



COPPE/UFRJ

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS DE
PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVOS**

Daniel Fraga Sias

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Renato Machado Cotta

Nerbe José Ruperti Júnior

Rio de Janeiro
Dezembro de 2009

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS DE
PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVOS

Daniel Fraga Sias

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

Dr. Nerbe José Ruperti Junior, D.Sc.

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Profa. Lavinia Maria Sanábio Alves Borges, D.Sc.

Dr. José Bezerra Pessoa Filho, Ph.D.

Dr. Humberto Araujo Machado, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2009

Sias, Daniel Fraga

Soluções Híbridas para Transferência de Calor em
Sistemas de Proteção Térmica Ablativos/Daniel Fraga Sias. –
Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XIX, 140 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Renato Machado Cotta

Nerbe José Ruperti Júnior

Tese – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia
Mecânica, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 129-136.

1. Materiais Ablativos. 2. Degradação Térmica. 3.
Proteção Térmica. I. Cotta, Renato Machado *et al.*. II
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa
de Engenharia Mecânica. III. Título

“O Senhor é meu Pastor e nada me faltará...”
Salmos 123:1

Aos meus pais pelo apoio, amor e confiança
À minha esposa Dayana pela paciência, amor e
compreensão nas horas mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Ao meu DEUS por me capacitar e me ajudar à transpor todos os obstáculos que surgiram durante este trabalho.

Ao Professor Renato Machado Cotta pela orientação, amizade, sobretudo pela simplicidade com que conduz seus orientados e sempre oferecendo a sua total confiança.

Ao Professor Nerbe José Ruperti Júnior pela orientação, amizade e compreensão, sempre disponível nas horas difíceis.

Aos meus amigos Jeziel Nunes e Márcia Batalha que me deram muito apoio durante desde o início do curso muitas vezes virando noites trabalhando e ajudando não só na minha vida profissional, mas também na vida pessoal.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ pela oportunidade dada para o desenvolvimento do meu Curso de Doutorado.

Às secretárias do PEM e do LTTC: Maysa, Vera, Denise e Evanise pela ajuda e carinho demonstrados.

Aos técnicos Júlio e Paulo César pela amizade sempre demonstrada em suas palavras e atitudes.

Aos amigos do LTTC com quem tive o prazer de conviver, discutir e aprender durante todo o período de realização do meu curso e pelo apoio fornecido no desenvolvimento deste trabalho, em especial a Luiz Augusto Reis, Henrique Massard, Paulo Moreira, Dayse Sophia, Anelise Haag, Carol Naveira, Diana Albani e Simone Guigon.

Por fim aos colegas da ESSS – Engineering Simulation and Scientific Software pela amizade e apoio nos últimos meses de desenvolvimento deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS DE PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVOS

Daniel Fraga Sias

Dezembro/2009

Orientadores: Renato Machado Cotta

Nerbe José Ruperti Júnior

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho são desenvolvidas soluções híbridas numérico-analíticas para diferentes modelos de transferência de calor com ablação na proteção térmica de veículos espaciais em reentrada atmosférica, visando contribuir com o desenvolvimento de uma metodologia de projeto e otimização de sistemas de proteção térmica ablativos incluindo materiais que sofrem pirólise. Foram propostos e implementados quatro modelos teóricos com complexidade crescente na plataforma de computação simbólica *Mathematica*, resolvidos a partir da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) e da Técnica de Balanço Integral para aceleração de convergência das expansões em autofunções. As soluções híbridas são verificadas com resultados da literatura e covalidadas entre si, e um caso típico de reentrada atmosférica balística do veículo SARA é empregado para ilustrar o potencial de utilização das metodologias desenvolvidas em uma situação real de projeto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

HYBRID SOLUTIONS FOR HEAT TRANSFER ON ABLATIVE THERMAL
PROTECTION SYSTEM

Daniel Fraga Sias

December/2009

Advisors: Renato Machado Cotta

Nerbe José Ruperti Júnior

Department: Mechanical Engineering

In this work, hybrid numerical-analytical solutions have been developed for heat transfer with ablation in thermal protections of space vehicles under atmospheric reentry, aimed at contributing with the development of a design and optimization methodology of ablative thermal protection systems, including materials that undergo pyrolysis. Four theoretical models of increasing complexity have been proposed and implemented within the symbolic computation platform Mathematica, and solved through the Generalized Integral Transform Technique (GITT) and the Integral Balance Approach for convergence acceleration of the eigenfunction expansions. The hybrid solutions are verified with literature results and covalidated among themselves, and a typical ballistic atmospheric reentry of the SARA vehicle is selected to illustrate the potential for utilization of the developed methodologies in an actual design situation.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xvii
CAPÍTULO 1	1
1. Introdução	1
1.1 Motivação e Objetivos.....	2
1.2 Descrição do Problema Físico	5
CAPÍTULO 2	7
2. Revisão Bibliográfica.....	7
CAPÍTULO 3	16
3. Modelagem Matemática.....	16
3.1 Modelo de ablação sem Pirólise	16
3.1.1 Meio Formado por Uma Camada	16
3.1.2 Meio Formado por Duas Camadas	18
3.2 Modelo de Ablação com Pirólise	20
3.2.1 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita	21
3.2.2 Modelo com Degradação pela Equação de Arrhenius	24
CAPÍTULO 4	29
4. Método de Solução.....	29
4.1 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Uma Camada	29
4.1.1 Solução Formal	29
4.1.2 Solução com Balanço Integral	36
4.2 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Duas Camadas	37
4.2.1 Aplicação da Técnica de Parâmetros Concentrados Clássica	39
4.2.2 Solução Formal para a Formulação por Parâmetros Concentrados Clássica	41
4.2.3 Solução com Balanço Integral para a Formulação por Parâmetros Concentrados Clássica	47
4.3 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita	48
4.3.1 Solução Formal Aplicando a Técnica de Parâmetros Concentrados Melhorada ($H_{1,1} / H_{0,0}$).....	48

4.4 Modelo de ablação com Pirólise considerando Degradação pela Equação de Arrhenius	61
4.4.1 <i>Solução Formal sem Balanço Integral</i>	61
CAPÍTULO 5	71
5. Resultados e Discussões	71
5.1 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Uma Camada	71
5.1.1 <i>Aplicação e Validação para Reentrada Atmosférica Típica</i>	81
5.2 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Duas Camadas	83
5.3 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita	92
5.4 Modelo de Ablação com Pirólise considerando Degradação pela Equação de Arrhenius	103
5.4.1 <i>Validação com o Modelo de Ablação Pura</i>	103
5.4.2 <i>Aplicação ao caso de HOGGE e GUERREKENS [59]</i>	109
5.5 Aplicação para Fluxo de Calor em Típica Reentrada Atmosférica.....	118
CAPÍTULO 6	125
6. Conclusões e Sugestões	125
Referências Bibliográficas	129
ANEXO A	137
ANEXO B	139

Lista de Figuras

Figura 1 - Desenho esquemático do modelo geral considerando ablação com pirólise em duas camadas, ablativa e estrutural.....	6
Figura 2 – Modelo de ablação considerando somente o processo sem pirólise	17
Figura 3 – Modelo de ablação sem pirólise considerando camada estrutural	19
Figura 4 – Modelo de ablação com pirólise considerando temperatura de pirólise prescrita	21
Figura 5 – Modelo de ablação com pirólise considerando decomposição pela equação de Arrhenius	24
Figura 6 – Distribuição espacial de temperatura adimensional, para diferentes tempos, em ambos os períodos de pré-ablação e ablação.....	78
Figura 7 – Deslocamento do contorno ablativo para $Q(\tau) = 10\tau$ e $10\tau^2$	79
Figura 8 – Distribuição de temperatura para o modelo com uma camada com os fluxos	80
Figura 9 – Fluxo de calor adimensional para reentrada atmosférica balística [10]	81
Figura 10 – Comparação da posição da frente de ablação obtida por CIEA [9] e GITT com e sem balanço integral	83
Figura 11 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície.....	84
Figura 12 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície.....	85
Figura 13 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície para $N = 5$ e 40 sem e com balanço integral.....	87
Figura 14 – Distribuição de temperatura na fronteira móvel via GITT sem e com balanço integral para o modelo de duas camadas.....	88
Figura 15 – Distribuição de temperatura para o modelo com duas camadas com fluxo de calor $Q(\tau) = 10\tau$	89
Figura 16 – Comparação do movimento da fronteira ablativa entre os modelos com uma e duas camadas	91

Figura 17 – Comparação da $\frac{dS[\tau]}{d\tau}$ entre os modelos com uma e duas camadas	92
Figura 18 – Variação das propriedades termofísicas entre o material virgem e o pirolisado: (a) Condutividade térmica e (b) Capacidade térmica	93
Figura 19 – Deslocamento e taxa de recessão adimensional do contorno de pirólise, $\eta_p(\tau)$ e $\dot{\eta}_p(\tau)$, durante o período de pirólise e pré-ablação	94
Figura 20 – Evolução da temperatura média, $\theta_{avp}(\tau)$, na camada de pirólise	95
Figura 21 – Movimento dos contornos de pirólise e ablação, $\eta_p(\tau)$ e $\eta_{ab}(\tau)$, durante o período de pirólise e ablação	97
Figura 22 – Taxa de recessão das fronteiras de pirólise e ablação, $\dot{\eta}_p(\tau)$ e $\dot{\eta}_{ab}(\tau)$, durante o período de pirólise e ablação	98
Figura 23 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de pirólise durante o período de degradação térmica sem ablação	99
Figura 24 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de pirólise durante o período de ablação	99
Figura 25 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de ablação durante o período de ablação	100
Figura 26 – Comparação entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise considerando $H_p = 0$	101
Figura 27 – Comparação do deslocamento do contorno ablativo $s_{ab}(t)$ entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise	102
Figura 28 – Comparação da taxa de recessão da fronteira ablativa $\dot{s}_{ab}(t)$ entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise	102
Figura 29 – Distribuição de temperatura para o modelo de ablação pura obtido pelo código de ablação com degradação pela lei de Arrhenius.....	104
Figura 30 – Comparação da distribuição de temperatura dos modelos com degradação térmica e ablação pura durante o período de ablação.....	105

Figura 31 – Comparação do deslocamento adimensional da fronteira $s(\tau)$ para o modelo com degradação de material simulando a ablação pura	105
Figura 32 – Fluxo de calor adimensional em uma típica reentrada balística planetária	106
Figura 33 – Distribuições de temperatura para os dados de RUPERTI JR. e COTTA [2].....	107
Figura 34 – Comparação dos descolamentos da fronteira $s(\tau)$ obtidos com os dois modelos propostos	108
Figura 35 – Validação da distribuição de temperatura do modelo de ablação com degradação para o caso de ablação pura, RUPERTI JR. e COTTA [9]	108
Figura 36 – Distribuição de temperatura	110
Figura 37 – Variação da massa específica resultante da degradação térmica no período de pré-ablação para tres ordens de ativação	112
Figura 38 – Fluxo de massa dos gases de pirólise durante o período pré-ablação para as tres ordens de ativação	113
Figura 39 – Deslocamento adimensional da fronteira de ablação com dois modelos distintos de pirólise.....	115
Figura 40 – Variação da massa específica devido à degradação do material durante o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]	116
Figura 41 – Fluxo de massa dos gases de pirólise para o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]	117
Figura 42 – Distribuição de temperatura adimensional durante o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]	118
Figura 43 – Distribuição de temperatura adimensional na superfície durante o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta densidade.....	119
Figura 44 – Degradação do material durante o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta massa específica	120
Figura 45 – Fluxo de massa dos gases de pirólise para o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta densidade	121

Figura 46 – Distribuição de temperatura na superfície da proteção de Sílica Fenólica obtida com o modelo de temperatura de pirólise prescrita, no período pré-pirólise.....	122
Figura 47 – Deslocamento adimensional da frente de pirólise no período de pirólise obtido pelo modelo 3	123
Figura 48 – Deslocamento adimensional das frentes de pirólise e ablação no período de ablação obtidos pelo modelo 3.....	123
Figura 49 – Taxa de recessão adimensional das frentes de pirólise e ablação no período de ablação obtidas pelo modelo 3.....	124

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação do tempo computacional para a solução do sistema transformado utilizando os 3 esquemas numéricos da rotina <i>NDSolve</i> (sem Balanço Integral).....	72
Tabela 2 – Comparação do tempo computacional para a solução do sistema transformado utilizando os 3 esquemas numéricos da rotina <i>NDSolve</i> (com Balanço Integral)	73
Tabela 3 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 2$ (sem Balanço Integral).....	74
Tabela 4 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 2$ (com Balanço Integral)	75
Tabela 5 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 10\tau$ (sem Balanço Integral).....	76
Tabela 6 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 10\tau$ (com Balanço Integral).....	76
Tabela 7 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 10\tau^2$ (sem Balanço Integral).....	77
Tabela 8 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 10\tau^2$ (com Balanço Integral)	78
Tabela 9 – Convergência da solução pela GITT para a posição do contorno móvel $S(\tau)$ para reentrada atmosférica típica (sem Balanço Integral).....	82
Tabela 10 – Convergência da solução pela GITT para a posição do contorno móvel $S(\tau)$ para reentrada atmosférica típica (com Balanço Integral)	82
Tabela 11 – Convergência da solução por GITT para a posição adimensional do contorno móvel $S(\tau)$ para o modelo de duas camadas (sem Balanço Integral)	86

Tabela 12 – Convergência da solução por GITT para a posição adimensional do contorno móvel $S(\tau)$ para o modelo de duas camadas (com Balanço Integral)	86
Tabela 13 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel $\eta_b(\tau)$ para $Q(\tau) = 10\tau$ (sem Balanço Integral).....	90
Tabela 14 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 10\tau$ (com Balanço Integral)	90
Tabela 15 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de pirólise, $s_p(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções	94
Tabela 16 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de pirólise, $s_p(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções	96
Tabela 17 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de ablação, $s_{ab}(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções	96
Tabela 18 – Convergência da solução por GITT para a expansão em autofunções da temperatura, com diferentes números de subdivisões espaciais para integração semi-analítica	111
Tabela 19 – Convergência da solução por GITT para a variação da massa específica segundo a equação de Arrhenius, com diferentes números de subdivisões do domínio espacial na integração semi-analítica	112
Tabela 20 – Convergência do fluxo de massa dos gases de pirólise, com diferentes números de subdivisões do domínio na integração semi-analítica.....	113
Tabela 21 – Tempo de início da ablação para diferentes ordens de ativação na degradação do material no período de pré-ablação	114
Tabela 22 – Propriedades da Sílica Fenólica de Alta Densidade	118
Tabela 23 – Propriedades de Degradação da Sílica Fenólica (Equação de Arrhenius)	119

Tabela 24 – Tempos de início da pirólise e da ablação para o modelo com degradação de material (Equação de Arrhenius).....	120
Tabela 25 – Comparação do início da pirólise e ablação pelos modelos 3 e 4	122

Lista de Símbolos

c_p	Calor específico
c_{Pg}	Capacidade térmica dos gases
E	Energia de Ativação
h	Entalpia
h_c	Coefficiente de transferência de calor de contato
h_g	Entalpia dos gases
H_{ab}	Calor latente de mudança de fase de ablação
H_p	Calor latente de mudança de fase de pirólise
k	Condutividade térmica
L, L_1, L_2	Espessuras dimensionais das camadas ablativa e estrutural
L^*	Espessura total
M_n	n-ésima norma para a transformada do modelo de decomposição no período pré-ablação
$\dot{m}_p(t)$	Fluxo de massa dos gases de pirólise total
N_i	i-ésima norma
n	Ordem de ativação
$q_w(t)$	Fluxo de calor variável dimensional
$Q(\tau)$	Fluxo de calor variável adimensional
R	Constante ideal dos gases
\bar{s}_{ab}	Posição do contorno de pirólise
$s_{ab}(t)$	Contorno móvel de ablação dimensional
$s_p(t)$	Contorno móvel de pirólise dimensional
$S_{ab}(\tau)$	Contorno móvel de ablação adimensional
t	Coordenada temporal
t_{ab}	Tempo dimensional do início da ablação

t_p	Tempo dimensional do início da pirólise
x	Coordenada espacial
T_0	Temperatura inicial
T_{ab}^*	Temperatura de mudança de fase de ablação
T_p^*	Temperatura de mudança de fase de pirólise
$T_v(x,t)$	Temperatura dimensional do material virgem
$T_p(x,t)$	Temperatura dimensional do material carbonizado
$\bar{T}_i(t)$	Potencial transformado dimensional
$T_{av}(t)$	Temperatura média dimensional
$T_{avp}(t)$	Temperatura média dimensional para a zona de pirólise no período pré-pirólise
$T_{avp}^*(t)$	Temperatura média dimensional para a zona de pirólise no período de pirólise

SÍMBOLOS GREGOS

α	Difusividade térmica
β_i	i-ésimo autovalor
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ΔH_p	Entalpia total dos gases de pirólise
φ_i	i-ésima autofunção
$\tilde{\varphi}_i$	i-ésima autofunção normalizada
η	Coordenada espacial adimensional para o período pré-ablação
η^*	Coordenada espacial adimensional para o período de ablação
$\eta_b(\tau)$	Contorno móvel adimensional para o período de ablação
κ	Fator pré-exponencial
λ_n	n-ésimo autovalor para a transformada do modelo de decomposição no período pré-ablação

ν	Inverso do número de Stefan
$\theta_{av}(\tau)$	Temperatura média adimensional
$\theta_{av,2}(\tau)$	Temperatura média adimensional para a zona de pirólise
$\theta_{ab}(\eta)$	Condição inicial adimensional para o período de ablação na camada ablativa
$\theta_{ab,2}(\eta)$	Condição inicial adimensional para o período de ablação na camada estrutural
$\theta(\eta, \tau)$	Temperatura adimensional para o período pré-ablação
$\theta^*(\eta^*, \tau)$	Temperatura adimensional para o período de ablação
$\bar{\theta}_i(\tau)$	Potencial transformado adimensional
ρ	Massa específica
$\rho(x, t)$	Função da massa específica que descreve a decomposição
$\bar{\rho}_n(t)$	Potencial transformado da equação de decomposição
τ	Coordenada temporal adimensional
τ_{ab}	Tempo adimensional do início da ablação
Ω_n	n-ésima autofunção para a transformada da decomposição
$\tilde{\Omega}_n$	n-ésima autofunção normalizada para a transformada da decomposição

Subscritos

ab	Ablação
p	Pirólise
pp	Pré-pirólise
v	Virgem
w	Parede
0	Ponto inicial
1	Camada Ablativa
2	Camada Estrutural

CAPÍTULO 1

1. Introdução

Este trabalho faz parte de uma iniciativa que teve como ponto de partida o trabalho de DINIZ *et al.* [1] no qual foi apresentado o estudo da transferência de calor por condução unidimensional em materiais puramente ablativos sob a influência de um fluxo de calor prescrito, empregando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Em 1991, RUPERTI JR. e COTTA [2] deram seqüência neste estudo ampliando o modelo para estruturas multicamadas, também considerando um modelo de transferência de calor de ablação pura, para materiais que não sofrem degradação.

Em parceria com o IAE/CTA, o Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ (PEM/COPPE/UFRJ) iniciou o desenvolvimento de estudos, [3] e [4], que tinham como objetivo apresentar modelos para estimativa de aquecimento externo e interno em veículos espaciais. Nesta mesma iniciativa foi desenvolvido um modelo analítico para o aquecimento aerodinâmico em escoamento hipersônico, e então, analisada a região de estagnação com uma proteção térmica ablativa, utilizando a Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA).

Em 2000, a Agência Espacial Brasileira (AEB) lançou um projeto que buscava parcerias para o desenvolvimento de um satélite de pequenas dimensões para realização de experimentos em micro-gravidade, o SARA (Satélite de Reentrada Atmosférica) [5], com órbita em torno de 300 km de altitude por cerca de 10 dias. Desta forma, com a parceria estabelecida com o IAE/CTA, que se propôs a desenvolver o SARA, o PEM/COPPE/UFRJ financiado pela AEB iniciou um trabalho cujo intuito primordial foi o desenvolvimento de ferramentas computacionais e experimentais para análise termomecânica de proteção térmica por ablação em satélites recuperáveis (veículos de reentrada atmosférica).

No início do processo de reentrada, devido à grande distância entre as moléculas de ar, ocorre uma baixa fricção entre a proteção térmica e as moléculas [6]. No entanto, à medida que o satélite alcança as camadas mais densas da atmosfera, aproximadamente 100 km de altitude, os efeitos devido ao aquecimento aerodinâmico intensificam-se, podendo acarretar danos à estrutura do satélite, uma vez que os altos

fluxos térmicos podem elevar a temperatura de parede na região frontal do satélite a mais de 2500°C [7] e [8].

Em virtude destas severas condições de vôo faz-se necessário ter uma reentrada controlada desses satélites para garantir o perfeito estado da carga útil transportada. Sendo assim, saber quanto calor é transferido para dentro da estrutura é um dado primordial na análise do problema. No contexto de buscar uma ferramenta de simulação rápida e suficientemente precisa para projeto de sistemas de proteção térmica, RUPERTI JR. e COTTA [9] apresentaram um estudo para problemas de ablação utilizando a Técnica das Equações Integrais Acopladas, para derivação de formulações mistas concentradas-locais, associada a uma análise assintótica de profundidade de penetração térmica. OLIVEIRA [10] e OLIVEIRA e ORLANDE [11] e REY SILVA [12] e REY SILVA e ORLANDE [13] complementaram as análises nesta fase, e realizaram estudos de estimativas de função e parâmetros, respectivamente, para determinação de propriedades termofísicas e fluxos térmicos na superfície do veículo, utilizando técnicas de problemas inversos.

O presente trabalho iniciou-se em uma segunda fase do projeto junto à AEB, a partir de 2004, dando continuidade aos trabalhos em paralelo desenvolvidos também por MAYALL [14] e MOTA [15], buscando propor e avaliar a utilização de novas ferramentas computacionais para o cálculo da transferência de calor por condução em materiais ablativos e não ablativos.

1.1 Motivação e Objetivos

O presente estudo visa então construir modelos locais e soluções híbridas numérico-analíticas para problemas de ablação sem e com efeitos de pirólise. A motivação principal foi então prover o código TPS-Nose [18], para análise térmica completa de uma missão de reentrada atmosférica, com resultados mais precisos para a taxa de recessão da proteção térmica, bem como, com variações espaciais de temperatura para acoplamento com a análise termomecânica, no contexto do projeto desenvolvido junto à AEB. Deve-se lembrar que a versão atualmente disponível do código TPS-Nose [18] implementa uma formulação de parâmetros concentrados melhorada [9], a partir da técnica de reformulação conhecida como Técnica das Equações Integrais Acopladas, CIEA [17], que essencialmente determina temperaturas médias e posição de contorno móvel em um sistema puramente ablativo, sem incluir a

degradação do material ao longo do processo e sem propiciar resultados para a distribuição espacial de temperatura.

Nesse contexto, o primeiro modelo aqui implementado e resolvido, é essencialmente um modelo de ablação pura, visando materiais que não sofrem degradação apreciável durante a reentrada, que já havia sido tratado em contribuições anteriores [1]. Entretanto, buscou-se aqui prover uma solução híbrida numérico-analítica por transformação integral (GITT), como em [16] e [17], mas propondo-se uma técnica de aceleração de convergência conhecida como Balanço Integral [55], que basicamente reescreve as expansões em autofunções para explicitar a contribuição dos termos-fonte do problema, que em geral atrasam o processo de convergência. Assim, obtém-se uma solução muito precisa e robusta, mas dentro do paradigma de adequar-se seu uso a um código de análise e otimização de sistemas de proteção térmica, quando se requer uma solução direta bastante rápida e flexível.

A seguir, considerou-se um modelo, também de ablação sem pirólise, como o anterior, mas incorporando a participação de uma camada estrutural interna no processo de transferência de calor. Sabe-se que em muitas situações a temperatura do ambiente interno de um satélite pode ser o fator mais restritivo no projeto da proteção térmica. Entretanto, o modelo anteriormente proposto, ao não considerar a conjugação com o material estrutural e sua capacidade térmica, acaba oferecendo resultados muito conservativos para a temperatura da superfície interna da proteção térmica.

O terceiro modelo proposto e também resolvido por transformação integral, este incorpora o efeito da pirólise para materiais que sofrem degradação apreciável, a partir de um modelo simplificado proposto por HOGGE e GUERREKENS [59], que estabelece uma temperatura fixa de pirólise e despreza o efeito da migração dos gases de pirólise através da matriz porosa. O modelo de HOGGE e GUERREKENS [59] é aqui primeiramente reformulado, adotando-se uma formulação de parâmetros concentrados melhorada (CIEA) para a camada que já sofreu pirólise, mantendo-se o tratamento local para a região ainda virgem. Com isso, em termos de complexidade computacional, a formulação com pirólise é praticamente semelhante à de ablação pura, à exceção que são determinadas duas frentes móveis, a frente da pirólise e o contorno de ablação. Outra vez, o principal objetivo é ter uma solução ágil e robusta para incorporação no código geral da análise de toda a reentrada e ao longo de toda a proteção térmica, como requerido pelo código TPS Nose [18].

Buscou-se então a verificação de quão conservativo poderia ser o modelo de ablação com pirólise simplificada, como proposto no terceiro modelo acima mencionado. Assim, um quarto modelo foi proposto, que implementa o tratamento detalhado da pirólise, com degradação a partir da equação de Arrhenius e efeito da migração dos gases de pirólise. Este modelo, embora não seja adequado pelo seu custo computacional para utilização em um código ágil de otimização da proteção térmica ou estimativas de propriedades termofísicas em problemas inversos, nos serve aqui ao objetivo de avaliar criticamente as aproximações feitas no modelo de ablação com pirólise simplificada (terceiro modelo).

Por fim, analisa-se uma situação da reentrada projetada para o veículo SARA, com o fluxo de calor líquido estimado com o código TPS-Nose [18], e demonstra-se a previsão do processo ablativo com pirólise de uma proteção térmica de sílica-fenólica, originalmente proposta pelo IAE/CTA, visando demonstrar as ferramentas de análise aqui propostas e construídas, baseadas no modelo com pirólise simplificada (modelo 3) incluindo a conjugação com a estrutura do veículo (modelo 2).

Dando seqüência à linha de pesquisa iniciada com os trabalhos de DINIZ *et al.* [1] e RUPERTI JR. *et al.* [2] e [9], é empregada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) [16] e [17] na solução híbrida numérico-analítica das equações de condução de calor com ablação em meios com uma ou mais camadas. Sob o ponto de vista metodológico, busca-se uma otimização computacional que permita a utilização deste método com controle automático de erro em ferramentas computacionais de projeto de sistemas de proteção térmica, como o código TPS-Nose [18], que requerem soluções de baixo custo computacional para simulações em diversas situações de projeto.

Por outro lado, vislumbrou-se a possibilidade de generalização dos modelos até aqui adotados para incluir efeitos relevantes que podem reduzir o caráter conservador das simulações já realizadas. Assim, leva-se em conta a participação de uma camada estrutural interna no processo de transferência de calor, bem como estende-se a classe de materiais que podem ser tratados por este enfoque, incluindo a modelagem do processo de decomposição que ocorre inevitavelmente em materiais compósitos resinados, comuns nessa aplicação.

1.2 Descrição do Problema Físico

Um modelo de ablação geral envolvendo decomposição de material pode ser descrito esquematicamente como apresentado na Figura 1, considerando um modelo unidimensional multicamada com aquecimento prescrito na fronteira $x=0$. Uma modelagem matemática geral do problema deve ser formulada para que seja possível levar em conta os efeitos de pirólise e carbonização nos estágios específicos.

O primeiro estágio é o de aquecimento sem mudança das características do material, onde se tem apenas a condução de calor nas paredes da proteção térmica e da estrutura.

O segundo estágio é o de pirólise, onde o material começa a ser degradado, mas ainda não sofre carbonização e remoção, é um processo onde ocorre uma ruptura da estrutura molecular original de um determinado composto, geralmente resinado, pela ação do calor. Gera-se uma camada porosa produzida pela migração dos gases de pirólise do material.

Por fim, o último estágio é aquele onde o material encontra-se totalmente carbonizado e este é então removido, em modelos conservativos.

Estes estágios são distinguidos ao serem atingidos certos níveis de temperatura. O estágio de condução (primeiro estágio) termina quando a temperatura na fronteira externa atinge a temperatura onde o material começa a ser degradado, esta temperatura é denominada de temperatura de pirólise. O estágio de pirólise simples (segundo estágio), por sua vez, termina quando a temperatura de ablação é alcançada na fronteira externa. Após ser alcançada a temperatura de ablação inicia-se o estágio onde o material é removido.

Ainda pode-se considerar o segundo estágio ocorrendo assintoticamente desde o início do processo de condução utilizando uma lei de degradação do material e na equação de energia um termo de transferência devido à perda de massa, as quais são funções da temperatura do material.

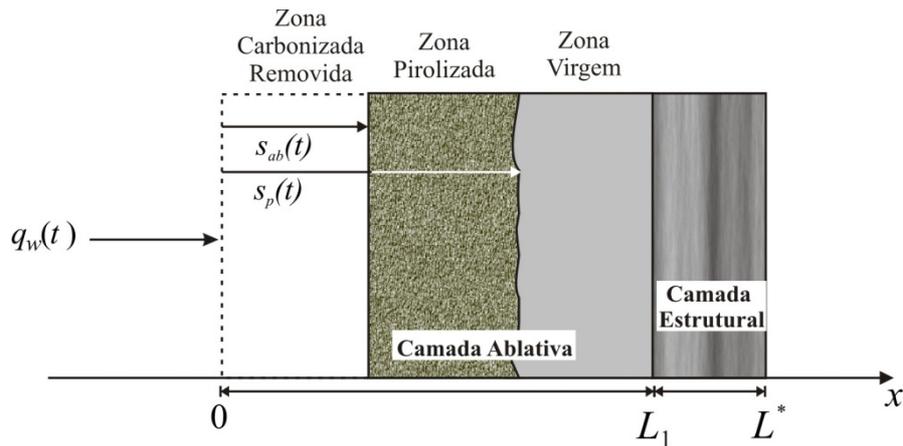


Figura 1 - Desenho esquemático do modelo geral considerando ablação com pirólise em duas camadas, ablativa e estrutural

Um modelo mais geral do que o descrito anteriormente incluiria uma camada carbonizada, mas não removida. Porém, para ser considerado este modelo, seria necessário realizar uma análise mecânica para calcular as tensões exercidas na camada carbonizada e assim saber a quantidade de material carbonizado que poderia ser removido. Portanto, aqui é considerado um modelo mais simples e conservativo onde é assumida a remoção imediata do material ao ser alcançada a temperatura de ablação.

Quatro modelos serão apresentados no decorrer deste trabalho: no primeiro modelo considera-se a formulação de ablação sem o processo de degradação material ou pirólise; no segundo modelo é considerado uma camada estrutural na formulação do problema sem pirólise; no terceiro é considerado o processo de pirólise dividido em três estágios bem definidos por valores de temperatura, e por fim no quarto modelo a equação de energia já considera o fluxo de massa dos gases e a decomposição desde o início do período de condução, considerando a equação de Arrhenius. Análises comparativas são então feitas entre os quatro modelos ao longo do desenvolvimento, permitindo-se uma análise crítica da importância de cada fenômeno considerado e da adequação de cada modelo a tarefas específicas de projeto e/ou verificação de códigos para análise de sistemas de proteção térmica.

CAPÍTULO 2

2. Revisão Bibliográfica

Os sistemas de proteção térmica mais comuns em veículos espaciais envolvem a adição de camadas ablativas à estrutura regular, como em bocais de foguete e em superfícies aerodinamicamente aquecidas. Particularmente no caso de veículos em reentrada, a quantidade requerida para o escudo térmico corresponde à cerca de 20 a 30% do peso total do veículo. Aquecimento aerodinâmico em escoamento hipersônico, que foi um campo de intensa atividade de pesquisa nas décadas de 50 e 60 do século XX, está sendo revisto nos anos recentes, em conexão com o desenvolvimento de aeronaves e de missões interplanetárias. Até mesmo no caso de veículos espaciais convencionais, as necessidades de um projeto ótimo e de procedimentos computacionalmente eficientes, estimularam a análise detalhada de sistemas de proteção térmica através do método da rejeição, que envolve taxas de aquecimento moderadas, e também através do método da absorção, quando as taxas de aquecimento são mais elevadas. Para a situação de reentrada balística em escoamento hipersônico na atmosfera, o método da absorção é em geral preferido.

Estudos de materiais ablativos são comumente encontrados na literatura devido as suas inúmeras aplicações, as quais podem ser: sistemas de proteção térmica de veículos espaciais, processo de fabricação de microcanais, aplicações metalúrgicas e etc. A literatura sobre transferência de calor em materiais ablativos é muito extensa, e aqui será dada ênfase aos estudos relacionados a sistemas de proteção térmica de veículos espaciais.

BIOT e AGRAWAL [19] utilizaram uma análise variacional para estudar o fenômeno de ablação em um modelo de condução de calor unidimensional em um cilindro semi-infinito, contemplando a condutividade térmica como função da temperatura e a capacitância térmica constante. Os autores estabeleceram uma expressão para o cálculo da distância da penetração da frente de ablação para o regime permanente.

A região de maior interesse em problemas de aquecimento hipersônico é indubitavelmente o ponto de estagnação, local onde o ar atravessa um choque quase normal, causando, portanto, um forte aumento na temperatura dos gases e,

eventualmente, promove a dissociação, ou até mesmo a ionização dentro desta camada limite quimicamente reativa. Conseqüentemente, o aquecimento hipersônico consiste na convecção, radiação e em reações químicas, com certa predominância dos fenômenos convectivos em veículos balísticos para temperaturas moderadas do gás. O tratamento detalhado de uma combinação tão complexa de fenômenos físicos e químicos não é ainda praticável, em particular dentro de custos computacionais práticos. Métodos de engenharia foram desenvolvidos dentro das décadas de 70 e 80 permitindo predições rápidas e razoavelmente precisas do aquecimento aerodinâmico hipersônico em configurações tridimensionais gerais, incluindo os efeitos das reações químicas [20] a [22].

Avaliações do aquecimento aerodinâmico ao longo da trajetória de veículos espaciais em reentrada atmosférica foram acopladas com a solução da equação da energia na parede da ogiva, representada pela equação da condução do calor, geralmente em sua formulação unidimensional, com a convecção e a radiação conjugadas na parede externa. Para a proteção térmica ablativa, o balanço de calor na fronteira móvel fornece uma relação para determinar sua posição num determinado tempo. A condução de calor unidimensional com ablação foi estudada previamente, através de procedimentos puramente numéricos, aproximados de parâmetros concentrados ou ainda utilizando procedimentos numérico-analíticos.

Entre as soluções por procedimentos puramente numéricos pode ser citado ZIEN [23] que apresentou uma solução aproximada pelo método integral para o problema transiente de ablação unidimensional com fluxo de calor dependente do tempo. O autor explicita os resultados em função de duas formas de dependência do fluxo de calor com o tempo, ambas admitindo fluxos de calor como sendo função monotônica do tempo.

HOGGE e GERREKENS [24] e [59] apresentaram resultados puramente numéricos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos considerando deformações bidimensionais para superfícies ablativas. Em seus estudos apresentaram comparações de resultados considerando grades fixas com 50 e 20 elementos finitos e grades móveis com 10 elementos finitos. Para problemas com pirólise utilizaram 20 elementos distribuídos uniformemente e validaram os resultados com resultados obtidos via método entálpico.

BLACKWELL [25] introduziu a solução numérica para predição unidimensional de problemas de ablação utilizando o Método dos Volumes Finitos com

diferenciação exponencial para ponderar os termos convectivos à montante do escoamento.

BLACKWELL e HOGAN [26] desenvolveram uma técnica que utiliza a transformação de Landau em conjunto com o Método de Volumes Finitos para resolver problemas unidimensionais de ablação. Esta é baseada na forma integral das equações de conservação para controlar a frente móvel e as velocidades de recessão. Para avaliar os fluxos da condução e da convecção na parede do volume de controle foram utilizados perfis de temperatura exponenciais. A técnica foi aplicada em geometrias planas e cilíndricas unidimensionais e foram apresentados os cálculos para verificar a precisão do método.

HOGAN *et al.* [27] apresentaram a solução para problemas de ablação axissimétricos bidimensionais com malha não estruturada. A equação de energia foi formulada e resolvida usando o Método dos Volumes Finitos. A forma exterior do corpo ablativo é determinada a partir de um balanço de energia na superfície com a malha interior deslocada em relação à superfície de ablação, como se o corpo fosse um sólido elástico linear. A razão de recessão computada foi comparada com uma solução analítica para ilustrar a precisão e convergência destas aproximações. Adicionalmente, aplicações práticas foram apresentadas. Algumas conclusões como a extensão do método para geometrias tridimensionais e a boa qualidade dos resultados obtidos foram explicitadas.

OHLHORST *et al.* [28] realizaram experimentos, em um trabalho da NASA, para construir um banco de dados de difusividade térmica para várias estruturas de materiais compósitos de carbono. Os autores mostram sistemas avançados de proteções térmicas destinadas a equipar os futuros veículos hipersônicos que são submetidos a temperaturas da ordem de 1800 K e afirmam que compósitos de carbono possuem algumas características tais como baixo peso e resistência a altas temperaturas que os tornam atrativos para esses sistemas de proteção térmica.

KANEVCE *et al.* [66] apresentou dois experimentos para um composto de carbono e resina fenólica. Para validar seus resultados considerou um modelo matemático transiente, unidimensional, com duas frentes móveis e considerou a equação de Arrhenius como modelo de degradação material. Para resolver a sistema de equações utilizou o método de Newton-Raphson's combinado com um esquema de redução de passo para minimizar as diferenças entre o modelo de predição e as respostas

experimentais. Os autores observaram que o método teve rápida convergência, porém, a influência da redução de medidas originou ruídos na solução.

MACÊDO *et al.* [67] propuseram a solução do problema de difusão não-linear com contorno móvel com um simples modelo de transferência de calor durante a queima de um cilindro de madeira. Utilizando a GITT (Técnica da Transformada Integral) e um filtro denominado localmente instantâneo para acelerar a convergência, foram apresentados os resultados de redução de rigidez do sistema de equações diferenciais, bem como, resultados de ablação em cilindros de diferentes tamanhos. Concluíram que o início da ablação é maior para materiais mais densos e úmidos como no caso da madeira e que o filtro localmente instantâneo reduz de forma muito satisfatória a ordem de truncamento retornando boa acurácia.

Em trabalhos desenvolvidos na COPPE/UFRJ por OLIVEIRA [10] e REY SILVA [12], OLIVEIRA e ORLANDE [11] e REY SILVA e ORLANDE [13] em 2002, foram apresentadas estimativas de função e parâmetros de materiais ablativos utilizando técnicas de estimativas como o Método do Gradiente Conjugado, Método de Levenberg-Marquardt, Técnica de Estimativa Sequencial de Parâmetros, bem como, procedimentos estatísticos para análise da confiabilidade dos resultados. OLIVEIRA [10] estimou o fluxo de calor utilizando medidas simuladas de temperatura e de posição da frente de ablação. REY SILVA [12] utilizou o Método de Volumes Finitos para resolver o problema direto nos períodos de pré-ablação e de ablação. Depois realizou estimativas de parâmetros para determinar propriedades termofísicas, tais como, capacidade térmica, condutividade térmica e calor de ablação de materiais ablativos.

BRAGA [29] e BRAGA e MANTELLI [30] apresentaram a solução de transferência de calor unidimensional com ablação utilizando o Método Integral e Analogia Elétrica. Neste trabalho buscou-se determinar a transferência de calor transiente em um sólido submetido às condições ablativas, onde os resultados foram comparados aos fornecidos por BLACKWELL [25], obtendo-se uma boa concordância.

BRAGA e MANTELLI [31] apresentaram a solução aproximada da equação de condução do calor unidimensional transiente durante o processo de ablação de um material de propriedades termofísicas constantes, submetido a um fluxo de calor constante. Utilizando o Método Integral com um perfil parabólico obtiveram-se resultados levando em conta duas frentes de penetração: penetração do calor e da ablação. Os resultados obtidos foram comparados com resultados numéricos apresentados por BLACKWELL [25].

SHIH *et al.* [32] desenvolveram um modelo físico que descreve o fenômeno transiente da ablação de materiais, os quais estão submetidos a temperaturas muito elevadas, para os casos com e sem formação de uma camada fundida sobre a superfície dos materiais. A validade do modelo foi demonstrada numericamente por comparação com soluções analíticas para o caso especial de temperaturas de ablação constante. Para o caso geral de temperatura de ablação variável foram encontradas diferenças entre os casos dos materiais com e sem formação de uma camada fundida, tendo baixo calor de ablação e para altos fluxos de calor externo prescritos. A conclusão dos autores foi que não é recomendável desprezar os efeitos causados pela formação da camada fundida principalmente para materiais com baixo calor de ablação.

A chamada Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) é uma técnica de reformulação e simplificação para problemas de difusão. Uma formulação mista diferencial-concentrada é obtida através do uso de procedimentos melhorados de parâmetros concentrados, a partir de aproximações de Hermite para integrais, nas variáveis independentes selecionadas para serem removidas. Tal aproximação, revista em [17] e [38], já foi empregada na solução de diferentes classes de problemas de transferência de calor [33] a [39], incluindo a importante classe de problemas não lineares de mudança de fase de interesse ao presente estudo [9].

RUPERTI JR. e COTTA [9], RUPERTI JR. *et al.* [18] e COTTA *et al.* [40] e [41] apresentam resultados comparativos da aplicação de parâmetros concentrados e da utilização da Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) os quais foram validados com resultados encontrados na literatura obtidos por transformação integral. Para a proteção térmica ablativa, uma análise do sistema através de parâmetros concentrados clássico pode resultar em erros significativos, especialmente com o aumento do número de Stefan, devido às elevadas taxas de absorção.

