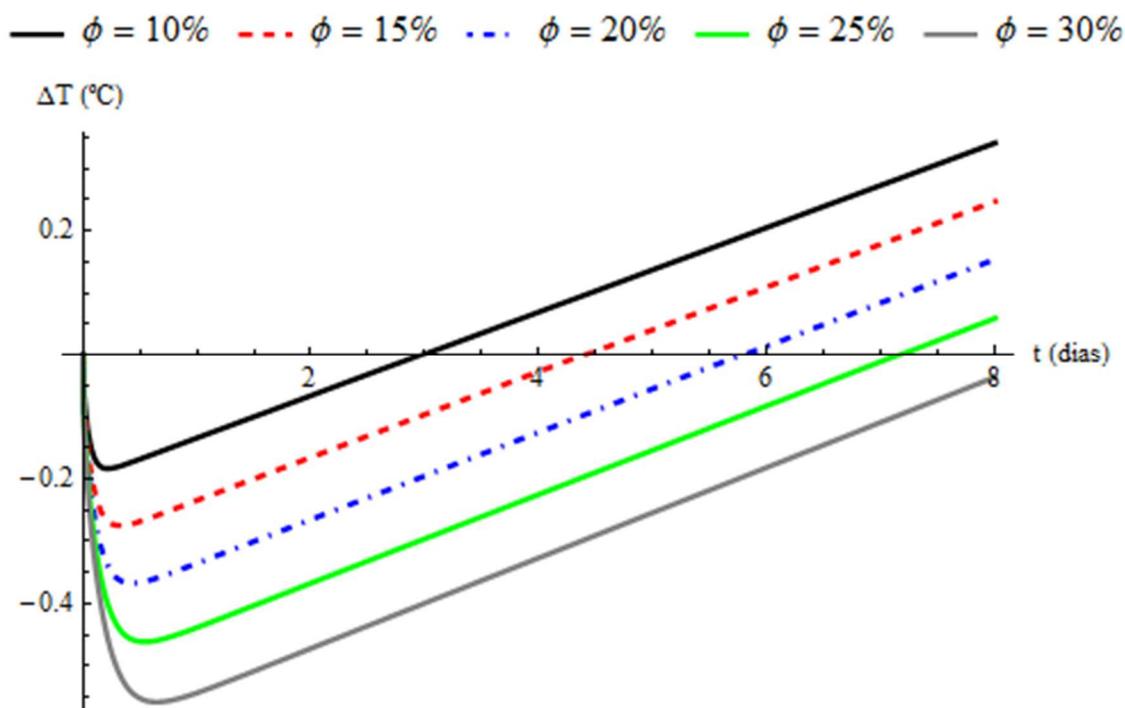


Figura 9.18 – Impacto da porosidade sobre o comportamento da temperatura do poço.

A análise da Figura 9.18 mostra que reservatórios com maior porosidade tendem a sofrer um maior resfriamento inicial causado pela expansão dos fluidos e das rochas. Este efeito é causado por dois motivos. Primeiramente, o termo fonte associado à expansão do fluido (que geralmente é mais forte do que a expansão da rocha) é proporcional à porosidade do meio, assim sendo, quanto maior a porosidade, maiores serão as variações iniciais da temperatura. Além disto, formações mais porosas possuem uma inércia térmica menor do que formações com menor porosidade ($\rho_r C_{pr} > \rho_f C_{pf}$), fazendo com que as variações de temperatura tendam a ser maiores em reservatórios com maiores porosidades (mantidos os demais parâmetros).

10 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

10.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida e validada uma aplicação inédita Técnica da Transformada Integral Generalizada para resolver o balanço de energia em reservatórios de petróleo. A solução considera os efeitos térmicos causados pela expansão dos fluidos e da rocha, bem como os efeitos de dissipação viscosa, abrindo a perspectiva de obtenção de soluções computacionalmente exatas para um problema que tem recebido crescente atenção na Engenharia de Petróleo.

Soluções para diferentes condições de contorno e posições do poço no interior do reservatório foram desenvolvidas para problemas uni e bidimensionais, sendo o problema bidimensional, que considera as trocas térmicas com as formações rochosas impermeáveis adjacentes, resolvido através de uma formulação de domínio único, permitindo resolver o balanço de energia no meio poroso e nas formações impermeáveis adjacentes em um único domínio espacial.

A aplicação da solução do balanço de energia para casos onde dois ou mais reservatórios hidraulicamente isolados interagem termicamente através das camadas impermeabilizantes foi desenvolvida. Os resultados obtidos indicam que as interações térmicas entre camadas produtoras hidraulicamente isoladas podem ser relevantes na interpretação de dados de temperatura em poços de petróleo.

Foi apresentada a extensão da solução para casos com vazão variável, apresentando exemplos da solução para variações em degrau da vazão. A solução desenvolvida confere a flexibilidade de escolher qualquer função diferenciável em todo o domínio do tempo para representar o comportamento de vazão com o tempo.

Uma análise do impacto de diferentes parâmetros sobre o comportamento térmico do poço foi realizada, merecendo destaque os impactos causados por perturbações da temperatura geotérmica, que podem ser causadas pela perfuração e completação do

poço. Os resultados mostraram que pequenas alterações na condição inicial do problema podem ter um importante impacto sobre o comportamento térmico do poço.

O impacto da compressibilidade da rocha sobre o comportamento térmico do poço indica que é possível, ao menos em teoria, usar dados de temperatura para estimar a compressibilidade da rocha *in situ*. O impacto da porosidade também revelou que a análise de dados de temperatura é uma ferramenta promissora para a estimativa de tal parâmetro, já que o impacto da porosidade sobre a temperatura se mostrou mais marcante do que sobre a pressão.

