



MODELOS REDUZIDOS NA SOLIDIFICAÇÃO DE GOTÍCULAS DE ÁGUA SUPER-RESFRIADAS SUSPENSAS E SOBRE SUBSTRATOS SUPERHIDROFÓBICOS

Emerson Barbosa dos Anjos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta

Renato Machado Cotta

Rio de Janeiro

Junho de 2022

MODELOS REDUZIDOS NA SOLIDIFICAÇÃO DE GOTÍCULAS DE ÁGUA SUPER-
RESFRIADAS SUSPENSAS E SOBRE SUBSTRATOS SUPERHIDROFÓBICOS

Emerson Barbosa dos Anjos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta

Renato Machado Cotta

Aprovado por: Prof^a. Carolina Palma Naveira Cotta

Prof. Leandro Alcoforado Sphaier

Prof. Kleber Marques Lisboa

Prof. Hécio Rangel Barreto Orlande

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2022

Anjos, Emerson Barbosa

Modelos Reduzidos na Solidificação de Gotículas de Água Super-Resfriadas Suspensas e sobre Substratos Superhidrofóbicos / Emerson Barbosa dos Anjos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2022.

XXII, 145 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta

Renato Machado Cotta

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 114-120.

1. Gotículas de água super-resfriadas. 2. Transformada Integral. 3. Modelo Reduzido. I. Naveira Cotta, Carolina Palma *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por te me dado a oportunidade de realizar esse trabalho com saúde e sabedoria.

A Ludmila Pontes, minha namorada, pelo apoio em toda a mudança, vinda para o Rio e nas etapas deste trabalho, me ajudando cada vez mais e sendo uma incrível companheira nesses 8 anos.

Aos meus pais, Eraldo Barbosa dos Anjos e Veronica Carneiro Silva dos Anjos por terem me dado a oportunidade de estudar, renunciando a vários sonhos para investir na minha educação, me ajudando nos tempos mais difíceis e apoiando minha vinda ao Rio para realização da pós-graduação.

Ao meu irmão, Eraldo Barbosa dos Anjos Filhos, por todo incentivo e apoio nesses anos, sendo um parceiro de conversas acadêmicas, pessoais e de videogame.

A Diana Pontes e toda a família, pelo apoio e motivação para realização deste trabalho.

Aos meus orientadores, Professora Carolina Naveira Cotta e Professor Renato Cotta, por terem partilhado do conhecimento comigo, sendo pacientes, divertidos e ótimos amigos durante esse mestrado.

Aos Professores Cláudio César Barros de Oliveira e Jornandes Dias, por me incentivarem a entrar no mestrado.

A todos meus amigos que de certa forma colaboraram para realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ e a COPPE/UFRJ, pela oportunidade em realizar o meu mestrado na instituição.

Aos Professores Hélcio, Leandro e Kleber, por gentilmente aceitarem participar da minha banca e contribuírem com comentários de alto valor para este trabalho.

Aos meus colegas do LABMEMS por todo apoio, sem dúvida, o apoio de todos vocês foi decisivo neste mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELOS REDUZIDOS NA SOLIDIFICAÇÃO DE GOTÍCULAS DE ÁGUA SUPER-RESFRIADAS SUSPENSAS E SOBRE SUBSTRATOS SUPERHIDROFÓBICOS

Emerson Barbosa dos Anjos

Junho/2022

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta

Renato Machado Cotta

Programa: Engenharia Mecânica

O presente trabalho realiza a modelagem matemática do processo de condução de calor e congelamento de uma gotícula de água super-resfriada. O objetivo deste trabalho é desenvolver modelos reduzidos para uma gotícula de água em duas situações, sendo que, na primeira a gota está suspensa, e todo o processo de congelamento em uma corrente de ar fria é analisado, e a segunda com a gota apoiada em uma superfície superhidrofóbica, analisando apenas o super-resfriamento da gotícula, permitindo computações econômicas da evolução das temperaturas e a análise do congelamento em todo o processo. O processo de congelamento é descrito por quatro estágios, super-resfriamento, recalescência, solidificação e resfriamento. Cada etapa, exceto recalescência, possui um modelo matemático da equação de condução de calor e utiliza-se a Técnica das Equações Integrais Acopladas (do inglês, CIEA), para reduzir o modelo eliminando uma variável no sistema de equações. As equações resultantes da CIEA são resolvidas por um código computacional na plataforma Wolfram Mathematica® para a gotícula suspensa, e para a gotícula apoiada, uma comparação entre a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) em combinação com um modelo reduzido pelo uso da CIEA e o emprego direto da GITT é feita. Desta forma, os resultados são analisados através de comparações com outras técnicas de solução e através de dados disponíveis na literatura e verificados numericamente. Além disso, é implementada uma análise em diferentes valores de Biot, e parâmetros da gotícula, que permitem inspecionar sua influência no processo e na formulação matemática.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