Com a extensão dos métodos híbridos, métodos que se valem em parte de procedimentos numéricos e em parte de procedimentos analíticos, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) passou a ter um papel importante na solução de problemas não-lineares de difusão. A Técnica da Transformada Integral Generalizada foi proposta por ÖZISIK e MURRAY [42], utilizando uma abordagem de transformação integral que elimina a necessidade do problema ser transformável a priori, visando transformar equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada [16] e [17], como empregada na análise de problemas de contorno móvel, foi também utilizada em soluções híbridas de condução não-linear com ablação [3]. Estas aproximações oferecem alta precisão em seus resultados convergidos, os quais foram estendidos em [4], [43] e [44], a situações de ablação mais realísticas em meios multicamadas, para aplicações aeroespaciais. Resultados numéricos foram obtidos para uma configuração típica (Teflon/Alumínio), e características da solução proposta são ilustradas em [4] e [44].

DINIZ *et al.* [1] apresentaram a solução unidimensional para o problema puramente ablativo onde consideraram 3 formas funcionais para a variação temporal para o fluxo de calor: Constante, Linear e Parabólico. Foi utilizada uma rotina numérica do IMSL para sistemas rígidos a fim de se resolver o sistema de equações diferenciais acopladas, obtido da aplicação da GITT. Os resultados foram comparados com outros métodos de solução encontrados na literatura, os quais tiveram uma boa concordância.

DINIZ *et al.* [45] a [47] apresentaram estudos feitos para avaliar a proteção térmica de corpos de revolução, esfera e cilindros com ablação utilizando a GITT, e RUPERTI JR. *et al.* [48] apresentaram uma covalidação da solução para problemas de mudança de fase com Transformada Integral e com o Método de Volumes Finitos.

DINIZ *et al.* [49] apresentaram uma solução analítica para o problema ablativo unidimensional em quatro geometrias distintas submetida a um fluxo de calor conhecido. Foram utilizadas as Técnicas da Transformada Integral Clássica (CITT) e Transformada Integral Generalizada (GITT). Os resultados referem-se à profundidade de ablação, velocidade da frente ablativa e perfis de temperatura.

De acordo com LEITE [64] o processo de ablação pode ocorrer por três formas distintas; sublimação, fusão ou carbonização, dependendo das características do material da proteção térmica. Ainda segundo o mesmo autor, o fenômeno de ablação é auto-ajustável, devido ao aumento de transferência de massa para a camada limite com o aumento do fluxo de calor incidente, o que torna mais espessa a camada limite, adicionando proteção à superfície.

KUROKAWA *et al.* [50] a [52] apresentaram um modelo bidimensional para analisar o problema de ablação transiente em um prisma retangular a fim de obter a espessura e a velocidade de ablação. Foi utilizada para tal a Técnica da Transformada Integral Generalizada e implementada na linguagem computacional FORTRAN, sendo empregada a biblioteca de rotinas do IMSL. Foram apresentadas, então, a distribuição

de temperatura, a espessura e a velocidade de ablação para diferentes fluxos de calor prescritos no contorno.

GOMES *et al.* [53] consideraram os efeitos da transferência de calor por radiação para calcular a ablação em uma placa de espessura finita. Uma análise unidimensional foi realizada utilizando a GITT para obter a solução do sistema de equações diferenciais acopladas. A placa de espessura finita foi submetida a um fluxo de calor por radiação prescrito dependente do tempo em uma das faces. Foram apresentados, então, resultados da espessura e taxa de recessão do material. Estes resultados foram comparados com resultados obtidos por métodos numéricos encontrados na literatura.

LIN e YANG [68] realizaram um trabalho numérico e experimental para investigar do aquecimento aerodinâmico em um cone de aço revestido de um material ablativo. Foi considerada formulação unidimensional, transporte de energia transiente, modelo de conservação de massa acoplado com cálculo de aquecimento aerodinâmico e degradação térmica. Os cálculos envolveram o histórico da distribuição de temperatura no material ablativo e no material estrutural tendo boa coerência com os resultados experimentais.

GOMES *et al.* [54] utilizaram uma formulação unificada para realizar a análise unidimensional de corpos de revolução submetidas ao processo de ablação. Foi utilizado um fluxo de calor prescrito em uma das faces como condição de contorno e para obter a solução foi utilizada a GITT. Os resultados obtidos pela formulação unificada foram comparados com DINIZ *et al.* [1] tendo sido encontrada uma boa concordância.

BAHRAMIAN *et al.* [69] resolveram as equações de balanço de massa e energia a fim de solucionar o modelo de ablação com degradação térmica em compostos ablativos. Um método para determinar e calcular alguns parâmetros na equação de ablação foi proposto utilizando técnicas de análise diferencial calorimétrica e gravidade térmica, simultaneamente. Em ensaios experimentais os autores utilizaram um composto de resina fenólica com asbestos e uma chama de oxiacetileno. Para discretizar o modelo numérico foi utilizado o método de diferenças finitas explícito e o contorno móvel foi fixado utilizando a transformação de Landau. Concluíram que o modelo demonstrou boa precisão na variação das propriedades termofísicas tais como: condutividade térmica, massa específica e capacidade térmica. Também foi apresentada boa concordância com os resultados experimentais.

RUSSELL [65] realizou uma análise de um composto de resina epoxy considerando uma modelagem matemática complexa. Além dos efeitos de condução e recessão do material, determinados pela equação do balanço de energia na parede, foram considerados os efeitos devido à convecção-radiação acoplados à transferência de massa. Um estudo da sensibilidade dos parâmetros que tem maior influência na ablação foi realizado. Concluiu-se que parâmetros como entalpia, formação do aquecimento de queima, coeficientes de transferência de calor e a energia de ativação da segunda reação são importantes.

FARKAS *et al.* [70] apresentaram resultados de uma modelagem matemática proposta e dados experimentais realizados considerando degradação. O modelo matemático descrito considerou o calor e o balanço de massa de um polímero com espessura finita. Foi considerado ainda que a degradação é iniciada por um fluxo de calor constante e o mecanismo de degradação foi calculado utilizando a Lei de Darcy para descrever o transporte de massa dos gases de pirólise com uma condição de simplificação na qual foi assumida que o volume do sólido é constante durante a degradação. Como resultados apresentaram os resultados experimentais e numéricos obtidos realizando análises de degradação da resina epoxy. Obtiveram ainda boa concordância para a predição do tempo de ignição para a degradação. Contudo ainda concluíram que a capacidade térmica do composto não tem algum efeito sobre o perfil de temperatura durante o processo de pré-aquecimento. Também estabeleceu o efeito do calor de combustão re-radiada e concluíram que a quantidade de calor de pirólise absorvido é um importante fator no modelo de degradação.

BAHRAMIAN e KOKABI [71] realizaram estudos experimentais da influência da difusividade térmica efetiva estimada em materiais compostos e nano-compostos ablativo. Eles apresentaram a solução inversa para estimativa de parâmetros usados para identificar a difusividade térmica efetiva da resina fenólica com asbestos e camada de nano-composto de silicato. Medidas transientes da temperatura, tomadas da superfície superior e a espessura das amostras são usadas na análise inversa para estimar a mudança da difusividade térmica efetiva.

JIMENEZ *et al.* [72] apresentaram a análise e a simulação da cinética da pirólise para a proteção de estruturas de aço. O material ablativo considerado foi uma resina epoxy-anime com dois agentes retardadores da recessão os quais foram: ácido bórico e polifosfato de amônia. Para avaliar o mecanismo de degradação foi realizada análise termo-gravimétrica. De acordo com os autores os resultados obtidos tiveram boa

concordância entre os resultados experimentais e as curvas simuladas em condições dinâmicas.

MACHADO e MORGENSTERN [73] apresentaram resultados de simulações do aquecimento aerodinâmico e ablação na plataforma Sub-orbital SARA. Foi estimado ainda o coeficiente de convecção usando a pressão de superfície pela solução N-S e pelo método de Newton, e problema de movimento do contorno do sistema de proteção térmica ablativo foi simulado usando um método de movimento de malha. Resultados de espessura do TPS foram apresentados para casos bidimensionais resolvidos utilizando o método de Newton e simulações em CFD.

CAPÍTULO 3

3. Modelagem Matemática

3.1 Modelo de ablação sem Pirólise

Pode-se dividir a solução do problema de condução de calor com ablação em dois períodos distintos. No primeiro é considerado somente o período de condução do calor chamado de *período de pré-ablação*. A formulação deste período, para propriedades termofísicas constantes, permite a obtenção de solução exata pelos métodos clássicos. Este período é válido sobre todo o domínio espacial, porém, ao ser atingida a temperatura de ablação na face que recebe o aquecimento aerodinâmico, inicia-se o chamado *período de ablação*, que ocorre a temperatura constante. Considera-se ainda que a perda de material na superfície não interfere no fluxo de calor incidente. No período de ablação é considerado o balanço de energia na parede para representar o movimento da mesma. Uma parte do fluxo de calor incidente no contorno móvel é removida no processo de mudança de fase.

Sendo assim, o segundo período consiste de um problema de condução de calor acoplado a equação do balanço de energia na parede, no qual será utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) [16] na obtenção de uma solução híbrida numérico-analítica.

3.1.1 Meio Formado por Uma Camada

Considerando o problema de condução do calor unidimensional em um meio formado por um único material, como mostrado na Figura 2, inicialmente à temperatura constante T_0 , sujeito a um fluxo de calor variável, $q_w(t)$, no contorno $x=0$, e com isolamento térmico no contorno $x=L$, a formulação matemática para o problema de ablação de materiais sem efeito de pirólise pode ser escrita em sua forma dimensional como segue:

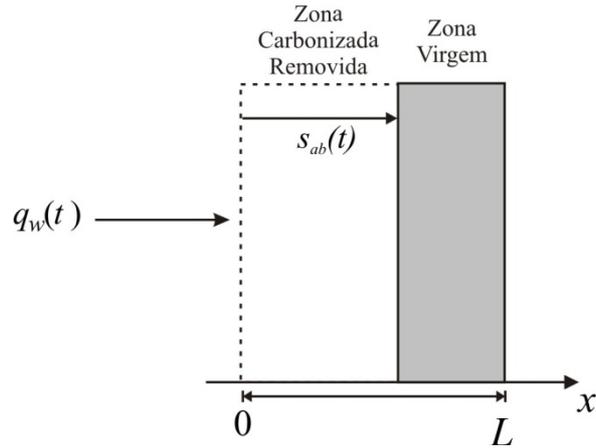


Figura 2 – Modelo de ablação considerando somente o processo sem pirólise

- Período de Pré-Ablação:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.1)$$

$$T_v(x,t) = T_0 \quad 0 \leq x \leq L; \quad t = 0 \quad (3.2)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = q_w(t) \quad x = 0; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.3)$$

$$k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.4)$$

- Período de Ablação:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} \quad s_{ab}(t) < x < L; \quad t > t_{ab} \quad (3.5)$$

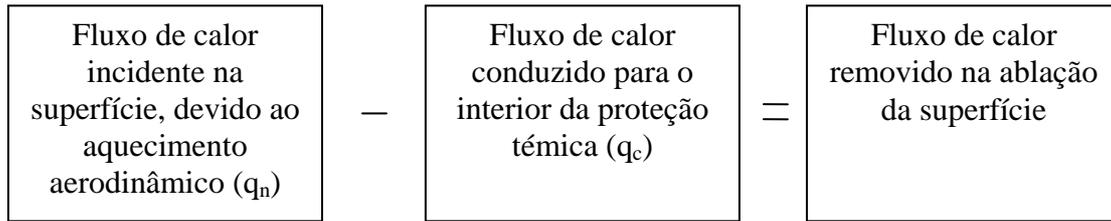
$$T_v(x,t) = T_{ab}(x) \quad s_{ab}(t) \leq x \leq L; \quad t = t_{ab} \quad (3.6)$$

$$T_v(x,t) = T_{ab}^* \quad x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.7)$$

$$k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = L; \quad t > t_{ab} \quad (3.8)$$

onde ρ_v é a massa específica do material virgem, c_{Pv} é o calor específico, k_v a condutividade térmica, t_{ab} define o tempo do início da ablação, $q_w(t)$ é o fluxo de calor prescrito na parede e a T_{ab}^* temperatura de ablação.

Para determinar a taxa de recessão da proteção térmica, utiliza-se uma equação resultante do seguinte balanço de energia na superfície:



Resultando em:

$$q_n - q_c = \rho_v H_{ab} \frac{ds(t)}{dt} \quad (3.9)$$

onde, $q_n = q_w(t)$, $q_c = -k_v \left. \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=s_{ab}(t)}$.

Então, o balanço de energia é escrito:

- Balanço de Energia no Contorno Móvel:

$$\rho_v H_{ab} \frac{ds_{ab}(t)}{dt} = q_w(t) + k_v \left. \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=s_{ab}(t)} \quad t > t_{ab} \quad (3.10)$$

$$s_{ab}(t_{ab}) = 0$$

Para resolver este problema de fronteira móvel é necessário resolver as equações (3.5) e (3.10), simultaneamente, onde H_{ab} é o calor de ablação e $s_{ab}(t)$ é a função a ser calculada e que determina o movimento da parede que sofre ablação.

3.1.2 Meio Formado por Duas Camadas

Considera-se agora um meio composto por dois tipos de materiais, como mostra a Figura 3. Os materiais 1 e 2 foram denominados como camadas ablativa e estrutural, respectivamente. Um fluxo de calor $q_w(t)$ é imposto em uma das faces e a temperatura inicial constante T_0 foi considerada em ambos os materiais das duas camadas.

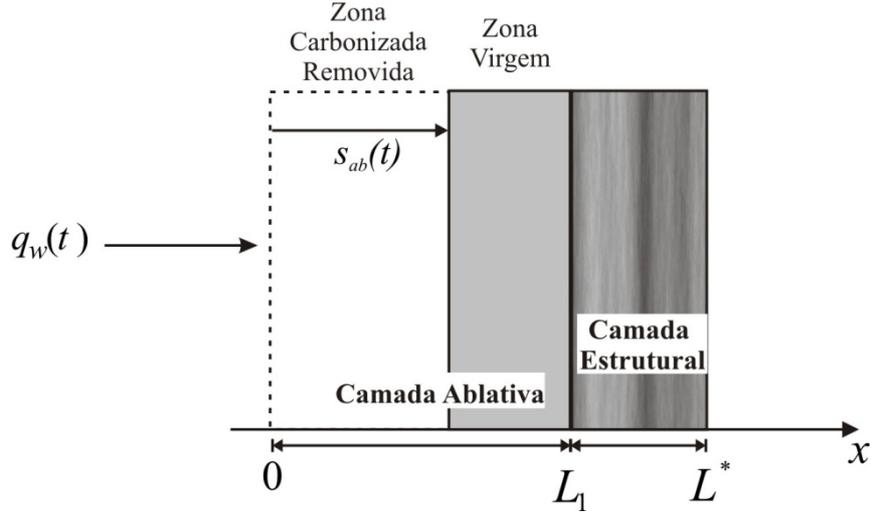


Figura 3 – Modelo de ablação sem pirólise considerando camada estrutural

A formulação matemática para os períodos de pré-ablação e de ablação em meio com duas camadas, supondo condição de acoplamento de resistência de contato, pode ser escrita como:

- Período de Pré-Ablação:

$$\rho_1 c_{p,1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L_1; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.11)$$

$$\rho_2 c_{p,2} \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad L_1 < x < L^*; \quad 0 < t < t_{ab}$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(x,t) &= T_0 & t = 0; \quad 0 \leq x \leq L_1 \\ T_2(x,t) &= T_0 & t = 0; \quad L_1 \leq x \leq L^* \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} &= q_w(t) & x = 0; \quad 0 < t < t_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} &= h_c (T_1(x,t) - T_2(x,t)) \\ k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} &= k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad x = L_1; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} &= 0 & x = L^*; \quad 0 < t < t_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

- Período de Ablação:

$$\rho_1 c_{p,1} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad s_{ab}(t) < x < L_1; \quad t > t_{ab} \quad (3.16)$$

$$\rho_2 c_{p,2} \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad L_1 < x < L^*; \quad t > t_{ab}$$

$$T_1(x,t) = T_{ab}(x) \quad t = t_{ab}; \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (3.17)$$

$$T_2(x,t) = T_{ab,2}(x) \quad t = t_{ab}; \quad L_1 \leq x \leq L^*$$

$$T_1(x,t) = T_{ab}^* \quad x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} &= h_c (T_1(x,t) - T_2(x,t)) \\ k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} &= k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad x = L_1; \quad t > t_{ab} \quad (3.19)$$

$$k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = L^*; \quad t > t_{ab} \quad (3.20)$$

onde $L^* = L_1 + L_2$, ρ_i é a massa específica, $c_{p,i}$ é a calor específico, k_i a condutividade térmica, h_c é o coeficiente de transferência de calor no contato entre as camadas, $T_{ab,2}$ é a temperatura da segunda camada (estrutura) determinada ao final do período de pré-ablação, $q_w(t)$ é o fluxo de calor prescrito na parede e t_{ab} define o tempo para o início da ablação.

- Balanço de Energia no Contorno Móvel:

$$\rho_1 H_{ab} \frac{ds_{ab}(t)}{dt} = q_w(t) + k_1 \left. \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=s_{ab}(t)} \quad t > t_{ab} \quad (3.21)$$

$$s_{ab}(t_{ab}) = 0$$

A formulação deste problema será também simplificada empregando-se um método de reformulação para o segundo domínio, aplicando-se a Técnica de Parâmetros Concentrados Clássica [17].

3.2 Modelo de Ablação com Pirólise

Considera-se novamente um problema de condução unidimensional com contorno móvel, na modelagem de proteção térmica composta por uma camada de material ablativo que sofre degradação por pirólise. Considera-se nesse modelo que a ablação e a pirólise ocorrem a temperaturas constantes, e também que não há troca de calor entre os gases resultantes da pirólise com o material carbonizado, não havendo influência destes no fluxo de calor incidente na superfície.

Um balanço de energia nas interfaces é utilizado para modelar o movimento dos contornos de pirólise e ablação à medida que o fluxo de calor é aplicado.

3.2.1 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita

No problema com decomposição térmica com temperatura de pirólise prescrita considera-se que existam 3 períodos distintos. Estes períodos são separados ao serem atingidos dois níveis diferentes de temperatura na face onde há incidência de calor. O primeiro período é o de condução: ao ser atingida a temperatura de decomposição assume-se que a decomposição térmica ocorra instantaneamente, sendo então, iniciado o segundo período, ou período de pirólise, onde ainda não existe remoção de material. Por fim, ao ser atingida a temperatura de ablação, inicia-se o período onde existe remoção de material. A Figura 4 ilustra o modelo de decomposição térmica com temperatura prescrita, HOGGE e GUERREKENS [59].

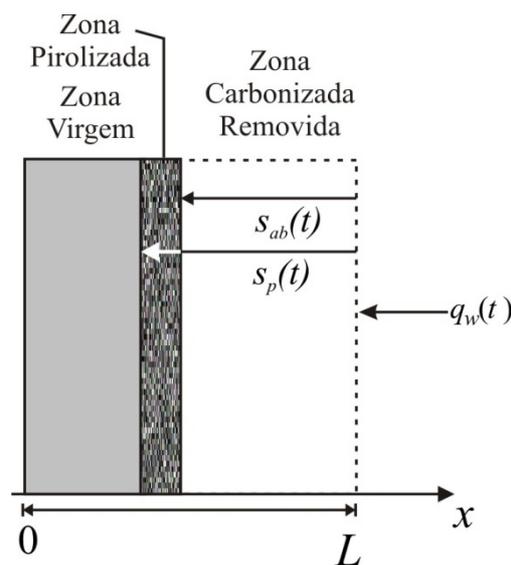


Figura 4 – Modelo de ablação com pirólise considerando temperatura de pirólise prescrita

Ainda é assumido que as propriedades termofísicas são constantes no tempo em cada zona descrita. Neste modelo o fluxo de calor é imposto em $x = L$ para coincidir com os artigos que serão usados para comparação. A formulação matemática para os períodos de pré-pirólise, pirólise e ablação é descrita:

- Período de Pré-Pirólise:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L; \quad 0 < t < t_p \quad (3.22)$$

$$T_v(x,t) = T_0 \quad t = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.23)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad 0 < t < t_p \quad (3.24)$$

$$k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = q_w(t) \quad x = L; \quad 0 < t < t_p \quad (3.25)$$

onde é imposto um fluxo de calor na superfície $x = L$, e $T_v(x,t)$ é a temperatura na zona virgem.

- Período de Pirólise:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < s_p(t); \quad t_p < t < t_{ab} \quad (3.26)$$

$$\rho_p c_{Pp} \frac{\partial T_p(x,t)}{\partial t} = k_p \frac{\partial^2 T_p(x,t)}{\partial x^2} \quad s_p(t) < x < L; \quad t_p < t < t_{ab}$$

$$T_v(x,t) = \tilde{T}_p(x) \quad t = t_p; \quad 0 \leq x \leq s_p(t) \quad (3.27)$$

$$T_p(x,t) = T_p^* \quad t = t_p; \quad x = s_p(t) = L$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t_p < t < t_{ab} \quad (3.28)$$

$$T_p(x,t) = T_v(x,t) = T_p^* \quad x = s_p(t); \quad t_p < t < t_{ab} \quad (3.29)$$

$$k_p \frac{\partial T_p(x,t)}{\partial x} = q_w(t) \quad x = L; \quad t_p < t < t_{ab} \quad (3.30)$$

onde $\tilde{T}_p(x) = T_v(x, t_p)$ e $T_p(x, t)$ é a temperatura na zona de pirólise. Neste período supõe-se que exista mais uma equação de energia para a camada de pirólise, $T_p(x, t)$, e que as camadas se comunicam por uma equação de acoplamento, equação (3.29), onde tem-se a temperatura de pirólise prescrita.

- Balanço de Energia no Contorno de Pirólise:

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = k_v \frac{\partial T_v}{\partial x} - k_p \frac{\partial T_p}{\partial x} \quad x = s_p(t); \quad t_p < t < t_{ab} \quad (3.31)$$

$$s_p(t_p) = L$$

A equação (3.31) é encontrada fazendo-se o balanço de energia na interface das camadas virgem e de pirólise. Este balanço permite calcular a velocidade de avanço da fronteira de pirólise, $\dot{s}_p(t)$, a partir dos campos de temperatura.

- Período de Ablação:

$$\begin{aligned} \rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} &= k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} & 0 < x < s_p(t); \quad t > t_{ab} \\ \rho_p c_{Pp} \frac{\partial T_p(x,t)}{\partial t} &= k_p \frac{\partial^2 T_p(x,t)}{\partial x^2} & s_p(t) < x < s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} T_v(x,t) &= \tilde{T}_p(x) & t = t_{ab} \quad 0 \leq x \leq s_p(t) \\ T_p(x,t) &= T_{ab}(x) & t = t_{ab}; \quad s_p(t) \leq x \leq s_{ab}(t) = L \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t > t_{ab} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} T_p(x,t) &= T_v(x,t) = T_p^* & x = s_p(t); \quad t > t_{ab} \\ T_p(x,t) &= T_{ab}^* & x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\tilde{T}_p(x) = T_v(x, t_{ab})$, $T_{ab}(x) = T_p(x, t_{ab})$. Neste período surge mais uma equação diferencial, (3.37), para calcular o balanço de energia na fronteira de ablação.

- Balanço de Energia nos Contornos de Pirólise e Ablação:

$$\begin{aligned} \rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} &= k_v \frac{\partial T_v}{\partial x} - k_p \frac{\partial T_p}{\partial x} & x = s_p(t); \quad t > t_{ab} \\ s_p(t_{ab}) &= \bar{s}_{ab} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \rho_p H_{ab} \frac{ds_{ab}(t)}{dt} &= -q_w(t) + k_p \frac{\partial T_p}{\partial x} & x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \\ s_{ab}(t_{ab}) &= L \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $\bar{s}_{ab} = s_p(t_{ab})$.

Para resolver o problema de decomposição térmica com temperatura de pirólise prescrita será aplicada a Técnica de Parâmetros Concentrados Melhorada ($H_{1,1}/H_{0,0}$) [17] na equação de energia da camada de pirólise.

3.2.2 Modelo com Degradação pela Equação de Arrhenius

O modelo de ablação com pirólise descrito acima busca representar de maneira mais precisa o processo de recessão, mas é possível ainda torná-lo mais representativo do fenômeno real adotando um modelo de degradação do material ao longo do processo de mudança de fase. Sendo assim, no segundo modelo de pirólise, adota-se a equação de Arrhenius para representar a degradação do material, Figura 5. Ao passo que a temperatura da parede aumenta, as propriedades do material sofrem degradação devido à mudança de fase, então o material passa de virgem (material original da proteção térmica) para um estado pirolizado até chegar ao estado carbonizado quando é removido durante o processo de ablação a temperatura constante. Considera-se que os gases gerados pela decomposição do material se encontram em equilíbrio local com a matriz porosa da camada carbonizada. Considera-se, ainda, que estes gases não influem no fluxo de calor incidente na superfície.

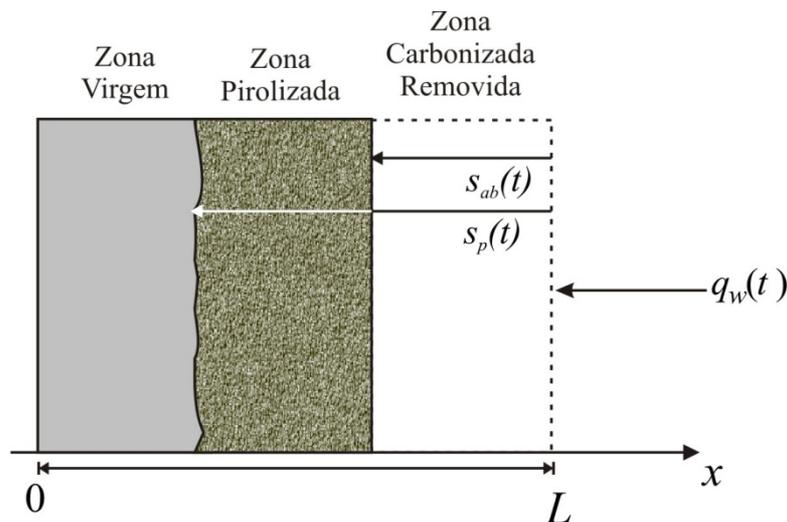


Figura 5 – Modelo de ablação com pirólise considerando decomposição pela equação de Arrhenius

Após a análise de referências bibliográficas sobre problemas de ablação que envolvem pirólise, conclui-se que a abordagem mais comumente encontrada para este tipo de problema é através da formulação entálpica. Esta mesma abordagem é utilizada em diversos trabalhos encontrados na literatura, entre eles os trabalhos de SWAN e PITTMAN [60], TORRE *et al.* [61] e MOYER e RINDAL [62], que serviu como base para o desenvolvimento apresentado nesta seção. Esta formulação também foi

apresentada por REY SILVA e ORLANDE [12] e [13], porém, para resolver o sistema de equações foi utilizado o Método de Volumes Finitos.

A equação diferencial que governa a conservação de energia para o problema com pirólise pode ser obtida pelo balanço de energia em um volume de controle infinitesimal na seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{m}_p(t)}{A} h_g \right) \quad (3.38)$$

Para a solução de problemas de ablação utilizando-se a equação entálpica de balanço de energia, é convenientemente escreve-se a taxa de variação de entalpia $\frac{\partial h}{\partial t}$ em termos da taxa de variação da temperatura, $\frac{\partial T_v}{\partial t}$, e da taxa de variação da massa específica, $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$. Para escrever a taxa de variação de entalpia em termos da temperatura e da massa específica são necessárias algumas aproximações. É suposto, então que, as propriedades do material parcialmente pirolizado possam ser calculadas utilizando-se uma combinação das propriedades do material totalmente pirolizado e do material virgem. Desta forma, define-se a fração volumétrica do material virgem por $\epsilon_v(x,t)$, tal que, $\epsilon_v(x,t) = 1$ quando o material é totalmente virgem e $\epsilon_v(x,t) = 0$ quando o material é totalmente pirolizado. Então, pode-se expressar o volume da massa específica e a entalpia específica como:

$$\rho(x,t) = \epsilon_v(x,t)\rho_v + (1 - \epsilon_v(x,t))\rho_p \quad (3.39)$$

$$\rho(x,t)h(T) = \epsilon_v(x,t)\rho_v h_v(T) + (1 - \epsilon_v(x,t))\rho_p h_p(T) \quad (3.40)$$

onde a entalpia do material virgem e do material pirolizado são definidas como:

$$h_v = h_v^0 + \int_0^{T_{ref}} c_{Pv} dT \quad (3.41)$$

$$h_p = h_p^0 + \int_0^{T_{ref}} c_{Pp} dT \quad (3.42)$$

Derivando as equações (3.39) no tempo obtém-se:

$$\frac{\partial \epsilon_v(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_v - \rho_p} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \quad (3.43)$$

Derivando a equação (3.40) no tempo e substituindo as equações (3.39), (3.41) e (3.42), escreve-se:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \bar{h} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial T_v}{\partial t} \quad (3.44)$$

onde $\rho(x,t)c_p = \epsilon_v(x,t)\rho_v c_{pv} + (1 - \epsilon_v(x,t))\rho_p c_{pp}$ e $\bar{h} = \frac{\rho_v h_v - \rho_p h_p}{\rho_v - \rho_p}$.

A formulação matemática é então definida em dois períodos: o período de pré-ablação e período de ablação. Devido à falta de dados na literatura que demonstrem o comportamento das propriedades termofísicas de materiais resinados com a variação da temperatura foram adotadas propriedades termofísicas constantes em cada zona. Esta hipótese também foi considerada, devido ao objetivo inicialmente proposto, que foi avaliar um modelo de pirólise com degradação material de baixo custo computacional.

- Período de Pré-Ablação:

$$\rho_v c_{pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} - c_{pg} \dot{m}_p(t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} + \Delta H_p \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.45)$$

$$T_v(x,t) = T_0 \quad t = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.46)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.47)$$

$$k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = q_w(t) \quad x = L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.48)$$

onde é imposto um fluxo de calor na fronteira $x = L$, $\Delta H_p = h_g - \bar{h}$ é a entalpia total do gás de pirólise, c_{pg} é o calor específico do gás de pirólise e A é a área considerada unitária.

O fluxo de massa de gás de pirólise total na frente de pirólise é dado pela equação (3.49), ref. [61]:

$$\dot{m}_p(t) = -\int_0^L \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx \quad (3.49)$$

Derivando a equação (3.49) com respeito à x tem-se a taxa de geração de gás de pirólise. Portanto, a degradação do material é dada pela equação de Arrhenius como definido na equação abaixo:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\kappa e^{-E/RT(x,t)} \rho_v^{1-n} \rho^n(x,t) \quad 0 < x < L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.50)$$

$$\rho(x,t) = \rho_v - \rho_p \quad t = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.51)$$

$$-\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.52)$$

$$\rho(x,t) = 0 \quad x = L; \quad 0 < t < t_{ab} \quad (3.53)$$

onde assume-se $\rho(x,t) = \rho^*(x,t) - \rho_p$.

Para simplificar o equacionamento da equação de Arrhenius foi aplicado o filtro descrito acima de forma homogeneizar a condição de contorno (3.53).

Como não se sabe à priori qual o fluxo de massa na superfície em $x = L$ optou-se por adotar uma condição de contorno de prescrição igual a ρ_p . O valor ρ_p foi adotado de forma a evitar uma solução trivial.

- Período de Ablação:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} - c_{Pg} \dot{m}_p(t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} + \Delta H_p \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.54)$$

$$T_v(x,t) = \tilde{T}_{ab}(x) \quad t = t_{ab}; \quad 0 \leq x \leq s_{ab}(t) \quad (3.55)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t > t_{ab} \quad (3.56)$$

$$T_v(x,t) = T_{ab}^* \quad x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.57)$$

onde $\tilde{T}_{ab}(x) = T(x, t_{ab})$. Neste período tem-se mais uma equação para expressar o balanço de energia no contorno móvel, equação (3.58) abaixo.

- Balanço de Energia no Contorno de Ablação:

$$\rho_p H_{ab} \frac{ds_{ab}(t)}{dt} = -q_w(t) + k_p \frac{\partial T_p(x, t)}{\partial x} \quad x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.58)$$

$$s_{ab}(t_{ab}) = L$$

Para determinar a vazão de massa dos gases de pirólise durante o período de ablação utiliza-se a equação (3.59).

$$\dot{m}_p(t) = - \int_0^{s_{ab}(t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx \quad (3.59)$$

A degradação do material é dada pela avaliação da equação (3.60), onde o domínio passa a ser considerado móvel e a ordem de reação é considerada a mesma nos dois períodos.

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\kappa e^{-E/RT(x, t)} \rho_v^{1-n} \rho^n(x, t) \quad 0 < x < s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.60)$$

$$\rho(x, t) = \tilde{\rho}_{ab}(x) \quad t = t_{ab}; \quad 0 \leq x \leq s_{ab}(t) \quad (3.61)$$

$$-\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t > t_{ab} \quad (3.62)$$

$$\rho(x, t) = 0 \quad x = s_{ab}(t); \quad t > t_{ab} \quad (3.63)$$

CAPÍTULO 4

4. Método de Solução

Nesta seção será apresentada a solução via transformada integral para os 4 modelos apresentados no capítulo 3.

4.1 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Uma Camada

A solução formal para o modelo considerando uma única camada de material foi obtida aplicando diretamente o método da transformada integral e sua inversa. Devido ao alto custo computacional exigido, pelo número elevado de autovalores necessário para obter convergência na derivada espacial da temperatura que consta do balanço de energia no contorno móvel, é aplicada a técnica de aceleração de convergência conhecida como *Balanço Integral* [55] e [56] na obtenção dessa derivada.

4.1.1 Solução Formal

Segue-se aqui inicialmente o formalismo de aplicação da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) [16] para problemas de condução de calor com contorno móvel [1].

Utilizando o grupo de adimensionalização descrito abaixo, as equações (3.1) a (3.10) serão reescritas como segue:

$$\theta(\eta, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_{ab}^* - T_0}; \quad \eta = \frac{x}{L}; \quad \tau = \frac{\alpha_v t}{L^2}; \quad Q(\tau) = \frac{L q_w(t)}{k_v (T_{ab}^* - T_0)}; \quad S_{ab}(\tau) = \frac{s_{ab}(t)}{L}$$

- Período de Pré-Ablação:

$$\frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad 0 < \eta < 1; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.1)$$

$$\theta(\eta, \tau) = 0 \quad \tau = 0; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.2)$$

$$-\frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} = Q(\tau) \quad \eta = 0; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.4)$$

- Período de Ablação:

$$\frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad S_{ab}(\tau) < \eta < 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.5)$$

$$\theta(\eta, \tau) = \theta_{ab}(\eta) \quad \tau = \tau_{ab}; \quad S_{ab}(\tau) \leq \eta \leq 1 \quad (4.6)$$

$$\theta(\eta, \tau) = 1 \quad \eta = S_{ab}(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.8)$$

- Balanço de Energia no Contorno Móvel:

$$\nu \frac{dS_{ab}(\tau)}{d\tau} = Q(\tau) + \left. \frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=S_{ab}(\tau)} \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.9)$$

$$S_{ab}(\tau_{ab}) = 0$$

onde ν é o inverso do número de Stefan definido por $\frac{H_{ab}}{c_{Pv}(T_{ab}^* - T_0)}$.

Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa, para o período de pré-ablação,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i(\tau) &= \int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta(\eta, \tau) d\eta && \text{Transformada} \\ \theta(\eta, \tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_i(\eta)}{N_i} \bar{\theta}_i(\tau) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.10)$$

e o problema auxiliar para o período pré-ablação é definido como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_i(\eta)}{d\eta^2} + \beta_i^2 \varphi_i(\eta) &= 0 && 0 < \eta < 1 \\ \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} &= 0 && \eta = 0 \\ \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} &= 0 && \eta = 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\varphi_i(\eta) = \text{Cos}(\beta_i \eta)$ são as autofunções correspondentes.

Aplica-se, então, o operador integral $\int_0^1 \varphi_i(\eta) \langle \cdot \rangle d\eta$ na equação (4.1),

obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta(\eta, \tau) d\eta = \int_0^1 \varphi_i(\eta) \frac{\partial^2 \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} d\eta \quad (4.12)$$

aplicando a 2ª fórmula de Green na equação (4.12) tem-se a seguinte equação diferencial transformada:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} = \left[\varphi_i(\eta) \frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \theta(\eta, \tau) \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} \right]_0^1 + \int_0^1 \theta(\eta, \tau) \frac{d^2 \varphi_i(\eta)}{d\eta^2} d\eta \quad (4.13)$$

Portanto, da equação (4.11) reescreve-se equação (4.13) como:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} = \left[\varphi_i(\eta) \frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \theta(\eta, \tau) \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} \right]_0^1 - \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) \quad (4.14)$$

e pelas condições de contorno tem-se,

$$\left[\varphi_i(\eta) \frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \theta(\eta, \tau) \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} \right]_0^1 = Q(\tau) \quad (4.15)$$

Aplicando o operador integral na condição inicial do sistema apresentado na equação (4.2), obtém-se,

$$\int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta(\eta, 0) d\eta = \bar{\theta}_i(0) = 0 \quad (4.16)$$

Desta forma, o sistema diferencial transformado que deve ser resolvido toma a forma apresentada na equação (4.17).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) &= Q(\tau) & 0 < \tau < \tau_{ab} \\ \bar{\theta}_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

A solução para o sistema apresentado nas equações acima é

$$\bar{\theta}_i(\tau) = \int_0^\tau Q(\tau') e^{-\beta_i^2(\tau-\tau')} d\tau' \quad (4.18)$$

Do problema auxiliar obtêm-se os autovalores e a norma, os quais estão descritos abaixo,

$$\begin{aligned}\beta_i &= i\pi \\ N_i &= \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{4.19}$$

Devido à dupla condição de contorno de 2º tipo, $\beta_0 = 0$ também é um autovalor, logo $\varphi_0 = 1$ e $N_0 = 1$. Como a fórmula da inversa mostrada na equação (4.10) inicia em $i = 0$, este termo é extraído da série fornecendo a temperatura média $\theta_{av}(\tau)$, a qual é definida pela integração do campo de temperatura e integrando-se o balanço de energia no domínio.

$$\theta_{av}(\tau) = \int_0^1 \theta(\eta, \tau) d\eta\tag{4.20}$$

Então, integrando-se no domínio a equação (4.1) tem-se que,

$$\frac{d\theta_{av}(\tau)}{d\tau} = Q(\tau)\tag{4.21}$$

Logo, a temperatura média é dada por

$$\theta_{av}(\tau) = \int_0^\tau Q(\tau') d\tau'\tag{4.22}$$

Desta forma, a solução formal para o período pré-ablação é escrita da seguinte forma:

$$\theta(\eta, \tau) = \theta_{av}(\tau) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cos}(\beta_i \eta) \int_0^\tau Q(\tau') e^{-\beta_i^2(\tau-\tau')} d\tau'\tag{4.23}$$

Fazendo $\eta = 0$ na equação (4.23) pode-se calcular o instante $\tau = \tau_{ab}$ que é o tempo onde o período de ablação se inicia:

$$\theta(0, \tau_{ab}) = 1\tag{4.24}$$

Para o problema no período de ablação é feita uma mudança de variável para homogeneizar a condição de contorno e acelerar a convergência da solução. Utiliza-se, então o novo grupo de variáveis descrito abaixo.

$$\theta^*(\eta^*, \tau) = \theta(\eta^*, \tau) - 1; \quad \eta^* = 1 - \eta; \quad \eta_b(\tau) = 1 - S(\tau) \quad (4.25)$$

Após a mudança de variável, obtém-se a seguinte formulação matemática para o período de ablação:

$$\frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} \quad 0 < \eta^* < \eta_b(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.26)$$

$$\theta^*(\eta^*, \tau_{ab}) = \theta_{ab}(\eta^*) - 1 \quad 0 < \eta^* < 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} = 0 \quad \eta^* = 0; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.28)$$

$$\theta^*(\eta^*, \tau) = 0 \quad \eta^* = \eta_b(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.29)$$

onde

$$\theta_{ab}(\eta^*) = \theta_{av}(\tau_{ab}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cos}(\beta_i \eta^*) \int_0^{\tau} Q(\tau') e^{-\beta_i^2(\tau_{ab} - \tau')} d\tau' \quad (4.30)$$

E o balanço de energia na interface de ablação é definido por

$$\left. \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^* = \eta_b(\tau)} \right\} \right\} \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.31)$$

$$\eta_b(\tau_{ab}) = 1$$

Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa para o período de ablação,

$$\bar{\theta}_i^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*) \theta(\eta^*, \tau) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (4.32)$$

$$\theta^*(\eta^*, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \bar{\theta}_i^*(\tau) \quad \text{Inversa}$$

O problema auxiliar para o período de ablação é definido como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau)}{d\eta^{*2}} + \beta_{ab,i}^2(\tau) \varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau) &= 0 & 0 < \eta^* < \eta_b(\tau) \\
\frac{d\varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau)}{d\eta^*} &= 0 & \eta^* &= 0 \\
\varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau) &= 0 & \eta^* &= \eta_b(\tau)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

onde $\varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau) = \text{Cos}(\beta_{ab,i}(\tau)\eta^*)$ define as autofunções correspondentes.

Escrevem-se as autofunções normalizadas como,

$$\tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) = \frac{\varphi_{ab,i}(\eta^*, \tau)}{\sqrt{N_{ab,i}(\tau)}} \tag{4.34}$$

e os autovalores são obtidos analiticamente como $\beta_{ab,i}(\tau) = \frac{(2i-1)\pi}{2 \eta_b(\tau)}$.