Uma das principais dificuldades encontradas neste trabalho foi a convergência da derivada espacial da pressão. Este problema foi contornado através do uso do balanço integral, que se mostrou uma técnica extremamente apropriada para aceleração da convergência de expansões em autofunções. Ademais, a resolução da equação da difusividade através da técnica da transformação integral se mostrou como uma alternativa mais abrangente e flexível do que as soluções normalmente empregadas na literatura clássica de engenharia de reservatórios, tendo potencial de aplicação na área de avaliação de formações e interpretação de testes de pressão em poços.

As aplicações da solução do balanço de energia apresentadas consideram o escoamento linear de fluidos no interior do reservatório, sendo assim, a solução possui aplicação direta na interpretação de dados de temperatura em poços horizontais, bem como em outras geometrias onde ocorra escoamento linear, como, por exemplo, escoamento em fraturas. Entretanto, a solução do balanço de energia apresentada é geral, permitindo sua aplicação em problemas multidimensionais, com diferentes condições de contorno, bem como a utilização de outros sistemas de coordenadas ortogonais, inclusive o radial, caso este que também é de grande interesse prático para a indústria.

A solução obtida contribui para o desenvolvimento da análise de temperatura em poços de petróleo, visto que é a primeira solução computacionalmente exata e diferenciável em todo o domínio apresentada para tal problema. A incorporação dos efeitos de compressibilidade da rocha ainda não havia sido feita nas soluções analíticas apresentadas em trabalhos anteriores.

10.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As recomendações que surgem das observações e estudos realizados neste trabalho são sumarizadas abaixo:

- estender a solução proposta para problemas em coordenadas cartesianas que considerem escoamento do fluido bi/tridimensional;
- aplicar a solução do balanço de energia apresentada para problemas em coordenadas radiais, já que este é um desenvolvimento importante para a interpretação de dados de temperatura em poços verticais;
- o potencial de aplicação da transformação integral para resolver a equação da difusividade hidráulica ainda é pouco explorado, tendo sido encontrados exemplos na literatura apenas para meio homogêneos. Uma proposta para trabalhos futuros é resolver a EDH para meios heterogêneos, procurando representar, por exemplo, a ocorrência de dano no poço, podendo tal solução da EDH então ser utilizada na solução do balanço de energia apresentada neste trabalho;
- implementar o reordenamento dos autovalores, permitindo acelerar a convergência da solução proposta em casos bi e tridimensionais;
- implementar a solução do balanço de energia através da GITT considerando propriedades térmicas variáveis;
- utilizar a formulação de domínio único para aplicar a GITT na solução de problemas difusivo-convectivos que representem processos de recuperação de petróleo através de métodos térmicos;
- aplicar a solução proposta para problemas inversos, visando a caracterização de reservatórios.

BIBLIOGRAFIA

Al-Hadhrami, A., Elliot, L. & Ingham, D., 2003. "A New Model for Viscous Dissipation in Porous Media Across a Range of Permeability Values". *Transport in Porous Media*.

Almeida, A., 1994. *Aplicação da Técnica da Transformação Integral a Problemas de Injeção de Traçadores em Reservatórios de Petróleo*. M.Sc., dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Almeida, A. & Cotta, R., 1995. "Integral Transform Methodology for Convection-Diffusion Problems in Petroleum Reservoir Engineering". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.

Almeida, A. & Cotta, R., 1996. "Analytical Solution of the Tracer Equation for the Homogeneous Five-Spot Problem". *SPE Journal*.

App, J., 2010. "Nonisothermal and Productivity Behavior of High-Pressure Reservoirs". *SPE Journal*.

App, J., 2013. "Influence of Hydraulic Fractures on Wellbore/Sandface Temperatures During Production". *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.

App, J. & Yoshioka, K., 2013. "Impact of Reservoir Permeability on Flowing Sandface Temperatures: Dimensionless Analysis". *SPE Journal*.

Atkinson, P. & Ramey, H., 1977. "Problems of Heat Transfer in Porous Media". *SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition*.

Bahrami, H. & Siavoshi, J., 2007. "A New Method in Well Test Interpretation Using Temperature Transient Analysis for Gas Wells". *International Petroleum Technology Conference*.

Bear, J., 1972. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. 1 ed. New York: Dover.

Bird, R., Stewart, W. & Lightfoot, E., 2002. *Transport Phenomena*. New York City: John Wiley and Sons.

Cotta, R., 1993. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. 1 ed. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Cotta, R. & Mikhailov, M., 1993. "Integral Transform Method". *Applied Mathematical Modelling*.

Couto, P., Moreira, R. & Marsilli, M., 2011. "A General Analytical Solution for the Multidimensional Transient Linear Hydraulic Diffusivity Equation in Heterogeneous and Anisotropic Porous Media". *Offshore Technology Conference Brasil*.

Dake, L., 1983. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. 1 ed. The Hague: Elsevier.

Dawkrajai, P., 2006. *Temperature Prediction Model for a Producing Horizontal Well*. Ph.D. Austin: The University of Texas at Austin.

Deucher, R. et al., 2011. "The Use of Downhole Temperature Data in Gas-Oil Ratio Estimation and Reservoir Management". SPE EUROPEC 2011.

Dias, R. et al., 2012. "Analysis of Oil Displacement Through Water in Porous Media Using Integral Transforms and CFD Package". *14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*.

Duru, O., 2011. *Reservoir Analysis and Parameter Estimation Constrained to Pressure, Temperature and Flowrate Histories*. Ph.D. Stanford University.

Duru, O. & Horne, R., 2010. "Joint Inversion of Temperature and Pressure Measurements for Estimation of Permeability and Porosity Fields". *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.

Hossaim, M., Mousavizadegan, S. & Islam, M., 2007. "Rock and Fluid Temperature Changes During Thermal Operation in EOR Process". *Journal of Nature Science and Sustainable Technology*.

Hovanessian, S., 1961. "Pressure Studies in Bounded Reservoirs". *SPE Journal*.