REDUCED MODELS IN THE SOLIDIFICATION OF SUPERCOOLED WATER
DROPLETS SUSPENDED AND ON SUPERHYDROPHOBIC SUBSTRATES

Emerson Barbosa dos Anjos

June/2022

Advisors: Carolina Palma Naveira Cotta

Renato Machado Cotta

Department: Mechanical Engineering

The present work performs the mathematical modeling of the heat conduction and freezing process of a supercooled water droplet. The objective of this work is to develop reduced models for a droplet of water in two situations, the first one, with the droplet suspended, and the entire freezing process in a cold air current is analyzed, and the second one, with the droplet supported on a superhydrophobic surface, analyzing only the supercooling of the droplet, allowing economic computations of the evolution of temperatures and the analysis of freezing throughout the process. The freezing process is described by four stages, supercooling, recalescence, solidification, and cooling. Each stage, except recalescence, has a mathematical model of the heat conduction equation, and the Coupled Integral Equation Technique (CIEA) is used to reduce the model by eliminating one variable in the system. The resulting CIEA equations are solved by a computer code in the Wolfram Mathematica® platform for the suspended droplet, and for the supported droplet, a comparison between the application of the Generalized Integral Transform Technique (GITT) in combination with a model reduced by CIEA and the direct employment of GITT is made. In this way, the results are analyzed through comparisons with other solution techniques and through data available in the literature and verified numerically. Furthermore, an analysis is implemented at different Biot values, and droplet parameters, which allows inspecting their influence on the process and the mathematical formulation.

Sumário

1. LISTA DE FIGURAS	VIII
2. LISTA DE TABELAS	XII
3. NOMENCLATURA	XIV
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 <i>Motivação e Objetivo</i>	1
2. REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1 <i>Solidificação de Gotículas de Água</i>	5
2.2 <i>Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA)</i>	9
2.3 <i>Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)</i>	11
3. MODELAGEM MATEMÁTICA	15
3.1 <i>Gotícula Suspensa</i>	16
3.1.1 Estágio de super-resfriamento (1°)	17
3.1.2 Estágio de Recalescência (2°).....	20
3.1.3 Estágio de Solidificação (3°)	21
3.1.4 Estágio de Resfriamento (4°).....	28
3.2 <i>Gotícula Apoiada em uma Superfície</i>	31
3.2.1 Gotícula com domínio fixo	31
3.2.2 Gotícula com domínio irregular.....	36
4. REDUÇÃO DE MODELOS E MÉTODOS DE SOLUÇÃO	41
4.1 <i>Modelo Reduzido</i>	42
4.2 <i>Transformada Integral</i>	44
4.3 <i>Aplicação: Gotícula Suspensa</i>	47
4.3.1 Super-Resfriamento: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$	48
4.3.2 Solidificação: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$	51
4.3.3 Congelamento: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$	54
4.3.4 Super-Resfriamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$	57
4.3.5 Solidificação: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$	59

4.3.6 Congelamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$	61
4.4 Aplicação: <i>Gotícula Esférica – Apoiada em uma Superfície Superhidrofóbicas</i>	64
4.4.1 Super-Resfriamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ / GITT	65
4.4.2 Super-resfriamento: GITT 2D.....	71
4.5 <i>Gotícula Deformada – Apoiada em uma Superfície Superhidrofóbicas</i>	78
4.5.1 Super-resfriamento: CIEA	79
5. RESULTADOS	85
5.1. <i>Gotícula Suspensa</i>	86
5.1.1 Variação do Número de Biot.	86
5.1.2 Variação do número de Biot e número de Stefan.....	89
5.1.3 Aplicação no congelamento de gotículas super-resfriadas.....	92
5.1.4 Estágio de solidificação e análise paramétrica	93
5.2 <i>Gotícula Apoiada em uma Superfície</i>	96
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	112
7. REFERÊNCIAS	114
A. ANEXO A.....	121
A. A.1 CONVERGÊNCIA GITT PARA GOTÍCULA SUSPensa.....	121

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 - Evolução da temperatura da gotícula super-resfriada nos 4 estágios de congelamento. 1. Super-Resfriamento, 2. Recalescência. 3- Solidificação, 4. Resfriamento. (HINDMARSH, et al., 2003).....	2
Figura 1-2 - Configuração de uma gota esférica suspensa e sujeira a uma corrente de ar fria e com os fenômenos de fluxo de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) e (b) Configuração de uma gotícula esférica suspensa e movimento da frente de solidificação.....	4
Figura 1-3 - Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria regular e (b) Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria irregular, ambas as configurações estão sujeitas a uma corrente de ar fria.	4
Figura 3-1 - (a) Configuração de uma gota esférica suspensa e sujeira a uma corrente de ar fria e com os fluxos de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) e (b) Configuração de uma gotícula esférica suspensa e movimento da posição da frente de solidificação.....	15
Figura 3-2 – (a) Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria regular e (b) com geometria irregular, ambas as configurações estão sujeitas a uma corrente de ar fria e com os fluxos de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) na fronteira.....	16
Figura 3-3 – Esquema simplificado de uma gotícula de água, na fase líquida super-resfriada suspensa e sujeita a uma corrente de frente fria.	17
Figura 3-4 – Esquema simplificado do terceiro estágio (solidificação) de uma gotícula de água, na mudança de fase, suspensa e sujeita a uma corrente de frente fria.	22
Figura 3-5 - Esquema simplificado do quarto estágio (resfriamento) de uma gotícula de água, na fase sólida(gelo), suspensa e sujeita a uma corrente de frente fria.	28