Aplica-se o operador integral $\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \langle \cdot \rangle d\eta^*$ nas equações (4.26),

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial^2 \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} d\eta^* \tag{4.35}$$

e da mesma forma que foi feito para o período pré-ablação, utiliza-se a 2ª fórmula de Green considerando-se assim as condições de contorno apresentadas nas equações (4.28) e (4.29). A equação transformada é reescrita como,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* &= \left[\tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} - \theta^*(\eta^*, \tau) \frac{d\tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau)}{d\eta^*} \right]_0^{\eta_b(\tau)} \\
&+ \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta^*(\eta^*, \tau) \frac{d^2 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau)}{d\eta^{*2}} d\eta^*
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Portanto, a equação (4.36) resulta em,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* &= \left[\tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} - \right. \\
&\left. \theta^*(\eta^*, \tau) \frac{\partial \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \right]_0^{\eta_b(\tau)} - \beta_{ab,i}^2(\tau) \bar{\theta}_i^*(\tau)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

ou,

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* + \beta_{ab,i}^2(\tau) \bar{\theta}_i^*(\tau) = 0 \quad (4.38)$$

Devido à existência de um termo não transformável é substituída a fórmula inversa, equação (4.32), na integral acima e assim a equação (4.38) é rearranjada e reescrita:

$$\frac{d\bar{\theta}_i^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_{ij} \beta_{ab,i}^2(\tau) + A_{ij}^*(\tau)) \bar{\theta}_j^*(\tau) = 0 \quad (4.39)$$

onde $A_{ij}^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^*$.

Aplicando o operador integral na condição inicial, equação (4.27), obtém-se,

$$\bar{\theta}_i^*(\tau_{ab}) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau_{ab}) (\theta_{ab}(\eta^*) - 1) d\eta^* = \bar{f}_i \quad (4.40)$$

Logo o sistema de equações diferenciais transformadas a ser resolvido será,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(\tau) \bar{\theta}_j^*(\tau) &= 0 & \tau > \tau_{ab} \\ \bar{\theta}_i^*(\tau_{ab}) &= \bar{f}_i \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $A_{ij}(\tau) = (\delta_{ij} \beta_{ab,i}^2(\tau) + A_{ij}^*(\tau))$ e a equação do balanço de energia na parede em recessão, após substituir a fórmula da inversa, equação (4.32), fica sendo,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} &= -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=\eta_b(\tau)} \bar{\theta}_j^*(\tau) \right\} & \tau > \tau_{ab} \\ \eta_b(\tau_{ab}) &= 1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.1.2 Solução com Balanço Integral

As derivadas das autofunções acarretam num retardamento de convergência das séries de expansão de autofunções, pois introduzem um autovalor crescente no numerador das parcelas da expansão.

Portanto, ao invés de substituir a fórmula da inversa (4.32) na equação (4.31), utiliza-se a Técnica de Balanço Integral para acelerar a convergência, obtendo-se uma expressão alternativa para a derivada da temperatura no contorno móvel.

A técnica consiste em integrar no domínio a equação de energia obtendo-se uma nova expressão para a derivada que retarda convergência.

Portanto, integra-se a equação (4.26):

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \int_0^{\eta_b(\tau)} \frac{\partial^2 \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} d\eta^* \quad (4.43)$$

e, aplica-se a regra de integração de Leibnitz.

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta^*(\eta^*, \tau) d\eta^* - \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} \theta^*(\eta_b(\tau), \tau) = \frac{\partial \theta^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=\eta_b(\tau)} \quad (4.44)$$

Logo, observando as condições de contorno (4.28) e (4.29), a equação diferencial (4.31) é reescrita em termos da equação (4.44).

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \frac{d}{d\tau} \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta^*(\eta^*, \tau) d\eta^* \right\} \quad (4.45)$$

Substituindo a fórmula da inversa, equação (4.32), na equação (4.45) tem-se:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau) d\eta^* \bar{\theta}_j^*(\tau) \right) \right\} \quad (4.46)$$

ou,

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_j(\tau)}{d\tau} \bar{\theta}_j^*(\tau) + F_j(\tau) \frac{d\bar{\theta}_j^*(\tau)}{d\tau} \right) \right\} \quad (4.47)$$

onde $F_j(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau) d\eta^*$.

Da equação (4.41) é obtida a $\frac{d\bar{\theta}_j^*(\tau)}{d\tau}$, então, substituindo na equação (4.47)

obtem-se a equação diferencial para o balanço de energia no contorno móvel.

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_j(\tau)}{d\tau} \bar{\theta}_j^*(\tau) - F_j(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} A_{jk}(\tau) \bar{\theta}_k^*(\tau) \right) \right\} \quad (4.48)$$

A condição de contorno continua sendo a mesma apresentada na equação (4.31) com $\tau > \tau_{ab}$.

4.2 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Duas Camadas

Nesta seção serão apresentadas a formulação diferencial concentrada e o método de solução para o modelo de duas camadas, onde é considerada uma camada estrutural adicional (Figura 3).

Primeiramente utilizando o grupo de adimensionalização descrito abaixo as equações (3.11) a (3.21) serão reescritas.

$$\theta_i(\eta, \tau) = \frac{T_i(x, t) - T_0}{T_{ab}^* - T_0}; \quad \eta = \frac{x}{L_1}; \quad \tau = \frac{\alpha_1 t}{L_1^2}; \quad Q(\tau) = \frac{L_1 q_w(t)}{k_1(T_{ab}^* - T_0)}; \quad S_{ab}(\tau) = \frac{s_{ab}(t)}{L_1} \quad (4.49)$$

- Período de Pré-Ablação:

$$\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad 0 < \eta < 1; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.50)$$

$$\frac{1}{\alpha^*} \frac{\partial \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad 1 < \eta < l^*; \quad 0 < \tau < \tau_{ab}$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta, \tau) &= 0 & \tau = 0; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \\ \theta_2(\eta, \tau) &= 0 & \tau = 0; \quad 1 \leq \eta \leq l^* \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$-\frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta}=Q(\tau) \quad \eta=0; \quad 0<\tau<\tau_{ab} \quad (4.52)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta} &= \frac{h_c L_1}{k_1} (\theta_1(\eta,\tau) - \theta_2(\eta,\tau)) \\ k^* \frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta} &= \frac{\partial\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\eta} \end{aligned} \right\} \quad \eta=1; \quad 0<\tau<\tau_{ab} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\eta}=0 \quad \eta=l^*; \quad 0<\tau<\tau_{ab} \quad (4.54)$$

- Período de Ablação:

$$\frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} \quad S_{ab}(\tau) < \eta < 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{\alpha^*} \frac{\partial\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} \quad 1 < \eta < l^*; \quad \tau > \tau_{ab}$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta,\tau) &= \theta_{ab}(\eta) & \tau = \tau_{ab}; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \\ \theta_2(\eta,\tau) &= \theta_{ab,2}(\eta) & \tau = \tau_{ab}; \quad 1 \leq \eta \leq l^* \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\theta_1(\eta,\tau) = 1 \quad \eta = S_{ab}(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.57)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta} &= \frac{h_c L_1}{k_1} (\theta_1(\eta,\tau) - \theta_2(\eta,\tau)) \\ k^* \frac{\partial\theta_1(\eta,\tau)}{\partial\eta} &= \frac{\partial\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\eta} \end{aligned} \right\} \quad \eta=1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial\theta_2(\eta,\tau)}{\partial\eta}=0 \quad \eta=l^*; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.59)$$

onde $\alpha^* = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $k^* = \frac{k_1}{k_2}$ e $l^* = \frac{L^*}{L_1}$.

O balanço de energia no contorno móvel é escrito como apresentado na equação (4.60) abaixo:

- Balanço de Energia no Contorno Móvel:

$$\nu \frac{dS_{ab}(\tau)}{d\tau} = Q(\tau) + \left. \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=S_{ab}(\tau)} \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.60)$$

$$S_{ab}(\tau_{ab}) = 0$$

onde a variável ν foi definida na seção anterior e é função do calor de ablação.

Considerando contato térmico perfeito entre a proteção térmica e a estrutura, $h_c \rightarrow \infty$ as equações da interface (4.53) e (4.58) são escritas como segue:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\eta, \tau) &= \theta_2(\eta, \tau) \\ k^* \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} &= \frac{\partial \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad \eta = 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.61)$$

A equação (4.61) representa uma condição de contato perfeito entre os dois materiais e por simplicidade esta condição será utilizada deste ponto em diante.

Para resolver este problema será aplicado um método de reformulação para o segundo domínio (camada estrutural). Aplicando a Técnica de Parâmetros Concentrados Clássica [17] assume-se que a temperatura média na camada estrutural é aproximadamente a mesma que na interface de contato após a reformulação.

4.2.1 Aplicação da Técnica de Parâmetros Concentrados Clássica

Na técnica de parâmetros concentrados clássica supõe-se uma aproximação para a temperatura média na camada estrutural,

$$\theta_{av,2}(\tau) \cong \theta_2(1, \tau) \quad (4.62)$$

onde $\theta_{av,2}(\tau)$ é definido pela seguinte integração:

$$\theta_{av,2}(\tau) = \frac{1}{l^* - 1} \int_1^{l^*} \theta_2(\eta, \tau) d\eta \quad (4.63)$$

Aplicando o operador integral $(\frac{1}{l^* - 1} \int_1^{l^*} \langle \cdot \rangle d\eta)$ na segunda equação de (4.50)

tem-se,

$$\frac{1}{\alpha^*} \frac{d\theta_{av,2}(\tau)}{d\tau} = - \frac{1}{l^* - 1} \frac{\partial \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (4.64)$$

Considerando as condições de contorno de acoplamento (4.53) ou (4.61), a equação (4.64) é reescrita como segue:

$$\frac{1}{\alpha^*} \frac{d\theta_{av,2}(\tau)}{d\tau} = - \frac{k^*}{l^* - 1} \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (4.65)$$

Utilizando a aproximação para $\theta_{av,2}(\tau)$ apresentada na equação (4.62) e a primeira condição de contorno de acoplamento de (4.53), a equação é reescrita como:

$$k^* \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + \frac{l^* - 1}{\alpha^*} \frac{\partial \theta_1(1, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (4.66)$$

Sendo assim, a formulação matemática diferencial-concentrada para o período pré-ablação é a seguinte:

$$\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad 0 < \eta < 1; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.67)$$

$$\theta_1(\eta, \tau) = 0 \quad \tau = 0; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.68)$$

$$-\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} = Q(\tau) \quad \eta = 0; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} = - \frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} \quad \eta = 1; \quad 0 < \tau < \tau_{ab} \quad (4.70)$$

onde a formulação via parâmetros concentrados apresentada na equação (4.65), para o segundo domínio, torna-se uma condição de contorno para o primeiro domínio (4.70).

Para o período de ablação as equações (4.67) a (4.70) são reescritas como segue:

$$\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad S_{ab}(\tau) < \eta < 1; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.71)$$

$$\theta_1(\eta, \tau) = \theta_{ab}(\eta) \quad \tau = \tau_{ab}; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.72)$$

$$\theta_1(\eta, \tau) = 1 \quad \eta = S_{ab}(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} = -\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} \quad \eta = 0; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.74)$$

A condição de contorno em $\eta = S_{ab}(\tau)$ passa a ser de temperatura prescrita devido à hipótese assumida de que o processo ablativo ocorre à temperatura constante.

A equação para o balanço de energia na fronteira móvel permanece a mesma como apresentado pela equação (4.31).

4.2.2 Solução Formal para a Formulação por Parâmetros Concentrados Clássica

Escolhe-se o seguinte par transformado para o período de pré-ablação,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i(\tau) &= \int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta_1(\eta, \tau) d\eta && \text{Transformada} \\ \theta_1(\eta, \tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_i(\eta)}{N_i} \bar{\theta}_i(\tau) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.75)$$

e aplica-se o operador integral $\int_0^1 \varphi_i(\eta) \langle \cdot \rangle d\eta$ na equação (4.67),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta_1(\eta, \tau) d\eta = \int_0^1 \varphi_i(\eta) \frac{\partial^2 \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} d\eta \quad (4.76)$$

A partir da 2ª fórmula de Green a equação (4.76) torna-se:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} = \left[\varphi_i(\eta) \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \theta_1(\eta, \tau) \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} \right]_0^1 + \int_0^1 \theta_1(\eta, \tau) \frac{d^2 \varphi_i(\eta)}{d\eta^2} d\eta \quad (4.77)$$

O problema auxiliar escolhido para este caso foi o mesmo apresentado em (4.11) e para fins de comparação entre as formulações, a partir dos resultados obtidos. Logo,

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} = \left[\varphi_i(\eta) \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \theta_1(\eta, \tau) \frac{d\varphi_i(\eta)}{d\eta} \right]_0^1 - \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) \quad (4.78)$$

Portanto, utilizando as condições de contorno (4.70) e as condições de contorno do problema (4.11), a equação (4.78) resulta em:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) = Q(\tau) + \varphi_i(1) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \theta_1(1, \tau)}{\partial \tau} \quad (4.79)$$

Aplicando o operador integral na condição inicial (4.68) obtém-se,

$$\int_0^1 \varphi_i(\eta) \theta_1(\eta, 0) d\eta = \bar{\theta}_i(0) = 0 \quad (4.80)$$

Para se obter o sistema de equações transformadas deve-se ainda substituir a fórmula da inversa, (4.75), em (4.79):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) &= Q(\tau) - \varphi_i(1) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j(1)}{N_j} \frac{d\bar{\theta}_j(\tau)}{d\tau} & 0 < \tau < \tau_{ab} \\ \bar{\theta}_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Porém, como as condições de contorno são de 2º tipo, $\beta_0 = 0$ é autovalor, por isso a fórmula da inversa (4.75) tem expansão iniciada em 0. Sendo assim, $N_0 = 1$ e o sistema (4.81) deve ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \beta_i^2 \bar{\theta}_i(\tau) &= Q(\tau) - \varphi_i(1) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \left\{ \frac{d\bar{\theta}_0(\tau)}{d\tau} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(1) \frac{d\bar{\theta}_j(\tau)}{d\tau} \right\} \\ \bar{\theta}_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

$0 < \tau < \tau_{ab}; \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Rearranjando os termos de forma conveniente, o sistema diferencial (4.82) é

obtido em forma vetorial.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] \left\{ \frac{d\bar{\theta}(\tau)}{d\tau} \right\} + [\mathbf{D}] \{\bar{\theta}(\tau)\} &= \{Q(\tau)\} & 0 < \tau < \tau_{ab} \\ \{\bar{\theta}(0)\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde $[\mathbf{A}]$ é uma matriz de ordem $N+1$, $[\mathbf{D}]$ é uma matriz diagonal de ordem $N+1$ e $\{\cdot\}$ são vetores de ordem $N+1$.

As matrizes $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{A}]$ são formadas, respectivamente, como segue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}] &= \{d_{\hat{i}\hat{j}}\} = \{\delta_{\hat{i}\hat{j}} \beta_{\hat{i}}^2\} \quad \hat{i}, \hat{j} = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.84) \\ [\mathbf{A}] = \{a_{\hat{i}\hat{j}}\} &= \begin{cases} 1 + \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) & \hat{i} = \hat{j} = 1 \\ 2(-1)^{\hat{j}+1} \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) & \hat{i} = 1; 2 < \hat{j} \leq N+1 \\ (-1)^{\hat{i}+1} \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) & 2 < \hat{i} \leq N+1; \hat{j} = 1 \\ 1 + 2 \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) & \hat{i} = \hat{j}; 2 < \hat{i}, \hat{j} \leq N+1 \\ 2(-1)^{\hat{i}+\hat{j}} \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) & \hat{i} \neq \hat{j}; 2 < \hat{i}, \hat{j} \leq N+1 \end{cases} \quad (4.85) \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação abaixo é obtido o valor de τ_{ab} , tempo onde é iniciado o processo de ablação:

$$\theta_1(0, \tau_{ab}) = \varphi_0(0) \bar{\theta}_0(\tau_{ab}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) \bar{\theta}_i(\tau_{ab}) = 1 \quad (4.86)$$

Para o período de ablação é resolvido o sistema de equações apresentado em (4.71) a (4.74), para a temperatura na camada ablativa, e simultaneamente a equação (4.60) para o balanço de energia no contorno móvel.

Para facilitar a implementação é realizada uma mudança de variáveis. Esta mudança de variáveis torna o intervalo $[S(\tau); 1]$ em um intervalo $[0; \eta_b(\tau)]$. Para ser realizada esta mudança utiliza-se o grupo (4.25), o qual já foi definido na seção 4.1.1.

Desta forma, reescrevem-se as equações (4.71) a (4.74) como segue:

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} \quad 0 < \eta^* < \eta_b(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.87)$$

$$\theta_1^*(\eta^*, \tau) = \theta_{ab}(\eta^*) - 1 \quad \tau = \tau_{ab}; \quad 0 \leq \eta^* \leq 1 \quad (4.88)$$

$$-\frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} = -\left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*}\right) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \quad \eta^* = 0; \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.89)$$

$$\theta_1^*(\eta^*, \tau) = 0 \quad \eta^* = \eta_b(\tau); \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.90)$$

E, realizando a mudança de variável na equação do balanço de energia na fronteira móvel, tem-se a equação (4.31) como já foi definido na seção 4.1.1:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^* = \eta_b(\tau)} \right\} \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.91)$$

$$\eta_b(\tau_{ab}) = 1$$

Para resolver o problema no período de ablação, escolhe-se o seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \theta_1^*(\eta^*, \tau) d\eta^* \quad \text{Transformada} \quad (4.92)$$

$$\theta_1^*(\eta^*, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \bar{\theta}_i^*(\tau) \quad \text{Inversa}$$

Aplicando o operador integral $\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \langle \bullet \rangle d\eta^*$ tem-se,

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} d\eta^* \quad (4.93)$$

Pela 2ª fórmula de Green a equação (4.93) torna-se,

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \left[\tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} - \theta_1^*(\eta^*, \tau) \frac{\partial \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \right]_0^{\eta_b(\tau)} + \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta_1^*(\eta^*, \tau) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} d\eta^* \quad (4.94)$$

onde as autofunções normalizadas são dadas como em (4.22).

O problema auxiliar para o período de ablação é o mesmo apresentado na equação (4.33), onde as autofunções e normas foram mostradas na seção 4.1.1.

Aplicando as condições de contorno (4.90) e (4.33) na equação (4.94), tem-se:

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* + \beta_{ab,i}^2(\tau) \bar{\theta}_1^*(\tau) = -\tilde{\varphi}_i(0, \tau) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\eta^*=0} \quad (4.95)$$

Substituindo a fórmula da inversa (4.92) nos termos não transformáveis obtém-se a seguinte equação transformada:

$$\frac{d\bar{\theta}_i^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{ij} \beta_{ab,i}^2(\tau) + A_{ij}^*(\tau) \right) \bar{\theta}_j^*(\tau) = -\tilde{\varphi}_i(0, \tau) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\eta^*=0} \bar{\theta}_j^*(\tau) + \tilde{\varphi}_j(0, \tau) \frac{d\bar{\theta}_j^*(\tau)}{d\tau} \right) \quad (4.96)$$

$$\text{onde } A_{ij}^*(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* .$$

Então, a equação (4.96) é rearranjada de forma a agrupar os termos adequados, e tem-se então,

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}] \left\{ \frac{d\bar{\theta}^*(\tau)}{d\tau} \right\} + [\mathbf{B}] \left\{ \bar{\theta}^*(\tau) \right\} &= \{0\} & \tau > \tau_{ab} \\ \left\{ \bar{\theta}^*(\tau_{ab}) \right\} &= \{ \bar{f} \} \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{B}]$ são matrizes de ordem N e $\{\cdot\}$ são vetores de ordem N .

As matrizes $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{B}]$ são formadas, respectivamente, como segue:

$$[\mathbf{C}] = \{c_{ij}\} = \delta_{ij} + \tilde{\varphi}_i(0, \tau) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \tilde{\varphi}_j(0, \tau) \quad (4.98)$$

$$[\mathbf{B}] = \{b_{ij}\} = \delta_{ij} \beta_{ab,i}^2(\tau) + A_{ij}^*(\tau) + \tilde{\varphi}_i(0, \tau) \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\eta^*=0} \quad (4.99)$$

$$e \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Utilizando o operador integral na condição inicial do sistema apresentado na equação (4.88), obtém-se:

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau_{ab}) (\theta_{ab}(\eta^*) - 1) d\eta^* = \bar{\theta}_i^*(\tau_{ab}) = \bar{f}_i \quad (4.100)$$

onde \bar{f}_i é obtido calculando-se as seguintes integrais da equação abaixo:

$$\bar{f}_i = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau_{ab}) (\varphi_0(\eta^*) \bar{\theta}_0^*(\tau_{ab}) - 1) d\eta^* + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(\eta^*, \tau_{ab}) \varphi_j(\eta^*) d\eta^* \bar{\theta}_j^*(\tau_{ab})$$

a qual resulta em

$$\bar{f}_i = \frac{2\sqrt{2}(-1)^{i+1}}{(2i-1)\pi} (\bar{\theta}_0^*(\tau_{ab}) - 1) + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} (-1)^{i+1} (2i-1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^2 - 4j^2} \bar{\theta}_j^*(\tau_{ab}) \quad (4.101)$$

Considerando uma formulação sem aplicação de nenhuma técnica de aceleração de convergência, a equação para o balanço de energia na fronteira móvel (4.102) é resolvida junto com o sistema (4.97), dada por:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{v} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=\eta_b(\tau)} \bar{\theta}_j^*(\tau) \right\} \quad \tau > \tau_{ab} \quad (4.102)$$

$$\eta_b(\tau_{ab}) = 1$$

4.2.3 Solução com Balanço Integral para a Formulação por Parâmetros Concentrados Clássica

Integrando a equação diferencial (4.87) no intervalo $[0, \eta_b(\tau)]$ tem-se,

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \int_0^{\eta_b(\tau)} \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^{*2}} d\eta^* \quad (4.103)$$

Sendo assim,

$$\int_0^{\eta_b(\tau)} \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} d\eta^* = \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=\eta_b(\tau)} - \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=0} \quad (4.104)$$

Aplicando a regra de integração de Leibnitz e substituindo a condição de contorno em $\eta^* = 0$, equação (4.90), tem-se da equação (4.104) o seguinte:

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=\eta_b(\tau)} = \frac{d}{d\tau} \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta_1^*(\eta^*, \tau) d\eta^* + \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\eta^*=0} \quad (4.105)$$

Então, a equação (4.91) é escrita substituindo a equação (4.105) no termo correspondente, obtendo-se:

$$\frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \frac{d}{d\tau} \int_0^{\eta_b(\tau)} \theta_1^*(\eta^*, \tau) d\eta^* - \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \theta_1^*(\eta^*, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\eta^*=0} \right\} \quad (4.106)$$

Substituindo a fórmula da inversa tem-se o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} & \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau) d\eta^* \bar{\theta}_j^*(\tau) \right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left(\tilde{\varphi}_j(0, \tau) \bar{\theta}_j^*(\tau) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Rearranjando os termos de forma conveniente, da equação (4.97) obtém-se o valor de $\frac{d\bar{\theta}_j^*(\tau)}{d\tau}$ e considerando $F_j(\tau) = \int_0^{\eta_b(\tau)} \tilde{\varphi}_j(\eta^*, \tau) d\eta^*$, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} \left\{ Q(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{dF_j(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \frac{\partial \tilde{\varphi}_j(0, \tau)}{\partial \tau} \right) \bar{\theta}_j^*(\tau) - \right. \right. \\ \left. \left. \left(F_j(\tau) + \left(\frac{l^* - 1}{k^* \alpha^*} \right) \tilde{\varphi}_j(0, \tau) \right) \sum_{k=1}^{\infty} e_{jk} \bar{\theta}_k^*(\tau) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.108)$$

onde e_{jk} , definido em (4.109), são os elementos da matriz $[\mathbf{C}]$ invertida multiplicada pela matriz $[\mathbf{B}]$, como foram definidas em (4.98) e (4.99).

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{C}]^{-1} \cdot [\mathbf{B}] \quad (4.109)$$

4.3 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita

Nesta seção são apresentados os métodos de solução para o problema de ablação com pirólise à temperatura prescrita descrito nas seções 3.2.1. Como foi citado anteriormente é aplicada a aproximação por parâmetros concentrados melhorada ($H_{1,1}/H_{0,0}$), [17], na camada pirolizada para reformular o sistema em busca de uma solução menos custosa computacionalmente. Também será aplicada a Técnica do Balanço Integral, [55] e [56], para acelerar a convergência da solução em expansão de autofunções e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) [16].

4.3.1 Solução Formal Aplicando a Técnica de Parâmetros Concentrados Melhorada ($H_{1,1}/H_{0,0}$)

Segue-se aqui novamente o formalismo para aplicação da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) [16] em problemas de condução de calor com contorno móvel [1].

Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa, para o período de pré-pirólise,

$$\begin{aligned}\bar{T}_{pp,i}(t) &= \int_0^L \varphi_{pp,i}(x) T_v(x,t) dx && \text{Transformada} \\ T_v(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_{pp,i}(x)}{N_{pp,i}} \bar{T}_{pp,i}(t) && \text{Inversa}\end{aligned}\quad (4.110)$$

aplica-se o operador integral $\int_0^L \varphi_{pp,i}(x) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.22) obtendo-se

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \varphi_{pp,i}(x) T_v(x,t) dx = k_v \int_0^L \varphi_{pp,i}(x) \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (4.111)$$

Aplicando a 2ª fórmula de Green na equação (4.111) tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{\alpha_v} \frac{d\bar{T}_{pp,i}(t)}{dt} = \left[\varphi_{pp,i}(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{d\varphi_{pp,i}(x)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L T_v(x,t) \frac{d^2 \varphi_{pp,i}(x)}{dx^2} dx \quad (4.112)$$

O problema auxiliar para o período de pré-pirólise é definido como segue:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \varphi_{pp,i}(x)}{dx^2} + \beta_{pp,i}^2 \varphi_{pp,i}(x) &= 0 && 0 < x < L \\ \frac{d\varphi_{pp,i}(x)}{dx} &= 0 && x = 0 \\ \frac{d\varphi_{pp,i}(x)}{dx} &= 0 && x = L\end{aligned}\quad (4.113)$$

onde $\varphi_{pp,i}(x) = \text{Cos}(\beta_{pp,i}x)$ é a i-ésima autofunção correspondente ao i-ésimo autovalor

$\beta_{pp,i} = \frac{i\pi}{L}$. Substituindo-se as equações (4.113) na equação (4.112) obtém-se:

$$\frac{1}{\alpha_v} \frac{d\bar{T}_{pp,i}(t)}{dt} = \left[\varphi_{pp,i}(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{d\varphi_{pp,i}(x)}{dx} \right]_0^L - \beta_{pp,i}^2 \bar{T}_{pp,i}(t) \quad (4.114)$$

onde, das condições de contorno da equação (4.113), e daquelas dada pelas equações (3.24) e (3.25) obtém-se:

$$\left[\varphi_{pp,i}(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{d\varphi_{pp,i}(x)}{dx} \right]_0^L = \varphi_{pp,i}(L) \frac{q_w(t)}{k_v} \quad (4.115)$$

Aplicando o operador integral na condição inicial do sistema, apresentada na equação (3.23), obtém-se,

$$\int_0^L \varphi_{pp,i}(x) T_v(x,0) dx = \bar{T}_{pp,i}(0) = 0 \quad (4.116)$$

para $T_0 = 0$

Desta forma, o sistema diferencial que deve ser resolvido toma a forma apresentada na equação (4.117).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{pp,i}(t)}{dt} + \alpha_v \beta_{pp,i}^2 \bar{T}_{pp,i}(t) &= (-1)^i \frac{\alpha_v}{k_v} q_w(t) & 0 < t < t_p \\ \bar{T}_{pp,i}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

A solução para o sistema apresentado na equação (4.117) é apresentada na equação abaixo:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{pp,i}(t) &= \frac{\alpha_v}{k_v} \int_0^t q_w(t') e^{-\beta_{pp,i}^2(t-t')} dt' \\ T_v(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_{pp,i}(x)}{N_{pp,i}} \bar{T}_{pp,i}(t) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Tendo sido obtida a norma e os autovalores do problema auxiliar e sendo $\beta_{pp0} = 0$ também um autovalor, faz-se necessário o cálculo da temperatura média $T_{av}(t)$, a qual é encontrada como segue:

$$T_{av}(t) = \frac{1}{L \rho_v c_{pv}} \int_0^L q_w(t') dt' \quad (4.119)$$

Então a solução para o período de pré-pirólise é reescrita assim:

$$T_v(x, t) = T_{av}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{pp,i}(x)}{N_{pp,i}} \bar{T}_{pp,i}(t) \quad (4.120)$$

Para o período de pirólise é feita uma reformulação das equações (3.26) a (3.30) aplicando a Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA), na aproximação $H_{1,1} / H_{0,0}$, [55] e [56]. Em termos gerais escrevem-se as aproximações como segue:

$H_{0,0}$:

$$\int_0^h y(x) dx = \frac{h}{2} (y(0) + y(h)) \quad (4.121)$$

$H_{1,1}$:

$$\int_0^h y(x) dx = \frac{h}{2} (y(0) + y(h)) + \frac{h^2}{12} (y'(0) - y'(h)) \quad (4.122)$$

Aplicando a fórmula $H_{1,1}$ (trapézio corrigido) para aproximar a temperatura média da camada pirolizada, equação (3.26), tem-se:

$$T_{avp}(t) = \frac{1}{L - s_p(t)} \left[\frac{L - s_p(t)}{2} (T_p(s_p(t), t) + T_p(L, t)) + \frac{(L - s_p(t))^2}{12} \left(\left. \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} - \left. \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \right|_{x=L} \right) \right] \quad (4.123)$$

Substituindo as condições de contorno das equações (3.29) e (3.30) obtém-se:

$$T_{avp}(t) = \frac{1}{2} (T_p^* + T_p(L, t)) + \frac{L - s_p(t)}{12} \left(\left. \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} - \frac{q_w(t)}{k_p} \right) \quad (4.124)$$

Aplica-se a fórmula de Hermite $H_{0,0}$ (regra do trapézio) para aproximar do fluxo médio na região da camada pirolizada:

$$\int_{s_p(t)}^L \frac{\partial T_p(x,t)}{\partial x} dx = T_p(L,t) - T_p(s_p(t),t) = \frac{L-s_p(t)}{2} \left(\frac{\partial T_p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} + \frac{\partial T_p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right) \quad (4.125)$$

Substituindo as condições de contorno das equações (3.29) e (3.30), obtém-se:

$$T_p(L,t) - T_p^* = \frac{L-s_p(t)}{2} \left(\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} + \frac{q_w(t)}{k_p} \right) \quad (4.126)$$

Isolando $T_p(L,t)$ da equação (4.126) e substituindo em (4.124), tem-se:

$$\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} = \frac{3}{L-s_p(t)} \left(T_{avp}(t) - T_p^* \right) - \frac{1}{2} \frac{q_w(t)}{k_p} \quad (4.127)$$

Na camada de material virgem a formulação original do problema é mantida como segue:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} \quad 0 < x < s_p(t); \quad t_p < t < t_{ab} \quad (4.128)$$

$$T_v(x,t) = \tilde{T}_p(x) \quad t = t_p; \quad s_p(t) < x < L \quad (4.129)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad (4.130)$$

$$T_v(x,t) = T_p^* \quad x = s_p(t) \quad (4.131)$$

Integra-se a equação de energia da zona de pirólise no domínio $[s_p(t), L]$, então, obtém-se:

$$\frac{\rho_p c_{Pp}}{L - s_p(t)} \int_{s_p(t)}^L \frac{\partial T_p}{\partial t} dx = \frac{k_p}{L - s_p(t)} \int_{s_p(t)}^L \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} dx \quad (4.132)$$

Aplicando a regra de Leibnitz para resolver a equação (4.132) e as condições de contorno, equações (3.29) e (3.30), tem-se:

$$\frac{\rho_p c_{Pp}}{L - s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(\int_{s_p(t)}^L T_p(x, t) dx \right) = \frac{q_w(t)}{L - s_p(t)} - \frac{k_p}{L - s_p(t)} \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} - \frac{\rho_p c_{Pp}}{L - s_p(t)} T_p^* \frac{ds_p(t)}{dt} \quad (4.133)$$

Desenvolvendo o lado direito da equação (4.133) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_p c_{Pp}}{L - s_p(t)} \left(\frac{dT_{avp}(t)}{dt} - \frac{1}{L - s_p(t)} \frac{ds_p(t)}{dt} T_{avp}(t) \right) = \\ \frac{1}{L - s_p(t)} \left(q_w(t) - k_p \frac{\partial T_p}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} - \rho_p c_{Pp} T_p^* \frac{ds_p(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.134)$$

onde é define-se,

$$T_{avp}(t) = \frac{1}{L - s_p(t)} \int_{s_p(t)}^L T_p(x, t) dx \quad (4.135)$$

Desenvolvendo a equação (4.134) é obtida a equação diferencial ordinária para a camada pirolizada no período de pirólise.

$$\begin{aligned} \rho_p c_{Pp} (L - s_p(t)) \frac{dT_{avp}(t)}{dt} = \frac{3}{2} q_w(t) + \left(\rho_p c_{Pp} \frac{ds_p(t)}{dt} - \right. \\ \left. \frac{3k_p}{L - s_p(t)} \right) (T_{avp}(t) - T_p^*) \quad t_p < t < t_{ab} \end{aligned} \quad (4.136)$$

A condição inicial é definida por,

$$T_{\text{avp}}(t_p) = T_p^* \quad (4.137)$$

E a equação do balanço de energia na fronteira de pirólise é escrita,

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = \frac{q_w(t)}{2} - \frac{3k_p}{s_p(t)} (T_{\text{avp}}(t) - T_p^*) + k_v \left. \frac{\partial T_v}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} \quad t_p < t < t_{\text{ab}} \quad (4.138)$$

$$s_p(t_p) = L$$

Aplicando a mudança de variável $T_v^*(x, t) = T_v(x, t) - T_p^*$ nas equações (4.128) a (4.131) e na equação (4.138) tem-se:

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v^*}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v^*}{\partial x^2} \quad 0 < x < s_p(t); \quad t_p < t < t_{\text{ab}} \quad (4.139)$$

$$T_v^*(x, t) = \tilde{T}_p(x) - T_p^* \quad t = t_p \quad (4.140)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t_p < t < t_{\text{ab}} \quad (4.141)$$

$$T_v^*(x, t) = 0 \quad x = s_p(t); \quad t_p < t < t_{\text{ab}} \quad (4.142)$$

E para a equação do balanço de energia na fronteira de pirólise

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = \frac{q_w(t)}{2} - \frac{3k_p}{s_p(t)} (T_{\text{avp}}(t) - T_p^*) + k_v \left. \frac{\partial T_v^*}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} \quad t_p < t < t_{\text{ab}} \quad (4.143)$$

$$s_p(t_p) = L$$

Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa, para o período de pirólise,

$$\bar{T}_{p,i}(t) = \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x, t) T_v^*(x, t) dx \quad \text{Transformada} \quad (4.144)$$

$$T_v^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{p,i}(x, t) \bar{T}_{p,i}(t) \quad \text{Inversa}$$

e o problema auxiliar para como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t)}{\partial x^2} + \beta_{p,i}^2(t) \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) &= 0 & 0 < x < s_p(t) \\
\frac{\partial \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t)}{\partial x} &= 0 & x = 0 \\
\tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) &= 0 & x = s_p(t)
\end{aligned} \tag{4.145}$$

onde $\varphi_{p,i}(x) = \text{Cos}(\beta_{p,i}(t)x)$ é a solução para as autofunções correspondentes,

$\beta_p(t) = \frac{(2i-1)\pi}{2s_p(t)}$ e a norma é definida como $N_{p,i}(t) = \frac{s_p(t)}{2}$. Aplica-se o operador

integral $\int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.22), onde é escolhido um *kernel* simétrico, com as autofunções normalizadas, $\tilde{\varphi}_{p,i}(x,t)$, como definido na equação (4.146).

$$\tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) = \frac{\varphi_{p,i}(x,t)}{\sqrt{N_{p,i}(t)}} \tag{4.146}$$

Então a equação (4.139) é escrita como segue,

$$\rho_v c_{pv} \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) \frac{\partial T_v^*(x,t)}{\partial t} dx = k_v \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) \frac{\partial^2 T_v^*(x,t)}{\partial x^2} dx \tag{4.147}$$

aplicando a 2ª fórmula de Green e a regra de Leibnitz na equação (4.147) tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) T_v^*(x,t) dx &= \left[\tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) \frac{\partial T_v^*(x,t)}{\partial x} - T_v^*(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t)}{\partial x} \right]_0^{s_p(t)} + \\
&\int_0^{s_p(t)} T_v^*(x,t) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t)}{\partial x^2} dx
\end{aligned} \tag{4.148}$$

Portanto, substituindo as condições de contorno (4.82) e (4.88) na equação (4.148) resulta em,

$$\frac{d\bar{T}_{p,i}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{ij} \alpha_v \beta_{p,i}^2(t) + A_{ij}^*(t) \right) \bar{T}_{p,i}(t) = 0 \quad t_p < t < t_{ab} \quad (4.149)$$

$$\bar{T}_{p,i}(t_p) = \int_0^{s_p(t_p)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x, t_p) (\tilde{T}_p(x) - T_p^*) dx$$

onde $A_{ij}^*(t) = \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{p,i}(x, t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{p,j}(x, t)}{\partial t} dx$.

Aplicando a Técnica do Balanço Integral na equação (4.143), integra-se no domínio a equação de energia, equação (4.139).

$$\rho_v c_{Pv} \int_0^{s_p(t)} \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial t} dx = k_v \int_0^{s_p(t)} \frac{\partial^2 T_v^*(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (4.150)$$

Substituindo as condições de contorno, equações (4.141) e (4.142), é obtida a expressão para o fluxo de calor na superfície em $x = s_p(t)$.

$$k_v \left. \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} = \rho_v c_{Pv} \int_0^{s_p(t)} \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial t} dx \quad (4.151)$$

Aplicando a regra de Leibnitz no lado direito da equação (4.151) e substituindo a fórmula inversa (4.144), tem-se:

$$k_v \left. \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} = \rho_v c_{Pv} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_{p,j}(t)}{dt} \bar{T}_{p,j}(t) + F_{p,j}(t) \frac{d\bar{T}_{p,j}(t)}{dt} \right) \quad (4.152)$$

Agora substituindo a equação (4.149) na equação (4.152), obtém-se:

$$k_v \left. \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} \right|_{x=s_p(t)} = \rho_v c_{Pv} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_{p,j}(t)}{dt} \bar{T}_{p,j}(t) - F_{p,j}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\delta_{ij} \alpha_v \beta_{p,i}^2(t) + A_{ij}^*(t) \right) \bar{T}_{p,i}(t) \right) \quad (4.153)$$

Portanto, substituindo a equação (4.153) na equação do balanço de energia da fronteira móvel, equação (4.143) obtém-se a equação definitiva para $s_p(t)$.

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = \frac{q_w(t)}{2} - \frac{3k_p}{L - s_p(t)} (T_{avp}(t) - T_p^*) + \rho_v c_{pv} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_{pj}(t)}{dt} \bar{T}_{pj}(t) - F_{pj}(t) \sum_{k=1}^{\infty} A_{jk}(t) \bar{T}_{p,k}(t) \right) \right] \quad t_p < t < t_{ab} \quad (4.154)$$

$$s_p(t_p) = L$$

onde $F_{pj}(t) = \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{pj}(x,t) dx$ e $A_{jk}(t) = \delta_{jk} \alpha_v \beta_{pj}^2(t) + A_{jk}^*(t)$.