- IMSL, 1991. *IMSL STAT/LIBRARY User's Manual Version 2.0*. Houston.
- Knupp, D., Naveira-Cotta, C. & Cotta, R., 2012. "Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms". *International Communications in Heat and Mass Transfer*.
- Kocabas, I., 2004. "Thermal transients during nonisothermal fluid injection into oil reservoirs". *Journal of Petroleum Science and Engineering*.
- Lake, L., 1989. *Enhanced Oil Recovery*. Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Leiroz, A. & Cotta, R., 1990. "Convergence Enhancement of Eigenfunction Expansions for Nonhomogeneous Elliptic Diffusion Problems".
- Li, Z., Yin, J., Zhu, D. & Datta-Gupta, A., 2011. "Using downhole temperature measurement to assist reservoir characterization and optimization". *Journal of Petroleum Science and Engineering*.
- Marsilli, M., 2013. *Uma Solução Analítica Generalizada da Equação da Difusividade Hidráulica Multidimensional pela Técnica da Transformação Integral*. M.Sc., dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Marx, J. & Langenheim, R., 1959. "Reservoir Heating by Hot Fluid Injection". *Trans AIME.*, pp. 312-314.
- Maubeuge, F., Arquis, E. & Bertrand, O., 1994. "MOTHER: A Model for Interpreting Thermometrics". *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.
- Mikhailov, M. & Ozisik, M., 1984. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York: John Wiley & Sons.
- Muradov, K., 2010. *Temperature Modelling and Real-time Flow Rate Allocation in Wells with Advanced Completion*. Ph.D. Heriot-Watt University.
- Muradov, K. & Davies, D., 2008. "Prediction of Temperature Distribution in Intelligent Wells". *SPE EUROPEC Annual Conference and Exhibition*.

Muradov, K. & Davies, D., 2011. "Novel Analytical Methods of Temperature Interpretation in Horizontal Wells". *SPE Journal*.

Muradov, K. & Davies, D., 2013. "Some Case Studies of Temperature and Pressure Transient Analysis in Horizontal, Multi-zone, Intelligent Wells". *SPE EUROPEC Annual Conference and Exhibition*.

Naveira-Cotta, C., Cotta, R., Orlande, H. & Fudym, O., 2009. "Eigenfunction Expansions for Transient Diffusion in Heterogeneous Media". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.

Ouyang, L. & Belanger, D., 2004. "Flow Profiling via Distributed Temperature Sensor (DTS) System - Expectation and Reality". *SPE Journal*.

Ozisik, M., 1993. *Heat Conduction*. New York: John Wiley & Sons.

Rahman, N. & Bentsen, R., 2000. "Use of an Integral Transform Technique for Comprehensive Solutions to Transient Flow Problems in Homogeneous Domains". *Canadian International Petroleum Conference*.

Rahman, N. & Bentsen, R., 2001. "Comprehensive Solutions for Transient-Flow Problems in 3D Homogeneous Domains". *SPE Middle East Oil Show*.

Ramanazov, A. & Nagimov, V., 2007. "Analytical model for the calculation of temperature distribution in the oil reservoir during unsteady fluid flow". *Oil and Gas Business*.

Ribeiro, P. & Horne, R., 2013. "Pressure and Temperature Transient Analysis: Hydraulic Fractured Well Application". *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.

Scofano Neto, F., Cotta, R. & Mikhailov, M., 1990. "Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems".

Sphaier, L., Cotta, R., Naveira-Cotta, C. & Quaresma, J., 2011. "The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms". *International Communications in Heat and Mass Transfer*.

Sui, W., Zhu, D., Hill, A. & Ehlig-Economides, C., 2008. "Model for Transient Temperature and Pressure Behavior in Commingled Vertical Wells". *SPE Russian Oil & Gas Conference and Exhibition*.

Tardy, P. et al., 2012. "Inversion of Distributed Temperature Sensing Logs to Measure Zonal Coverage During and After Wellbore Treatments with Coiled Tubing". *SPE Production & Operations*.

Wolfram, S., 2005. *The Mathematica Book, version 5.2*. Cambridge-Wolfram Media.

Wu, X., Sui, W. & Jiang, Y., 2013. "Innovative Applications of Downhole Temperature Data". *SPE Middle East Intelligent Energy Conference and Exhibition*.

Yoshioka, K. et al., 2005. "A Comprehensive Model of Temperature Behavior in a Horizontal Well". *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.

Ziabakhsh-Ganji, Z. & Kooi, H., 2013. "Sensitivity of Joule-Thomson cooling to impure CO₂ injection in depleted gas reservoirs". *Applied Energy*.

ANEXO I

Este anexo apresenta o arquivo .nb (*Mathematica*) utilizado para obter as integrais necessárias à solução dos problemas das seções 6.1, 7.1 e Capítulo 8.

Poderão ser encontradas as manipulações simbólicas realizadas para obter as diversas integrais que aparecem ao longo do texto e que foram todas obtidas analiticamente usando a função *Integrate* do *Mathematica*. Ao calcular as integrais, diversas singularidades ocorrem devido à combinação dos autovalores das soluções por expansão em série do balanço de energia e da equação da difusividade hidráulica. O cálculo dos limites destas singularidades também está apresentado neste arquivo.