Figura 3-6. Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície para o primeiro estágio: Super-Resfriamento. Sendo a região destacada em azul como a interface gotícula-superfície.	32
Figura 3-7 Configuração de uma gota esférica apoiada, com geometria irregular, em uma superfície para o primeiro estágio: Super-Resfriamento. Sendo a região destacada em vermelho como a interface gotícula-superfície.	36
Figura 4-1- Configuração simplificada do primeiro estágio (lado esquerdo) e do terceiro estágio (lado direito) de uma gotícula super-resfriada, suspensa e sujeita a uma corrente de ar frio.	48
Figura 4-2 – Configuração da gotícula super-resfriada apoiada em uma superfície e sujeira a uma corrente de ar frio, com a variável a ser eliminada pela aplicação da CIEA em vermelho.	65
Figura 4-3 – Esquema simplificado da gotícula apoiada em um substrato e com superfície da gotícula deformada. Com destaque em vermelho para a variável a ser eliminada na redução do modelo da CIEA.	79
Figura 5-1 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 0.1$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$	87
Figura 5-2 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 1.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_a$, $T_a = 254.13K$, $T_n = 254.75K$	88
Figura 5-3 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 5.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$	89
Figura 5-4 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 10.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$	89
Figura 5-5 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula gotículas no estágio de solidificação, com $Bi=0.1$, onde a curva azul, GITT, curva preta, CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ e curva vermelha, CIEA $H_{0,0}/H_0$,	90

Figura 5-6 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula gotículas no estágio de solidificação, com $Bi=1.0$, onde a curva azul, GITT, curva preta, CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ e curva vermelha, CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$.	91
Figura 5-7 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula no estágio de solidificação, com $Bi=5.0$, sendo curva azul, GITT e curva preta, CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$.	92
Figura 5-8 - Comparação da temperatura adimensional no centro da gotícula para a (a) estágio de Super-Resfriamento (1°) e (b) Resfriamento (4°), das abordagens propostas (GITT e CIEA) com os dados da literatura HINDMARSH <i>et al.</i> , (2003), ($T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254$).	93
Figura 5-9 - Influência da velocidade do ar e do raio da gota e na frente de solidificação e na temperatura adimensional da gota. GITT ($M = 40$) e CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$), $St = 0.11$.	94
Figura 5-10 - Influência da velocidade do ar e do raio da gota e na frente de solidificação e na temperatura adimensional da gota. GITT ($M = 40$) e CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$), $St = 0.11$.	96
Figura 5-11 - Pontos (destacados em vermelho) para análise de convergência da solução pela GITT / CIEA-GITT.	97
Figura 5-12 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e $Bi=0.1$, $Bi_c = 1.0$, Bi_m e $Bi_r = 0$. Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$).	102
Figura 5-13 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e $Bi=0.1$, $Bi_c = 1.0$, Bi_m e $Bi_r = 0$. Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$).	103
Figura 5-14 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e valores de HINDMARSH, <i>et al.</i> , (2003), Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$).	104
Figura 5-15 - Gotícula apoiada em uma superfície com diferentes ângulos de contato....	105

Figura 5-16 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com diferentes ângulos de contato. Sendo GITT (M=15x15), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e M=10).	105
Figura 5-17 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e com diferentes valores do Biot de contato. GITT (M=15x15), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e M=10).	106
Figura 5-18 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 120° e com diferentes valores do Biot de contato. GITT (M=15x15), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e M=10).	107
Figura 5-19 - Comparação da região de contato da gotícula com geometria irregular (gotícula deformável) e geometria regular (gotícula idealizada).....	108
Figura 5-20 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e 120° . Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e M=10) e deformada: CIEA- <i>NDSolve</i> ($H_{1,1}, H_{0,0}$)	110
Figura 5-21 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e com diferentes Raio da gotícula. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e M=10) e deformada: CIEA- <i>NDSolve</i> ($H_{1,1}, H_{0,0}$)	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 4-1 - Abordagens / combinações utilizadas para a análise dos modelos físicos.....	41
Tabela 5-1 - Propriedades e dados de entrada (HINDMARSH et al.,2003).....	93
Tabela 5-2 Valores adotados para o estudo da análise paramétrica e os valores resultantes nos parâmetros adimensionais.	95
Tabela 5-3 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1},H_{0,0}$). Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.0$, $Bir = 0.0$	98
Tabela 5-4 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via GITT. Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.0$, $Bir = 0.0$	99
Tabela 5-5 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1},H_{0,0}$). Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.01$, $Bir = 0.01$	99
Tabela 5-6 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1},H_{0,0}$). Com os valores dos grupos adimensionais da Tab. 5.2	100
Tabela 5-7 - Valores da temperatura média adimensional em diferentes instantes de tempo e angulo de contato. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1},H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA- <i>NDSolve</i> ($H_{1,1},H_{0,0}$).....	109
Tabela 5-8 - Valores da temperatura média adimensional em diferentes valores de raio para gotícula idealizada e deformada. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1},H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA- <i>NDSolve</i> ($H_{1,1},H_{0,0}$).....	110
Tabela A-1 Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=0.1$, $Bir = 0.0$, $Bim = 0.0$	122