Para o período de ablação é utilizado a mesma técnica de parâmetros concentrados melhorada na qual tem-se as seguintes definições para as temperaturas e fluxos médios na região pirolizada que sofre ablação apresentadas nas equações (4.155) e (4.156), respectivamente.

$$T_{avp}^*(t) = \frac{1}{2} (T_p^* + T_{ab}^*) + \frac{s_{ab}(t) - s_p(t)}{12} \left(\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} - \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_{ab}(t)} \right) \quad (4.155)$$

e

$$\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_{ab}(t)} = \frac{2}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (T_{ab}^* - T_p^*) - \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} \quad (4.156)$$

Substituindo a equação (4.156) na equação (4.155) tem-se a equação explícita para $T_{avp}^*(t)$.

$$T_{avp}^*(t) = \frac{1}{2} (T_p^* + T_{ab}^*) + \frac{s_{ab}(t) - s_p(t)}{6} \left(\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} - \frac{1}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (T_{ab}^* - T_p^*) \right) \quad (4.157)$$

Evidencia-se da equação (4.157) o termo correspondente à derivada da temperatura aplicada em $s_p(t)$ e substitui-se na equação (4.156), obtendo-se então:

$$\frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} = \frac{2}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (3T_{avp}^*(t) - 2T_p^* - T_{ab}^*) \quad (4.158)$$

e

$$\left. \frac{\partial T_p(t)}{\partial x} \right|_{x=s_{ab}(t)} = \frac{2}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (2T_{ab}^* + T_p^* - 3T_{avp}^*(t)) \quad (4.159)$$

Integrando a equação de energia da zona de pirólise no domínio $[s_p(t), s_{ab}(t)]$ e definindo,

$$T_{avp}^*(t) = \frac{1}{s_{ab}(t) - s_p(t)} \int_{s_p(t)}^{s_{ab}(t)} T_p(x, t) dx \quad (4.160)$$

integra-se a equação de energia da zona de pirólise, equação (3.32), substitui-se as equações (4.158) e (4.159), aplica-se a regra de Leibnitz obtendo-se,

$$\begin{aligned} \rho_p c_{Pp} (s_{ab}(t) - s_p(t)) \frac{dT_{avp}^*(t)}{dt} &= \rho_p c_{Pp} \left(\frac{ds_p(t)}{dt} - \frac{ds_{ab}(t)}{dt} \right) T_{avp}^*(t) + \\ &\frac{6k_p}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (T_{ab}^* + T_p^* - 2T_{avp}^*(t)) \quad t > t_{ab} \end{aligned} \quad (4.161)$$

E a condição inicial é definida integrando no domínio a equação (3.33), obtendo-se,

$$T_{avp}^*(t_{ab}) = \frac{1}{s_{ab}(t_{ab}) - s_p(t_{ab})} \int_{s_p(t_{ab})}^{s_{ab}(t_{ab})} T_{ab}(x) dx \quad (4.162)$$

O sistema de equações diferenciais parciais acopladas para o período de ablação é definido nas equações (4.163) a (4.168) após ser aplicada a técnica de parâmetros concentrados melhorada, em formulação $H_{1,1} / H_{0,0}$ na camada pirolizada.

$$\rho_v c_{Pv} \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial t} = k_v \frac{\partial^2 T_v^*(x, t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < s_p(t); \quad t > t_{ab} \quad (4.163)$$

$$\rho_p c_{pp} (s_{ab}(t) - s_p(t)) \frac{dT_{avp}^*(t)}{dt} = \frac{3}{2} q_w(t) + \rho_p c_{pp} \left(\frac{ds_p(t)}{dt} - \frac{ds_{ab}(t)}{dt} \right) T_{avp}^*(t) + \frac{6k_p}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (T_{ab}^* + T_p^* - 2T_{avp}^*(t)) \quad t > t_{ab} \quad (4.164)$$

$$T_v^*(x, t) = \tilde{T}_p^*(x) - T_p^* \quad t = t_{ab}; \quad 0 \leq x \leq s_p(t) \quad (4.165)$$

$$T_{avp}^*(t) = \frac{1}{s_{ab}(t) - s_p(t)} \int_{s_p(t)}^{s_{ab}(t)} T_{ab}(x) dx \quad t = t_{ab} \quad (4.166)$$

$$-k_v \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad t > t_{ab} \quad (4.167)$$

$$T_v^*(x, t) = 0 \quad x = s_p(t); \quad t > t_{ab} \quad (4.168)$$

E as equações para os contornos móveis são definidas como segue:

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = k_v \frac{\partial T_v^*(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=s_p(t)} - \frac{2k_p}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (3T_{avp}^*(t) - 2T_p^* - T_{ab}^*) \quad t > t_{ab} \quad (4.169)$$

$$s_p(t_{ab}) = \bar{s}_{ab}$$

$$\rho_p H_{ab} \frac{ds_{ab}(t)}{dt} = -q_w(t) + \frac{2k_p}{s_{ab}(t) - s_p(t)} (2T_{ab}^* + T_p^* - 3T_{avp}^*(t)) \quad t > t_{ab} \quad (4.170)$$

$$s_{ab}(t_{ab}) = L$$

Da mesma forma que no período anterior é gerado um problema de autovalor dependente do tempo devido ao contorno móvel $s_p(t)$, não sendo possível o processo de transformação integral desacoplado, e então aplica-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada [16]. Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa, para o período de ablação:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ab,i}(t) &= \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) T_v^*(x, t) dx && \text{Transformada} \\ T_v^*(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \bar{T}_{ab,i}(t) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.171)$$

onde foi adotado um *kernel* simétrico, com as autofunções normalizadas $\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)$, como na equação (4.146) e o problema auxiliar para $\varphi_{ab,i}(x,t)$ é semelhante ao apresentado na equação (4.145).

Aplicando o operador integral $\int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (4.163) e a 2ª fórmula de Green obtém-se a equação (4.172),

$$\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) T_v^*(x,t) dx = \left[\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v^*(x,t)}{\partial x} - T_v^*(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{\partial x} \right]_0^{s_p(t)} + \int_0^{s_p(t)} T_v^*(x,t) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (4.172)$$

Utilizando as condições de contorno (4.167) e (4.168) é obtido o sistema de equações diferenciais ordinárias para o período de ablação.

$$\frac{d\bar{T}_{ab,i}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_{ij} \alpha_v \beta_{ab,i}^2(t) + B_{ij}^*(t)) \bar{T}_{ab,i}(t) = 0 \quad t > t_{ab} \quad (4.173)$$

$$\bar{T}_{ab,i}(t_{ab}) = \int_0^{s_p(t_{ab})} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t_{ab}) \left(\tilde{T}_p(x) - T_p^* \right) dx$$

onde $B_{ij}^*(t) = \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,j}(x,t)}{\partial t} dx$ e $\tilde{T}_p(x) - T_p^* = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{p,i}(x,t) \bar{T}_{p,i}(t)$

Aplicando a Técnica do Balanço Integral na equação (4.169) tem-se:

$$\rho_v H_p \frac{ds_p(t)}{dt} = \rho_v c_{Pv} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{dF_{ab,j}(t)}{dt} \bar{T}_{ab,j}(t) - F_{ab,j}(t) \sum_{k=1}^{\infty} B_{jk}(t) \bar{T}_{ab,k}(t) \right) \right] - \frac{2k_p}{s_{ab}(t) - s_p(t)} \left(3T_{avp}^*(t) - 2T_p^* - T_{ab}^* \right) \quad t > t_{ab} \quad (4.174)$$

$$s_p(t_{ab}) = \bar{s}_{ab}$$

onde $F_{ab,j}(t) = \int_0^{s_p(t)} \tilde{\varphi}_{ab,j}(x,t) dx$ e $B_{jk}(t) = \delta_{jk} \alpha_v \beta_{ab,j}^2(t) + B_{jk}^*(t)$.

4.4 Modelo de ablação com Pirólise considerando Degradação pela Equação de Arrhenius

Nesta seção será apresentado o método de solução da formulação apresentada na sessão 3.2.2 juntamente com a aplicação da Técnica do Balanço Integral, [55] e [56], para acelerar a convergência da solução em expansão de autofunções.

4.4.1 Solução Formal sem Balanço Integral

Segue aqui inicialmente o formalismo para aplicação da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) [16] para problemas de condução de calor com contorno móvel [1] aplicado ao problema de ablação com pirólise.

Solução para o Período de Pré-Ablação

Para resolver o problema matemático apresentado na sessão 3.2.2 será aplicada a transformação integral primeiramente na equação da massa específica, equações (3.50) a (3.53).

Escolheu-se o seguinte par transformada-inversa,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(t) &= \int_0^L \Omega_n(x) \rho(x,t) dx && \text{Transformada} \\ \rho(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n(x)}{M_n} \bar{\rho}_n(t) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.175)$$

e o problema auxiliar escolhido para transformar a massa específica no período de pré-ablação é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Omega_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^2 \Omega_n(x) &= 0 && 0 < x < L \\ \frac{d\Omega_n(x)}{dx} &= 0 && x = 0 \\ \Omega_n(x) &= 0 && x = L \end{aligned} \quad (4.176)$$

onde $\Omega_n(x) = \text{Cos}(\lambda_n x)$ é a n-ésima autofunção correspondente ao n-ésimo autovalor $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ e a norma $M_n = \frac{L}{2}$. Aplica-se o operador integral $\int_0^L \Omega_n(x) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.50) obtendo-se

$$\int_0^L \Omega_n(x) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx = \int_0^L \Omega_n(x) P_\rho(x,t) dx \quad (4.177)$$

onde $P_\rho(x,t)$ é definido pelo lado direito da equação (3.50).

Portanto tem-se a equação da massa específica transformada para o período de pré-ablação

$$\frac{d\bar{\rho}_n(t)}{dt} = \bar{P}_{\rho,n}(t) \quad 0 < t < t_{ab} \quad (4.178)$$

Aplicando o operador $\int_0^L \Omega_n(x) \langle \cdot \rangle dx$ na condição inicial, equação (3.51),

$$\bar{\rho}_n(0) = (\rho_v - \rho_p) \bar{f}_{\rho,n} \quad (4.179)$$

onde $\bar{f}_{\rho,n} = \int_0^L \Omega_n(x) dx$.

Aplicando da transformada integral na equação de energia, escolheu-se o seguinte par transformada-inversa, para o período de pré-ablação, equações (3.45) a (3.48).

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(t) &= \int_0^L \varphi_i(x) T_v(x,t) dx && \text{Transformada} \\ T_v(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{N_i} \bar{T}_i(t) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.180)$$

e o problema auxiliar para transformar a temperatura no período de pré-ablação é definido como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2} + \beta_i^2\varphi_i(x) &= 0 & 0 < x < L \\
\frac{d\varphi_i(x)}{dx} &= 0 & x = 0 \\
\frac{d\varphi_i(x)}{dx} &= 0 & x = L
\end{aligned} \tag{4.181}$$

onde $\varphi_i(x) = \text{Cos}(\beta_i x)$ é a i -ésima autofunção correspondente ao i -ésimo autovalor $\beta_i = \frac{i\pi}{L}$ e a norma $N_i = \frac{L}{2}$. Deve-se ainda lembrar que devido as condições de contorno, $\beta_0 = 0$ é um autovalor com norma $N_0 = L$.

Aplica-se o operador integral $\int_0^L \varphi_i(x) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.45)

$$\begin{aligned}
\rho_v c_{Pv} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \varphi_i(x) T_v(x,t) dx &= k_v \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial^2 T_v(x,t)}{\partial x^2} dx - c_{Pg} \dot{m}_p(t) \\
&\quad \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} dx + \Delta H_p \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx
\end{aligned} \tag{4.182}$$

e aplicando a 2ª fórmula de Green na equação (4.182) tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_v} \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} &= \left[\varphi_i(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L T_v(x,t) \frac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2} dx - \\
&\quad \frac{c_{Pg} \dot{m}_p(t)}{k_v} \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\Delta H_p}{k_v} \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx
\end{aligned} \tag{4.183}$$

Substituindo a equação (4.181) na equação (4.183) tem-se,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_v} \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} &= \varphi_i(L) \frac{q_w(t)}{k_v} - \beta_i^2 \bar{T}_i(t) - \\
&\quad \frac{c_{Pg} \dot{m}_p(t)}{k_v} \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\Delta H_p}{k_v} \int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx
\end{aligned} \tag{4.184}$$

onde, pelas condições de contorno, tem-se,

$$\left[\varphi_i(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - T(x,t) \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right]_0^L = \varphi_i(L) \frac{q_w(t)}{k_v} \quad (4.185)$$

Substituindo a fórmula inversa (4.175) na equação (3.49), reescreve-se a expansão para a vazão de gases de pirólise:

$$\dot{m}_p(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_{\rho,n}}{M_n} \frac{d\bar{\rho}_n(t)}{dt} \quad (4.186)$$

Portanto, a equação (4.184) é reescrita como segue após substituir as equações (4.175), (4.180) e (4.186).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_v} \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} = & (-1)^i \frac{q_w(t)}{k_v} - \beta_i^2 \bar{T}_i(t) + \\ & \frac{c_{Pg}}{k_v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_{\rho,n}}{M_n} \frac{d\bar{\rho}_n(t)}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} \bar{T}_j(t) + \frac{\Delta H_p}{k_v} \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} \frac{d\bar{\rho}_n(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.187)$$

onde define-se

$$B_{ij} = \frac{1}{N_j} \int_0^L \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$C_{in} = \frac{1}{M_n} \int_0^L \varphi_i(x) \Omega_n(x) dx$$

Aplicando o operador integral na condição inicial do sistema, apresentada na equação (3.46), obtém-se,

$$\int_0^L \varphi_i(x) T(x,0) dx = \bar{T}_i(0) = 0 \quad (4.188)$$

Desta forma, a equação para a temperatura é definido pela equação (4.189).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} &= \alpha_v \left((-1)^i \frac{q_w(t)}{k_v} - \beta_i^2 \bar{T}_i(t) \right) + \\ & \frac{\alpha_v}{k_v} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{Pg} \frac{\bar{f}_{\rho,n}}{M_n} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} \bar{T}_j(t) + \Delta H_p C_{in} \right) \frac{d\bar{\rho}_n(t)}{dt} \quad 0 < t < t_{ab} \quad (4.189) \\ \bar{T}_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

Para completar a solução do período de pré-ablação é necessário calcular o lado direito da equação (4.178). Será então realizada uma integração semi-analítica em $\bar{P}_{\rho,n}(t)$. Faz-se a integração em todo o domínio espacial subdividindo em um número k_{\max} de regiões, e em cada uma delas o termo fonte $P_{\rho}^k(x,t)$ é aproximado, por exemplo, em forma linear com a variação espacial. Preserva-se então a integração analítica de autofunção, que tem um comportamento característico oscilatório. Esta estratégia de integração foi adotada devido ao alto custo computacional necessário para resolver a integral do lado direito da equação de Arrhenius. Portanto, tem-se:

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Omega_n(x) P_{\rho}^k(x,t) dx \quad (4.190)$$

onde é considerado $P_{\rho}^k(x,t) \cong a_k x + b_k$. O detalhamento da solução semi-analítica completa encontra-se no Anexo A.

Solução para o Período de Ablação

Para o período de ablação aplica-se a transformada integral primeiramente nas equações (3.60) a (3.63).

Escolhe-se o seguinte par transformada-inversa para a massa específica do meio:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ab,n}(t) &= \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) \rho(x,t) dx && \text{Transformada} \\ \rho(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n(x,t) \bar{\rho}_{ab,n}(t) && \text{Inversa} \end{aligned} \quad (4.191)$$

e o problema auxiliar escolhido para a massa específica no período de ablação é:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Omega_{ab,n}(x,t)}{dx^2} + \lambda_{ab,n}^2(t)\Omega_{ab,n}(x,t) &= 0 & 0 < x < s_{ab}(t) \\
\frac{d\Omega_{ab,n}(x,t)}{dx} &= 0 & x = 0 \\
\Omega_{ab,n}(x,t) &= 0 & x = s_{ab}(t)
\end{aligned} \tag{4.192}$$

onde $\Omega_{ab,n}(x,t) = \text{Cos}(\lambda_{ab,n}(t)x)$ é a n-ésima autofunção correspondente ao n-ésimo autovalor $\lambda_{ab,n}(t) = \frac{(2n-1)\pi}{2s_{ab}(t)}$ e a norma $M_{ab,n}(t) = \frac{s_{ab}(t)}{2}$. Aplica-se o operador integral

$\int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.60) obtendo-se

$$\int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) P_\rho^*(x,t) dx \tag{4.193}$$

onde $P_\rho^*(x,t)$ é definido pelo lado direito da equação (3.60) e a autofunção normalizada

é definida como $\tilde{\Omega}_n(x,t) = \frac{\Omega_{ab,n}(x,t)}{\sqrt{M_{ab,n}(t)}}$.

Substituindo a formula da inversa, (4.191), na equação (4.193) tem-se

$$\int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Omega}_m(x,t) \bar{\rho}_{ab,m}(t)) dx = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) P_\rho^*(x,t) dx \tag{4.194}$$

Portanto, tem-se a equação que governa a massa específica transformada para o período de ablação

$$\frac{d\bar{\rho}_{ab,n}(t)}{dt} = -\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}^*(t) \bar{\rho}_{ab,m}(t) + \bar{P}_{\rho,n}^*(t) \tag{4.195}$$

onde $A_{nm}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n^*(x,t) \frac{\partial \tilde{\Omega}_m^*(x,t)}{\partial t} dx$.

Aplicando o operador na condição inicial, equação (3.61), obtém-se

$$\int_0^{s_{ab}(t_{ab})} \tilde{\Omega}_n(x, t_{ab}) \rho(x, t_{ab}) dx = 0 \quad (4.196)$$

$$\bar{\rho}_{ab,n}(t_{ab}) = \tilde{f}_{\rho,n}^*(t_{ab})$$

Para transformar o sistema de equações correspondentes ao período de ablação, equações (3.54) a (3.57), escolhe-se o seguinte par transformada-inversa da temperatura:

$$\bar{T}_{ab,i}(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) T_v(x, t) dx \quad \text{Transformada} \quad (4.197)$$

$$T_v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \bar{T}_{ab,i}(t) \quad \text{Inversa}$$

e o problema auxiliar para o período de ablação como segue:

$$\frac{d^2 \varphi_{ab,i}(x, t)}{dx^2} + \beta_{ab,i}^2 \varphi_{ab,i}(x, t) = 0 \quad 0 < x < s_{ab}(t)$$

$$\frac{d\varphi_{ab,i}(x, t)}{dx} = 0 \quad x = 0 \quad (4.198)$$

$$\varphi_{ab,i}(x, t) = 0 \quad x = s_{ab}(t)$$

onde $\varphi_{ab,i}(x, t) = \text{Cos}(\beta_{ab,i}(t)x)$ é a i-ésima autofunção correspondente ao i-ésimo

autovalor $\beta_{ab,i}(t) = \frac{(2i-1)\pi}{2s_{ab}(t)}$ e a norma é definida como $N_{ab,i}(t) = \frac{s_{ab}(t)}{2}$.

Aplica-se o operador integral $\int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \langle \cdot \rangle dx$ na equação (3.54)

obtendo-se

$$\rho_v c_{Pv} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \frac{\partial T_v(x, t)}{\partial t} dx = k_v \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \frac{\partial^2 T_v(x, t)}{\partial x^2} dx - c_{Pg} \dot{m}_p(t) \quad (4.199)$$

$$\int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \frac{\partial T_v(x, t)}{\partial x} dx + \Delta H_p \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x, t) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx$$

Aplicando a 2ª fórmula de Green e a regra de Leibnitz na equação (4.199) tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} dx = & \left[\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{d\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{dx} \right]_0^{s_{ab}(t)} + \\ & \int_0^{s_{ab}(t)} T_v(x,t) \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{dx^2} dx - \frac{c_{Pg} \dot{m}_p(t)}{k_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} dx + \\ & \frac{\Delta H_p}{k_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (4.200)$$

Portanto, a equação (4.183) resulta em,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial t} dx = & \left[\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{\partial x} \right]_0^{s_{ab}(t)} - \\ & \beta_{ab,i}^2(t) \bar{T}_{ab,i}(t) - \frac{c_{Pg} \dot{m}_p(t)}{k_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} dx + \\ & \frac{\Delta H_p}{k_v} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (4.201)$$

e pelas condições de contorno tem-se,

$$\left[\tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial T_v(x,t)}{\partial x} - T_v(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t)}{\partial x} \right]_0^{s_{ab}(t)} = 0 \quad (4.202)$$

Substituindo a fórmula inversa (4.197) na equação (3.59), reescreve-se para a vazão de massa dos gases de pirólise:

$$\dot{m}_p(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d\bar{f}_{\rho,n}^*(t)}{dt} \bar{\rho}_{ab,n}(t) + \bar{f}_{\rho,n}^*(t) \frac{d\bar{\rho}_{ab,n}(t)}{dt} \right) \quad (4.203)$$

onde $\bar{f}_{\rho,n}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n(x,t) dx$.

Portanto, a equação (4.201) é reescrita como segue após substituir as equações (4.191) e (4.197).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{ab,i}(t)}{dt} = & -\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^*(t)\bar{T}_{ab,j}(t) - \alpha_v \beta_{ab,i}^2(t)\bar{T}_{ab,i}(t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_{in}(t)\bar{\rho}_{ab,n}(t) + G_{in}(t)\frac{d\bar{\rho}_{ab,n}(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.204)$$

onde define-se

$$\begin{aligned} F_{in}(t) = & \frac{\alpha_v}{k_v} \left(\Delta H_p D_{in}^*(t) + c_{Pg} \frac{d\bar{f}_{\rho,n}^*(t)}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}^*(t)\bar{T}_{ab,j}(t) \right) \\ G_{in}(t) = & \frac{\alpha_v}{k_v} \left(\Delta H_p E_{in}^*(t) + c_{Pg} \bar{f}_{\rho,n}^*(t) \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}^*(t)\bar{T}_{ab,j}(t) \right) \end{aligned}$$

$$B_{ij}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,j}(x,t)}{\partial t} dx$$

$$C_{ij}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial \tilde{\varphi}_{ab,j}(x,t)}{\partial x} dx$$

$$D_{in}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \frac{\partial \tilde{\Omega}_n(x,t)}{\partial t} dx$$

$$E_{in}^*(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \tilde{\Omega}_n(x,t) dx$$

Aplicando o operador integral na condição inicial do sistema, apresentada na equação (3.55), obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) T_v(x,t) dx = & \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\varphi}_{ab,i}(x,t) \left(\tilde{T}_{ab}(x) - T_{ab}^* \right) dx \\ \bar{T}_{ab,i}(t_{ab}) = & \tilde{f}_{T,i}^*(t_{ab}) \end{aligned} \quad (4.205)$$

Desta forma, o potencial transformado para a temperatura é definido pela equação (4.206).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{ab,i}(t)}{dt} &= -\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^*(t)\bar{T}_{ab,j}(t) - \alpha_v \beta_{ab,i}^2(t)\bar{T}_{ab,i}(t) + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_{in}(t)\bar{\rho}_{ab,n}(t) + G_{in}(t)\frac{d\bar{\rho}_{ab,n}(t)}{dt} \right) \quad t > t_{ab} \quad (4.206) \\ \bar{T}_{ab,i}(t_{ab}) &= \tilde{f}_{T,i}^*(t_{ab}) \end{aligned}$$

Para completar a solução do período de ablação é necessário resolver $\bar{P}_{\rho n}^*(t)$ da equação (4.195). Novamente será realizada a integração semi-analítica como segue:

$$\bar{P}_{\rho,n}^*(t) = \sum_{k=1}^{k \max} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{\Omega}_{ab,n}(x,t) P_{\rho,k}^*(x,t) dx \quad (4.207)$$

onde considera-se $P_{\rho,k}^*(x,t) \cong a_k x + b_k$ em cada sub-região. A solução semi-analítica completa encontra-se no Anexo A.

CAPÍTULO 5

5. Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para os dois modelos de ablação sem pirólise e os dois modelos com pirólise.

Optou-se por utilizar a rotina *NDSolve* na solução numérica dos sistemas transformados, encontrada na plataforma *Mathematica* v5.2 e v7, [57], devido à facilidade de implementação das formulações e também devido ao próprio código TPS-Nose [18], que motivou o presente estudo, ter sido construído nesta plataforma.

A possibilidade de controlar parâmetros na rotina *NDSolve* (*AccuracyGoal*, *PrecisionGoal* e *MaxSteps*) ou ainda escolher entre diferentes métodos de solução de equações diferenciais ordinárias de acordo com a rigidez do sistema, também tornou a plataforma bastante atrativa, além, naturalmente, da facilidade de manipulação algébrica simbólica oferecida por esse sistema ao longo do desenvolvimento do estudo.

Os parâmetros presentes na *NDSolve* permitem ao usuário ter um controle de erro absoluto e relativo e as diferentes opções de métodos permitem ao usuário informar à rotina se o sistema a ser resolvido é rígido ou não.

5.1 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Uma Camada

Os resultados apresentados abaixo foram obtidos utilizando a rotina *NDSolve* com o controle de erro local absoluto desativado (*AccuracyGoal* \rightarrow *infinity*), forçando o controle do erro relativo (*PrecisionGoal* \rightarrow 5) para garantir pelo menos uma precisão de 5 dígitos significativos na solução do campo transformado.

Buscando otimizar a solução do sistema transformado de equações diferenciais ordinárias foi utilizada a rotina *NDSolve* com três esquemas numéricos diferentes:

- *Default*: este esquema usa a aproximação LSODA, HINDMARSH [63], o qual muda automaticamente o método de solução de sistemas não rígidos para sistemas rígidos de acordo com a necessidade. Para sistemas não rígidos o método usado é o preditor-corretor de Adams e para sistemas rígidos é a fórmula de diferenciação para trás de Gear [57].

- *BDF*: este esquema utiliza diretamente a fórmula de diferenciação para trás implícita, seja o sistema não rígido ou rígido.
- *StiffnessSwitching*: este esquema tem como idéia básica mudar o método de solução de sistemas não rígidos para sistemas rígidos calculando a rigidez do sistema automaticamente. Intrínseca à rotina *NDSolve* existe um parâmetro de controle chamado *StiffnessTest*, o qual utiliza um fator de segurança informado pelo usuário ou o valor padrão da própria rotina que é de 0.9. Se o sistema for detectado como rígido o esquema assume o método implícito de solução, automaticamente, caso contrário ele retorna ao método explícito de solução.

Para resolver os sistemas de equações diferenciais ordinárias apresentados nas equações (4.41), (4.42) e/ou (4.47) foi necessário truncar a série em um determinado número finito de termos N e definir o fluxo de calor na parede $Q(\tau)$.

Implementou-se, então, o caso-teste usado por DINIZ *et al.* [1] onde foi utilizada a formulação adimensional descrita na seção 3.1. Para fins de validação do código proposto, os fluxos de calor na parede escolhidos foram os mesmos usados em [1] e [58], os quais são os seguintes: $Q(\tau) = 2, 10\tau$ e $10\tau^2$. Para o inverso do número de Stefan foi escolhido $\nu = 1$ que é o caso mais crítico então apresentado.

A Tabela 1 apresenta o tempo computacional requerido pelos 3 (três) esquemas numéricos para resolver o sistema de equações (4.41) acoplado com o sistema de equações (4.42).

Tabela 1 – Comparação do tempo computacional para a solução do sistema transformado utilizando os 3 esquemas numéricos da rotina *NDSolve* (sem Balanço Integral)

Ordem de Truncamento N	<i>Default</i> [s]	<i>BDF</i> [s]	<i>StiffnessSwitching</i> [s]
20	1.673	2.023	2.033
40	9.373	9.564	9.584
60	25.867	19.909	20.329
80	64.693	44.774	46.107
100	107.415	81.708	87.166
120	186.628	110.119	119.803

Os tempos de CPU apresentados na Tabela 1 são equivalentes somente ao tempo gasto pela rotina *NDSolve* para resolver o sistema transformado. Esses tempos foram obtidos em uma máquina portadora de um processador AMD Athlon XP 1600+, 512Mb de memória RAM e com um *clock* de 1.06GHz.

Na Tabela 2 é feita a mesma comparação, porém utilizando a equação (4.47) que refere-se ao cálculo com balanço integral.

Tabela 2 – Comparação do tempo computacional para a solução do sistema transformado utilizando os 3 esquemas numéricos da rotina *NDSolve* (com Balanço Integral)

Ordem de Truncamento N	<i>Default</i> [s]	<i>BDF</i> [s]	<i>StiffnessSwitching</i> [s]
20	2.674	3.815	3.926
40	24.646	17.785	18.928
60	83.209	49.251	53.818
80	209.982	98.621	108.827
100	469.726	253.444	263.83
120	975.583	486.089	511.836

Analisando as Tabela 1 e 2 pode-se chegar, equivocadamente, à conclusão que a aplicação da técnica de balanço integral resulta em uma redução de performance do método, pois o tempo computacional necessário para avaliar as séries truncadas, nas mesmas ordens, foi bem superior quando utilizada a referida técnica, chegando a ser mais de 4 vezes superior quando utilizado o esquema padrão da *NDSolve*, enquanto para os esquemas *BDF* e *StiffnessSwitching* foi da ordem de 3.3 vezes superior.

Porém, é necessário observar que a redução de custo efetiva surge com uma aceleração de convergência para obter-se os resultados com uma determinada precisão desejada. Portanto, diminuindo o número de equações do sistema a ser resolvido, o custo computacional se reduz muito mais do que adotando o procedimento formal sem balanço integral.

Das Tabela 1 e 2 também pode-se concluir que o sistema de equações é nitidamente rígido, a partir da redução do custo com os métodos para sistemas rígidos. As pequenas diferenças nos tempos computacionais obtidos entre os esquemas numéricos *BDF* e *StiffnessSwitching* são porque no esquema numérico *StiffnessSwitching* o processo de solução é iniciado assumindo uma formulação explícita e só após é alterado para uma formulação implícita, o que já não ocorre no esquema

numérico *BDF* que já assume que o sistema é rígido e o processo de solução parte de uma formulação implícita.

As Tabela 3 a 8 apresentam os resultados obtidos para analisar a convergência, com o aumento do número de termos na expansão, da fronteira móvel $\eta_b(\tau)$, somente para o esquema numérico *BDF*, devido ao menor custo computacional observado nas Tabela 1 e 2. Utilizando algumas ordens de truncamento diferentes, os resultados obtidos para os diferentes casos-teste com fluxo $Q(\tau) = 2, 10\tau$ e $10\tau^2$ são comparados com os obtidos por DINIZ *et al.* [1].

Os casos-teste analisados incluem uma situação de fluxo prescrito constante, e duas de fluxo variável no tempo, o primeiro de forma linear e outro parabólico. Para o caso de fluxo constante, sem utilização da aceleração de convergência por balanço integral, Tabela 3, pode-se observar flutuações no 4º dígito da posição da fronteira, ainda para as ordens de truncamento mais elevadas ($N = 100$ e 125).

Tabela 3 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para $Q(\tau) = 2$ (sem Balanço Integral)

Tempo	Ordem de Truncamento N					
	DINIZ <i>et al.</i> [1]	25	50	75	100	125
$\tau - \tau_{ab}$						
.01829	.00451	.0042927	.0042698	.0042625	.0042592	.0042577
.05488	.02060	.0198250	.0197249	.0196921	.0196759	.0196667
.10976	.05230	.0515555	.0513259	.0512501	.0512125	.0511903
.14634	.07750	.0766098	.0762914	.0761861	.0761337	.0761026
.20122	.12030	.1191570	.1187043	.1185543	.1184796	.1184352
.25610	.16880	.1673636	.1667769	.1665823	.1664853	.1664276
.31098	.22290	.2212239	.2205045	.2202658	.2201503	.2200756
.34756	.26220	.2603464	.2595394	.2592717	.2591413	.2590619
.40244	.32630	.3240950	.3231578	.3228471	.3226942	.3226017
.45732	.39670	.3942888	.3932225	.3928688	.3926942	.3925882
.51219	.47420	.4714794	.4702834	.4698882	.4696905	.4695715
.54878	.51010	.5271905	.5259083	.5254840	.5252719	.5251450
.60366	.62080	.6176443	.6162314	.6157643	.6155296	.6153911
.65854	.72020	.7166953	.7151585	.7146505	.7143948	.7142446
.71341	.82680	.8231237	.8215038	.8209682	.8206985	.8205401
.75000	.89980	.8961189	.8944863	.8939463	.8936744	.8935147

Já para os resultados com uso do balanço integral, Tabela 4, claramente observa-se que as flutuações de convergência estão agora restritas ao 6º dígito

significativo, oferecendo-se resultados com 5 dígitos totalmente convergidos. Ambos os conjuntos de resultados concordam entre si no 3º dígito significativo, e com os resultados de DINIZ *et al.* [1] até o 2º dígito pelo menos. Cabe dizer que o mesmo método de solução, GITT, foi empregado por DINIZ *et al.* [1], entretanto à época com ordens de truncamento mais baixas e sem utilizar técnicas de aceleração de convergência.

Tabela 4 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 2 \text{ (com Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N					
	DINIZ <i>et al.</i> [1]	25	50	75	100	125
$\tau - \tau_{ab}$						
.01829	.00451	.0042391	.0042427	.0042444	.0042454	.0042462
.05488	.02060	.0196185	.0196218	.0196233	.0196242	.0196249
.10976	.05230	.0510915	.0510945	.0510959	.0510968	.0510974
.14634	.07750	.0759687	.0759717	.0759730	.0759738	.0759745
.20122	.12030	.1182481	.1182509	.1182522	.1182530	.1182536
.25610	.16880	.1661871	.1661899	.1661912	.1661944	.1661926
.31098	.22290	.2197821	.2197849	.2197863	.2197891	.2197910
.34756	.26220	.2587295	.2587327	.2587338	.2587365	.2587381
.40244	.32630	.3222178	.3222210	.3222226	.3222250	.3222262
.45732	.39670	.3921534	.3921560	.3921580	.3921607	.3921622
.51219	.47420	.4690849	.4690876	.4690897	.4690922	.4690935
.54878	.51010	.5246228	.5246260	.5246280	.5246301	.5246313
.60366	.62080	.6148144	.6148191	.6148204	.6148221	.6148232
.65854	.72020	.7136167	.7136224	.7136234	.7136249	.7136260
.71341	.82680	.8198776	.8198838	.8198848	.8198863	.8198874
.75000	.89980	.8928467	.8928529	.8928540	.8928555	.8928566

Em relação à aceleração de convergência, pode-se observar que os resultados com balanço integral, Tabela 4, já possuem 4 dígitos convergidos mesmo para ordens de truncamento tão baixas quanto $N = 25$, enquanto os resultados sem balanço integral, Tabela 3, ainda apresentam oscilações no 4º dígito mesmo para $N = 125$. Aqui fica então evidente a redução de custo finalmente atingida com essa técnica, ao compararem-se as Tabela 1 e 2 acima, os 3.8 s requeridos pela solução com balanço integral e $N = 20$, contra os 110 s requeridos pela solução sem balanço integral e $N = 120$.

As Tabela 5 e 6 mostram os resultados obtidos utilizando a prescrição do fluxo de calor variável linearmente com o tempo. Para esse caso-teste, os resultados

apresentados sem a utilização da aceleração de convergência por balanço integral, Tabela 5, ainda sofrem flutuações no 3º ou 4º dígito da posição da fronteira em alguns instantes de tempo, e ainda com ordens mais elevadas ($N = 100$ e 120).

Tabela 5 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 10\tau \text{ (sem Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N						
$\tau - \tau_{ab}$	DINIZ <i>et al.</i> [1]	20	40	60	80	100	120
.00854	.00348	.003243	.003214	.003205	.003200	.003198	.003197
.05122	.04340	.042599	.042272	.042165	.042111	.042079	.042058
.10244	.12000	.118571	.117770	.117505	.117373	.117294	.117242
.15366	.22120	.219156	.217809	.217363	.217140	.217007	.216918
.20488	.34610	.343325	.341391	.340749	.340428	.340236	.340108
.25610	.49670	.493192	.490652	.489808	.489387	.489134	.488967
.30732	.68090	.676419	.673215	.672126	.671589	.671279	.671057
.35000	.88220	.876107	.871829	.870380	.869664	.869252	.868955

Para os resultados com uso da técnica de balanço integral, Tabela 6, claramente observa-se que as flutuações estão no 6º dígito significativo, o que resulta em 5 dígitos totalmente convergido com ordem de truncamento bem inferior ao caso sem balanço integral, Tabela 5. Ambos os conjuntos de resultados possuem concordância de 2 dígitos com relação aos resultados obtidos por DINIZ *et al.* [1].

Tabela 6 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 10\tau \text{ (com Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N						
$\tau - \tau_{ab}$	DINIZ <i>et al.</i> [1]	20	40	60	80	100	120
.00854	.00348	.003178	.003182	.003183	.003185	.003185	.003186
.05122	.04340	.041942	.041946	.041947	.041949	.041949	.041950
.10244	.12000	.116970	.116973	.116975	.116976	.116977	.116977
.15366	.22120	.216466	.216468	.216470	.216471	.216471	.216472
.20488	.34610	.339462	.339463	.339465	.339465	.339469	.339466
.25610	.49670	.488116	.488117	.488118	.488119	.488121	.488120
.30732	.68090	.669978	.669984	.669980	.669981	.669982	.669982
.35000	.88220	.867519	.867528	.867522	.867524	.867527	.867525

Em relação à aceleração de convergência, pode-se observar que os resultados apresentados na Tabela 5, os quais foram obtidos sem a utilização do balanço integral, possuem apenas 2 ou 3 dígitos significativos convergidos, e ainda com ordens de truncamento elevadas ($N = 100$ e 120). Já para os resultados com balanço integral, Tabela 6, encontra-se 5 dígitos totalmente convergidos com ordem de truncamento muito mais baixa ($N = 40$). Isso reforça mais uma vez as conclusões sobre os resultados apresentados nas Tabelas 1 e 2, que aqui, quando comparadas, apresentam um tempo de CPU de 17.8 s requeridos pela solução com balanço integral e $N = 40$, contra os 110 s necessários pela solução sem balanço integral e $N = 120$.

As Tabelas 7 e 8 mostram os resultados obtidos utilizando-se o fluxo de calor variável parabólico. Para esse caso-teste, os resultados apresentados sem a utilização da aceleração de convergência por balanço integral, Tabela 7, ainda sofrem flutuações no 4º dígito da posição da fronteira mesmo com ordens de truncamento mais elevadas ($N = 100$ e 120).

Tabela 7 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 10\tau^2 \text{ (sem Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N						
$\tau - \tau_{ab}$	DINIZ <i>et al.</i> [1]	20	40	60	80	100	120
.00854	.00297	.002943	.002919	.002912	.002909	.002907	.002906
.05122	.03990	.039728	.039443	.039350	.039303	.039276	.039257
.10244	.11430	.113761	.113039	.112800	.112681	.112609	.112562
.15366	.21710	.216067	.214809	.214391	.214183	.214058	.213975
.20488	.34890	.347435	.345569	.344949	.344641	.344454	.344330
.25610	.48370	.511759	.509245	.508407	.507990	.507738	.507573
.30732	.72260	.720090	.716835	.715743	.715199	.714886	.714662
.35000	.96760	.964090	.959562	.958037	.957280	.956842	.956528

Nos resultados apresentados na Tabela 8, claramente observa-se que as flutuações estão no 5º ou 6º dígito significativo quando se compara os resultados com $N = 20$ ou 40 e $N = 120$. Os resultados apresentam uma convergência melhor do que a obtida por DINIZ *et al.* [1], tanto sem aplicar balanço integral ($N = 120$) ou aplicando balanço integral ($N = 20$), os quais apresentam 4 ou 5 dígitos totalmente convergidos e concordam em pelo menos 2 dígitos com a referência [1].

Tabela 8 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 10\tau^2 \text{ (com Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N						
	DINIZ <i>et al.</i> [1]	20	40	60	80	100	120
.00854	.00297	.002889	.002892	.002894	.002895	.002896	.002897
.05122	.03990	.039156	.039159	.039161	.039162	.039162	.039163
.10244	.11430	.112316	.112319	.112321	.112322	.112322	.112323
.15366	.21710	.213552	.213554	.213556	.213557	.213557	.213558
.20488	.34890	.343704	.343707	.343708	.343709	.343709	.343710
.25610	.48370	.506727	.506729	.506732	.506733	.506735	.506733
.30732	.72260	.713558	.713565	.713565	.713575	.713571	.713568
.35000	.96760	.954986	.954995	.954996	.955009	.955002	.954998

A Figura 6 apresenta a evolução do perfil de temperatura ao longo da proteção térmica desde o período de pré-ablação, passando pelo ponto de início do período ablativo, delimitado pelo perfil de temperatura em linha cheia. Observa-se o aumento significativo dos gradientes de temperatura no contorno móvel, para este caso de fluxo variável linear, e conseqüente aumento da taxa de recessão do material.

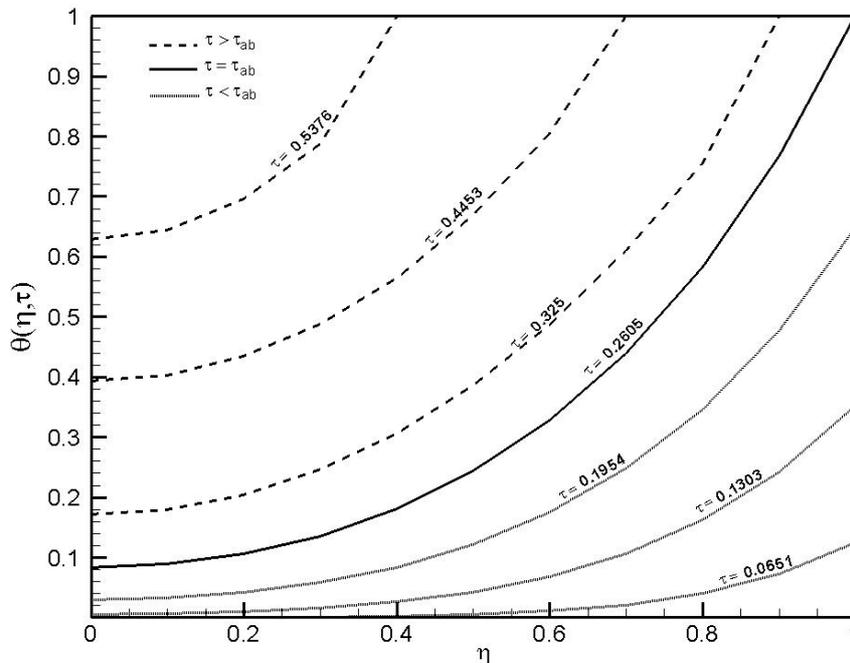


Figura 6 – Distribuição espacial de temperatura adimensional, para diferentes tempos, em ambos os períodos de pré-ablação e ablação

A Figura 7 mostra a comparação do comportamento do movimento da fronteira durante o processo de ablação para os fluxos $Q(\tau) = 10\tau$ e $10\tau^2$.