Seção 6.1

```
(*Off[General::Spell]*)
SetOptions[Plot,PlotStyle→Thick,
  ImageSize→400,PerformanceGoal→"Quality"];
SetOptions[LogLinearPlot,PlotStyle→Thick,
  ImageSize→400,PerformanceGoal→"Quality"];
SetOptions[DiscretePlot,ImageSize→400];
data={vx→-q1/Lz/Ly,q1→-3456/(24*60*60),q2→-
2000/(24*60*60),tc→5*24*60*60,Lz→2,k→10^
14,mi→0.2*10^-3,phi→3.0*10^-1,ct→10^-9,cr→0,
Pini→300*10^5,beta→0.0008,Ti→350,lambdar→3,lambdaf→0.
16,rof→570,cpf→1350,ror→2200,cpr→1250,Ly→2000,Lx→50,x
p→10^-8,rob→ror*(1-phi)+rof*phi,cpb→cpr*(1-
phi)+cpf*phi,lambdab→lambdar*(1-
phi)+lambdaf*phi,eta→k/(phi*mi*ct),gama→3*10^-4};
$Assumptions={q1 ∈ Reals,q2 ∈ Reals,tc ∈ Reals,
tc>0,Lz ∈ Reals,Lz>0,k ∈ Reals,k>0,mi ∈ Reals,mi>0,Lx
∈ Reals,Lx>0,phi ∈ Reals,phi>0,ct ∈ Reals,ct>0,Pini ∈
Reals,Pini>0,xp ∈ Reals,xp>0,ror ∈ Reals,ror>0,cpr ∈
Reals,cpr>0,beta ∈ Reals,beta>0,Ti ∈
Reals,Ti>0,lambdar ∈ Reals,lambdar>0,lambdaf ∈
Reals,lambdaf>0,lambdab ∈ Reals,lambdab>0,eta ∈
Reals,eta>0,cpb ∈ Reals,cpb>0,rob ∈ Reals,rob>0,m ∈
Integers,i ∈ Integers,i>0,ip ∈ Integers,ip>0,jp ∈
Integers,jp>0,Lx>xp,x ∈ Reals,t ∈ Reals,t>0,gama ∈
Reals,gama>0};
q[t_]=q1;
```

```

eigvpx[ip_]=(2*ip-1)*π/(2*Lx);
Nopx=Lx/2;
eigfpx[ip_,x_]=Cos[eigvpx[ip]*x]/Sqrt[Nopx];
gp[x_,t_]=(mi*q[t])/(k*Lz*Ly)*(DiracDelta[x-xp]);
fi=0;
Gp[ip_,t_]=Integrate[eigfpx[ip,x]*gp[x,t],{x,0,Lx}];
pibarra[ip_,t_]=Expand[Exp[-
eta*eigvpx[ip]^2*t]*eta*Integrate[Exp[eta*eigvpx[ip]^2
*tt]*Gp[ip,tt],{tt,0,t}]];
pi[ip_,x_,t_]=pibarra[ip,t]*eigfpx[ip,x];
dtpi[ip_,x_,t_]=D[pi[ip,x,t],t];
dxpi[ip_,x_,t_]=1/eta*D[pibarra[ip,t]*Integrate[eigfpx
[ip,xx],{xx,0,x}],t];
p[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,100,1}];
dtp[x_,t_]=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,25}];
dxp[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,25}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
pconv[x_,t_,nI_]:=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,nI,1}];
dtpconv[x_,t_,nI_]:=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,nI}];
dxpconv[x_,t_,nI_]:=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,nI}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
eigvx[i_]=((2*i-1)*π)/(2*Lx)*Sqrt[lambdab/(rob*cpb)];
Noi=Lx/2*rob*cpb/lambdab;
eigfx[i_,x_]=Cos[Sqrt[cpb*rob/lambdab]*eigvx[i]*x]/Sqr
t[Noi];
gad[x_,t_]=phi*beta*Ti/lambdab*dtp[x,t];
gjt[x_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*dxp[x,t]*dxp[x,t];
p5[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,5,1}];
p10[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,10,1}];
p15[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,15,1}];
p25[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,25,1}];
p50[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,50,1}];
dxpi2[ip_,x_,t_]=D[pi[ip,x,t],x];
dxp2[x_,t_]=Sum[dxpi2[ip,x,t],{ip,1,100}];
dxp2conv[x_,t_,nP_]:=Sum[dxpi2[ip,x,t],{ip,1,nP}];
dxp3[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,1}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
dxp4[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,2}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
dxp5[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,5}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
dxp6[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,10}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];

```

```

gadip[ip_,x_,t_]=dtpi[ip,x,t];
Gadip[ip_,i_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*gadip[ip,
x,t]],{x,0,Lx}];
Gadipsingl[i_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*gadip[ip
,x,t]/.ip→i],{x,0,Lx}];
Gadipstar[ip_,i_,t_]=Piecewise[{{Gadipsingl[i,t],i==ip}
},Gadip[ip,i,t]];
Gadsum[i_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lambdab*(Pin
i+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,50}];
-mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions→{x>xp}];
gjtijp[ip_,jp_,x_,t_]=dxpi[ip,x,t]*dxpi[jp,x,t];
gjtijpfixo[ip_,x_,t_]=dxpi[ip,x,t]*(-(mi q1)/(k Ly
Lz));
gjtfixo[x_,t_]=(-(mi q1)/(k Ly Lz))^2;
Gjtijpfixo[ip_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*g
jtijpfixo[ip,x,t]],{x,0,Lx}];
Gjtijpfixosingl[ip_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i
,x]*gjtijpfixo[ip,x,t]/.ip→i],{x,0,Lx}];
Gjtijpfixostar[ip_,i_,t_]=Piecewise[{{Gjtijpfixosing
l[ip,i,t],ip==i}},Gjtijpfixo[ip,i,t]];
Gjtfixo[i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*gjtfixo[x
,t]],{x,0,Lx}];
Gjtijp[ip_,jp_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*g
jtijp[ip,jp,x,t]],{x,0,Lx}];
Gjtsum[i_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,t],{ip,1,20}],{jp,1,20
}]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,t],{ip,1,20}]+Gjtfixo[i,t
]);
-mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions→{x>xp}];
argaijfixo[i_,j_,x_,t_]=Simplify[eigfx[i,x]*(-k/mi*(-
(mi q1)/(k Ly Lz)))*D[eigfx[j,x],x]];
Aijfixo[i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijfixo[i,j,x,t]
],{x,0,Lx}];
Aijfixosingl[i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijfixo[i,j
,x,t]/.j→i],{x,0,Lx}];
Aijfixostar[i_,j_,t_]=Piecewise[{{Aijfixosingl[i,j,t],
i==j}},Aijfixo[i,j,t]];
argaijip[ip_,i_,j_,x_,t_]=Simplify[eigfx[i,x]*(-
k/mi*dxpi[ip,x,t])*D[eigfx[j,x],x]];
Aijip[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijip[ip,i,j,x
,t]],{x,0,Lx}];
Aijsum[i_,j_,t_]=rof*cpf/lambdab*(Sum[Aijip[ip,i,j,t],
{ip,1,30}]+Aijfixostar[i,j,t]);
gbar[i_,t_]:=Gjtsum[i,t]+Gadsum[i,t]
f[i_]=0;
eq1[i_,nI_]:=Tt[i]'[t]+eigvx[i]^2*Tt[i][t]+Sum[Aijsum[
i,j,t]*Tt[j][t],{j,1,nI}]=gbar[i,t]//.data
eqlic[i_]:=Tt[i][0]=f[i]