Tabela A-2 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=10.0$, $Bi_r = 0.00$, $Bi_m = 0.0$	122
Tabela A-3 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=0.11$, $Bi_r = 0.01$, $Bi_m = 0.0$	122
Tabela A-4 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula pela GITT ($M=20$), CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$ e CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$	123
Tabela A-5 - Valores adimensionais da temperatura, no estágio de solidificação, na superfície da gotícula $Bi = 0.1$ e $St = 0.11$	124
Tabela A-6 - Valores adimensionais da temperatura, , no estágio de solidificação, na superfície da gotícula $Bi = 1.0$ e $St = 0.11$	124
Tabela A-7 - Valores adimensionais da temperatura, no estágio de solidificação, para valores definidos pela Tab. 5.1	124
Tabela A-8 - Valores adimensionais da frente de solidificação da gotícula suspensa para parâmetros da Tab.1 pela GITT e CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$	125

NOMENCLATURA

B_j	Parâmetro auxiliar da condição de contorno não linear no estágio j .
Bi	Número de Biot para transferência de calor convectivo entre a gotícula e o ar.
Bic	Número de Biot para transferência de calor convectivo entre a gotícula e o substrato.
Bi_m	Grupo adimensional para transferência de massa
Bi_r	Grupo adimensional para transferência de calor radiativo
b	Raio de curvatura da gotícula (m)
c	Calor específico ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
C_1	Coefficiente do problema filtro da GITT para a gotícula apoiada
C_2	Coefficiente do problema filtro da GITT para a gotícula apoiada
C_v	Constante na solução da integral de Hermite
$C_{n,k}$	Coefficiente da condição de contorno transformado
d_k	Termo de dissipação linear
D_{ab}	Difusividade (m^2/s)
f_k	Função não-homogênea
F_n	Filtro aplicado para a solução GITT da gotícula apoiada
g	Gravidade (m/s^2)
g^k	Termo fonte
\bar{g}_k	Termo fonte transformado
h	Coefficiente de transferência de calor ($W\ m^{-2}\ K^{-1}$)
H_j	Parâmetro auxiliar da condição de contorno não-linear na etapa j (1,2,3 ou 4)

$H_{\alpha,\beta}$	Aproximação de Hermite
h_c	Coeficiente de transferência de calor da base ($W m^{-2} K^{-1}$)
h_m	Coeficiente de transferência em massa ($m s^{-1}$)
J_n	Função de Bessel
k	Condutividade térmica ($W m^{-1} K^{-1}$)
L	Calor latente de solidificação ($J kg^{-1}$)
L_e	Calor latente de evaporação ($J kg^{-1}$)
L_k	Operador da variável “x” que explica a difusão linear
L_m	Calor latente da mistura de água (gelo-líquido) ($J kg^{-1}$)
L_s	Calor latente de sublimação ($J kg^{-1}$)
$M(\mu)$	Autofunção na direção “ μ ” para a solução via GITT da gotícula apoiada.
n	Vetor normal para fora da superfície S
N_n	Norma da direção μ
N_r	Norma da direção “r”
Nu	Número de Nusselt
P_n	Polinômio de Legendre de ordem “n”
q_r	Fluxo de calor radiativo (W/m^2)
q_c	Fluxo de calor convectivo (W/m^2)
q_m	Fluxo de calor devido a transferência de massa (W/m^2)
r	Coordenada radial (m)
r_d	Variável radial condicionada com a região para gotícula deformada.
r_{dc}^*	Variável radial na região de contato gotícula-ar

r_{df}^*	Variável radial na geometria deformada (gotícula-base)
R_d	Raio de gotícula (m)
Re	Número de Reynolds
R_H	Umidade relativa do ar
R_{ini}	Posição da frente de solidificação após recalescência (m)
Pr	Número de Prandtl
q	Fluxo de calor
S	Superfície
$s(t)$	Frente de solidificação (m)
Sc	Número de Schmidt,
St	Número de Stefan
Sh	Número de Sherwood
t	Variável de tempo (s)
$T(r,t)$	Distribuição de temperatura (K)
T_ℓ	Distribuição de temperatura para a gotícula apoiada (K)
\bar{T}	Distribuição de temperatura transformada (K)
T_a	Temperatura do ar ambiente (K)
T_b	Temperatura na base
T_f	Temperatura de congelamento (K)
T_n	Temperatura de nucleação (K)
T_0	Temperatura inicial (K)
v	Velocidade de fluxo de ar ($m\ s^{-1}$)
V_{dp}	Volume de gotículas (m^3)
V_{gi}	Volume da gotícula idealizada
V_{ice}	Volume de gelo (fase sólida) após recalescência (m^3)