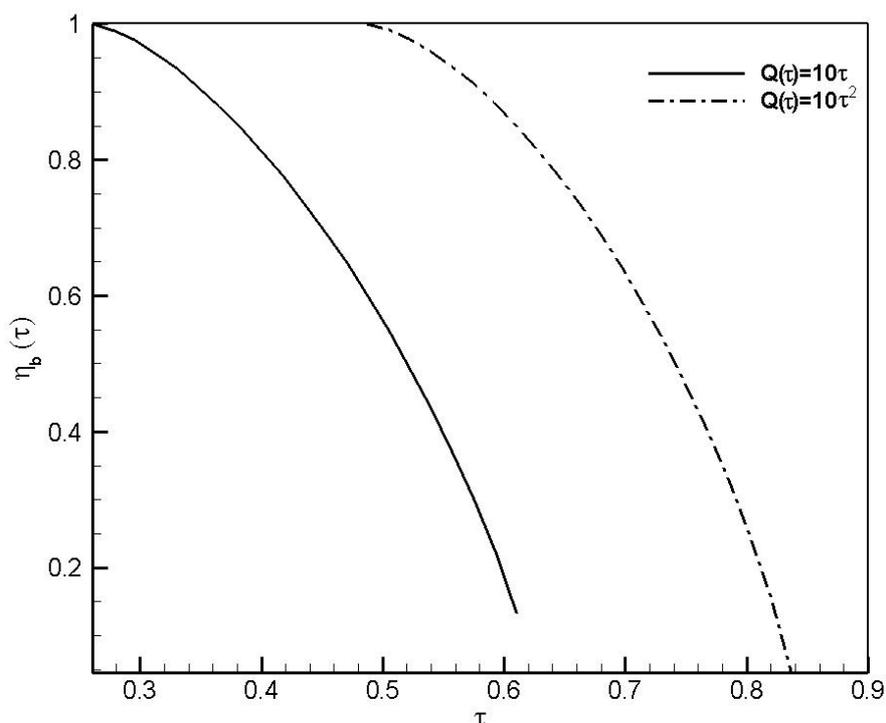
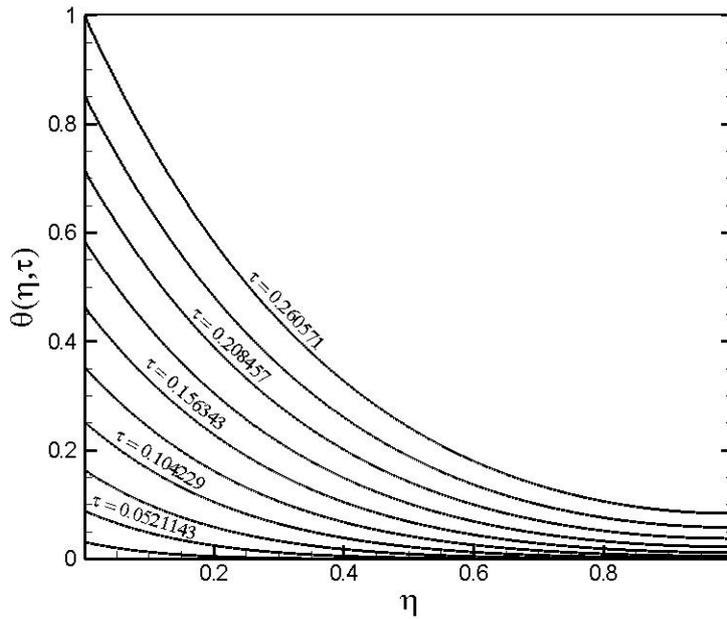


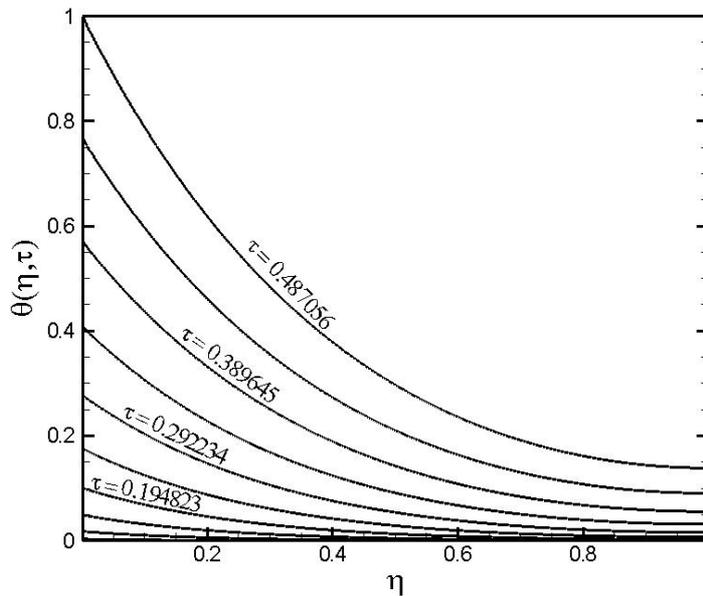
Figura 7 – Deslocamento do contorno ablativo para $Q(\tau) = 10\tau$ e $10\tau^2$

Da equação (4.22) é obtida a temperatura média adimensional na proteção térmica, que representa a quantidade de energia total imposta ao longo do período de pré-ablação para os fluxos de calor prescritos. Realizando a integral para cada fluxo de calor pode-se claramente perceber porque o período de ablação para o fluxo variável linear inicia-se antes do fluxo variável parabólico como mostra a Figura 7. A quantidade de energia imposta para um dado tempo é bem superior no caso linear quando comparado com o caso parabólico durante o período de pré-ablação.

As figuras abaixo ilustram a distribuição de temperatura ao longo do material em alguns valores de τ para dois fluxos de calor distintos. Na Figura 8a observa-se que a temperatura no lado oposto ao fluxo é menor que a temperatura correspondente apresentada na Figura 8b. Isso ocorre, porque a quantidade de energia imposta para o mesmo intervalo de tempo é maior no caso da Figura 8a que no caso da Figura 8b, iniciando-se mais rapidamente o processo ablativo.



a) $Q(\tau) = 10\tau$



b) $Q(\tau) = 10\tau^2$

Figura 8 – Distribuição de temperatura para o modelo com uma camada com os fluxos

Na Figura 8b a quantidade de energia é fornecida ao material mais lentamente, por isso o intervalo de tempo para início do período de pré-abelação é superior ao caso anterior, Figura 8a. O material, então, dispõe de mais tempo para difundir o calor fornecido ao longo de sua espessura, e por isso a temperatura na face oposta ao fluxo é superior quando comparada à temperatura na mesma posição correspondente na Figura 8a. Esta temperatura na face oposta é muitas vezes empregada como critério restritivo de projeto da proteção térmica, como será discutido mais adiante.

5.1.1 Aplicação e Validação para Reentrada Atmosférica Típica

Uma aplicação típica de reentrada atmosférica planetária foi escolhida para validação do código aqui construído, permitindo comparações com os resultados obtidos pelo código TPS-Nose [18] o qual foi construído utilizando a formulação apresentada em [1]. As altas temperaturas apresentadas na Figura 9 não são obtidas em trajetórias sub-orbitais, onde a altitude máxima atingida pelo veículo é bem inferior.

Em uma reentrada balística típica tem-se como evolução temporal do fluxo de calor adimensional um gráfico como o apresentado na Figura 9 [10]. Foram então realizadas as implementações sem e com a utilização da técnica do balanço integral para o fluxo de calor descrito na Figura 9.

As propriedades utilizadas para este caso foram relativas ao teflon [10], dadas por:

$$L = 0.0065 \text{ m}; \quad k = 0.22 \frac{\text{W}}{\text{mK}}; \quad \rho = 1922 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad c_p = 1256 \frac{\text{J}}{\text{kgK}};$$
$$H_{ab} = 2.326 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}; \quad T_{ab}^* = 833 \text{ K}; \quad T_0 = 416 \text{ K}$$

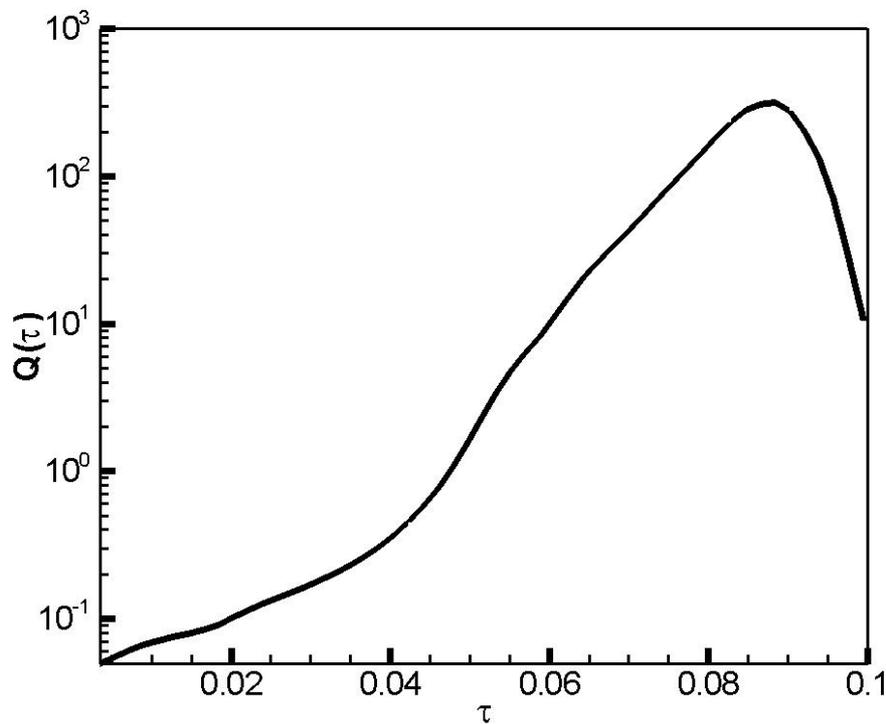


Figura 9 – Fluxo de calor adimensional para reentrada atmosférica balística [10]

As Tabela 9 e 10 ilustram a convergência obtida para a posição da frente de recessão do material durante o processo de ablação, onde foi variada a ordem de

truncamento da expansão da solução para o campo de temperaturas. As ordens de truncamento são diferentes devido à convergência do algoritmo sem balanço integral ser muito lenta, necessitando de cerca de $N = 90$ termos para ser obtida uma precisão de pelo menos 2 dígitos significativos.

Tabela 9 – Convergência da solução pela GITT para a posição do contorno móvel $S(\tau)$ para reentrada atmosférica típica (sem Balanço Integral)

Tempo	Ordem de Truncamento N				
τ	50	60	70	80	90
0.065810	0.010257	0.010247	0.010240	0.010235	0.010231
0.069618	0.031775	0.031743	0.031721	0.031704	0.031691
0.073427	0.070033	0.069959	0.069907	0.069867	0.069836
0.077235	0.135136	0.134971	0.134853	0.134764	0.134694
0.081044	0.244607	0.244221	0.243942	0.243732	0.243568
0.084852	0.418244	0.417357	0.416717	0.416233	0.415855
0.088661	0.638685	0.637163	0.636062	0.635230	0.634579
0.092469	0.822315	0.820501	0.819191	0.818199	0.817423
0.096278	0.901669	0.899815	0.898475	0.897462	0.896669

Utilizando a técnica de balanço integral, os resultados foram obtidos com um número de termos bem inferior nas expansões. A Tabela 9 apresenta flutuações ainda no 3º dígito significativo para $N = 90$ enquanto que para o caso com balanço integral são verificadas flutuações no 6º dígito para $N = 30$, oferecendo pelo menos 5 dígitos totalmente convergidos.

Tabela 10 – Convergência da solução pela GITT para a posição do contorno móvel $S(\tau)$ para reentrada atmosférica típica (com Balanço Integral)

Tempo	Ordem de Truncamento N				
τ	10	20	30	40	50
0.065810	0.010325	0.010195	0.010187	0.010188	0.010189
0.069618	0.031696	0.031581	0.031575	0.031575	0.031576
0.073427	0.069682	0.069582	0.069577	0.069578	0.069579
0.077235	0.134223	0.134127	0.134122	0.134123	0.134125
0.081044	0.242354	0.242233	0.242226	0.242226	0.242227
0.084852	0.412942	0.412774	0.412761	0.412760	0.412761
0.088661	0.629433	0.629267	0.629254	0.629253	0.629253
0.092469	0.811228	0.811079	0.811068	0.811067	0.811068
0.096278	0.890326	0.890182	0.890172	0.890171	0.890172

Pelas Tabela 9 e 10 é confirmado, indubitavelmente, um melhor comportamento na convergência dos resultados a partir do uso do balanço integral, o qual já apresentou convergência de pelo menos 5 dígitos significativos para ordens de truncamento a partir de 30 até 50 termos nas expansões.

Na Figura 10 apresenta-se a comparação gráfica dos resultados obtidos por RUPERTI JR. e COTTA [9] com os resultados via GITT apresentados nas Tabela 9 e 10.

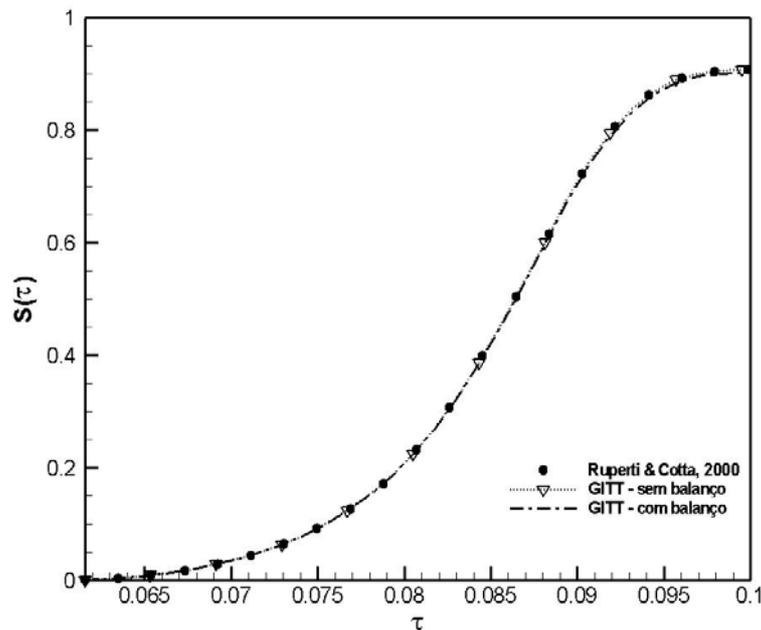


Figura 10 – Comparação da posição da frente de ablação obtida por CIEA [9] e GITT com e sem balanço integral

Foram utilizados 50 autovalores para o caso com balanço integral e 120 autovalores para o caso sem balanço integral nas curvas da Figura 10. Observa-se que as linhas são praticamente coincidentes entre si, bem como com os resultados de RUPERTI JR. e COTTA [9]. É importante que seja lembrado que foram escolhidos os resultados reportados com $N = 400$ termos na expansão de autofunções do trabalho apresentado em [9], aqui usados como resultados de referência.

5.2 Ablação sem Pirólise: Meio Formado por Duas Camadas

Nesta seção são realizadas comparações entre os resultados obtidos no presente estudo, considerando a influência da camada estrutural no modelo matemático através

da concentração de parâmetros nessa camada, e os resultados obtidos por RUPERTI JR. e COTTA [2], que também utilizaram a GITT, porém, considerando uma formulação multicamadas. Outra comparação é realizada entre os resultados de DINIZ *et al.* [1], e por conseguinte do modelo da seção anterior, e os obtidos no presente estudo com o modelo de duas camadas. Cabe aqui salientar que os resultados de DINIZ *et al.* [1] e da seção anterior foram obtidos considerando-se apenas a camada ablativa. O propósito desta comparação é mostrar a influência da camada estrutural no processo de ablação.

Para este modelo foram utilizados os seguintes dados na simulação [2]:

$$\text{Teflon: } L_1 = 2.54 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad k_1 = 0.22 \frac{\text{W}}{\text{mK}}; \quad \rho_1 = 1922 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad c_{P,1} = 1256 \frac{\text{J}}{\text{kgK}};$$

$$H_{\text{ab}} = 2.326 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}; \quad T_{\text{ab}}^* = 833 \text{ K}; \quad q_w = 2838 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Alumínio: } L_2 = 2.54 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad k_2 = 156 \frac{\text{W}}{\text{mK}}; \quad \rho_2 = 3204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad c_{P,2} = 1047 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

A Figura 11 apresenta a boa concordância entre os resultados obtidos aplicando-se parâmetros concentrados na camada estrutural e aqueles apresentados em RUPERTI JR. e COTTA [2], para o fluxo de calor rejeitado na parede do material ablativo, considerando-se diferentes ordens de truncamento da expansão para a temperatura ($N = 5, 10, 20$ e 40).

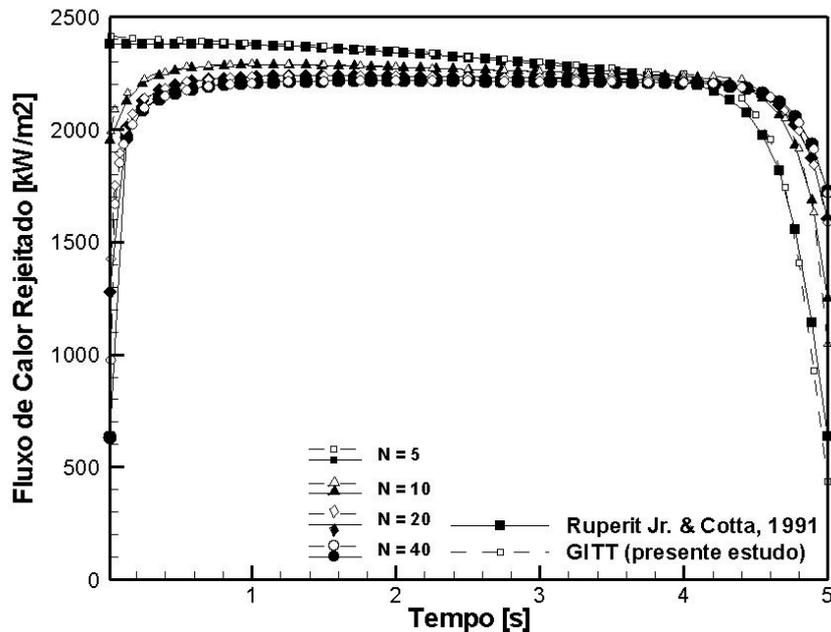


Figura 11 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície

Pode-se observar que a solução proposta reproduz o comportamento da solução

apresentada em RUPERTI JR. e COTTA [2] para o modelo local completo de duas camadas, porém com um custo computacional reduzido.

A Figura 12 abaixo apresenta a comparação do fluxo de calor rejeitado na superfície obtidos por RUPERTI JR. e COTTA [2], BLACKWELL [25] e no presente estudo considerando balanço integral.

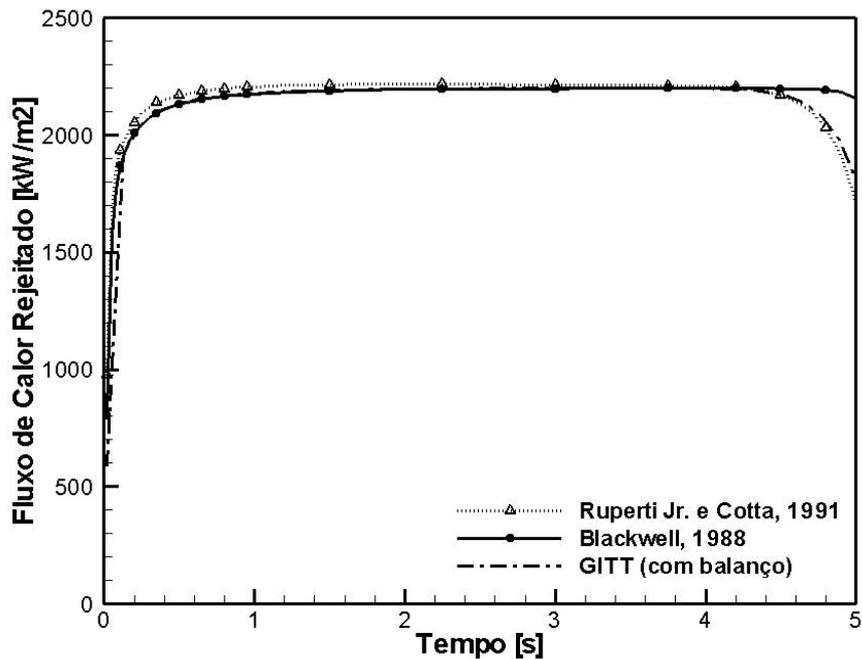


Figura 12 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície

Foram utilizados $N=40$ termos na expansão da temperatura tanto nos resultados de RUPERTI JR. e COTTA [2], quanto para a solução via GITT com balanço integral do presente modelo. É possível observar na Figura 12 que ambos os resultados da GITT concordam com os resultados de BLACKWELL [25] até aproximadamente 4.2s, quando a segunda camada passa a exercer influência no processo ablativo, ocasionando a redução do fluxo de calor rejeitado na superfície. A partir deste instante os resultados passam a apresentar concordância apenas com aqueles apresentados por RUPERTI JR. e COTTA [2]. Acredita-se que a diferença obtida por BLACKWELL [25] ocorreu devido ao método utilizado pelo autor para considerar o movimento da fronteira, o qual consistiu em retirar elementos da malha para simular o movimento da fronteira.

As Tabelas 11 e 12 apresentam a convergência da presente solução para a fronteira móvel, sem e com balanço integral, para $N = 5, 10, 20$ e 40 . Como o objetivo

da presente aproximação é o de prover resultados suficientemente precisos, porém obtidos com um baixo custo computacional, nos quais uma convergência de 2 ou 3 dígitos significativos pode ser considerada satisfatória, optou-se por não estender a ordem de truncamento nos resultados apresentados.

Tabela 11 – Convergência da solução por GITT para a posição adimensional do contorno móvel $S(\tau)$ para o modelo de duas camadas (sem Balanço Integral)

Tempo	Ordem de Truncamento N			
τ	5	10	20	40
.002825	.038738	.034059	.030822	.029526
.014126	.206314	.193586	.185939	.182306
.028252	.414268	.394806	.383138	.377363
.042377	.618485	.594457	.579884	.572561
.056503	.817203	.792319	.775729	.767337
.070629	.978277	.972517	.960549	.953590

Observa-se, na Tabela 11, flutuações entre o 2º e o 3º dígito significativo nos valores apresentados com relação ao resultado obtido com $N=40$, sem utilizar a técnica de balanço integral.

Na Tabela 12 são apresentados os resultados obtidos aplicando balanço integral. É possível observar, claramente, que a convergência foi bem melhor neste caso. Observa-se que aplicando a técnica do balanço integral, Tabela 12, foi possível obter uma convergência da posição do contorno de até 3 dígitos significativos. Para a menor ordem de truncamento analisada, $N=5$, pode ser observada uma convergência de 2 dígitos significativos para $\tau > 0.02825$.

Tabela 12 – Convergência da solução por GITT para a posição adimensional do contorno móvel $S(\tau)$ para o modelo de duas camadas (com Balanço Integral)

Tempo	Ordem de Truncamento N			
τ	5	10	20	40
.002825	.034274	.030947	.029180	.028729
.014126	.185811	.181330	.179567	.179116
.028252	.378550	.374183	.372424	.371971
.042377	.571982	.567926	.566100	.565609
.056503	.764804	.762218	.760067	.759424
.070629	.948234	.949670	.947457	.946738

A Figura 13 apresenta a comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície entre as soluções sem e com balanço integral para duas ordens de truncamento, $N = 5$ e 40 .

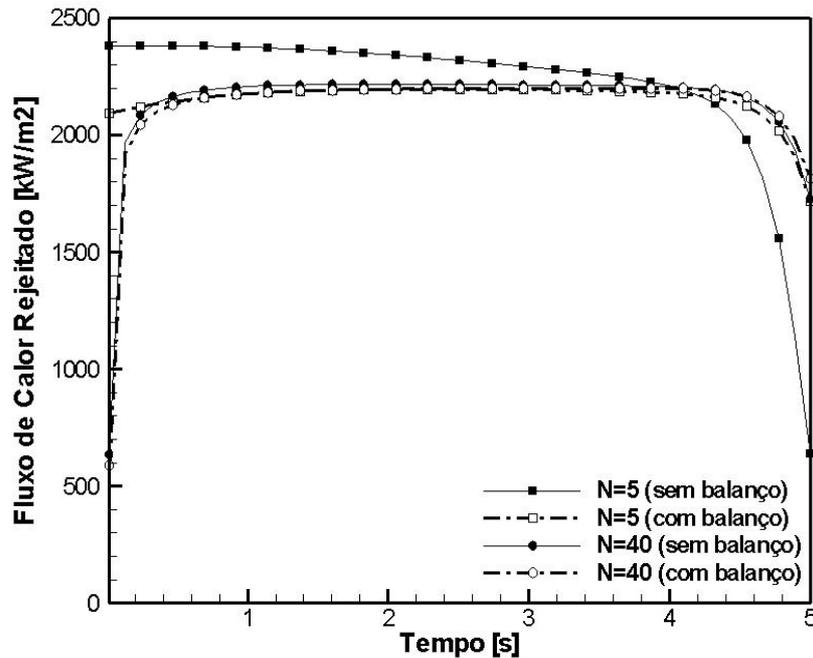


Figura 13 – Comparação da convergência do fluxo de calor rejeitado na superfície para $N = 5$ e 40 sem e com balanço integral

Tal como observado na Tabela 12, a Figura 13 mostra claramente que a utilização de técnica do balanço integral é sem dúvida uma otimização representativa no algoritmo de solução. Pode-se observar na Figura 13 que mesmo os resultados obtidos pela solução com balanço integral com apenas $N = 5$ estão em boa concordância com os resultados obtidos sem balanço integral com $N = 40$ para tempos superiores a $0.3s$.

A Figura 14 mostra os perfis de temperatura durante o período de ablação sem e com balanço integral, para o caso apresentado por RUPERTI JR. e COTTA [2], nos tempos dimensionais $t = 0, 2s, 1s, 2s, 3s, 4s$ e $5s$.

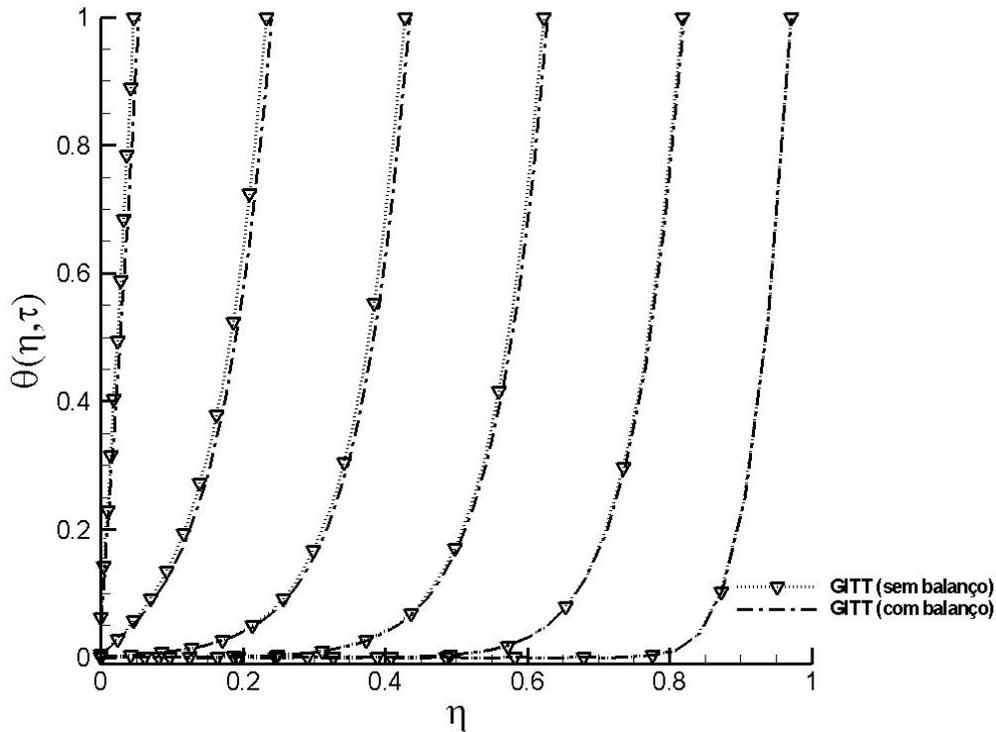


Figura 14 – Distribuição de temperatura na fronteira móvel via GITT sem e com balanço integral para o modelo de duas camadas

Observa-se da Figura 14 que no início do processo os resultados obtidos pelas duas soluções são coincidentes na escala gráfica. As diferenças mais perceptíveis ocorrem quase no final do processo de ablação, quando a espessura da proteção térmica já está bastante reduzida.

A seguir, comparando os resultados obtidos para o modelo com duas camadas com o modelo de uma camada apresentado por DINIZ *et al.* [1] e também utilizado na seção anterior no presente trabalho, a Figura 15 apresenta a distribuição de temperatura para diferentes valores de τ durante o período de pré-ablação, onde o fluxo de calor prescrito na parede é dado por $Q(\tau) = 10\tau$. Observa-se da Figura 15 que a temperatura na face oposta ao fluxo de calor prescrito apresenta valores próximos de zero, inferiores àqueles anteriormente obtidos. Comparando com os resultados apresentados na Figura 8a, nota-se que existe uma diferença significativa entre os resultados no que diz respeito ao perfil de temperatura em $\eta = 1$. Pode-se ainda observar que o ponto de início do período ablativo é muito próximo àquele apresentado na Figura 8a, concordando em 3 dígitos significativos ($\tau_{ab} = 0.260$).

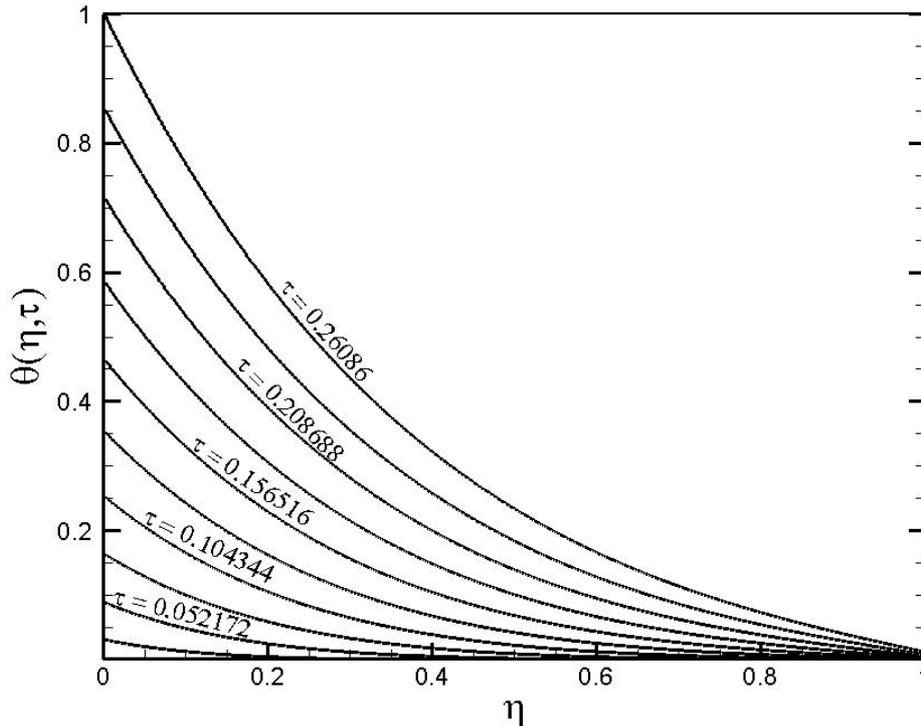


Figura 15 – Distribuição de temperatura para o modelo com duas camadas com fluxo de calor $Q(\tau) = 10\tau$

A Tabela 13 apresenta a convergência dos resultados obtidos na simulação da posição do contorno móvel, quando considerada a influência da camada estrutural na distribuição de temperatura, sem aplicação da técnica de aceleração de convergência. Foram verificadas flutuações no 4º dígito significativo com $N = 100$ oferecendo, então, uma convergência de 3 dígitos significativos para a maior ordem de truncamento aqui adotada.

A Tabela 14 apresenta a convergência dos resultados obtidos na simulação da posição do contorno ablativo, agora considerando a técnica de aceleração de convergência, onde é possível observar uma convergência de 3 dígitos significativos já com $N = 20$, quando aplicada a técnica de balanço integral. Comparando os resultados das Tabela 13 e 14 é evidente o melhor desempenho do algoritmo quando utilizada a aceleração de convergência. Enquanto os resultados com balanço integral já oferecem 3 dígitos totalmente convergidos com $N = 20$, na solução sem balanço integral, Tabela 13, são obtidos 2 dígitos de concordância somente com $N = 100$.

Tabela 13 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel $\eta_b(\tau)$ para

$$Q(\tau) = 10\tau \text{ (sem Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N				
$\tau - \tau_{ab}$	60	70	80	90	100
.315095	.046880	.045937	.045631	.045480	.045389
.368974	.128330	.126101	.125370	.125005	.124787
.422852	.232665	.229045	.227849	.227252	.226895
.476730	.354696	.349722	.348073	.347249	.346755
.530609	.490299	.484117	.482061	.481032	.480416
.584487	.634455	.627404	.625045	.623866	.623158
.638365	.775978	.768976	.766623	.765440	.764732
.692243	.886749	.881746	.880043	.879183	.878669
.746122	.946811	.943467	.942351	.941792	.941457
.800000	.989498	.986152	.985044	.984489	.984159

Tabela 14 – Convergência da posição adimensional do contorno móvel, $\eta_b(\tau)$, para

$$Q(\tau) = 10\tau \text{ (com Balanço Integral)}$$

Tempo	Ordem de Truncamento N				
$\tau - \tau_{ab}$	10	20	30	40	50
.315089	.044991	.045000	.045006	.045010	.045012
.368968	.123864	.123880	.123889	.123894	.123897
.422847	.225307	.225375	.225402	.225416	.225424
.476726	.344373	.344562	.344630	.344665	.344686
.530605	.477185	.477550	.477677	.477742	.477781
.584484	.619148	.619718	.619917	.620015	.620074
.638363	.760317	.761077	.761343	.761473	.761556
.692242	.875160	.875854	.876095	.876214	.876289
.746121	.939649	.939870	.939950	.939989	.940015
.800000	.983187	.982998	.982942	.982914	.982898

A Figura 16 apresenta uma comparação entre os resultados de DINIZ *et al.* [1] (modelo com apenas uma única camada) e o presente modelo considerando duas camadas aplicando a aproximação de Parâmetros Concentrados na camada estrutural. Observa-se que após ser iniciado o processo de ablação, existe um comportamento bem distinto entre as duas formulações. Observa-se ainda que a segunda camada atua com um capacitor térmico absorvendo parte do calor imposto à proteção térmica e assim

retardando o processo de ablação que ocorre na primeira camada, ao se chegar na fase final do período de ablação.

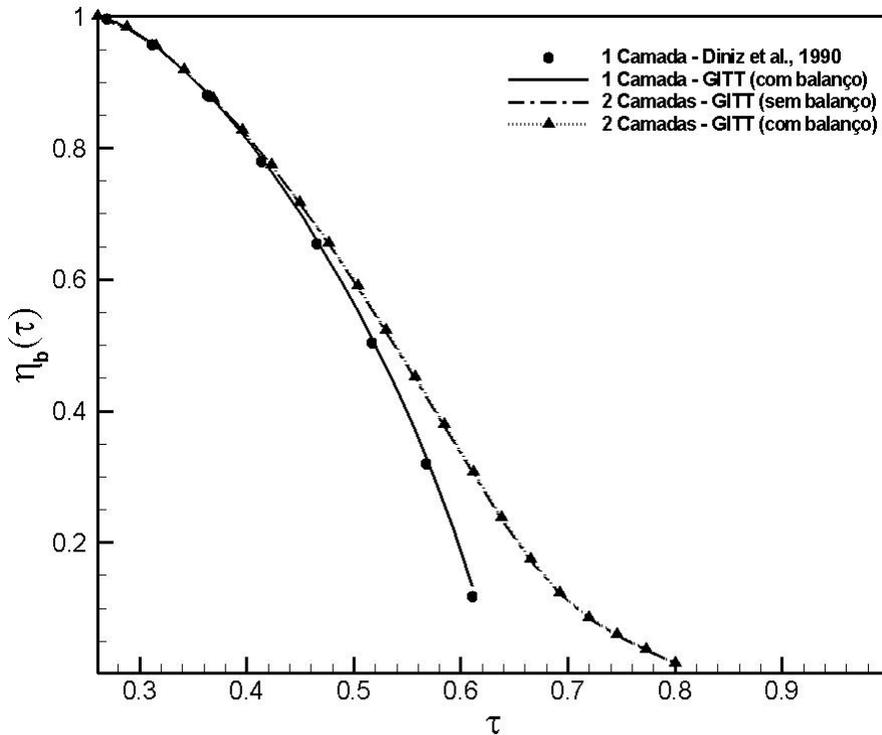


Figura 16 – Comparação do movimento da fronteira ablativa entre os modelos com uma e duas camadas

Na Figura 17 são apresentados os resultados para a velocidade de recessão, $\frac{dS(\tau)}{d\tau}$, para as formulações com apenas uma única camada (ablativa) e com duas camadas (ablativa + estrutural). Observa-se que a velocidade de recessão do material ablativo tem uma marcante redução após a fase inicial do processo ablativo, quando comparada com a formulação com uma única camada, o que confirma a influência da capacidade térmica da camada estrutural no modelo. Claramente, se a proteção térmica não sofrer uma remoção muito significativa, a diferença entre os dois modelos será pouco importante, o que já não acontece em situações quando se deseja otimizar a massa no projeto da proteção, resultando no consumo quase total do material ablativo.

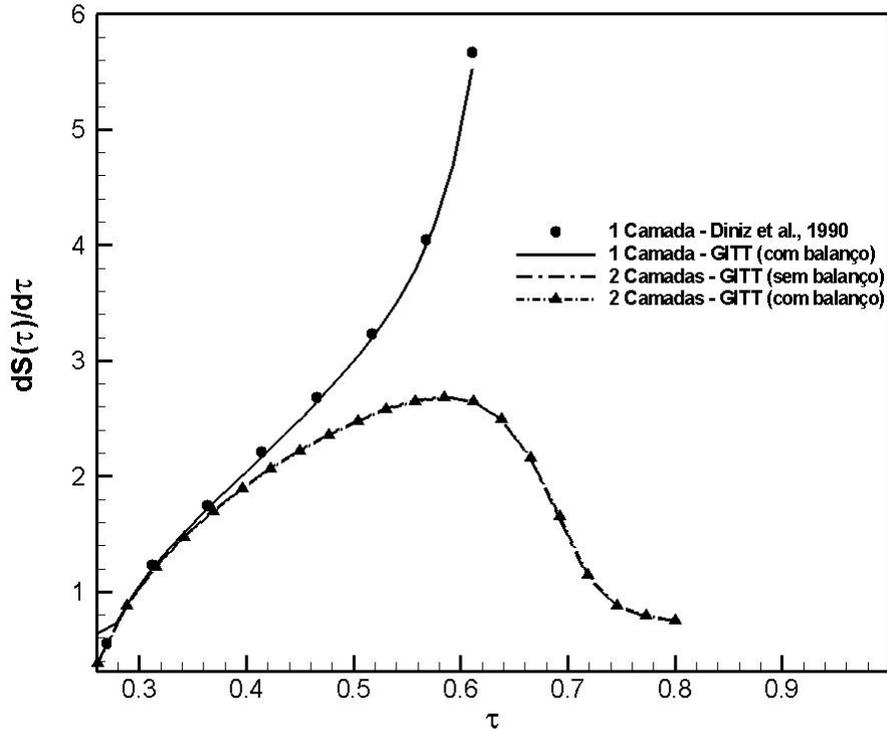


Figura 17 – Comparação da $\frac{dS[\tau]}{d\tau}$ entre os modelos com uma e duas camadas

5.3 Modelo com Temperatura de Pirólise Prescrita

Nesta seção são apresentadas comparações entre os resultados obtidos no presente estudo e os obtidos por HOGGE e GUERREKENS [59] para o problema de ablação considerando degradação do material ablativo. Os dados utilizados foram:

$$L = 0.4 \text{ cm}; \quad k = 2.13 \times 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{cm}^\circ\text{C}}; \quad (\rho c_p)_0 = 0.64 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3 \text{ }^\circ\text{C}}; \quad q_{w0} = 500 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

$$\rho_v H_p = 711 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}; \quad \rho_p H_{ab} = 4090 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}; \quad T_p^* = 2355 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_{ab}^* = 8367 \text{ }^\circ\text{C};$$

Utilizando os grupos adimensionais descritos abaixo, foi possível validar os resultados obtidos com a formulação de ablação com pirólise proposta, comparando com os resultados numéricos de HOGGE e GUERREKENS [59], em forma adimensional:

$$\theta(\eta, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_p^* - T_0}; \quad \eta = \frac{x}{L}; \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$Q_v(\tau) = \frac{Lq_w(t)}{k_v(T_p^* - T_0)}; \eta_p(\tau) = \frac{L - s_p(t)}{L}; \eta_{ab}(\tau) = \frac{L - s_{ab}(t)}{L}$$

A Figura 18 ilustra o comportamento das propriedades do material virgem até o material pirolizado, como apresentado em [59].

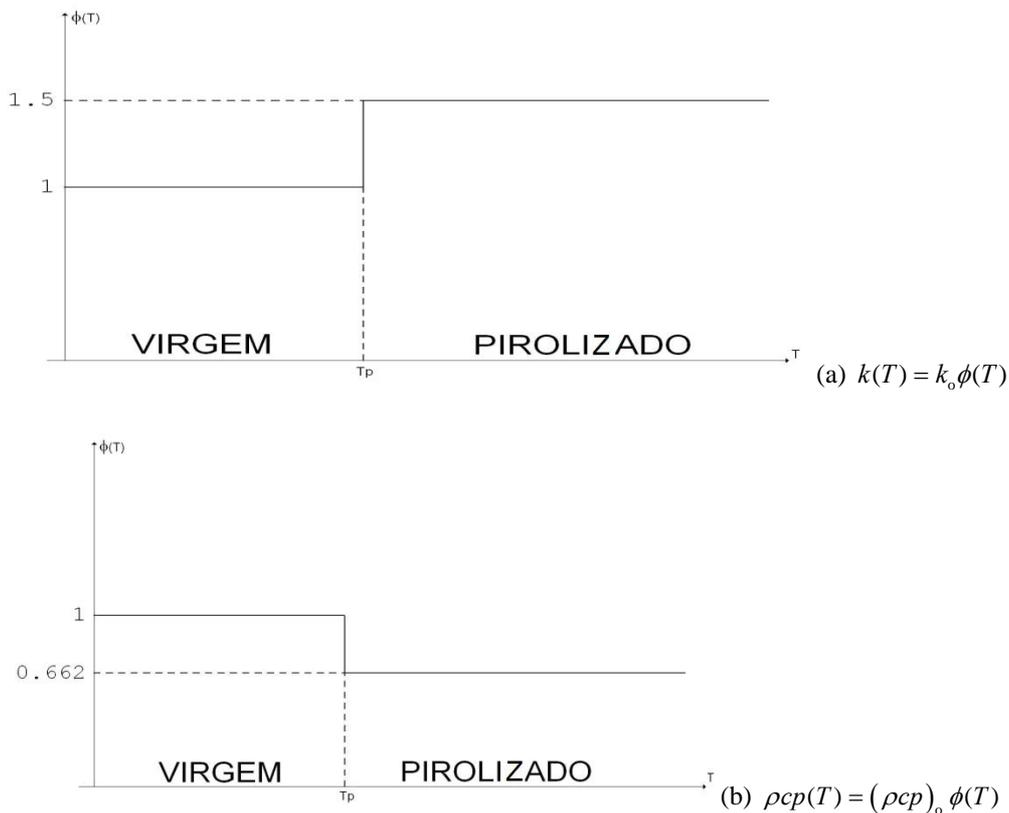


Figura 18 – Variação das propriedades termofísicas entre o material virgem e o pirolizado: (a) Condutividade térmica e (b) Capacidade térmica

A Tabela 15 ilustra o comportamento da convergência da solução GITT no contorno de pirólise, $s_p(t)$, durante o período de pirólise e pré-abloação, onde o tempo para início do processo de pirólise, $t_p = 0.012563$ s, foi encontrado. Foi escolhido esse parâmetro devido à importância para a aplicação física aqui tratada, apresentado para diferentes tempos ao longo do processo de pirólise, e para ordens de truncamento crescentes. Conclui-se a partir da Tabela 15 que a ordem de truncamento $N = 60$ já oferece uma convergência satisfatória, visto que já se encontra cerca de 5 dígitos significativos convergidos quando comparadas com ordens de truncamento menores.