```

```

ode[nI_]:=Flatten[{Table[eq1[i,nI],{i,1,nI}],Table[eq1
ic[i],{i,1,nI}]}]
vars[nI_]:=Table[Tt[i][t],{i,1,nI}]
sol[nI_]:=First[NDSolve[ode[nI],vars[nI],{t,0,10^10},M
ethod->{"StiffnessSwitching","EquationSimplification"->
"Solve"},AccuracyGoal->Automatic,PrecisionGoal->Automatic
]]
Aijsum[i_,j_,t_]=0;
Gadsum[i_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdaab+phi*cr/lambdaab*(Pin
i+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,100}];
Gjtsum[i_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdaab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,t],{ip,1,25}],{jp,1,25}
]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,t],{ip,1,25}]+Gjtfixo[i,t
]);
Tbi=Timing[sol[200]];Tbi[[1]];
Aijsum[i_,j_,t_]=rof*cpf/lambdaab*(Sum[Aijip[ip,i,j,t],
{ip,1,25}]+Aijfixostar[i,j,t]);
Gadsum[i_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdaab+phi*cr/lambdaab*(Pin
i+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,100}];
Gjtsum[i_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdaab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,t],{ip,1,25}],{jp,1,25}
]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,t],{ip,1,25}]+Gjtfixo[i,t
]);
Tbicv=Timing[sol[200]];Tbicv[[1]];
Temp[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],{
i,1,200}];
Tempcv[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbicv[[2
]],{i,1,200}];
TempN[x_,t_,N_]:=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbicv
[[2]],{i,1,N}];

```

Seção 7.1

```

(*Off[General::Spell]*)
SetOptions[Plot,PlotStyle->Thick,
ImageSize->400];
SetOptions[LogLinearPlot,PlotStyle->Thick,
ImageSize->400];
SetOptions[DensityPlot,ImageSize->400,PerformanceGoal->
"Speed"];
data={vx->-q1/Lz/Ly,q1->-
3456/(24*60*60),Lx->50,Ly->2000,Lz->2,plusz->9,k->10^-
14,mi->0.2*10^-3,phi->0.3,ct->10^-9,cr->0,
Pini->306*98066,beta->0.0008,Ti->350,lambdaar->3,lambdaf->0
.16,rof->570,cpf->1350,ror->2200,cpr->1250,xp->10^-8,rob->
ror*(1-phi)+rof*phi,cpb->cpr*(1-
phi)+cpf*phi,lambdaab->lambdaar*(1-
phi)+lambdaf*phi,eta->k/(phi*mi*ct),gt->0.04};
$Assumptions={q ∈ Reals,Lz ∈ Reals,Lz>0,plusz ∈

```

```

Reals, plusz>0,k e Reals,k>0,mi e Reals,mi>0,Lx e
Reals,Lx>0,phi e Reals,phi>0,ct e Reals,ct>0,Pini e
Reals,Pini>0,Bo e Reals,Bo>0,xp e Reals,xp>0,rer e
Reals,rer>0,cpr e Reals,cpr>0,beta e Reals,beta>0,Ti e
Reals,Ti>0,lambdar e Reals,lambdar>0,lambdaf e
Reals,lambdaf>0,lambdab e Reals,lambdab>0,eta e
Reals,eta>0,cpb e Reals,cpb>0,rob e Reals,rob>0,m e
Integers,m>0,n e Integers,n>0,i e Integers, i>0,ip e
Integers,ip>0,jp e Integers,jp>0,j e Integers,
j>=0,Lx>xp,x e Reals,gt e Reals,gt>0};
q[t_]=q1;
eigvpx[ip_]=(2*ip-1)*pi/(2*Lx);
Nopx=Lx/2;
eigfpx[ip_,x_]=Cos[eigvpx[ip]*x]/Sqrt[Nopx];
gp[x_,t_]=(mi*q[t])/(k*Lz*Ly)*(DiracDelta[x-xp]);
fi=0;
Gp[ip_,t_]=Integrate[eigfpx[ip,x]*gp[x,t],{x,0,Lx}];
pibarra[ip_,t_]=Expand[Exp[-
eta*eigvpx[ip]^2*t]*eta*Integrate[Exp[eta*eigvpx[ip]^2
*tt]*Gp[ip,tt],{tt,0,t}]];
pi[ip_,x_,t_]=pibarra[ip,t]*eigfpx[ip,x];
dtpi[ip_,x_,t_]=D[pi[ip,x,t],t];
dxpi[ip_,x_,t_]=1/eta*D[pibarra[ip,t]*Integrate[eigfpx
[ip,xx],{xx,0,x}],t];
p[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,25,1}];
dtp[x_,t_]=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,10}];
dxp[x_,t_]=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,5}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions-> {x>xp}];
pconv[x_,t_,nI_]:=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,nI,1}];
dtpconv[x_,t_,nI_]:=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,nI}];
dxcconv[x_,t_,nI_]:=Sum[dxpi[ip,x,t],{ip,1,nI}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions-> {x>xp}];
eigvx[i_]=((2*i-1)*pi)/(2*Lx)*Sqrt[lambdab/(rob*cpb)];
Noi=Lx/2*Sqrt[rob*cpb/lambdab];
eigfx[i_,x_]=Cos[Sqrt[rob*cpb/lambdab]*eigvx[i]*x]/Sqr
t[Noi];
eigvz[j_]=j*pi/(Lz+2*plusz)*Sqrt[lambdab/(rob*cpb)];
Noj=(Lz+2*plusz)/2*Sqrt[rob*cpb/lambdab];
eigfz[j_,z_]=Sin[Sqrt[rob*cpb/lambdab]*eigvz[j]*z]/Sqr
t[Noj];
gadip[ip_,x_,z_,t_]=Piecewise[{{dtpi[ip,x,t],plusz<z<(
Lz+plusz)}},0];
Gadip[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*eigfz[
j,z]*gadip[ip,x,z,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Gadipsingl[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*e
igfz[j,z]*gadip[ip,x,z,t]/.ip->i],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*pl
usz}];
Gadipstar[ip_,i_,j_,t_]=Piecewise[{{Gadipsingl[ip,i,j,