V	Variável transformada para a gotícula apoiada em uma superfície
\bar{V}	Variável transformada para a gotícula apoiada em uma superfície transformada.
V^*	Variável transformada para a gotícula apoiada em uma superfície transformada e homogênea.
w_k	Função peso
x	Variável espacial adimensional
$y(x)$	Função na integral de Hermite

Símbolos Gregos

α	Difusividade térmica ($m^2 s^{-1}$)
α_k	Parâmetro para simplificação
$\beta^{n+0.5,p}$	Autofunção para solução via GITT da gotícula apoiada
ε	Emissividade
δ	Delta de Kronecker
$\theta_{i,j}$	Temperatura adimensional no estágio i e fase j.
θ_ℓ	Temperatura adimensional na fase líquida para a gotícula apoiada.
$\theta^*(x, \tau)$	Temperatura auxiliar dependente.
$\hat{\theta}(\tau)$	Variável auxiliar dependente
$\bar{\theta}$	Variável adimensional da temperatura média para a gotícula apoiada.
$\bar{\theta}_n$	Variável da temperatura adimensional transformada

λ_n	Autovalores para a solução via GITT da gotícula apoiada.
$v(\tau)$	Posição de frente de solidificação adimensional
$\eta(\tau)$	Posição da frente de solidificação adimensional sendo $(=1 - v(\tau))$
μ	Variável zenital transformada
μ_k	Autovalor
ρ	Massa específica (kg m ⁻³)
$\rho_{v,o}$	Massa específica de vapor de água em 273 K (kg m ⁻³)
$\rho_{v,l,s}$	Massa específica de vapor de água da gota líquida na superfície da gotícula (kg m ⁻³)
$\rho_{v,ice,s}$	Massa específica de vapor de água da gota sólida na superfície da gotícula (kg m ⁻³)
$\rho_{v,a}$	Massa específica de vapor de água ao redor do ar na fase líquida (kg m ⁻³) ou sólida (gelo)
σ	Constante de Stefan-Boltzmann (W m ⁻² K ⁻⁴)
τ	Variável do tempo adimensional
ϕ_k	Termo não-homogêneo
φ	Variável zenital
φ_f	Ângulo de Contato
Ψ_k	Autofunção

Subscrito e Sobrescrito

a	Ar
av	Média
c	Convecção
j	estágio, sendo 1, 2, 3 ou 4.
m	Transferência de massa convectiva
n	Autovalores para solução via GITT da gotícula apoiada

<i>p</i>	Número de termos
<i>r</i>	Radiativa
<i>ice</i>	Fase sólida
<i>s</i>	Superfície
<i>l</i>	Fase líquida
<i>ℓ</i>	Fase líquida para gotícula apoiada
<i>1</i>	Primeiro estágio (Super-Resfriamento)
<i>2</i>	Segundo estágio (Recalescência)
<i>3</i>	Terceiro estágio (Congelamento)
<i>4</i>	Quarto estágio (Resfriamento)
<i>k</i>	Índices 1,2 ou 4.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão introduzidas as motivações que conduziram ao estudo da solidificação de gotículas de água super-resfriadas utilizando modelos matemáticos para a simulação e os objetivos que norteiam a realização deste trabalho.

1.1 Motivação e Objetivo

O congelamento de gotículas de água super-resfriadas encontra-se em aplicações dos mais diversos campos, dentre eles: aeroespacial e aeronáutica, naval, transmissão de energia elétrica, meteorologia, refrigeração, criopreservação, e despertam o interesse de diversos pesquisadores que buscam melhorar a eficiência das superfícies superhidrofóbicas, hidrofóbicas, hidrofílicas ou gelofóbicas. Neste sentido, o tempo de congelamento das gotículas de água super-resfriadas é um parâmetro especialmente importante no estudo de revestimentos para evitar o acúmulo de gelo nas superfícies sólidas, sendo a indústria aeronáutica particularmente afetada devido às condições ambientais extremas em que as aeronaves operam.

A concentração de gelo nos mais diversos componentes das aeronaves, como no sistema de propulsão ou entradas de ar, reduz a eficiência destes sistemas, e gelo em sensores aeronáuticos como tubos de Pitot, podem causar erros de leitura nesses instrumentos. Entre os anos de 1986 e 1996 a Organização Internacional da Aviação Civil (ICAO sigla em inglês) registrou mais de 40 acidentes aeronáuticos envolvendo acúmulo de gelo nas aeronaves (CAO, *et al.*, 2018) e por esse motivo, estudos sobre o acúmulo de gelo nas superfícies estão em destaque nos principais centros de pesquisa do mundo.