A Figura 19 mostra o movimento do contorno, $\eta_p(\tau)$, e a taxa de recessão,

$\dot{\eta}_p(\tau)$, comparados com resultados de HOGGE e GUERREKENS [59], em forma adimensional. Na análise realizada desses resultados foi observado um desvio máximo de cerca de 7% para a posição do contorno $\eta_p(\tau)$ e 4% para $\dot{\eta}_p(\tau)$.

Tabela 15 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de pirólise, $s_p(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções

Tempo t	Ordem de Truncamento N				
	20	40	60	80	100
.045935	.393580	.393931	.393962	.393968	.393970
.079308	.387333	.387638	.387666	.387671	.387673
.112680	.381514	.381790	.381815	.381820	.381822
.146052	.376061	.376317	.376340	.376345	.376347
.179424	.370910	.371149	.371171	.371176	.371178
.212797	.366009	.366235	.366256	.366261	.366262
.246169	.361319	.361535	.361555	.361559	.361561
.279541	.356812	.357019	.357038	.357042	.357044
.312913	.352465	.352664	.352683	.352687	.352688
.346286	.348259	.348452	.348469	.348473	.348475

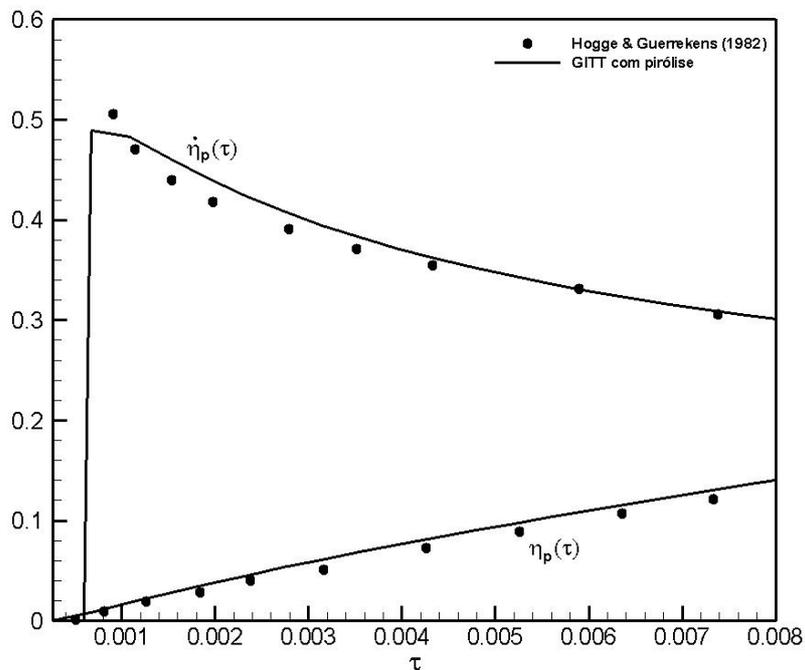


Figura 19 – Deslocamento e taxa de recessão adimensional do contorno de pirólise, $\eta_p(\tau)$ e $\dot{\eta}_p(\tau)$, durante o período de pirólise e pré-ablação

A Figura 20 mostra a evolução da temperatura média na camada de pirólise, $\theta_{avp}(\tau)$, a qual foi comparada com os resultados de HOGGE e GUERREKENS [59] em forma adimensional. Obteve-se apenas 1% de desvio relativo para $\theta_{avp}(\tau)$ com ordem de truncamento $N=100$ e 5 minutos de CPU para a solução do sistema de equações diferenciais acoplado.

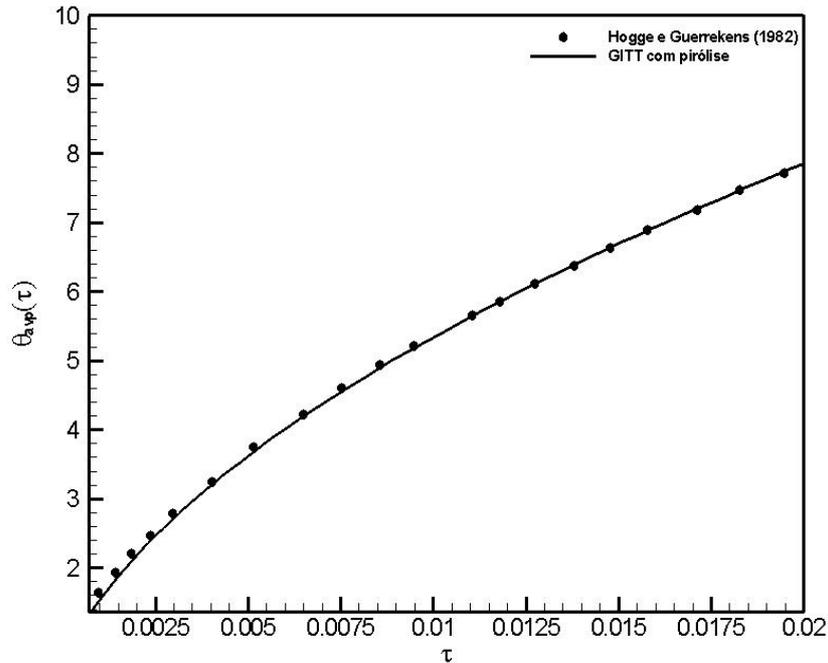


Figura 20 – Evolução da temperatura média, $\theta_{avp}(\tau)$, na camada de pirólise

Observa-se na Figura 19 que a solução para o movimento do contorno de pirólise possui uma boa aderência com os resultados de HOGGE e GUERREKENS [59], o que nos faz concluir que a ordem de truncamento máxima escolhida é satisfatória para o restante da simulação.

Na Figura 20 é observada a mesma tendência no perfil da curva gerada para a temperatura média da camada pirolizada, onde é encontrada uma excelente concordância entre os resultados da solução por GITT com os resultados de HOGGE e GUERREKENS [59] para o perfil de temperatura na camada em pirólise.

As Tabela 16 e 17 ilustram o comportamento da convergência da solução por GITT da posição dos contornos $s_p(t)$ e $s_{ab}(t)$ durante o período de pirólise e ablação, onde o tempo para início do processo de ablação, $t_{ab} = 0.34629$ s, foi encontrado. A fim de demonstrar a convergência da solução, foram escolhidos diferentes tempos ao longo

do processo de ablação e para ordens de truncamento crescentes. Conclui-se da Tabela 16 que a ordem de truncamento $N = 56$ já oferece uma convergência satisfatória no cálculo da posição do contorno $s_p(t)$, visto que já se encontra cerca de 5 dígitos significativos convergidos quando compara-se com ordens de truncamento menores. Na Tabela 17 pode ser verificada convergência com ordem de truncamento $N = 45$, no cálculo do contorno $s_{ab}(t)$, onde é possível encontrar 5 dígitos significativos totalmente convergidos quando compara-se com ordens de truncamento menores.

Tabela 16 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de pirólise, $s_p(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções

Tempo	Ordem de Truncamento N				
t	12	34	56	78	100
.346286	.348475	.348475	.348475	.348475	.348475
.378971	.344428	.344488	.344490	.344490	.344491
.411657	.340585	.340651	.340656	.340657	.340657
.444343	.336871	.336938	.336943	.336944	.336944
.477029	.333253	.333320	.333326	.333326	.333326
.509714	.329713	.329780	.329786	.329786	.329786
.542400	.326238	.326304	.326310	.326310	.326310
.575086	.322817	.322883	.322888	.322889	.322889
.607771	.319443	.319509	.319514	.319514	.319515
.640457	.316110	.316175	.316180	.316181	.316181
.673143	.312813	.312877	.312882	.312883	.312883

Tabela 17 – Convergência da solução por GITT para a posição do contorno de ablação, $s_{ab}(t)$, com diferentes ordens de truncamento para a expansão em autofunções

Tempo	Ordem de truncamento N				
t	12	34	56	78	100
.346286	.400000	.400000	.400000	.400000	.400000
.378971	.399824	.399820	.399820	.399820	.399820
.411657	.399353	.399346	.399346	.399346	.399346
.444343	.398652	.398646	.398646	.398646	.398646
.477029	.397766	.397762	.397763	.397763	.397763
.509714	.396729	.396726	.396727	.396727	.396727
.542400	.395562	.395562	.395563	.395563	.395563
.575086	.394284	.394287	.394288	.394288	.394288
.607771	.392910	.392914	.392916	.392916	.392916
.640457	.391449	.391456	.391458	.391458	.391458
.673143	.389913	.389921	.389923	.389923	.389923

A Figura 21 ilustra o movimento das fronteiras de pirólise e ablação desde o início do processo de pirólise até o final da análise, na forma adimensional. Foi utilizada a maior ordem de truncamento adotada, $N = 100$, para geração dessas curvas, tanto para a fronteira $\eta_p(\tau)$ como para a fronteira $\eta_{ab}(\tau)$. Na ilustração é possível observar que as curvas $\eta_p(\tau)$ e $\eta_{ab}(\tau)$ possuem boa aderência com os resultados de HOGGE e GUERREKENS [59], à exceção da fronteira de pirólise que tem um desvio notório entre as duas soluções próximas do final do período de análise. Entretanto, mesmo com essa diferença entre os resultados, o desvio relativo calculado foi de apenas 9% para $\eta_p(\tau)$ e de aproximadamente 7% para $\eta_{ab}(\tau)$.

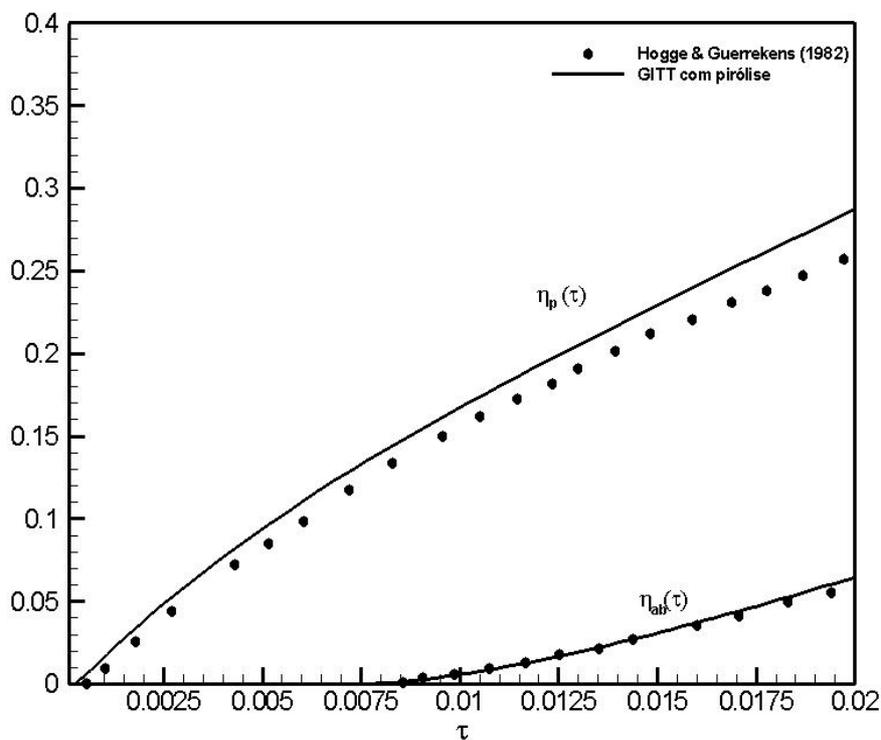


Figura 21 – Movimento dos contornos de pirólise e ablação, $\eta_p(\tau)$ e $\eta_{ab}(\tau)$, durante o período de pirólise e ablação

A Figura 22 apresenta as curvas referentes às taxas de recessão das fronteiras de pirólise e ablação, $\dot{\eta}_p(\tau)$ e $\dot{\eta}_{ab}(\tau)$, desde o início do processo de pirólise até o final da análise, na forma adimensional, bem como compara com os resultados da ref. [59]. Observa-se que quando o processo de ablação é iniciado existe uma leve alteração na curva, $\dot{\eta}_p(\tau)$, próximo a $\tau = 0.0075$, atenuando sua variação.

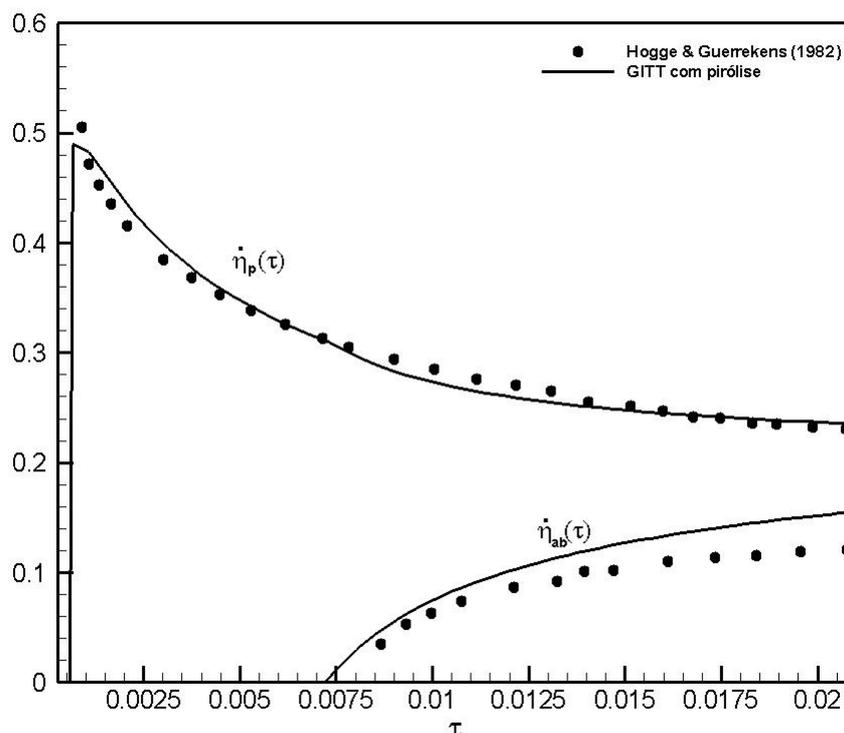


Figura 22 – Taxa de recessão das fronteiras de pirólise e ablação, $\dot{\eta}_p(\tau)$ e $\dot{\eta}_{ab}(\tau)$, durante o período de pirólise e ablação

Quando comparado com os resultados da literatura [59], observa-se que existe boa concordância entre as taxas de recessão da frente de pirólise, mesmo no final do período de análise. O desvio relativo calculado para $\dot{\eta}_p(\tau)$ foi de 3%. Um desvio mais notável entre os resultados é observado na curva de $\dot{\eta}_{ab}(\tau)$, mas ainda assim existe boa concordância entre os resultados tendo um desvio relativo de aproximadamente 2%.

A Figura 23 apresenta a convergência do fluxo de calor rejeitado na fronteira de pirólise durante o período onde só há degradação térmica e a ablação ainda não se iniciou. Foram escolhidas quatro ordens de truncamento da expansão em autofunções para demonstrar a convergência da solução por GITT. Observa-se a concordância em escala gráfica entre os resultados para $N = 80$ e 100 , e verifica-se o aumento significativo do calor rejeitado com o avanço da frente de pirólise.

A Figura 24 apresenta a convergência do fluxo de calor rejeitado na fronteira de pirólise durante o período de ablação. De novo, foram escolhidas quatro ordens de truncamento da expansão em autofunções para demonstrar a convergência da solução por GITT, observando-se convergência em escala gráfica mesmo para ordens de truncamento tão baixas quanto $N = 10$. Neste caso, verifica-se que o calor rejeitado na

fronteira de pirólise tem pouca variação ao longo do processo ablativo.

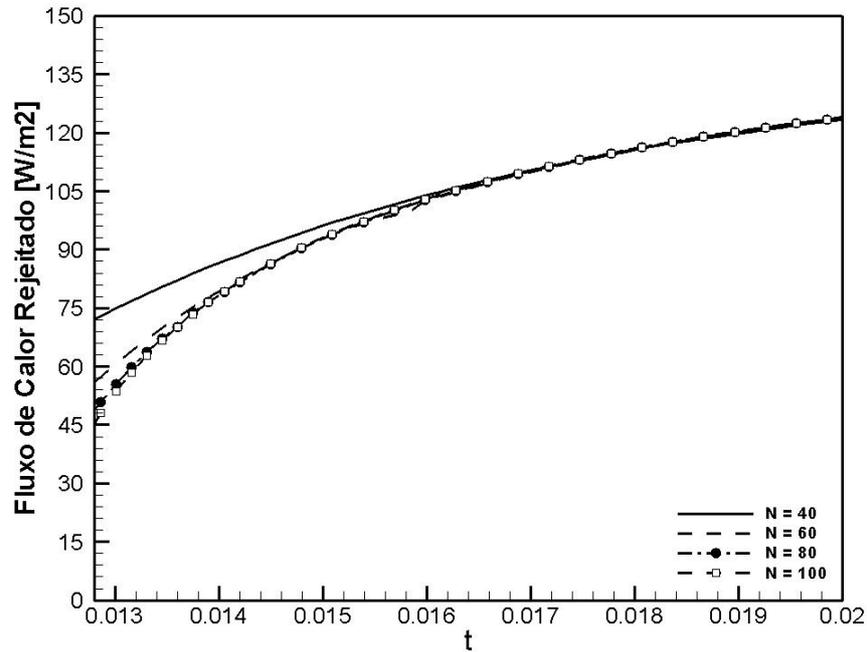


Figura 23 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de pirólise durante o período de degradação térmica sem ablação

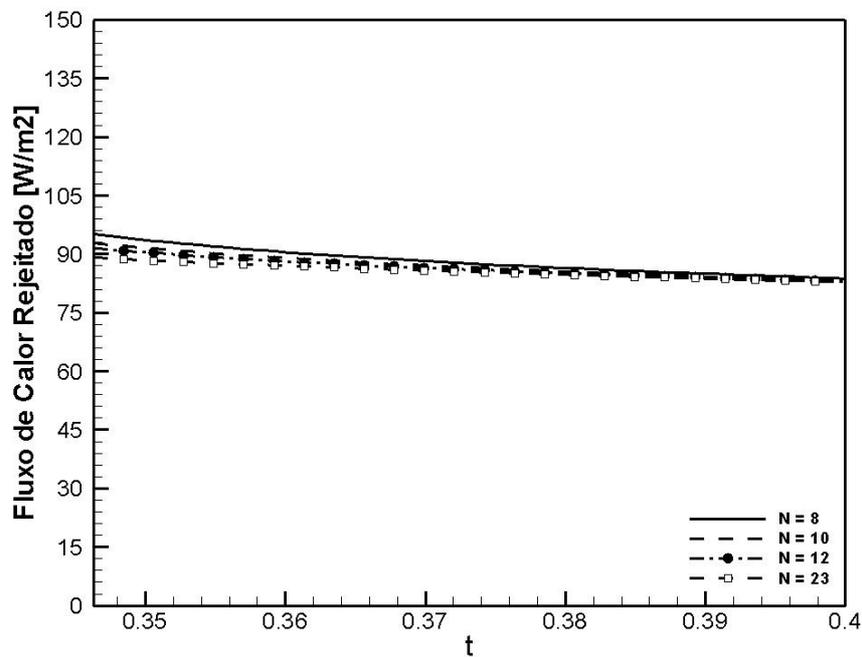


Figura 24 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de pirólise durante o período de ablação

A Figura 25 apresenta a convergência do fluxo de calor rejeitado na fronteira de ablação durante o período de recessão da proteção térmica. Foram escolhidas quatro

ordens de truncamento da expansão em autofunções (N) para demonstrar a convergência da solução por GITT, que se apresentou praticamente coincidente para as ordens adotadas.

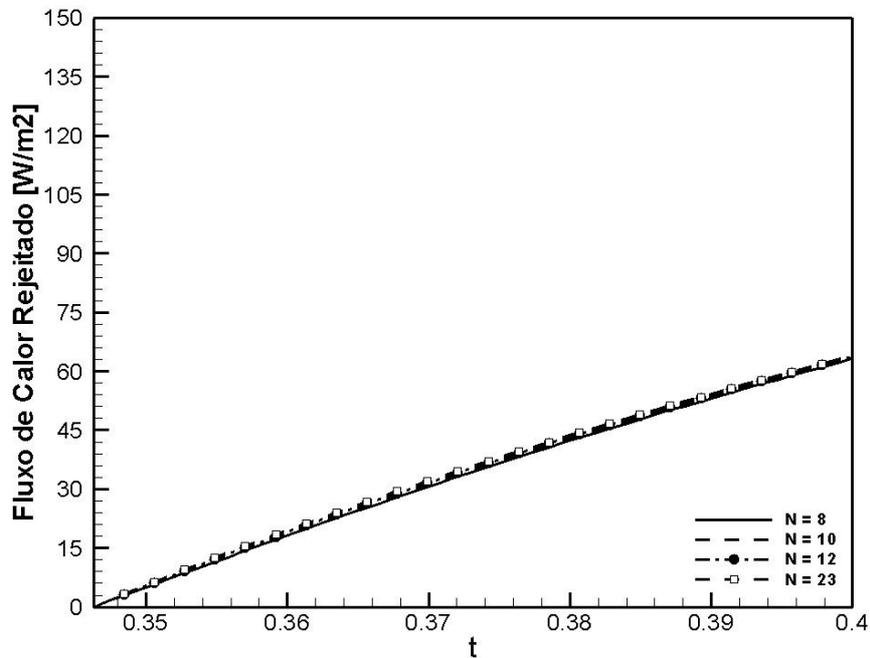


Figura 25 – Convergência do fluxo de calor rejeitado na frente de ablação durante o período de ablação

Foi realizada ainda outra análise comparativa da presente formulação considerando pirólise com temperatura prescrita e a formulação de ablação pura apresentada em seções anteriores. Para validar a formulação de pirólise apresentada nesta seção, assumiu-se o calor de pirólise nulo ($H_p = 0$) nas equações (3.31) e (3.36), ou seja, automaticamente recuperando a formulação de ablação pura. Os resultados são apresentados na Figura 26, onde se observa a concordância perfeita dos resultados para a posição e taxa de recessão da frente de ablação, empregando o presente algoritmo com pirólise, para calor de pirólise nulo, e o código anteriormente desenvolvido para ablação pura.

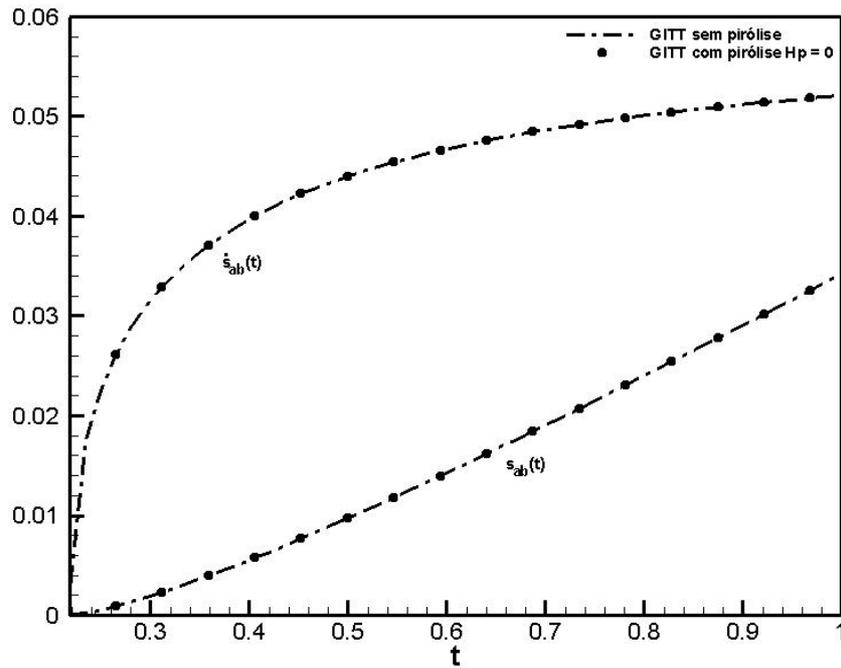


Figura 26 – Comparação entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise considerando $H_p = 0$

Nas Figura 27 e 28 são apresentadas comparações dos resultados com o modelo de pirólise utilizando temperatura de pirólise constante e o modelo de ablação pura. Na Figura 27 é apresentado o deslocamento da fronteira de ablação onde observa-se quão conservativo é o modelo de ablação pura, quando comparado com a formulação com temperatura de pirólise constante. Claramente o processo de pirólise retarda o início da ablação propriamente dita, em comparação com o modelo que ignora a ocorrência de pirólise e considera diretamente a ablação, evidentemente, para os casos onde o material de fato sofre degradação.

Na Figura 28 é realizada a mesma comparação, porém para a taxa de recessão da fronteira de ablação. Das duas figuras observa-se que a camada de pirólise não só interfere no início da ablação, mas também no comportamento da taxa de recessão do material ao longo do processo. Isso pode ser observado pelas maiores taxas de recessão atingidas no modelo com pirólise, apesar do retardamento do início do processo.

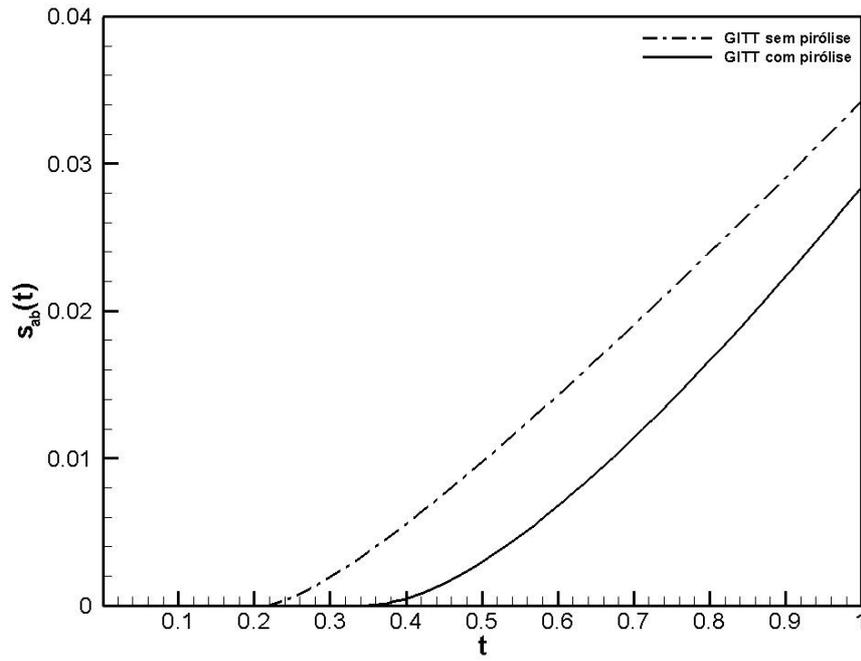


Figura 27 – Comparação do deslocamento do contorno ablativo $s_{ab}(t)$ entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise

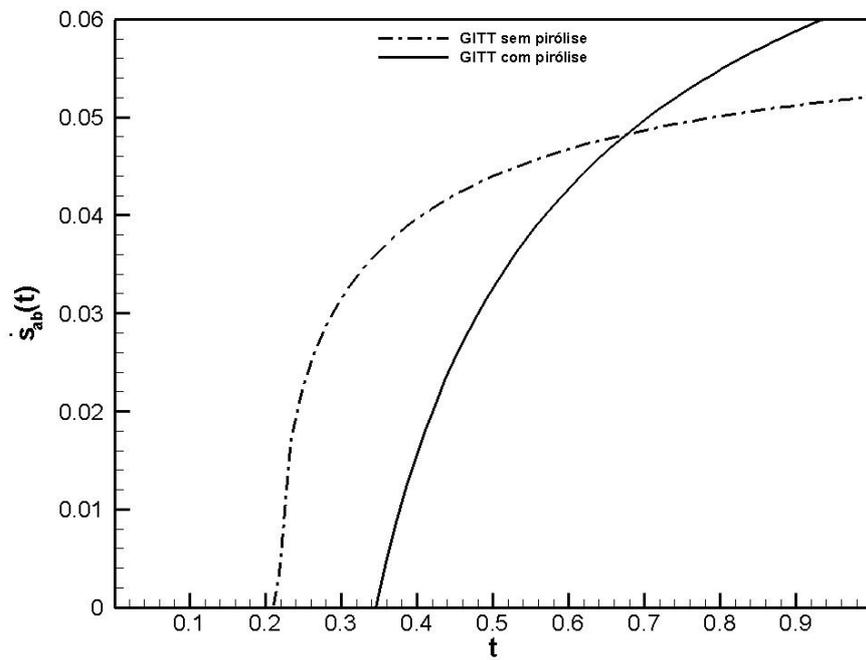


Figura 28 – Comparação da taxa de recessão da fronteira ablativa $\dot{s}_{ab}(t)$ entre as formulações de GITT sem pirólise e com pirólise

5.4 Modelo de Ablação com Pirólise considerando Degradação pela Equação de Arrhenius

Nesta sessão são apresentados os resultados obtidos a partir do modelo com degradação de material pela equação de Arrhenius, conforme formulado na sessão 4.4.

Para verificar os resultados considerando degradação de material foram realizadas duas análises comparativas utilizando para tal os resultados obtidos com os modelos de ablação pura e ablação com pirólise a temperatura prescrita.

Por fim são apresentados os resultados obtidos para a formulação mais completa considerando dois exemplos com materiais distintos.

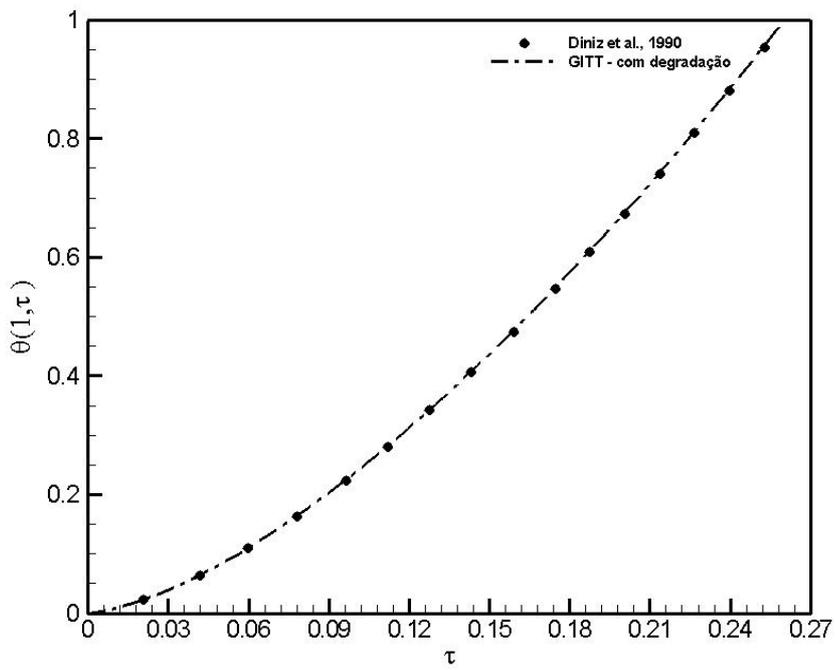
5.4.1 Validação com o Modelo de Ablação Pura

Para o modelo de ablação pura tomou-se o fluxo de calor $Q(\tau) = 10\tau$ utilizado por DINIZ *et al.* [1] onde os dados de material foram considerados em forma adimensional. Ainda, para o modelo com degradação de material foram considerados $N = 90$ termos para as expansões em autofunções para a temperatura e para a massa específica. Também foram assumidos nulos os valores de calor latente de pirólise (ΔH_p) e calor específico dos gases de pirólise (c_{pg}), a fim de simular o processo de ablação pura.

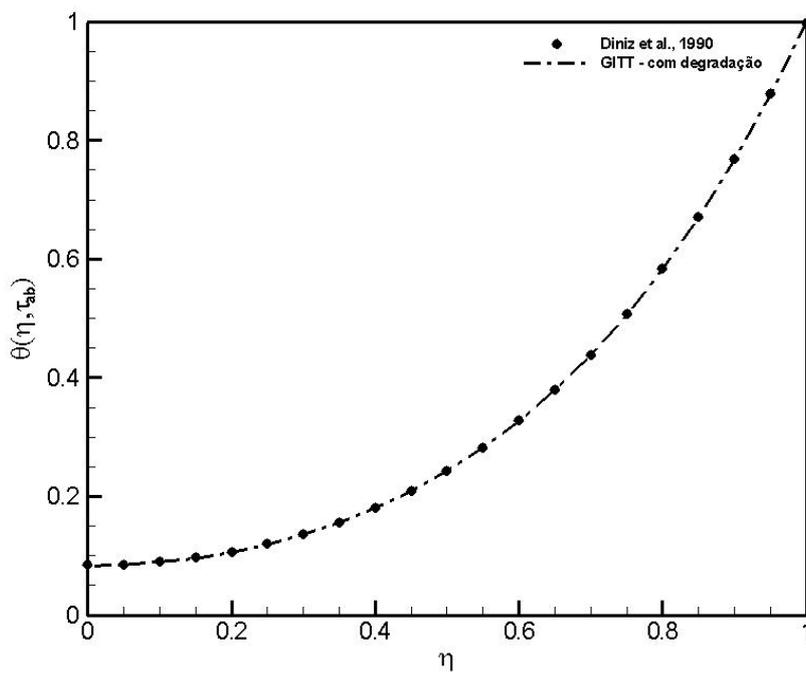
As Figura 29a,b apresentam os resultados obtidos, respectivamente, para os perfis de temperatura no tempo ($0 < \tau < \tau_{ab}$) e no espaço ($0 < \eta < 1$) durante o período pré-ablação, obtidos a partir do modelo de ablação com pirólise pela lei de Arrhenius, quando empregado para tratar o caso de ablação pura.

A Figura 30 apresenta os resultados obtidos para a distribuição de temperaturas, agora obtida durante o período de ablação, na mesma situação acima. De acordo com os resultados pode-se de novo observar que o perfil de temperatura obtido com o modelo com degradação de material com o calor latente de pirólise e o calor específico dos gases de pirólise considerados nulos, possui excelente concordância com o perfil de temperatura obtido com o modelo de ablação pura.

Conclui-se das figuras acima citadas que a modelagem com degradação de material recupera os resultados obtidos com o modelo de ablação pura, oferecendo uma verificação de sua implementação.



a) No tempo



b) No espaço

Figura 29 – Distribuição de temperatura para o modelo de ablação pura obtido pelo código de ablação com degradação pela lei de Arrhenius

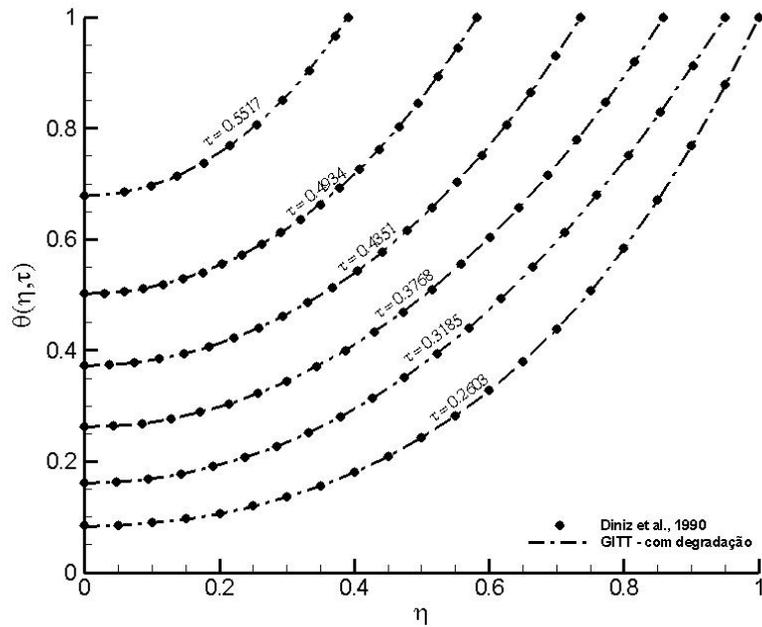


Figura 30 – Comparação da distribuição de temperatura dos modelos com degradação térmica e ablação pura durante o período de ablação

Outra verificação realizada com auxílio do modelo de ablação pura é apresentada na Figura 31, para a posição da fronteira durante a ablação do material para os dois modelos, repetindo a excelente concordância observada acima.

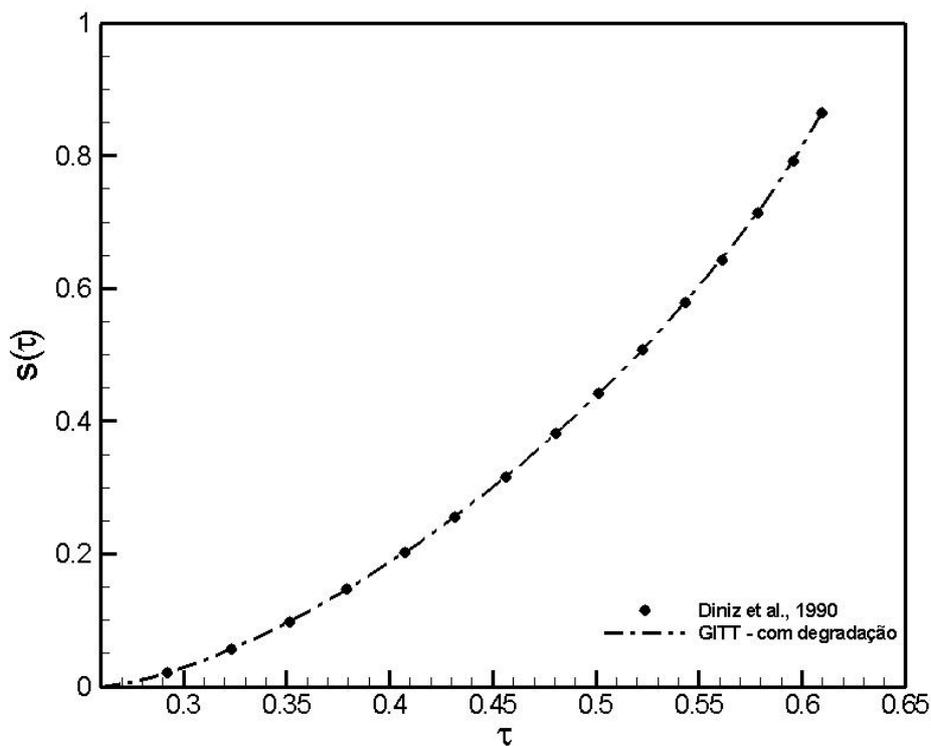


Figura 31 – Comparação do deslocamento adimensional da fronteira $s(\tau)$ para o modelo com degradação de material simulando a ablação pura

O segundo teste de validação com o modelo de ablação pura consistiu em comparar os resultados da presente formulação com os resultados obtidos por RUPERTI JR. e COTTA [9], onde foi aplicado um fluxo de calor típico de reentrada balística planetária. Para essa verificação as propriedades utilizadas foram relativas ao teflon, dadas por:

$$L = 0.0065 \text{ m}; \quad k = 0.22 \frac{\text{W}}{\text{mK}}; \quad \rho = 1922 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad c_p = 1256 \frac{\text{J}}{\text{kgK}};$$

$$H_{ab} = 2.326 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}; \quad T_{ab}^* = 833 \text{ K}; \quad T_0 = 416 \text{ K}$$

Neste teste também foram assumidos $N = 90$ termos para as expansões em autofunções para a temperatura e para a massa específica. Também foram considerados nulos os valores do calor latente de pirólise (ΔH_p) e do calor específico dos gases de pirólise (c_{pg}) a fim de simular o processo de ablação pura.

A Figura 32 apresenta o gráfico do fluxo de calor adimensional empregado no caso teste, típico de uma reentrada balística.