```

```

t],ip==i}},Gadip[ip,i,j,t]];
Gadsum[i_,j_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lambdab*(
Pini+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,j,t],{ip,1,50}];
Gadsum2[i_,j_,t_,nP_]:= (phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lam
bdab*(Pini+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,j,t],{ip,1,
nP}];
-mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
gjtijp[ip_,jp_,x_,z_,t_]=Piecewise[{{dxpi[ip,x,t]*dxp
i[jp,x,t],plusz<z<(Lz+plusz)}}},0];
gjtijpfixo[ip_,x_,z_,t_]=Piecewise[{{dxpi[ip,x,t]*(-
(mi q1)/(k Ly Lz)),plusz<z<(Lz+plusz)}}},0];
gjtfixo[x_,z_,t_]=Piecewise[{{(-(mi q1)/(k Ly
Lz))^2,plusz<z<(Lz+plusz)}}},0];
Gjtfixo[i_,j_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*eigfz[j,
z]*gjtfixo[x,z,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Gjtijpfixo[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*
eigfz[j,z]*gjtijpfixo[ip,x,z,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*p
lusz}];
Gjtijpfixosingl[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[
i,x]*eigfz[j,z]*gjtijpfixo[ip,x,z,t]/.ip->i],{x,0,Lx},
{z,0,Lz+2*plusz}];
Gjtijpfixostar[ip_,i_,j_,t_]=Piecewise[{{Gjtijpfixos
ingl[ip,i,j,t],ip==i}},Gjtijpfixo[ip,i,j,t]];
Gjtijp[ip_,jp_,i_,j_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x
]*eigfz[j,z]*gjtijp[ip,jp,x,z,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*
plusz}];
Gjtsum[i_,j_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,j,t],{ip,1,20}],{jp,1,2
0}]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,j,t],{ip,1,20}]+Gjtfixo
[i,j,t]);
Gjtsum2[i_,j_,t_,nP_]:= (beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,j,t],{ip,1,nP}],{jp,1,n
P}]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,j,t],{ip,1,nP}]+Gjtfixo
[i,j,t]);
argaijfixo[i_,m_,j_,n_,x_,t_]=Piecewise[{{Simplify[eig
fx[i,x]*eigfz[j,z]*(-k/mi*(-
mi*q1/(k*Lz*Ly)))*D[eigfx[m,x],x]*D[eigfz[n,z],z]],plu
sz<z<(Lz+plusz)}}},0];
Aijfixo[i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[argaijfixo[i,
m,j,n,x,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Aijfixosingl[i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[argaijfi
xo[i,m,j,n,x,t]/.i->m],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Aijfixosinglsubl[i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[arga
ijfixo[i,m,j,n,x,t]/.i->m/.j->n],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plus
z}];
Aijfixosinglstar[i_,m_,j_,n_,t_]=Piecewise[{{Aijfixosi
nglsubl[i,m,j,n,t],j==n}},Aijfixosingl[i,m,j,n,t]];
Aijfixosing2[i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[argaijfi
xo[i,m,j,n,x,t]/.j->n],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];

```

```

Aijfixosing2sub1[i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[arga
ijfixo[i,m,j,n,x,t]/.j->n/.i->m],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plus
z}];
Aijfixosing2star[i_,m_,j_,n_,t_]=Piecewise[{{Aijfixosi
ng2sub1[i,m,j,n,t],i==m}},Aijfixosing2[i,m,j,n,t]];
Aijfixostar[i_,m_,j_,n_,t_]=Piecewise[{{Aijfixosing1st
ar[i,m,j,n,t],i==m},{Aijfixosing2star[i,m,j,n,t],j==n}
,Aijfixo[i,m,j,n,t]];
argaijip[ip_,i_,m_,j_,n_,x_,t_]=Piecewise[{{Simplify[e
igfx[i,x]*eigfz[j,z]*(-
k/mi*dxpi[ip,x,t])*D[eigfx[m,x],x]*D[eigfz[n,z],z]],pl
usz<z<(Lz+plusz)}}},0];
Aijip[ip_,i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[argaijip[ip
,i,m,j,n,x,t]],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Aijipsing1[ip_,i_,m_,j_,n_,t_]=Integrate[Expand[argaij
ip[ip,i,m,j,n,x,t]/.j->n],{x,0,Lx},{z,0,Lz+2*plusz}];
Aijipstar[ip_,i_,m_,j_,n_,t_]=Piecewise[{{Aijipsing1[i
p,i,m,j,n,t],j==n}},Aijip[ip,i,m,j,n,t]];
Aijsum[i_,m_,j_,n_,t_]=rof*cpf/lambdab*(Sum[Aijipstar[
ip,i,m,j,n,t],{ip,1,30}]+Aijfixostar[i,m,j,n,t]);
gbar[i_,j_,t_]:=Gjtsum[i,j,t]+Gadsum[i,j,t]
f[i_,j_]=0;
eq1[i_,j_,nI_,nJ_]:=Tt[i][j][t]+(eigvx[i]^2+eigvz[j]^
2)*Tt[i][j][t]+Sum[Sum[Aijsum[i,m,j,n,t]*Tt[m][n][t],{
m,1,nI}],{n,1,nJ}]==gbar[i,j,t]//.data
eqlic[i_,j_]:=Tt[i][j][0]==f[i,j]//.data
ode[nI_,nJ_]:=Flatten[Table[Table[eq1[i,j,nI,nJ],{i,1
,nI}],{j,1,nJ}],Table[Table[eqlic[i,j],{i,1,nI}],{j,1
,nJ}]]]
vars[nI_,nJ_]:=Flatten[Table[Table[Tt[i][j][t],{i,1,n
I}],{j,1,nJ}]]]
sol[nI_,nJ_]:=First[NDSolve[ode[nI,nJ],vars[nI,nJ],{t,
0,10^10},Method->{"StiffnessSwitching","EquationSimplif
ication"->"Solve"},AccuracyGoal->Automatic,PrecisionGoal
->Automatic]]
Aijsum[i_,m_,j_,n_,t_]=0;
Gjtsum[i_,j_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,j,t],{ip,1,10}],{jp,1,1
0}]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,j,t],{ip,1,10}]+Gjtfixo
[i,j,t]);
Gadsum[i_,j_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lambdab*(
Pini+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,j,t],{ip,1,100}];
Tbi=Timing[sol[200,200]];
Tbi[[1]];
Temp1[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,10}],{j,1,10}];
Temp2[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,25}],{j,1,25}];
Temp3[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,50}],{j,1,50}];