Para que seja possível simular e analisar a solidificação de gotículas de água super-resfriadas o conhecimento das etapas que governam este processo é necessário. Nos estudos experimentais e numéricos quatro etapas distintas são observadas neste processo de solidificação de gotículas de água super-resfriadas (Figura 1.1). CHAUDHARY, LI, (2014)

definiram cada uma dessas etapas como: 1. Estágio de super-resfriamento, durante o qual a gotícula líquida é resfriada de uma temperatura inicial para abaixo da temperatura de congelamento até que ocorra a nucleação cristalina; 2. Estágio de recalescência, durante o qual o super-resfriamento impulsiona o rápido crescimento do cristal de água a partir dos núcleos de cristal, 3. Estágio de solidificação, quando o crescimento do cristal da gotícula (frente de solidificação) é regido pela taxa de transferência de calor da gotícula até o ponto em que a gotícula está completamente congelado; 4. Estágio de resfriamento, quando a temperatura da gotícula sólida é reduzida para a temperatura do ar ambiente.

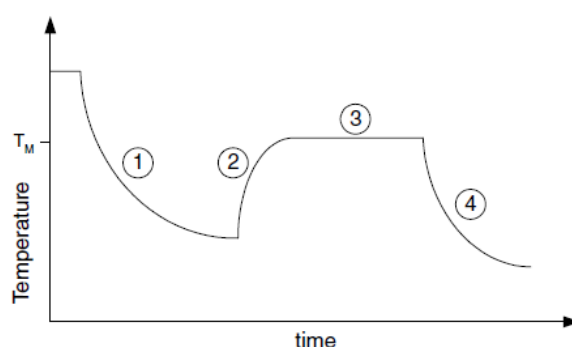


Figura 1-1 - Evolução da temperatura da gotícula super-resfriada nos 4 estágios de congelamento. 1. Super-Resfriamento, 2. Recalescência. 3- Solidificação, 4. Resfriamento. (HINDMARSH, et al., 2003).

Com o conhecimento das etapas que ocorre na solidificação da gotícula de água super-resfriadas e com a aplicação da modelagem matemática nas quatro etapas citadas acima podem ser realizadas simulações pela solução das equações diferenciais e algébricas das respectivas etapas, esta aplicação é de extremo interesse para os problemas de solidificação de gotículas super-resfriadas, uma vez que ela permitirá a análise de diversos cenários no campo teórico, de uma forma ágil e barata. Nesse contexto, uma abordagem híbrida numérica-analítica robusta e econômica conhecida como Técnica da Transformação Integral Generalizada – GITT (COTTA, et al., 2016, DE SOUZA, et al., 2015) tem avançado na análise do congelamento de gotículas de água super-resfriada, com base em implementações de soluções híbridas anteriores para problemas de condução de calor com domínio móvel. A GITT é útil para a solução de problemas com gotícula suspensa, porém para a gotícula apoiada no substrato, a combinação com outras técnicas pode oferecer ganhos de agilidade e precisão a essa técnica. Neste sentido, espera-se que modelos reduzidos simplificados sejam particularmente

úteis na redução dos custos computacionais e do envolvimento analítico. Além disso, a CIEA tem uma motivação especial em tarefas intensivas em termos computacionais, tais como na otimização e análise de problemas inversos, quando o problema direto tem de ser resolvido muitas vezes, ou quando a análise de dinâmica populacional e as simulações estocásticas são realizadas, exigindo um grande número de amostras a serem simuladas. Portanto, um procedimento de parâmetros concentrados, baseado na chamada Técnica de Equações Integrais Acopladas (CIEA) (DOS ANJOS, *et al.*, 2021, COSTA, NAVEIRA-COTTA, 2019, REIS, *et al.*, 2018) será empregado como técnica para reduzir a formulação do problema atual de transferência de calor. A formulação da CIEA oferece um aprimoramento substancial sobre os esquemas clássicos de aproximação em termos de precisão, sem introduzir complexidade adicional nas equações diferenciais simplificadas finais a serem tratadas.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo aplicar modelos reduzidos na solução da equação de condução de calor para o problema de solidificação de gotículas de água super-resfriadas, com sua superfície sujeita aos fenômenos de convecção, radiação e resfriamento evaporativo e comparar com soluções numéricas e híbridas, como a GITT. Além disso, a gotícula será analisada em duas situações distintas, a primeira com a gotícula suspensa envolta de uma corrente de ar frio (Fig 1.2a e Fig 1.2b) e a segunda para a gotícula apoiada em uma superfície superhidrofóbicas e uma corrente de ar frio. Na primeira situação, todas as etapas são reduzidas através da CIEA, enquanto na situação com a gotícula apoiada é realizada a modelagem e a simulação apenas do primeiro estágio, porém comparando com um cenário de esfera ideal (Fig. 1.3a) e esfera deformada (Fig. 1.3b). Desta forma será possível simular computacionalmente o tempo de congelamento e todos os fenômenos físicos presentes no problema proposto.