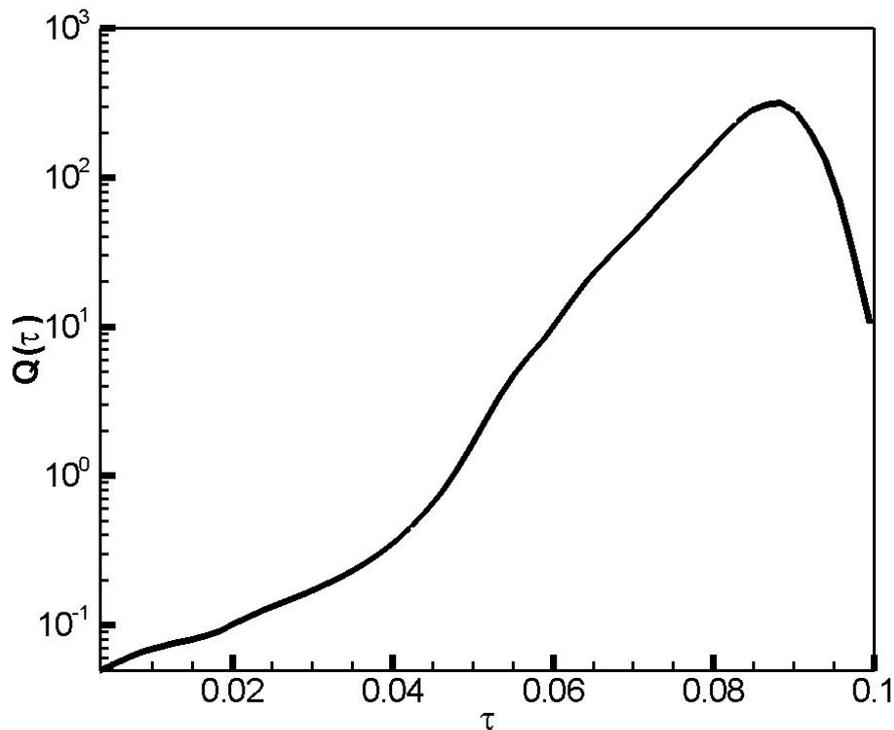
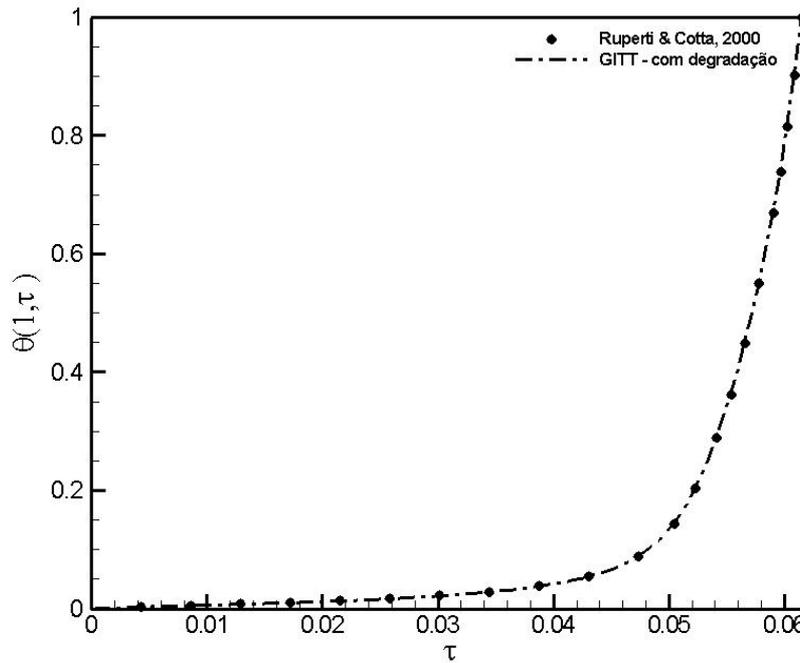
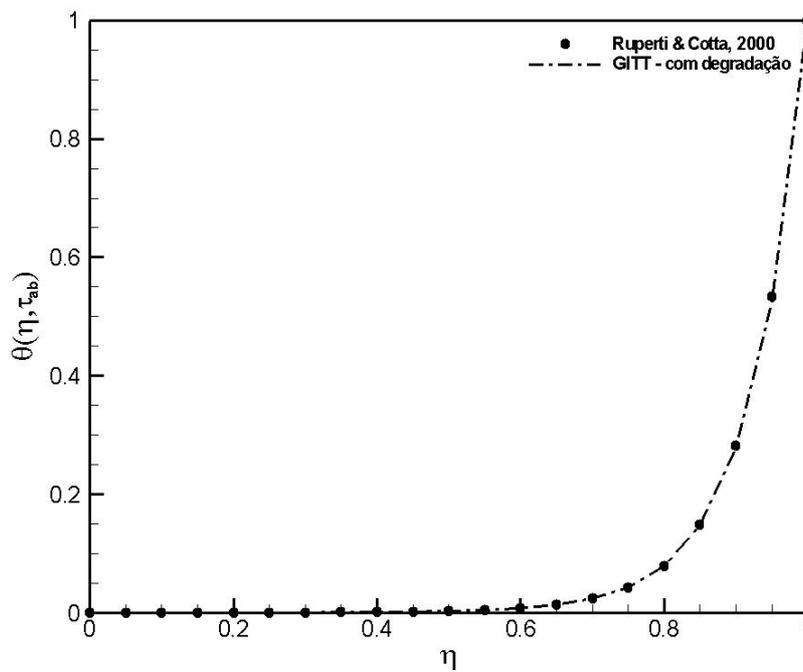


Figura 32 – Fluxo de calor adimensional em uma típica reentrada balística planetária

As Figura 33a,b apresentam os resultados em forma adimensional obtidos para os perfis de temperatura obtidos no intervalo de tempo ($0 < \tau < \tau_{ab}$) e no espaço ($0 < \eta < 1$) durante o período pré-ablação.



a) No tempo



b) No espaço

Figura 33 – Distribuições de temperatura para os dados de RUPERTI JR. e COTTA [2]

Conclui-se das Figura 33 que o código com degradação de material recupera os

resultados do modelo de ablação pura com fluxo de calor típico de reentrada atmosférica de forma bastante satisfatória.

É apresentado, na Figura 34, o deslocamento da fronteira ablativa obtido a partir dos dois modelos, empregando $N = 120$ termos nas expansões, bem como os perfis de temperatura durante o período ablativo, apresentados na Figura 35.

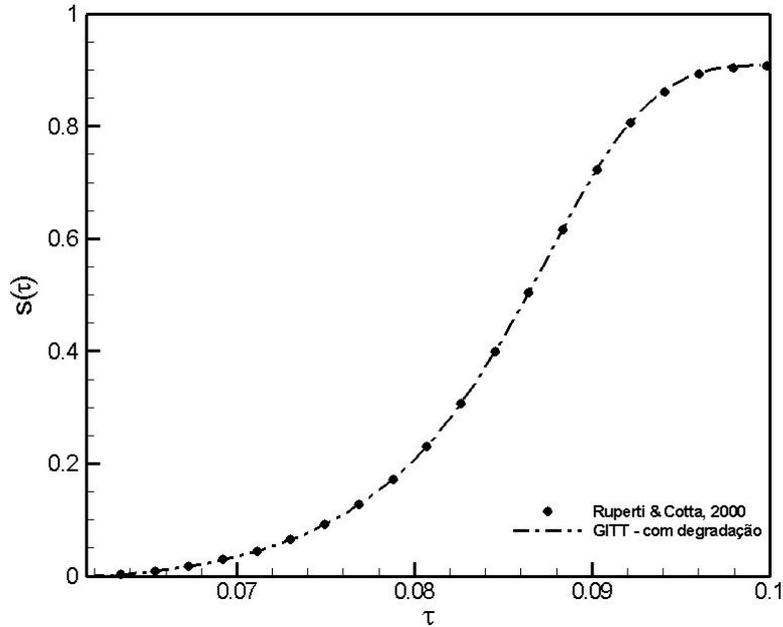


Figura 34 – Comparação dos deslocamentos da fronteira $s(\tau)$ obtidos com os dois modelos propostos

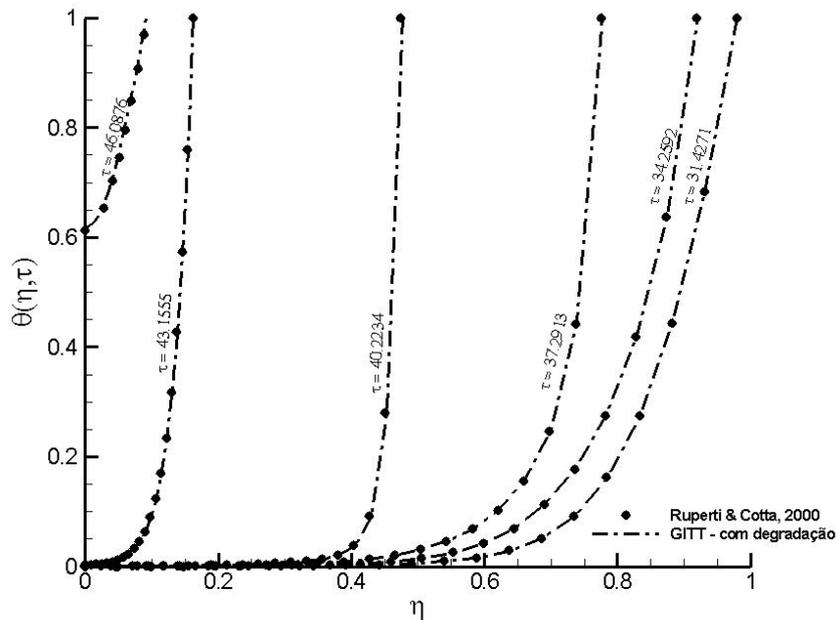


Figura 35 – Validação da distribuição de temperatura do modelo de ablação com degradação para o caso de ablação pura, RUPERTI JR. e COTTA [9]

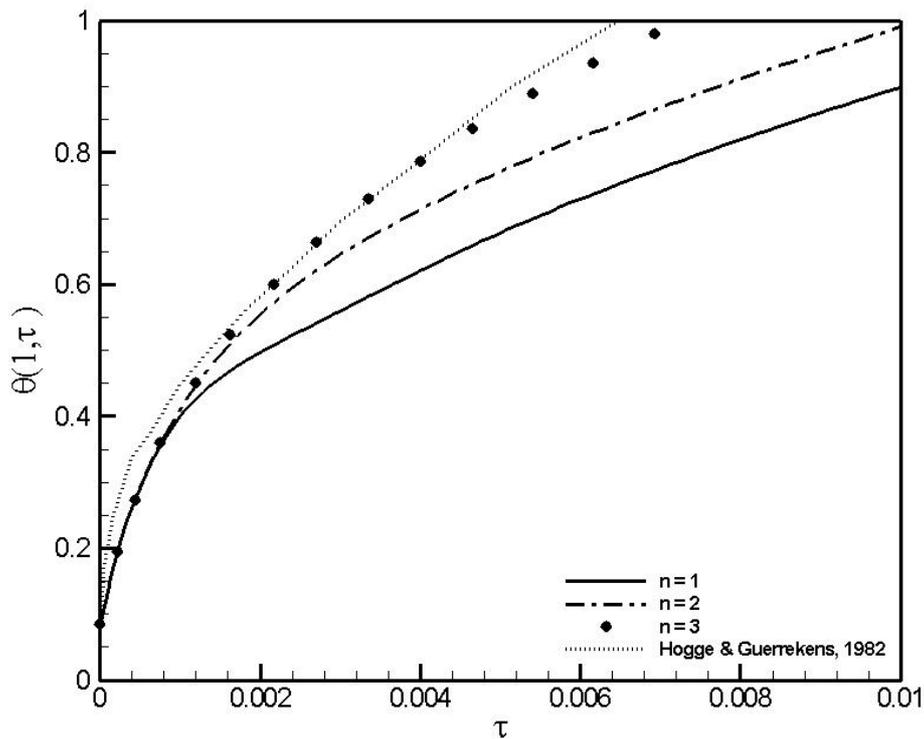
Os dois conjuntos de resultados acima, Figura 34 e 35, essencialmente reconfirmam a aderência do modelo e código mais gerais, ao caso mais simples de ablação pura, simplesmente empregando valores nulos para o calor latente de pirólise e para o calor específico dos gases de pirólise. Essa análise construiu a necessária confiança no algoritmo construído, para sua utilização nas aplicações que se seguem, tendo em vista sua maior complexidade em relação aos desenvolvimentos anteriores.

5.4.2 *Aplicação ao caso de HOGGE e GUERREKENS [59]*

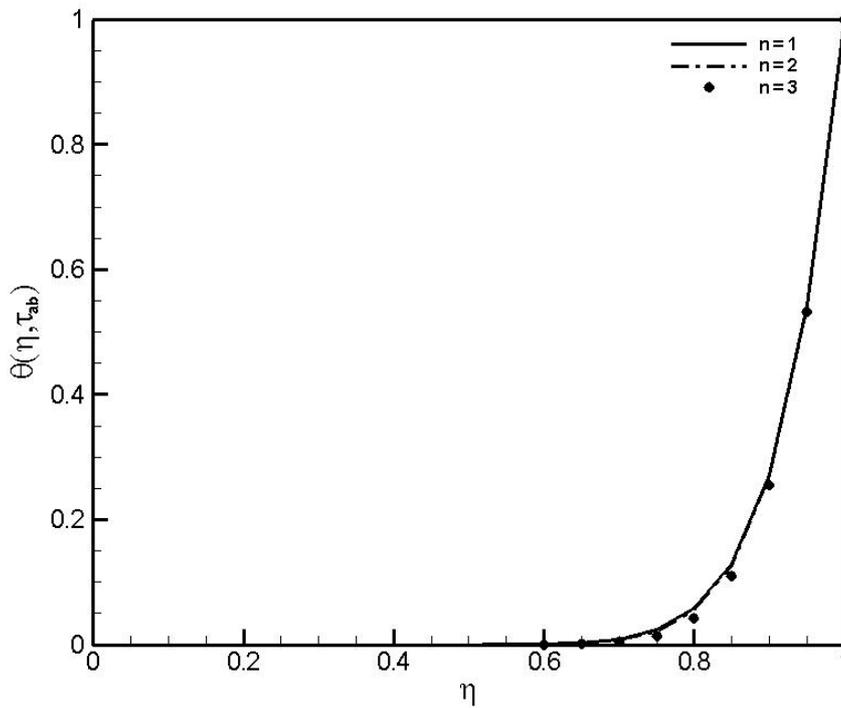
Para o primeiro teste foram utilizados os mesmo dados de propriedades do material utilizados por HOGGE e GUERREKENS [59] e, para o restante dos dados requeridos pelo modelo com degradação de material foram utilizados os dados abaixo referentes ao mesmo material (silica fenólica):

$$\Delta H_p = 430909; \kappa = 3 \times 10^2; c_{pg} = 1873.88$$

A Figura 36 apresenta o resultado obtido para o perfil de temperatura durante o período pré-ablação. Foram analisados ainda três ordens de ativação (n) visando-se encontrar uma melhor aderência com os resultados do modelo de pirólise simplificada proposto em [59]. Observa-se na Figura 36 que a ordem de ativação empregada no modelo é fator preponderante na avaliação da degradação do material. Ao aumentar-se a ordem de ativação do modelo de degradação, e, portanto diminuindo o processo de degradação térmica, o modelo torna-se mais conservativo, resultando em um aumento mais rápido da temperatura do material na superfície onde se inicia a ablação. Ainda cabe citar que quanto maior a ordem de ativação, a convergência do sistema requer um número maior de termos nas expansões. Verifica-se então que o modelo em [59] tem uma natureza bem conservativa, aproximando-se dos resultados obtidos a partir do presente modelo, para ordem de ativação $n = 3$.



a) No tempo



b) No espaço

Figura 36 – Distribuição de temperatura

A Tabela 18 apresenta a convergência da temperatura durante o período de pré-
 ablação, em relação ao número de regiões empregadas na intergração semi-analítica.
 Para avaliar a convergência da solução semi-analítica foram utilizados 4 valores
 máximos de subdivisão da região de integração (k_{max}), observando-se convergência

em pelo menos três dígitos significativos na faixa considerada. Vale dizer que o processo de integração semi-analítica viabiliza o algoritmo para solução do presente modelo, tendo em vista que a não-linearidade da equação de Arrhenius exigiria a integração numérica dos coeficientes no sistema transformado, elevando demasiadamente o custo da implementação computacional.

Tabela 18 – Convergência da solução por GITT para a expansão em autofunções da temperatura, com diferentes números de subdivisões espaciais para integração semi-analítica

Posição <i>x</i>	<i>k</i> max			
	40	50	60	70
0.20	273.93	273.93	273.94	273.93
0.22	275.62	275.66	275.66	275.66
0.24	281.63	281.70	281.72	281.70
0.26	299.25	299.38	299.43	299.39
0.28	346.44	346.71	346.82	346.77
0.30	464.56	464.95	465.18	465.10
0.32	736.15	736.52	736.95	736.85
0.34	1312.34	1312.51	1313.10	1313.00
0.36	2470.13	2469.47	2469.93	2469.76
0.38	4651.20	4650.35	4650.56	4650.50
0.40	8367.00	8367.00	8367.00	8367.00

A Figura 37 apresenta o gráfico de massa específica referente à degradação do material para o período pré-ablação nas tres ordens de ativação anteriormente consideradas. Da Figura 37 conclui-se que a degradação do material é muito reduzida quando a ordem de ativação é muito alta. Quando é diminuída a ordem de ativação, o material absorve mais calor ao degradar-se mais facilmente antes de iniciar a ablação.

A Tabela 19 apresenta a tabela de convergência para a variação da massa específica do material obtido segundo a equação de Arrhenius para quatro valores máximos de subdivisão da região de integração semi-analítica (*k* max). Pode-se ver que com uma subdivisão do domínio em 60 regiões já é obtida convergência de 5 dígitos significativos pelo menos.

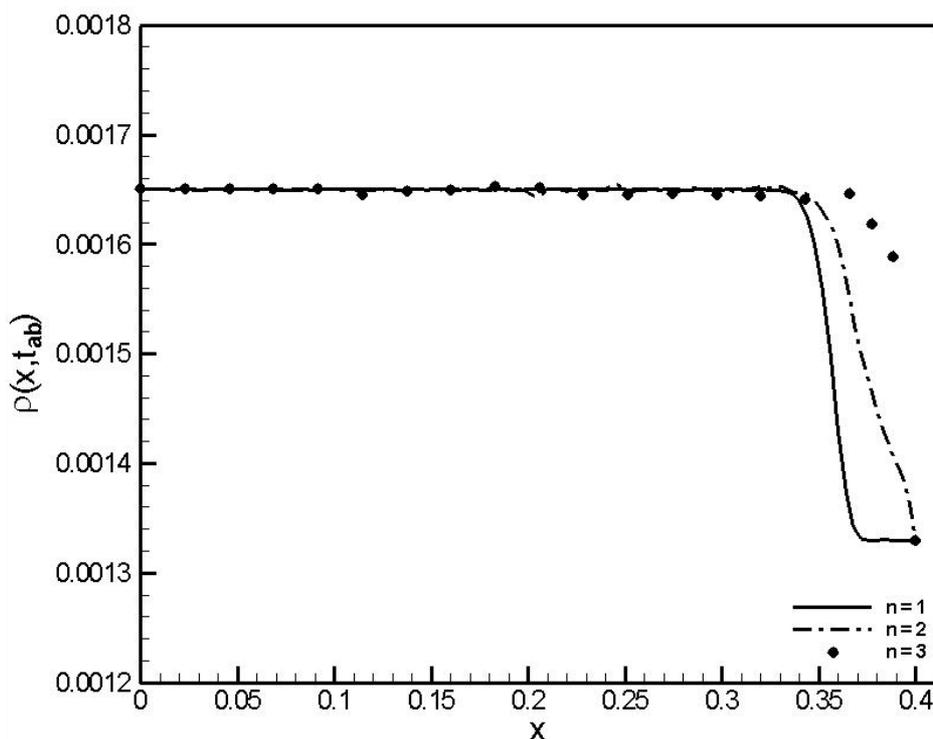


Figura 37 – Variação da massa específica resultante da degradação térmica no período de pré-ablação para tres ordens de ativação

Tabela 19 – Convergência da solução por GITT para a variação da massa específica segundo a equação de Arrhenius, com diferentes números de subdivisões do domínio espacial na integração semi-analítica

Posição	k max			
	40	50	60	70
0.30	0.001651	0.001650	0.001650	0.001650
0.31	0.001643	0.001644	0.001650	0.001650
0.32	0.001657	0.001658	0.001652	0.001651
0.33	0.001651	0.001650	0.001649	0.001649
0.34	0.001626	0.001627	0.001639	0.001640
0.35	0.001585	0.001591	0.001583	0.001582
0.36	0.001437	0.001436	0.001429	0.001430
0.37	0.001334	0.001312	0.001336	0.001335
0.38	0.001330	0.001364	0.001331	0.001331
0.39	0.001331	0.001305	0.001330	0.001330
0.40	0.001330	0.001330	0.001330	0.001330

Na Figura 38 tem-se o gráfico do fluxo de massa dos gases de pirólise obtido para as tres ordens de ativação. Em concordância com os resultados apresentados na Figura 37, a Figura 38 apresenta uma perda de massa devido aos gases de pirólise muito inferior para a ordem de ativação $n=3$ e, conforme n diminui, a perda de massa vai aumentando.

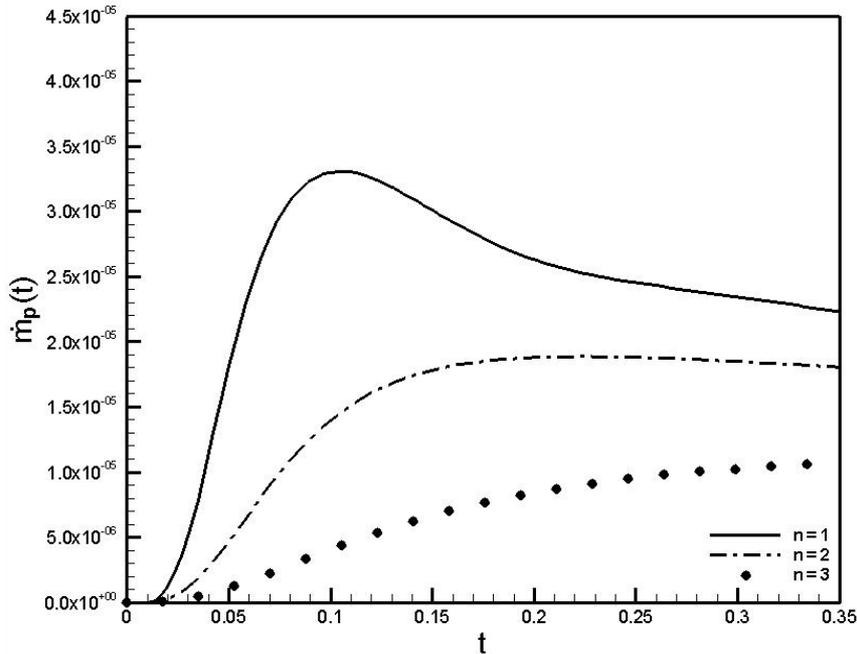


Figura 38 – Fluxo de massa dos gases de pirólise durante o período pré-abloação para as tres ordens de ativação

Na Tabela 20 é apresentada a convergência para o fluxo de massa dos gases de pirólise, obtido com ordem de ativação $n=1$, em relação ao número de regiões empregadas no procedimento de integração semi-analítica.

Tabela 20 – Convergência do fluxo de massa dos gases de pirólise, com diferentes números de subdivisões do dominio na integração semi-analítica

Tempo	k max			
	40	50	60	70
0.1	3.152E-05	3.362E-05	3.340E-05	3.301E-05
0.2	2.817E-05	2.658E-05	2.634E-05	2.630E-05
0.3	2.297E-05	2.318E-05	2.346E-05	2.344E-05
0.4	2.054E-05	2.153E-05	2.131E-05	2.129E-05
0.5	1.967E-05	1.966E-05	1.978E-05	1.978E-05
0.6	1.878E-05	1.857E-05	1.860E-05	1.858E-05

De acordo com os resultados obtidos nas Tabela 18 a 20, optou-se por utilizar $k_{\max} = 70$, nas simulações subsequentes.

A Tabela 21 apresenta os tempos de início da ablação para cada ordem de ativação, bem como o número de termos utilizados para a expansão em autofunções da temperatura (i_{\max}), para a expansão da massa específica (n_{\max}) e ainda o erro relativo obtido para a expansão em autofunções da massa específica.

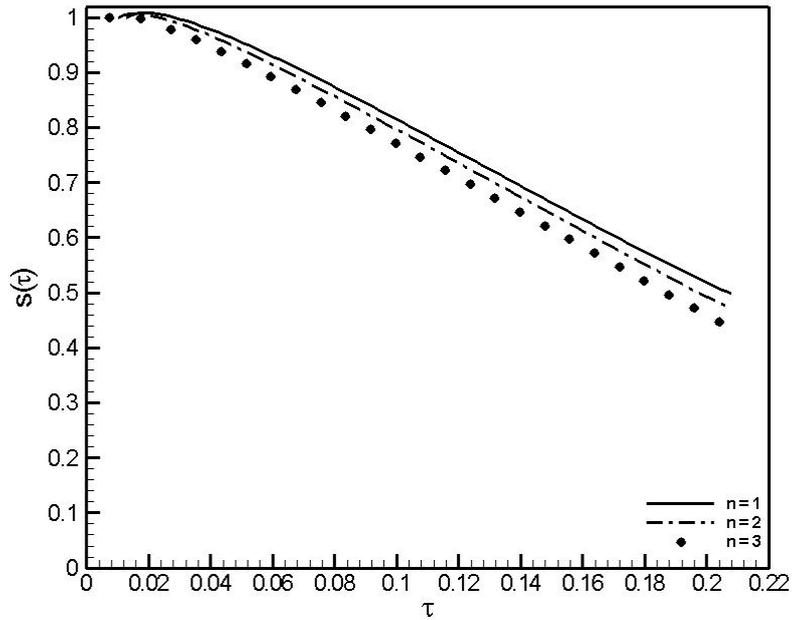
Tabela 21 – Tempo de inicio da ablação para diferentes ordens de ativação na degradação do material no período de pré-ablação

n	t_{ab}	i_{\max}	n_{\max}	<i>erro relativo</i>
1	0.618685	27	54	10^{-3}
2	0.493552	27	54	10^{-3}
3	0.351505	27	54	10^{-3}

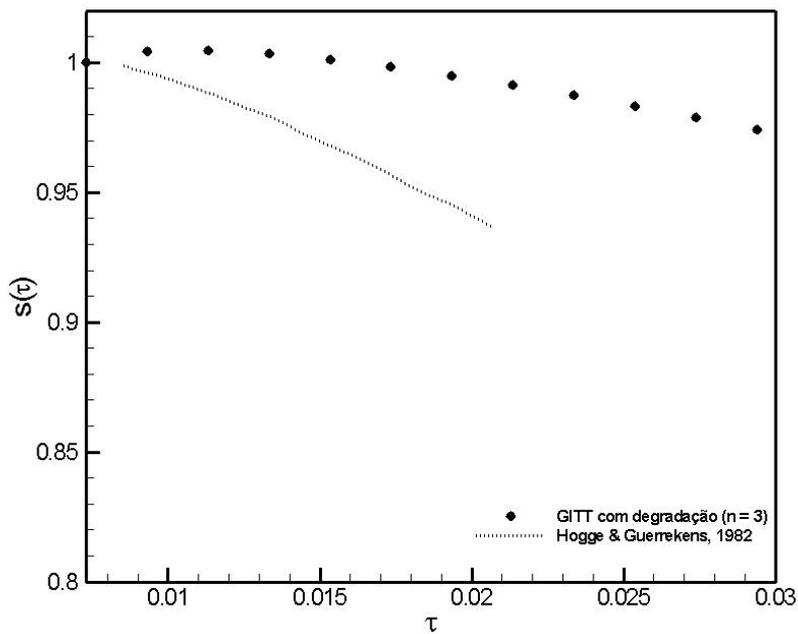
Na Figura 39a, é apresentado o deslocamento da fronteira de ablação em forma adimensional para as tres ordens de ativação. Estes resultados foram obtidos com $N = 35$ termos para as expansões em autofunções da temperatura e da massa específica.

Observa-se na Figura 39a que com $n = 3$ o processo de ablação se inicia primeiro como mostrado a Tabela 21. Ainda observa-se que a evolução da frente de ablação é retardada com a ordem de ativação mais baixa, em comparação com as demais.

A Figura 39b apresenta a comparação do deslocamento da frente de ablação $s(\tau)$ entre os resultados obtidos pela GITT e os obtidos por HOGGE e GUERREKENS [59]. Pode-se ver claramente quão conservativo é o modelo que considera temperatura de pirólise prescrita, como observado em resultados anteriores. Mesmo utilizando a ordem de ativação $n = 3$, o movimento da fronteira ablativa ainda é nitidamente mais lento pelo modelo de degradação pela lei de Arrhenius, do que pelo modelo simplificado que não considera a perda de massa dos gases de pirólise [59].



a) Movimento da frente de ablação para tres ordens de ativação diferentes



b) Comparação do movimento da frente de ablação obtido pelo modelo com degradação pela lei de Arrhenius com o modelo de pirólise simplificado de HOGGE e GUERREKENS [59]

Figura 39 – Deslocamento adimensional da fronteira de ablação com dois modelos distintos de pirólise

A Figura 40 apresenta os resultados obtidos para a variação da massa específica devido à degradação do material durante o período de ablação, para $n=1$ e

$n = 2$. Observa-se uma boa convergência da solução obtendo-se um erro relativo para a massa específica de 10^{-5} para $n = 1$ e 10^{-4} para $n = 2$. Claramente, a frente de pirólise avança mais rapidamente com a menor ordem de ativação, bem como tem um comportamento mais íngreme espacialmente, ou seja, compreendendo uma região menor durante o processo de pirólise.

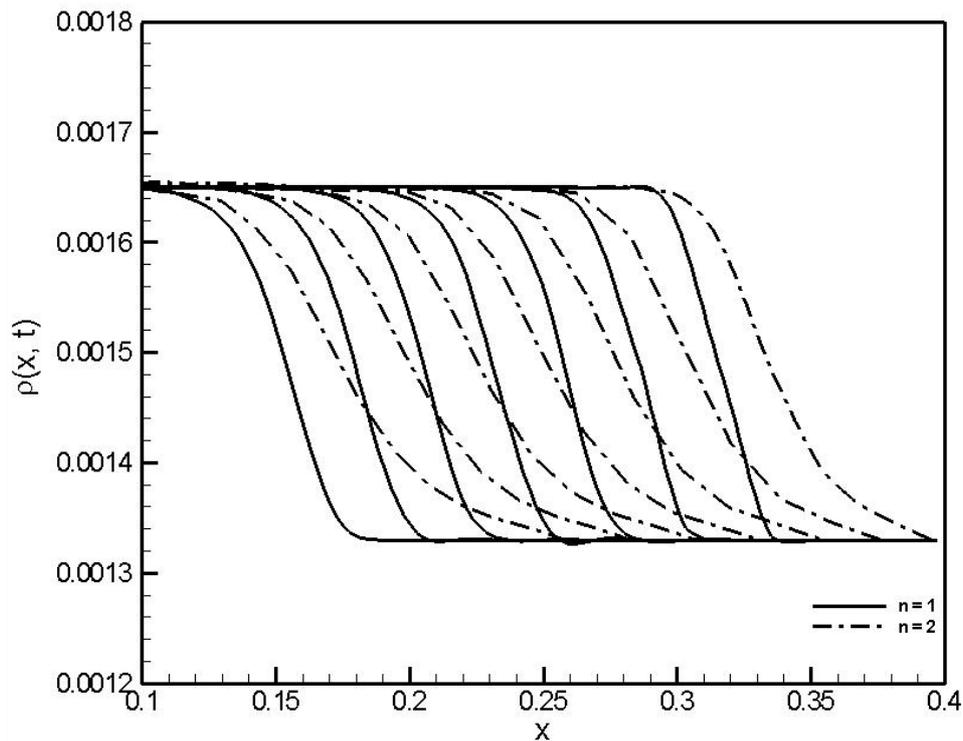


Figura 40 – Variação da massa específica devido à degradação do material durante o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]

Na Figura 41 são apresentados os resultados obtidos para o fluxo de massa dos gases de pirólise durante o período de ablação. Conforme apresentado na Figura 40, tem-se que a massa específica para $n = 2$ possui variação mais suave ao longo da espessura da proteção térmica, e a frente de pirólise avança mais lentamente. Da Figura 41 observa-se também que a produção de gases de pirólise é menos intensa nesse caso de maior ativação, $n = 2$.

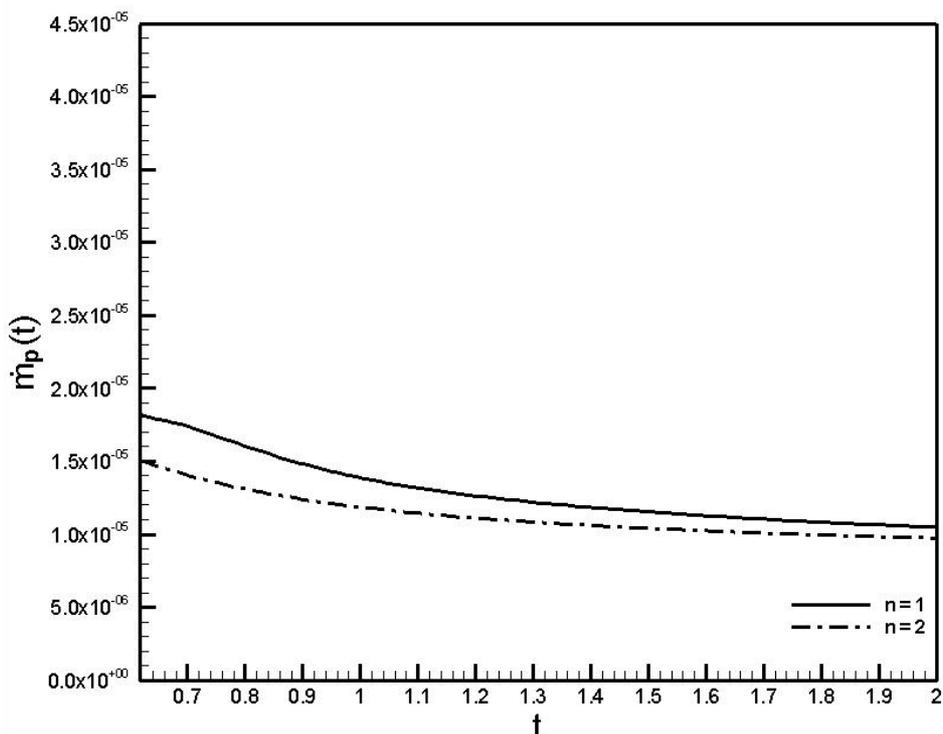


Figura 41 – Fluxo de massa dos gases de pirólise para o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]

Na Figura 42 são apresentadas curvas da distribuição de temperatura em forma adimensional para as tres ordens de ativação. Observa-se que os perfis de temperatura tornam-se cada vez mais distintos entre si conforme o tempo avança o que corrobora com as conclusões acima descritas, sobre a influência da ordem de ativação da degradação. Com o progressivo avanço da frente de ablação, iniciado mais precocemente para o material com maior ordem de ativação, a região restante realça ainda mais a diferença entre esses níveis de degradação, resultando na diferença dos perfis de temperatura apresentados na Figura 42.

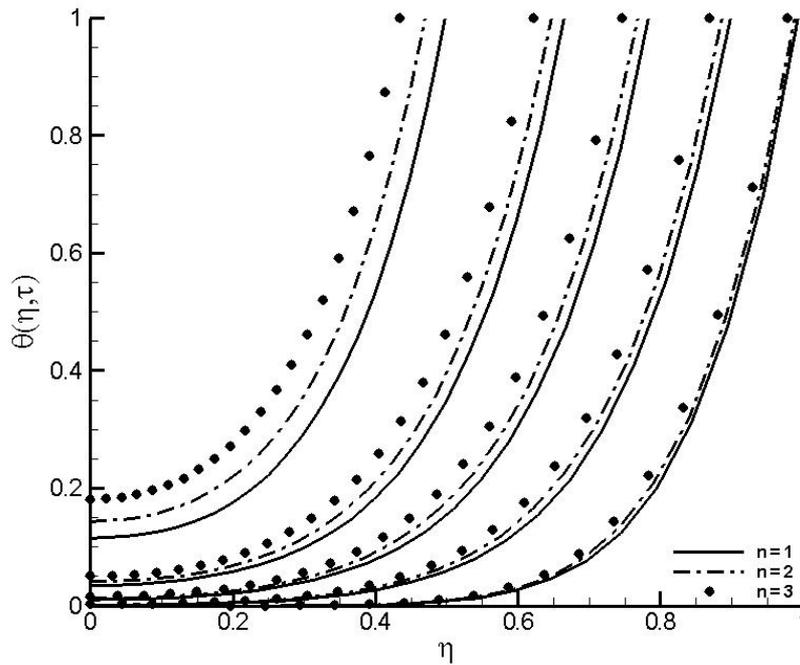


Figura 42 – Distribuição de temperatura adimensional durante o período de ablação com dados de HOGGE e GUERREKENS [59]

5.5 Aplicação para Fluxo de Calor em Típica Reentrada Atmosférica

Esta seção é dedicada a apresentar uma análise de proteção térmica com fluxo de calor de uma reentrada atmosférica típica do veículo SARA [18], empregando os modelos com pirólise (modelos 3 e 4) e utilizando os dados de propriedades do material de proteção térmica referentes à sílica fenólica. Após a verificação de várias referências, as propriedades da sílica fenólica de alta densidade foram reunidas e são apresentadas na Tabela 22 abaixo.

Tabela 22 – Propriedades da Sílica Fenólica de Alta Densidade

Material Virgem		Material Pirolizado	
Propriedades	Valor	Propriedades	Valor
k_v	0.27	k_p	0.87
ρ_v	1200	ρ_p	360
c_{Pv}	1790	c_{Pp}	837
H_{ab}	2.33×10^7	H_p	2.33×10^6
T_0	273.15	c_{Pg}	2510
T_{ab}^*	1110	T_p^*	556

Para avaliar a degradação térmica da sílica fenólica, primeiro foi utilizado o modelo 4 com $L = 0.06$, o qual utiliza a equação de Arrhenius para avaliar a variação da massa específica. Sendo assim, para a equação de Arrhenius foram escolhidos os parâmetros de degradação descritos na Tabela 23 abaixo.

Tabela 23 – Propriedades de Degradação da Sílica Fenólica (Equação de Arrhenius)

<i>Propriedades</i>	<i>Valor</i>	<i>Propriedades</i>	<i>Valor</i>
E	19.9546×10^4	κ	2.7587×10^{16}
R	8.3144	n	1

A Figura 43 apresenta a variação da temperatura adimensional na superfície da proteção para o período de pré-ablação, utilizando o fluxo de calor com perfil real apresentado na Figura 26. Foram utilizados 25 termos para a expansão em autofunções da temperatura, 50 termos na expansão em autofunções da massa específica e 70 subdivisões na integral semi-analítica apresentada nos ANEXOS A e B.

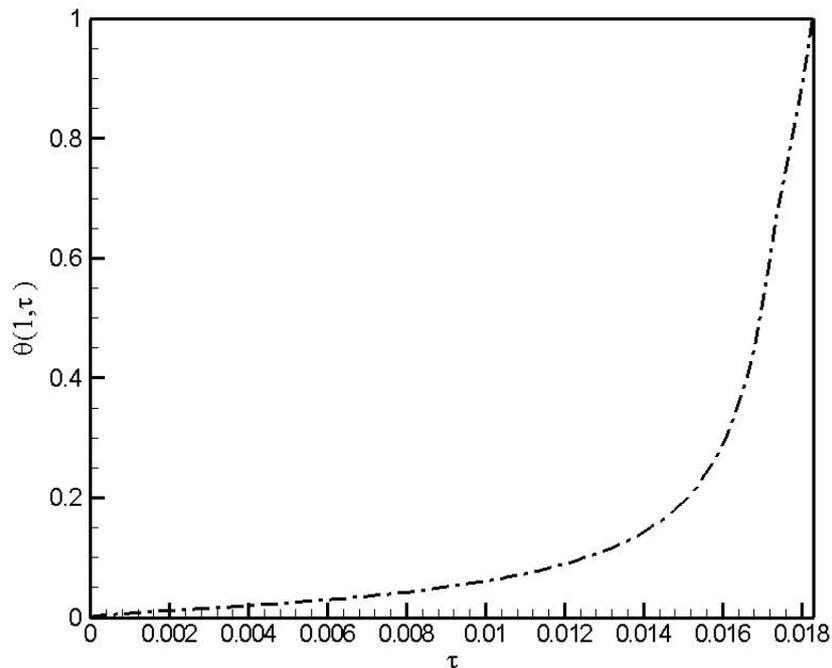


Figura 43 – Distribuição de temperatura adimensional na superfície durante o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta densidade

É possível observar na Figura 43 uma leve inclinação na curva próximo ao final do período de pré-ablação ($\tau \approx 0.017$), causada pela variação na taxa de progressão da frente de pirólise no processo de degradação do material.

A Tabela 24 apresenta os tempos de início da pirólise e da ablação, onde t_p é o tempo do início da degradação ou pirólise, t_{ab} é o tempo de início da ablação, e como se pode observar o intervalo de tempo entre o início da pirólise e da ablação é relativamente pequeno sendo da ordem de 10^{-2} em dados adimensionais.

Tabela 24 – Tempos de início da pirólise e da ablação para o modelo com degradação de material (Equação de Arrhenius)

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor Dimensional</i>	<i>Valor Adimensional</i>
t_p	467.211s	0.01631
t_{ab}	523.280s	0.01827

A Figura 44 apresenta a variação da massa específica da sílica fenólica ao final do período de pré-ablação, em $t = t_{ab}$. Devido ao alto fluxo de calor e à baixa difusividade térmica do material, a profundidade em que ocorre a degradação do material é pequena como pode ser visto na Figura 44.