```

```

Temp4[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,100}],{j,1,100}];
Temp5[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,150}],{j,1,150}];
Temp6[x_,z_,t_]=Sum[Sum[Tt[i][j][t]*eigfx[i,x]*eigfz[j
,z]//.data/.Tbi[[2]],{i,1,200}],{j,1,200}];

```

Capítulo 8

```

(*Off[General::Spell]*)
SetOptions[Plot,PlotStyle→Thick,
ImageSize→400,PerformanceGoal→"Quality"];
SetOptions[LogLinearPlot,PlotStyle→Thick,
ImageSize→400,PerformanceGoal→"Quality"];
SetOptions[DiscretePlot,ImageSize→400];
data={q1→-1000/(24*60*60),q2→-
2000/(24*60*60),tc→5*24*60*60,Lz→2,k→750*9.869*10^-
16,mi→1*10^-3,phi→3.0*10^-1,ct→2*10^-9,cr→10^-10,
Pini→500*10^5,beta→8*10^-
4,Ti→350,lambdar→3,lambdaf→0.16,rof→750,cpf→2200,ror→
2200,cpr→1250,Ly→500,Lx→200,xp→10^-8,rob→ror*(1-
phi)+rof*phi,cpb→cpr*(1-
phi)+cpf*phi,lambdab→lambdar*(1-
phi)+lambdaf*phi,eta→k/(phi*mi*ct),gama→3*10^-4};
$Assumptions={q1 ∈ Reals,q2 ∈ Reals,tc ∈ Reals,
tc>0,Lz ∈ Reals,Lz>0,k ∈ Reals,k>0,mi ∈ Reals,mi>0,Lx
∈ Reals,Lx>0,phi ∈ Reals,phi>0,ct ∈ Reals,ct>0,Pini ∈
Reals,Pini>0,xp ∈ Reals,xp>0,ror ∈ Reals,ror>0,cpr ∈
Reals,cpr>0,beta ∈ Reals,beta>0,Ti ∈
Reals,Ti>0,lambdar ∈ Reals,lambdar>0,lambdaf ∈
Reals,lambdaf>0,lambdab ∈ Reals,lambdab>0,eta ∈
Reals,eta>0,cpb ∈ Reals,cpb>0,rob ∈ Reals,rob>0,m ∈
Integers,i ∈ Integers,i>0,ip ∈ Integers,ip>0,jp ∈
Integers,jp>0,Lx>xp,x ∈ Reals,t ∈ Reals,t>0,gama ∈
Reals,gama>0};
q[t_]=q1+(q2-q1)*1/(1+Exp[-gama*(t-tc)]);
eigvpx[ip_]=(2*ip-1)*π/(2*Lx);
Nopx=Lx/2;
eigfpx[ip_,x_]=Cos[eigvpx[ip]*x]/Sqrt[Nopx];

gp[x_,t_]=(mi*q[t])/(k*Lz*Ly)*(DiracDelta[x-xp]);
fi=0;
Gp[ip_,t_]=Integrate[eigfpx[ip,x]*gp[x,t],{x,0,Lx}];
pibarra[ip_,t_]=Expand[Exp[-
eta*eigvpx[ip]^2*t]*eta*Integrate[Exp[eta*eigvpx[ip]^2
*tt]*Gp[ip,tt],{tt,0,t}]];
pi[ip_,x_,t_]=pibarra[ip,t]*eigfpx[ip,x];
dtpi[ip_,x_,t_]=D[pi[ip,x,t],t];
dxpi[ip_,x_,t_]=1/eta*D[pibarra[ip,t]*Integrate[eigfpx