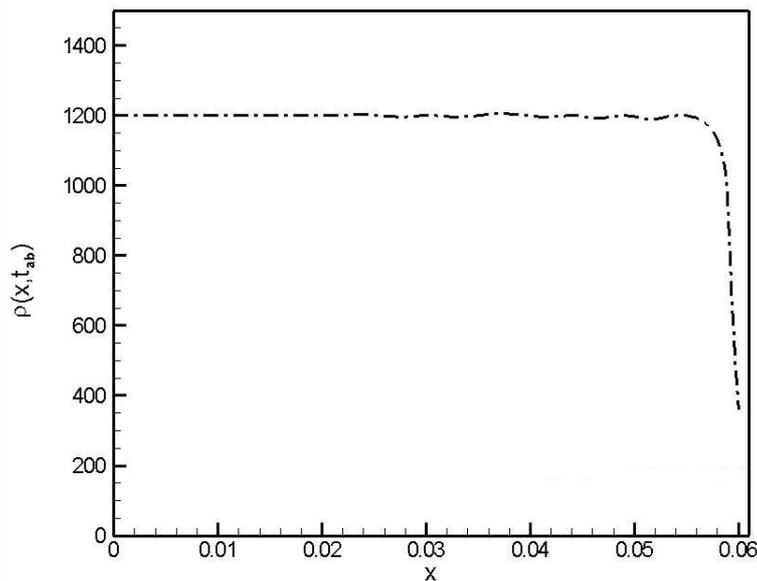


Figura 44 – Degradação do material durante o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta massa específica

Observa-se uma leve ondulação na curva referente à massa específica, Figura 44, o que pode ser atribuído ao número de termos utilizado na solução dada por expansão de autofunções para este gradiente bastante acentuado no início do processo de ablação.

A Figura 45 apresenta o fluxo de massa de gases de pirólise durante o período de pré-ablação, entre o tempo de início da pirólise e o tempo de início da ablação.

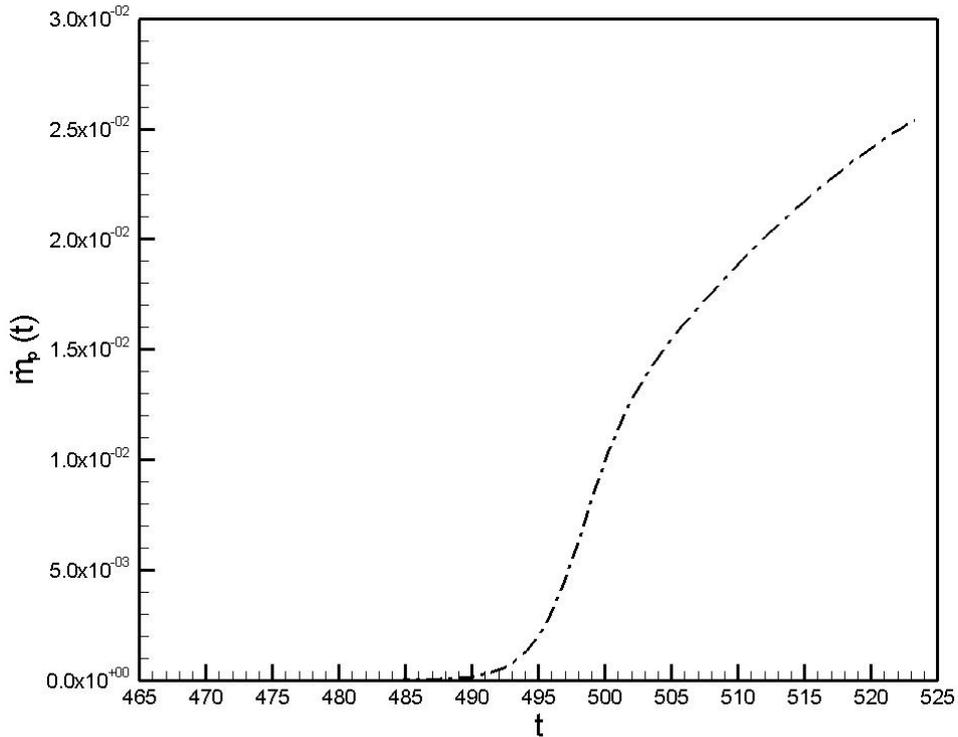


Figura 45 – Fluxo de massa dos gases de pirólise para o período de pré-ablação para sílica fenólica de alta densidade

Assim, o modelo 4 de ablação com pirólise, mais completo todavia de maior custo computacional, foi então aqui empregado para prever os tempos de início da pirólise e da ablação, e assim permitir avaliar criticamente o modelo de ablação com pirólise simplificada [59], modelo 3, de menor custo computacional, e factível de ser utilizado em um código de otimização de proteção térmica como o TPS-Nose [18] para materiais que sofrem degradação térmica.

Sendo assim, os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando o modelo 3 proposto neste trabalho utilizando os dados da sílica fenólica, e os resultados obtidos com o modelo 4 como resultados de referência nas comparações que se seguem.

A Figura 46 apresenta a distribuição de temperatura adimensional na superfície da proteção durante o período de pré-pirólise.

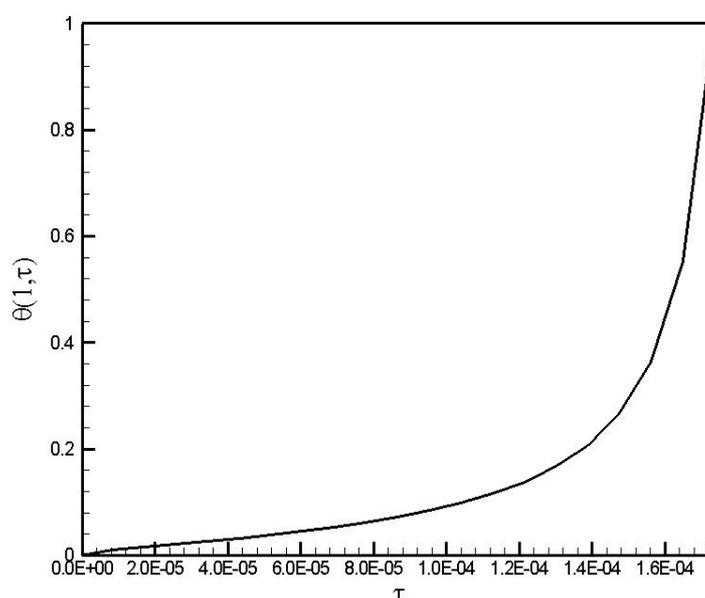


Figura 46 – Distribuição de temperatura na superfície da proteção de Sílica Fenólica obtida com o modelo de temperatura de pirólise prescrita, no período pré-pirólise

A Tabela 25 apresenta a comparação entre os tempos de início da pirólise e da ablação obtidos com os dois modelos 3 e 4. Observa-se que de fato o modelo simplificado com temperatura de pirólise prescrita é mais conservador, iniciando antecipadamente tanto a pirólise quanto a ablação, em cerca de 30 e 17.5 seg. respectivamente.

Tabela 25 – Comparação do início da pirólise e ablação pelos modelos 3 e 4

<i>Parâmetros</i>	<i>Modelo 3</i>	<i>Modelo 4</i>	<i>Diferença</i>
t_p	497.024 s	467.211 s	29.803 s
t_{ab}	540.735 s	523.280 s	17.455 s

A Figura 47 apresenta o deslocamento da frente adimensional de pirólise durante o período de pirólise, como obtido pelo modelo 3. Como se pode observar a pirólise ocorre em um espaço muito pequeno antes de se iniciar o período de ablação, em menos de 10% da espessura total do material.

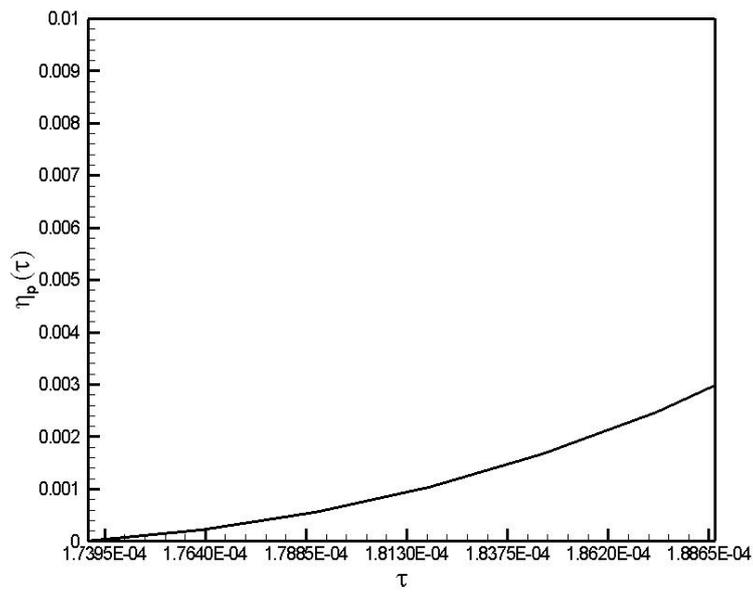


Figura 47 – Deslocamento adimensional da frente de pirólise no período de pirólise obtido pelo modelo 3

A Figura 48 apresenta o deslocamento das fronteiras de pirólise e ablação da sílica fenólica durante o período de ablação.

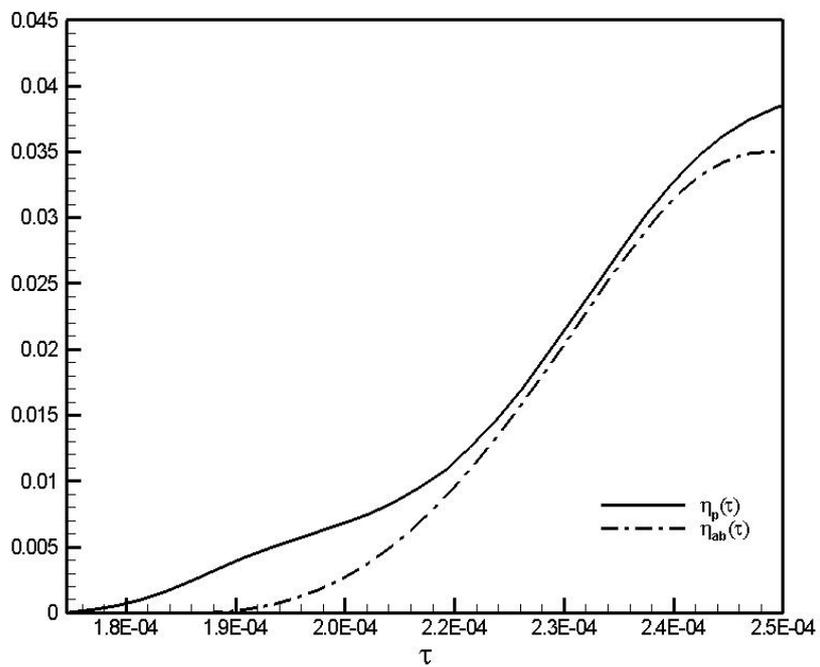


Figura 48 – Deslocamento adimensional das frentes de pirólise e ablação no período de ablação obtidos pelo modelo 3

A Figura 49 apresenta os resultados para a velocidade do deslocamento das frentes de pirólise e de ablação de acordo com modelo 3, onde o movimento do contorno ablativo cessa quando sua velocidade chega a zero. Observa-se também a redução na velocidade de avanço da frente de pirólise ao se iniciar o processo ablativo.

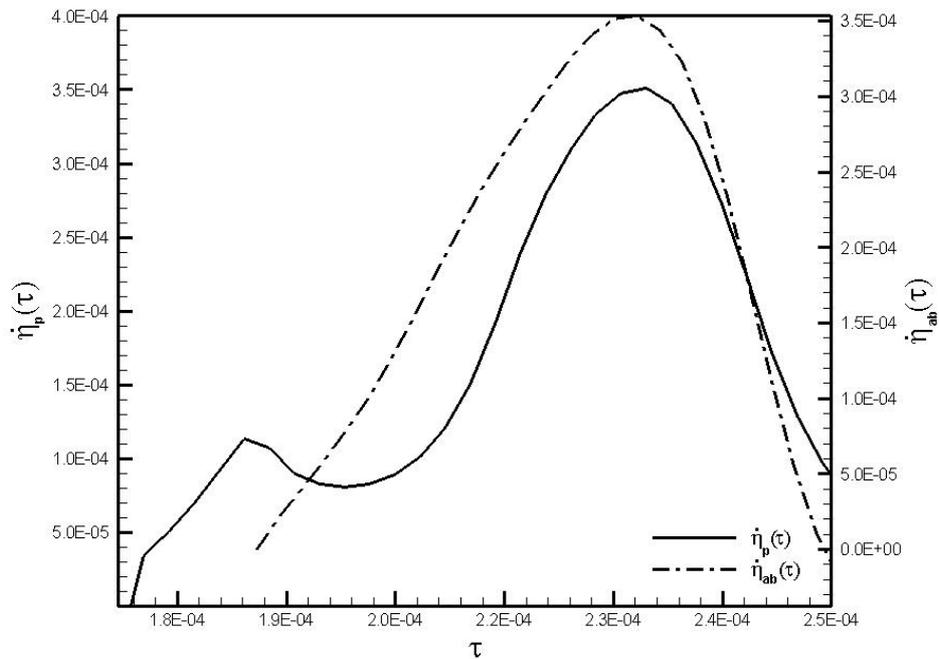


Figura 49 – Taxa de recessão adimensional das frentes de pirólise e ablação no período de ablação obtidas pelo modelo 3

De acordo com os resultados obtidos com o modelo 3 conclui-se que, apesar do modelo com temperatura de pirólise prescrita ser mais conservador que o modelo mais completo que considera a degradação térmica pela lei de Arrhenius, o modelo proposto retorna resultados bem razoáveis para fins de otimização do sistema de proteção térmica. Com relação ao custo computacional, o modelo 3 tem desempenho muito superior ao modelo com degradação térmica pela lei de Arrhenius.

CAPÍTULO 6

6. Conclusões e Sugestões

O escopo do presente trabalho foi a análise unidimensional de proteção térmica por ablação utilizada em veículos espaciais para reentrada atmosférica, uma vez que tais veículos são submetidos a severas condições térmicas, devido aos altos fluxos de calor que atingem a sua superfície, em virtude, principalmente, das altas taxas de transformação da energia cinética em calor.

Para estudar esse problema inicialmente foi tratado o modelo apresentado por DINIZ *et al.* [1], no qual não é considerada a degradação material ou pirólise. Nesta abordagem considera-se que a sublimação ou carbonização com remoção ocorre instantaneamente, ou seja, que o material é removido apenas considerando o balanço de energia na fronteira onde o fluxo de calor é imposto. O objetivo principal nesta etapa do trabalho foi desenvolver um algoritmo otimizado por transformação integral (GITT), que permitisse a utilização de uma solução local e precisa do problema de ablação, em códigos de otimização de proteção térmica [18], ou seja, buscou-se aliar controle de erro e baixo custo computacional no procedimento de solução. Fez-se então a validação do algoritmo proposto para esse primeiro modelo através dos resultados apresentados por DINIZ *et al.* [1] e com os resultados apresentados por RUPERTI JR. *et al.* [18], realizando-se uma extensa análise de convergência da solução. Esta análise contou com o estudo de diferentes configurações da função *NDSolve* da plataforma *Mathematica* (WOLFRAM [57]), utilizada para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias no campo transformado. Também foram avaliados os tempos de computação da solução para diferentes ordens de truncamento dentre as diferentes configurações para garantir a competitividade da solução via Transformada Integral com a solução apresentada no código TPS-Nose [18], no qual foi utilizada uma formulação concentrada melhorada obtida a partir da CIEA (Técnicas das Equações Integrais Acopladas). Um aspecto essencial na obtenção de um algoritmo preciso e computacionalmente competitivo foi a utilização da técnica de balanço integral para acelerar a convergência da solução em expansão de autofunções.

No segundo modelo desenvolvido foi acoplada mais uma equação ao primeiro modelo para considerar a conjugação da estrutura do veículo na transferência de calor.

A formulação deste modelo foi realizada aplicando a Técnica de Parâmetros Concentrados Clássica para reformular a equação de condução na camada estrutural. Um modelo em múltiplas camadas já havia sido proposto por BLACKWELL [25] e estudado por RUPERTI JR. e COTTA [2], porém aqui, além da simplificação no tratamento da camada estrutural, foi aplicada a Técnica de Balanço Integral na solução por transformação integral da equação de energia para a camada ablativa. Obteve-se excelente concordância com o modelo mais detalhado utilizado na ref.[2], com custo computacional reduzido. Observou-se que a camada estrutural atua como um capacitor térmico absorvendo parte do calor imposto e assim retardando o processo de ablação que ocorre na primeira camada, portanto oferecendo previsões menos conservativas para o processo ablativo e para a espessura de material requerida, bem como avaliar a quantidade de energia transferida para a estrutura a qual é a uma das restrições de projeto em reentradas de veículo espaciais.

Para aumentar a complexidade do modelo de ablação, e permitir a análise de materiais de proteção térmica que sofrem degradação térmica significativa, foi tratado o terceiro modelo no qual considera-se que a zona de degradação de material ou pirólise se inicia a uma dada temperatura conhecida, como proposto por HOGGE e GUERREKENS [59]. Assim, os primeiros dois modelos contavam apenas com dois períodos: *Período de Pré-Ablação* e *Período de Ablação*, mas para resolver o terceiro modelo foi proposto um algoritmo em três períodos: *Período de Pré-Pirólise*, *Período de Pirólise* e *Período de Ablação*. Utilizando a Técnica de Equações Integrais Acopladas (CIEA), a zona de pirólise foi reformulada gerando uma EDO a qual foi acoplada ao sistema de EDO's gerado pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada à região de material virgem.

Concluiu-se que o modelo de degradação de material considerando pirólise a temperatura prescrita é bastante competitivo com os modelos de ablação pura devido ao tempo computacional relativamente pequeno requerido para solução dos tres períodos. Aqui novamente a utilização da Técnica de Balanço Integral foi de suma importância na aceleração de convergência da expansão em autofunções, viabilizando o emprego de sistemas transformados de ordens relativamente baixas e custo computacional modesto. De acordo com os resultados apresentados para o terceiro modelo pode-se verificar que o mesmo é menos conservativo que os dois primeiros modelos, os quais consideram apenas o processo de ablação, para materiais que sofrem degradação térmica significativa. Apesar do modelo de HOGGE e GUERREKENS [59] não levar em conta

a convecção dos gases de pirólise através do material pirolizado e a variação gradativa da massa específica nessa região, o termo de calor latente de pirólise modelado na interface da frente de pirólise, bem como a resistência térmica adicional referente à presença da região pirolizada, são responsáveis por um significativo retardamento no início do processo ablativo e no próprio avanço da frente de ablação.

Na sequência considerou-se uma formulação mais completa para a degradação térmica, como apresentada por REY SILVA *et al.* [12] e [13], governada pela lei de Arrhenius, e aqui utilizou-se a Técnica de Transformada Integral Generalizada para resolver o problema diferencial parcial não-linear governante da temperatura e da massa específica no material de proteção térmica sob degradação. Devido à escassa literatura encontrada para validação, optou-se por verificar o algoritmo construído com os códigos construídos para a formulação de ablação pura. O alto custo computacional envolvido, tendo em vista as não-linearidades introduzidas pela modelagem via lei de Arrhenius, não fazem deste modelo e seu algoritmo a melhor combinação para utilização em sistemas computacionais para otimização de proteção térmica, como o sistema TPS-Nose [18]. Entretanto, este quarto modelo foi particularmente importante na avaliação crítica do modelo de ablação com pirólise simplificada (modelo 3), este sim adequado a tarefas computacionais intensivas de otimização, ao oferecer comparações para os tempos de início da pirólise e ablação, e permitir investigar quão conservativo o modelo com pirólise a temperatura prescrita estaria sendo.

O estudo aqui empreendido permitiu vislumbrar novas possibilidades de formulação e solução de problemas de ablação sem e com degradação, a partir do amadurecimento das idéias aqui avançadas. Em primeiro lugar, com relação ao modelo de ablação com pirólise à temperatura prescrita, pretende-se rederivá-lo, em combinação com a Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) e o modelo mais completo pela lei de Arrhenius, para incorporar à equação de energia da região pirolizada, em forma aproximada, os efeitos da variação da massa específica e fluxo de gases de pirólise no campo de temperaturas nessa região. A busca de um modelo simplificado com mais informação sobre a degradação do material, pode ser de extrema valia no contexto aqui discutido.

Sob o ponto de vista do método de solução, o esforço computacional resultante da solução do modelo 4, realçou a necessidade de se desenvolver esquemas de aproximação de integrais automáticos, tal como um processo de integração semi-analítica com escolha automática do número de regiões para diferentes ordens das

autofunções envolvidas. Assim, espera-se obter um algoritmo otimizado para determinação numérica dos campos transformados ao longo do tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] DINIZ, A.J., APARECIDO, J.B., COTTA, R.M., “Heat Conduction with Ablation in Finite Slab”. *Int. J. Heat & Technology*, V. 8, pp. 30-43, 1990.
- [2] RUPERTI JR., N.J., COTTA, R.M., “Heat Conduction with Ablation in Multilayered Media”. *In: Proc. of the 11th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COBEM*, pp. 413-416, São Paulo, December 1991.
- [3] COTTA, R.M., “Modelamento e Análise do Ambiente Térmico Externo/Interno de Veículos Espaciais”. Projeto COPPETEC ET120105, COPPE/UFRJ, nº.3 & 4, March 1992.
- [4] COTTA, R.M., TORO, P.G.P., MACHADO, H.A., “Analytical Model for Aerodynamic Heating of Space Vehicles in Hypersonic Flow: Stagnation Region Analysis with Ablative Protection”. *In: Proc. of the 4th National Thermal Sciences Meeting, ENCIT 1992*, pp. 137-140, Rio de Janeiro, Brazil, December 1992.
- [5] MORAES JR., P., “Design Aspects of the Recoverable Orbital Platform SARA”. *In: Proc. of the Congress Chileno de Ingenieria Mecánica*, 8., Concepción, Chile, v.1, pp. 39-44, October 1998.
- [6] COSTA, L.E.V.L., MORAES JR., P., “Aspectos de Projeto do Escudo Térmico do Primeiro Protótipo da Plataforma Orbital Recuperável SARA”. *Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CONEM*, João Pessoa, 2., 2002.
- [7] MIRANDA, I. F. PESSOA FILHO, J. B., “Fluxo de Calor Convectivo sobre Veículos Espaciais Movendo-se a Velocidades Hipersônicas”. *In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM*, Uberlândia, 16., 2001.
- [8] PESSOA FILHO, J. B., *Aquecimento Cinético do Ponto de Estagnação do SARA durante Reentrada Atmosférica*. CTA/IAE/ASE NT-146/ASE-N/9, São José dos Campos, 1997.
- [9] RUPERTI JR., N. J., COTTA, R.M., “An Improved Lumped Differential Approach for the Solution of Thermal Ablation Problems”. *In: Proc. of the 8th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2000*, Porto Alegre, October 2000.

- [10] OLIVEIRA, A.P., *Estimativa do Fluxo de Calor na Superfície de Materiais Ablativos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [11] OLIVEIRA, A.P., ORLANDE, H.R.B., “Estimation of the Heat Flux at the Surface of Ablating Materials by Using Temperature and Surface Position Measurements”. *In: Proc. of the 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Rio de Janeiro, May 2002.
- [12] REY SILVA, D.V.F.M., *Estimativa de Propriedades Térmicas de Materiais Ablativos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [13] REY SILVA, D.V.F.M., ORLANDE, H.R.B., “Numerical Analysis of Ablating Thermal Protection Materials”. *In: Proc. of 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, ENCIT 2002*, Caxambu, 2002
- [14] MAYALL, M.C.M., *Análise Simplificada e local do Aquecimento Aerodinâmico na Reentrada Atmosférica de Microsatélites*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [15] MOTA, C.A.A., *Estimativa Experimental do Fluxo de Calor para Identificação de Propriedades Termofísicas de Materiais em Altas Temperaturas*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [16] COTTA, R.M., *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [17] COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D., *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*. New York, John Wiley & Sons, 1997.
- [18] RUPERTI JR., N.J., COTTA, R.M., FALKENBERG, C.V., et al., “Engineering Analysis of Ablative Thermal Protection for Atmospheric Reentry: Improved Lumped Formulations and Symbolic-Numerical Computation”. *Heat Transfer Engineering*, v.25, n.º.6, pp. 1-12, 2004.
- [19] BIOT, M.A., AGRAWAL, H.C., “Variational Analysis of Ablation for Variable Properties”. *J. of Heat Transfer*, pp. 437-441, August, 1964.
- [20] HANKEY, W.L., “Re-Entry Aerodynamics”. *AIAA Education Series*. 1988.

- [21] ANDERSON JR., J.D., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*. McGraw-Hill, 1989.
- [22] PESSOA FILHO, J.B., *Cálculo das Propriedades Atmosféricas e Trajetória para Corpos de Reentrada com Sistemas de Recuperação*. NT 134-ASE-N/97, IAE/CTA, São José dos Campos, 1997.
- [23] ZIEN, T.F., “Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux”. *AIAA Journal*, v.16, n°.12, December, 1978.
- [24] HOGGE, M., GERREKENS, P., “Two-Dimensional Deforming Finite Element Methods for Surface Ablation”. *AIAA Journal*, v.23, n°.3, pp. 465-472, 1985.
- [25] BLACKWELL, B.F., “Numerical Prediction of One-Dimensional Ablation Using a Finite Control Volume Procedure with Exponential Differencing”. *Num. Heat Transfer*, v.14, pp.17-34, 1988.
- [26] BLACKWELL, B.F., HOGAN, R.E., “One-Dimensional Ablation Using Landau Transformation and Finite Control-Volume Procedure”. *J. Thermophysics and Heat Transfer*, v.8, n°.2, pp.282-294, 1994.
- [27] HOGAN, R.E., BLACKWELL, B.F., COCHRAN, R.J., “Application of Moving Grid Control Volume Finite Element Method to Ablation Problem”. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, v.10, n°.2, pp. 312-319, 1996.
- [28] OHLHORST, C.W. *et al.*, *Thermal Conductivity Database of Various Structural Carbon-Carbon Composite Materials*. NASA – Technical Memorandum 4787, NASA, Hampton, Virginia, November, 1997.
- [29] BRAGA W.F., *Método Integral e de Analogia Elétrica para a Solução de Transferência de Calor Unidimensional de Sólido com Ablação*. Dissertação de M.Sc., PosMEC/UFSC, Florianópolis, SC, Brasil, 2002.
- [30] BRAGA W.F., MANTELLI, M.B.H., “Electrical Analogy Modeling for One-Dimensional Ablation Problem”. *In: Proc of 8th AIAA/ASME – Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference*, St. Louis, pp. 33-37, June, 2002.
- [31] BRAGA, W.F., MANTELLI, M.B.H., “Solução Aproximada em Forma Analítica do Processo de Ablação Unidimensional”. *In: 9th Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Mecânicas, ENCIT 2002*, Caxambu, 2002.

- [32] SHIH, Y.C., CHEUNG, F.B., KOO, J.H., et al., “Numerical Study Transient Thermal Ablation of High-Temperature Insulation Materials”. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, v.17, n°.1, pp. 53-61, 2003.
- [33] APARECIDO, J.B., COTTA, R.M., “Improved One-Dimensional Fin Solutions”. *Heat Transfer Engineering*, v.11, n°.1, pp. 49-59, 1989.
- [34] COTTA, R.M., ÖZISIİK, M.N., MENNIG, J., “Coupled Integral Equation Approach for Phase-Change Problem in Two-Region Finite Slab”. *J. Franklin Institute*, v.327, n°.2, pp. 225-234, 1990.
- [35] COTTA, R.M., RAMOS, R., “Error Analysis and Improved Formulations for Extended Surfaces”. *In: Proc of the NATO Advanced Study Institute on Cooling of Electronic Systems*, NATO ASI Series E: Applied Sciences, v.258, pp. 753-787, Turkey, June-July, 1993.
- [36] SCOFANO NETO, F., COTTA, R.M., “Improved Hybrid Lumped-Differential Formulation for Double-Pipe Heat Exchangers Analysis”. *J. Heat Transfer*, v.115, pp. 921-927, 1993.
- [37] TRAIANO, F.M.L., COTTA, R.M., ORLANDE, H.R.B., “Improved Approximate Formulations for Anisotropic Heat Conduction”. *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, v.24, n°.6, pp. 869-878, 1997.
- [38] COTTA, R.M., “Improved Lumped-Differential Formulations in Heat Transfer”. Invited Chapter, v.2 – *Modelling of Engineering Heat Transfer Phenomena*, Chap. 10, Eds. B. Sundsen & M. Faghri, Heat Transfer Series, Computational Mechanics Publ., pp. 293-325, UK, 1998.
- [39] REGIS, C.R., COTTA, R.M., SU, J., “Improved Lumped Analysis of Transient Heat Conduction in a Nuclear Fuel Rod”. *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, v.27, n°.3, pp. 357-366, 2000.
- [40] COTTA, R.M., FALKENBERG, C.V., RUPERTI JR., N.J., SU, J., “Thermal Protection System Simulation for Atmospheric Reentry: Engineering Models”. *In: 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, ICCHMT 2001*, Rio de Janeiro, Brazil, October, 2001.

- [41] COTTA, R.M., ORLANDE, H.R.B., BORGES, L.S.A., et al., *Projeto Termomecânico do Sistema de Proteção Térmica de Satélites Recuperáveis*. Relatório de Projeto COPPE/UFRJ – AEB, Rio de Janeiro, 2002.
- [42] ÖZISIK, M.N., MURRAY, R.L., “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions”. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v.96, pp. 48-51, 1974.
- [43] COTTA, R.M., “Diffusion in Media with Prescribe Moving Boundaries: Application to Metals Oxidation at High Temperatures”. *In: Proc of the 2nd Latin American Congress of Heat & Mass Transfer*, v.1, pp. 502-513, São Paulo, Brazil, May, 1986.
- [44] RUPERTI JR., N.J., ZAPAROLI, E.L., COTTA, R.M., “Hybrid Solution for Phase Change Problems in Multiregion Media”. *In: Proc of the 30th Eurotherm Seminar – Heat Transfer in Phase-Change Processes*, pp. 181-184, Orsay, France, October, 1992.
- [45] DINIZ, A.J., CAMPOS SILVA, J.B., ZAPAROLI, E.L., “Heat Conduction with Heat Shield in Bodies of Revolutions”. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, pp. 425-428, 1991.
- [46] DINIZ, A.J., CAMPOS SILVA, J.B., APARECIDO, J.B., ZAPAROLI, E.L., “Heat Shield for Ablation in Finite Sphere”. *2º Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, v.1, pp. 9-16, 1992.
- [47] DINIZ, A.J., CAMPOS SILVA, J.B., ZAPAROLI, E.L., “Hybrid Numerical-Analytical Solution of the Equation of Cylindrical Diffusion with Ablation”. *3º Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, v.1, pp. 90-93, 1994.
- [48] RUPERTI JR., N.J., GOBIN, D., COTTA, R.M., “Covalidation of Integral Transform and Finite Volume Solutions in Phase-Change Problems”. *In: Proc. of the 7th National Thermal Sciences Meetig, ENCIT 1998*, v.2, pp. 659-668, Rio de Janeiro, Brasil, November, 1998.
- [49] DINIZ, A.J., CAMPOS SILVA, J.B., ZAPAROLI, E.L., “Analytical Solution of Ablation Problem with Nonlinear Coupling Equation”. *Hybrid Methods in Engineering*, New York, USA, v.1, nº.3, pp. 265-277, 1999.

- [50] KUROKAWA, F.Y., DINIZ, A.J., CAMPOS SILVA, J.B., “Study of the Heat Transfer on System with Thermal Protection”. *In: Proc. of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2004*, Rio de Janeiro, Brazil, December, 2004.
- [51] KUROKAWA, F.Y., ZAPAROLI, E.L., DINIZ, A.J., *et al.*, “Transferência de Calor Não Linear Bidimensional em Corpos com Proteção Térmica Ablativa.”. *3rd Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CONEM 2004*, Belém, Brasil, 2004.
- [52] KUROKAWA, F.Y., ZAPAROLI, E.L., DINIZ, A.J., “Proteção Térmica Ablativa em Corpos Bidimensionais de Geometria Rombuda”. *In: 9th Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, ENCIT 2002*, Caxambu, Brasil, 2002.
- [53] GOMES, F.A.A., CAMPOS SILVA, J.B., DINIZ, J.A., “Radiation Heat Transfer with Ablation in a Finite Plate”. *In: Proc. of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2004*, Rio de Janeiro, Brazil, December, 2004.
- [54] GOMES, F.A.A., CAMPOS SILVA, J.B., DINIZ, J.A., “Formulation of the Ablation Thermal Problem in a Unified Form”. *J. of Spacecraft and Rockets*, v.43, n°.1, pp. 236-239, Jan-Fev, 2006.
- [55] SCOFANO NETO, F., COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D., “Alternative Approach to Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems”. *In: Proc. of the 1st Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Heat Transfer 1990*, v.1, pp. 239-250, Southampton,UK, July 1990.
- [56] LEIROZ, A.J.K., COTTA, R.M., “Convergence Enhancement of Eigenfunction Expansions for Nonhomogeneous Elliptic Diffusion Problems”. *In: Proc of the 3rd National Thermal Sciences Meeting, ENCIT 1990*, v.1, pp. 335-340, Itapema, December, 1990.
- [57] WOLFRAM, S., *The Mathematica Book*, 4th Ed., Wolfram Media.

- [58] CHUNG, B.T.F, HSIAO, J.S., “Heat Transfer with Ablation n a Finite Slab Subjected to Time-Variable Heat Flux”. *AIAA Journal*, v.23, n° 1, pp. 145-150, 1985.
- [59] HOGGE, M., GERREKENS, P., “One-Dimensional Finite Element Analysis of Thermal Ablation with Pyrolysis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.33, n°.4, pp. 609-634, 1982.
- [60] SWANN, R. T., PITTMAN, C. M., *Numerical analysis of the transient response of advanced thermal protection systems for atmospheric entry*. NASA Technical Note D-1370, NASA, Washington, DC, USA, July 1962.
- [61] TORRE, L., KENNY, J.M., MAFFEZZOLI, A.M., “Degradation Behaviour of a Composite Material for Thermal Protection Systems: Part II – Process Simulation”. *Journal of Materials Science*, v.33, pp. 3145-3149, 1998.
- [62] MOYER, C. B., RINDAL, R. A., *An analysis of the coupled chemically reacting boundary layer and charring ablator: Part II – finite difference solution for the in-depth response of charring materials considering surface chemical and energy balances*. NASA Contractor Report 66-7, CR-1061, Itek Corporation, Vidya Division, Palo Alto, California, USA, 1967.
- [63] HINDMARSH, A. C., 1983, ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers, in *Scientific Computing*, R. S. Stepleman et al. (eds.), North-Holland, Amsterdam, (vol. 1 of IMACS Transactions on Scientific Computation), pp. 55-64.
- [64] LEITE, R.M.G., *Cálculo de Ablação com uma Abordagem Entálpica para Mudança de Fase*. Tese de D.Sc., Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, São José dos Campos, São Paulo, 1999.
- [65] RUSSEL, G.W., “Evaluation of Thermal Performance of an Epoxy Composite using a Complex Modeling Technique”. *AIAA/ASME/SAE and ASEE – Joint Propulsion Conference and Exhibit 32nd*, Lake Buena Vista, July 1-3, 1996
- [66] KANEVCE, L.P., KANEVCE, G.H., ANGELEVSKI, Z.Z., “Comparison of Two Kinds of Experiments for Estimation of Thermal Properties of Ablative Composite”. *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice – 3rd Int.*

Conference on Inverse Problems in Engineering, Port Ludlow, USA, June 13-18, 1999.

- [67] MACÊDO, E.N., COTTA, R.M., ORLANDE, H.R.B., “A Solution via Generalized Integral Transform Technique for the Simultaneous Transport Processes during Combustion of Wood Cylinders”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.49, pp. 1455-1477, 2000.
- [68] LIN, F.L., YANG, C.S., “Heat Transfer Analysis of Charring Ablators under Aerodynamic Heating”. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, v.77, n°3, pp. 214-221, 2005.
- [69] BAHRAMIAN, A.R., KOKABI, M., FAMILI, M.H.N, et al., “Ablation and Thermal Degradation Behaviour of a Composite Based on Resol Type Phenolic Resin: Process Modeling and Experimental”. *Polymer*, v.47, pp. 3661-3673, 2006.
- [70] FARKAS, E., MESZENA, Z.G., TOLDY, A., et al., “Modelling of Transport Processes in a Developing Char”. *Polymer Degradation and Stability*, v.93, pp. 1205-1213, 2008.
- [71] BAHRAMIAN, A.R., KOKABI, M., “Ablation Mechanism of Polymer Layered Silicate Nanocomposite Heat Shield”. *Journal of Hazardous Materials*, v.166, pp. 445-454, 2009.
- [72] JIMENEZ, M., DUQUESNE, S., BOURBIGOT, S. “Kinetic Analysis of the Thermal Degradation of an Epoxy-Based Intumescent Coating”. *Polymer Degradation and Stability*, v.94, pp. 404-409, 2009.
- [73] MACHADO, H.A., MORGENSTERN JR., A. “Numerically Determined Pressure Fields Applied to Heat Transfer Simulation in the SARA TPS”. *In: 20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2009*, Gramado, RS, Brasil, 2009.

ANEXO A

Neste anexo encontra-se o esquema de integração semi-analítica proposto na equação (4.190). Segue aqui o formalismo da solução.

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \int_0^L \Omega_n(x) P_\rho(x,t) dx \quad (5.1)$$

onde $P_\rho(x,t) = -\kappa \rho_v^{1-n} e^{-E/RT(x,t)} \rho^n(x,t)$.

Assumindo uma aproximação de primeira ordem $P_\rho^k(x,t) = a_k x + b_k$ e substituindo na equação (5.1) tem-se

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \sum_{k=1}^{kmax} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k x + b_k) \Omega_n(x) dx \quad (5.2)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} I_n^k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} x \Omega(x) dx \\ II_n^k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Omega(x) dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

a equação (5.2) é reescrita

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \sum_{k=1}^{kmax} (a_k I_n^k + b_k II_n^k) \quad (5.4)$$

onde define-se

$$\begin{aligned} P_\rho^k &= a_k x_k + b_k \\ P_\rho^{k+1} &= a_k x_{k+1} + b_k \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{P_\rho^{k+1} - P_\rho^k}{x_{k+1} - x_k} \\ b_k &= P_\rho^k - a_k x_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.5) na equação (5.4), reagrupando os termos P_ρ^k e P_ρ^{k+1} tem-se

$$P_\rho^k \left[\left(1 + \frac{x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) II_n^k - \frac{I_n^k}{x_{k+1} - x_k} \right] + P_\rho^{k+1} \left(\frac{I_n^k - x_k II_n^k}{x_{k+1} - x_k} \right) \quad (5.6)$$

então fazendo

$$\begin{aligned} \bar{A}_n^k &= \left[\left(1 + \frac{x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) II_n^k - \frac{I_n^k}{x_{k+1} - x_k} \right] \\ \bar{B}_n^k &= \left(\frac{I_n^k - x_k II_n^k}{x_{k+1} - x_k} \right) \end{aligned}$$

escreve-se a solução semi-analítica da equação (5.1) como

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \bar{A}_n^k P_\rho^1 + \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} (\bar{A}_n^{k+1} + \bar{B}_n^k) P_\rho^{k+1} + \bar{B}_n^{k_{\max}} P_\rho^{k_{\max}+1} \quad (5.7)$$

ANEXO B

Neste anexo encontra-se o esquema de integração semi-analítica proposto na equação (4.207). Segue aqui o formalismo da solução.

$$\bar{P}_{\rho,n}(t) = \int_0^{s_{ab}(t)} \tilde{\Omega}_n^*(x,t) P_\rho^*(x,t) dx \quad (5.8)$$

onde $P_\rho^*(x,t) = -\kappa \rho_v^{1-n} e^{-E/R(T_v(x,t)+T_{ab}^*)} \rho_{ab}^*(x,t)$.

Assumindo uma aproximação de primeira ordem $P_\rho^{*k}(x,t) = c_k x + d_k$ e substituindo na equação (5.8) tem-se

$$\bar{P}_{\rho,n}^*(t) = \sum_{k=1}^{kmax} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (c_k x + d_k) \tilde{\Omega}_n^*(x,t) dx \quad (5.9)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} III_n^k(t) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} x \tilde{\Omega}_n^*(x,t) dx \\ IV_n^k(t) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{\Omega}_n^*(x,t) dx \end{aligned} \quad (5.10)$$

a equação (5.9) é reescrita

$$\bar{P}_{\rho,n}^*(t) = \sum_{k=1}^{kmax} (c_k III_n^k(t) + d_k IV_n^k(t)) \quad (5.11)$$

onde define-se

$$\begin{aligned} P_\rho^{*k} &= c_k x_k + d_k \\ P_\rho^{*k+1} &= c_k x_{k+1} + d_k \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{P_\rho^{*k+1} - P_\rho^{*k}}{x_{k+1} - x_k} \\ d_k &= P_\rho^{*k} - c_k x_k \end{aligned} \quad (5.12)$$

Substituindo a equação (5.12) na equação (5.11), reagrupando os termos P_ρ^{*k} e P_ρ^{*k+1} tem-se

$$P_\rho^{*k} \left[\left(1 + \frac{x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) IV_n^k(t) - \frac{III_n^k(t)}{x_{k+1} - x_k} \right] + P_\rho^{*k+1} \left(\frac{III_n^k(t) - x_k IV_n^k(t)}{x_{k+1} - x_k} \right) \quad (5.13)$$

então fazendo

$$\bar{A}_n^k = \left[\left(1 + \frac{x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) IV_n^k(t) - \frac{III_n^k(t)}{x_{k+1} - x_k} \right]$$

$$\bar{B}_n^k = \left(\frac{III_n^k(t) - x_k IV_n^k(t)}{x_{k+1} - x_k} \right)$$

escreve-se a solução semi-analítica da equação (5.8) como

$$\bar{P}_{\rho,n}^*(t) = \bar{C}_n^k(t) P_\rho^{*1} + \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} \left(\bar{C}_n^{k+1}(t) + \bar{D}_n^k(t) \right) P_\rho^{*k+1} + \bar{C}_n^{k_{\max}}(t) P_\rho^{*k_{\max}+1} \quad (5.14)$$