```

```

[ip,xx],{xx,0,x}],t];
p[x_,t_]=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,25,1}];
dtp[x_,t_]=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,10}];
d xp[x_,t_]=Sum[d xpi[ip,x,t],{ip,1,5}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
pconv[x_,t_,nI_]:=Pini+Sum[pi[ip,x,t],{ip,1,nI,1}];
dtpconv[x_,t_,nI_]:=Sum[dtpi[ip,x,t],{ip,1,nI}];
d xpconv[x_,t_,nI_]:=Sum[d xpi[ip,x,t],{ip,1,nI}]-
mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
eigvx[i_]=((2*i-1)*pi)/(2*Lx)*Sqrt[lambdab/(rob*cpb)];
Noi=Lx/2*rob*cpb/lambdab;
eigfx[i_,x_]=Cos[Sqrt[cpb*rob/lambdab]*eigvx[i]*x]/Sqr
t[Noi];
gad[x_,t_]=phi*beta*Ti/lambdab*dtp[x,t];
gjt[x_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*d xp[x,t]*d xp[x,t];
gadip[ip_,x_,t_]=dtpi[ip,x,t];
Gadip[ip_,i_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*gadip[ip,
x,t]],{x,0,Lx}];
Gadipsing1[i_,t_]=Integrate[Expand[eigfx[i,x]*gadip[ip
,x,t]/.ip->i],{x,0,Lx}];
Gadipstar[ip_,i_,t_]=Piecewise[{{Gadipsing1[i,t],i==ip}
},Gadip[ip,i,t]];
Gadsum[i_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lambdab*(Pin
i+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,50}];
Gadsum2[i_,t_,nP_]:=Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,nP}];
-mi*q[t]/(k*Lz*Ly)*Integrate[DiracDelta[xx-
xp],{xx,0,x},Assumptions->{x>xp}];
gjtijp[ip_,jp_,x_,t_]=d xpi[ip,x,t]*d xpi[jp,x,t];
gjtijpfixo[ip_,x_,t_]=d xpi[ip,x,t]*(-((mi (q1+(-
q1+q2)/(1+e-gama (t-tc))))/(k Ly Lz)));
gjtfixo[x_,t_]=(-((mi (q1+(-q1+q2)/(1+e-gama (t-
tc))))/(k Ly Lz)))^2;
Gjtijpfixo[ip_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*g
jtijpfixo[ip,x,t]],{x,0,Lx}];
Gjtijpfixosing1[ip_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i
,x]*gjtijpfixo[ip,x,t]/.ip->i],{x,0,Lx}];
Gjtijpfixostar[ip_,i_,t_]=Piecewise[{{Gjtijpfixosing
1[ip,i,t],ip==i}},Gjtijpfixo[ip,i,t]];
Gjtfixo[i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*gjtfixo[x
,t]],{x,0,Lx}];
Gjtijp[ip_,jp_,i_,t_]=Integrate[Simplify[eigfx[i,x]*g
jtijp[ip,jp,x,t]],{x,0,Lx}];
Gjtsum[i_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,t],{ip,1,20}],{jp,1,20
}]+2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,t],{ip,1,20}]+Gjtfixo[i,t
]);

```

```

argaijfixo[i_,j_,x_,t_]=Simplify[eigfx[i,x]*rof*cpf/la
mbdab*(-k/mi*(-((mi (q1+(-q1+q2)/(1+e-gama (t-
tc))))/(k Ly Lz))))*D[eigfx[j,x],x]];
Aijfixo[i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijfixo[i,j,x,t]
],{x,0,Lx}];
Aijfixosingl[i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijfixo[i,j
,x,t]/.j->i],{x,0,Lx}];
Aijfixostar[i_,j_,t_]=Piecewise[{{Aijfixosingl[i,j,t],
i==j}},Aijfixo[i,j,t]];
argaijip[ip_,i_,j_,x_,t_]=Simplify[eigfx[i,x]*rof*cpf/
lambdab*(-k/mi*dxpi[ip,x,t])*D[eigfx[j,x],x]];
Aijip[ip_,i_,j_,t_]=Integrate[Expand[argaijip[ip,i,j,x
,t]],{x,0,Lx}];
Solve[(-1+2 ip) (1+2 i-2 ip-2 j) (-1+2 i+2 ip-2 j) (-
1+2 i-2 ip+2 j) (-3+2 i+2 ip+2 j)==0,i];
Aijsum[i_,j_,t_]=Sum[Aijip[ip,i,j,t],{ip,1,30}]+Aijfix
ostar[i,j,t];
gbar[i_,t_]:=Gjtsum[i,t]+Gadsum[i,t]
f[i_]=0;
eq1[i_,nI_]:=Tt[i]'[t]+eigvx[i]^2*Tt[i][t]+Sum[Aijsum[
i,j,t]*Tt[j][t],{j,1,nI}]==gbar[i,t]//.data
eqlic[i_]:=Tt[i][0]==f[i]
ode[nI_]:=Flatten[{Table[eq1[i,nI],{i,1,nI}],Table[eq1
ic[i],{i,1,nI}]}]
vars[nI_]:=Table[Tt[i][t],{i,1,nI}]
sol[nI_]:=First[NDSolve[ode[nI],vars[nI],{t,0,10^6},Me
thod->{"StiffnessSwitching","EquationSimplification"->"S
olve"},AccuracyGoal->Automatic,PrecisionGoal->Automatic]
]
Aijsum[i_,j_,t_]=0;
Gadsum[i_,t_]=(phi*beta*Ti/lambdab+phi*cr/lambdab*(Pin
i+ror*cpr*Ti))*Sum[Gadipstar[ip,i,t],{ip,1,25}];
Gjtsum[i_,t_]=(beta*Ti-1)/lambdab*(-
k/mi)*(Sum[Sum[Gjtijp[ip,jp,i,t],{ip,1,5}],{jp,1,5}]+
2*Sum[Gjtijpfixostar[ip,i,t],{ip,1,5}]+Gjtfixo[i,t]);
Tbi=Timing[sol[200]];Tbi[[1]];
Temp1[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,1}];
Temp2[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,5}];
Temp3[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,10}];
Temp4[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,15}];
Temp5[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,25}];
Temp6[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,50}];
Temp7[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],
{i,1,100}];

```

```
Temp8[x_,t_]=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[2]],  
{i,1,200}];  
TempN[x_,t_,N_]:=Sum[Tt[i][t]*eigfx[i,x]//.data/.Tbi[[  
2]],{i,1,N}];
```