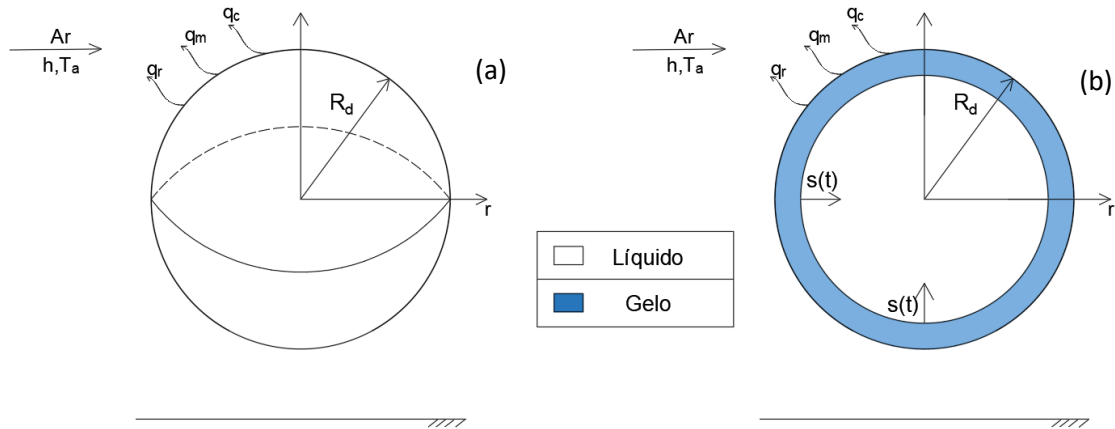


Figura 1-2 - Configuração de uma gota esférica suspensa e sujeira a uma corrente de ar fria e com os fenômenos de fluxo de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) e (b) Configuração de uma gotícula esférica suspensa e movimento da frente de solidificação.

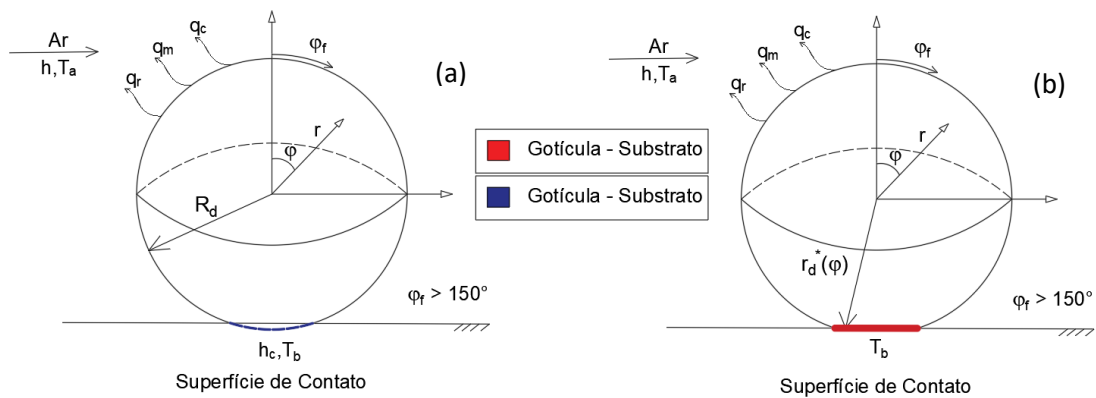


Figura 1-3 - Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria regular e (b) Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria irregular, ambas as configurações estão sujeitas a uma corrente de ar fria.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

O presente capítulo busca realizar uma revisão da literatura a respeito de trabalhos que analisaram a solidificação de gotículas de água super-resfriadas e a respeito da aplicação da CIEA para redução de modelo matemático e a abordagem da GITT como técnica de solução de equações diferenciais. Desta forma, este capítulo está dividido em duas seções, a primeira sobre a solidificação de gotículas de água, onde foram discutidos trabalhos que abordaram as gotículas suspensas em uma corrente de ar e/ou apoiada em uma superfície hidrofóbica ou hidrofílica. Já a segunda seção, aborda os métodos utilizados para a realização da análise numérica do presente trabalho, ou seja, uma revisão sobre a GITT e a CIEA.

2.1 Solidificação de Gotículas de Água

A solidificação de gotículas de água super-resfriadas está sendo amplamente estudada na literatura, com contribuições experimentais e numéricas. HINDMARSH, *et al.*, (2003) é visto como um dos principais artigos para a análise de uma gotícula de água suspensa e sujeita a uma corrente de ar fria. Em seu trabalho, a etapa de solidificação foi resolvida considerando o problema de fase dupla de Stefan. Dois modelos diferentes foram considerados em relação à distribuição interna de temperatura dentro das gotículas, um considerando a condução térmica unidimensional transiente, com domínio móvel na fase de solidificação, e o outro considerando uma formulação de parâmetros concentrados na qual a temperatura das gotículas foi assumida como espacialmente uniforme. Os autores compararam seu resultado numérico com os obtidos por um experimento realizado, comprovando a eficiência dos dois modelos propostos. Além disso, todas as correlações para a interação ar-gotícula, são encontradas no trabalho dos autores (HINDMARSH, *et al.*, 2003), como para, os números de Nusselt (Nu) e de Sherwood (Sh) e as massas específicas (ρ_v), dadas pelas equações 2.1-2.5:

$$Nu = 1.56 + 0.616(Re^{1/2})(Pr^{1/3}) \quad (2.1)$$

$$Sh = 1.56 + 0.616(Re^{1/2})(Sc^{1/3}) \quad (2.2)$$

$$\rho_{v,l,s}(T_{l,l}(r,t)) = \frac{1.323}{T_{l,l}(r,t)} \exp\left(19.83 - \frac{5417}{T_{l,l}(r,t)}\right) \quad (2.3)$$

$$\rho_{v,a} = \begin{cases} RH \left[\frac{1.323}{T_a} \exp\left(19.83 - \frac{5417}{T_a}\right) \right] & \text{para fase líquida} \\ RH \left[\frac{1.323}{T_a} \exp\left(22.49 - \frac{6141}{T_a}\right) \right] & \text{para fase sólida} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\rho_{v,ice,s}(T_{ice,j}(r,t)) = \frac{1.323}{T_{ice,j}(r,t)} \exp\left(22.49 - \frac{6141}{T_{ice,j}(r,t)}\right) \quad (2.5)$$

Onde, Re é o número de Reynolds, Pr é o número de Prandtl, Sc é o número de Schmidt, $T_{l,l}$ é a temperatura da gotícula no primeiro estágio e na fase líquida, $T_{ice,j}$ é a temperatura da gotícula na fase sólida e estágio j, onde j é o referente ao terceiro ou quarto estágio, RH é a umidade relativa, r é o raio da gotícula e t é o tempo.

Além disso, trajetória, resfriamento e congelamento de gotículas de água em climas frios são questões importantes para modelagem e previsão de fenômenos de formação de gelo em navios e estruturas offshore, tornando os trabalhos com gotícula suspensa de importante análise para embarcações. Devido às condições ambientais adversas em mares frios e áreas oceânicas, a formação de gelo por pulverização do mar é induzida pelo vento e pelas ondas devido ao seu impacto na proa de embarcações marítimas e/ou na base de estruturas offshore. (DEGHANI-SANIJ, *et al.*, 2017b, a, DEGHANI-SANIJ, *et al.*, 2020).

Em seus artigos DEGHANI-SANIJ, *et al.*, 2017b, DEGHANI, *et al.*, 2016, os autores analisaram e modelaram a trajetória e velocidade da gotícula de água após o impacto nas embarcações, mostrando a evolução da pulverização da água salgada e o movimento da

nuvem formada pelas gotículas em um navio. Entretanto os autores inicialmente não analisaram o congelamento desta gotícula, nem o tempo de congelamento das gotículas. Porém, em seu recente trabalho, DEHGHANI-SANIJ, *et al.*, (2020), estenderam suas aplicações, analisando tanto a trajetória da gotícula salgada quanto o mecanismo de congelamento que ocorre. Nesta contribuição, os autores seguiram o mesmo modelo proposto por HINDMARSH, *et al.*, 2003, ou seja, analisando os fenômenos de transferência de calor por convecção, radiação e transferência de massa na interface ar-água e a transferência de calor por condução no interior da gotícula. A diferença foi que DEHGHANI-SANIJ, *et al.*, (2020), utilizaram uma abordagem de solução semi-analítica, que foi validada e bem empregada no estudo.

CARVALHO, *et al.*, 2020, analisaram numericamente os quatro estágios presentes na solidificação de uma gotícula super-resfriada suspensa em uma corrente de ar frio. Os autores modelaram o fenômeno físico por equações diferenciais parciais não-lineares e aplicaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) como solução destas equações e com o desenvolvimento de um código na plataforma Mathematica® os autores obtiveram a evolução da temperatura da gotícula em diferentes valores de Biot, de Stefan e raio da gotícula. Utilizando o mesmo modelo apresentado em CARVALHO, *et al.*, 2020, ANJOS, *et al.*, 2021 apresentaram, numericamente, a evolução da gotícula utilizando a Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA), com as aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ para obter um modelo reduzido das equações diferenciais parciais. ANJOS, *et al.*, 2021 analisaram a evolução da temperatura na superfície e no centro da gotícula para diferentes valores de Biot, de Stefan, raio da gotícula e velocidade da corrente de ar frio. Os autores também compararam seus resultados com o da literatura e da técnica GITT, comprovando que a técnica com modelo reduzido é uma solução atrativa para analisar este fenômeno físico.

Os artigos citados acima, focaram na aplicação envolvendo o resfriamento da gotícula suspensa, não abordando mais uma importante aplicação que é o resfriamento da gotícula apoiada na superfície. Nesta aplicação de gotículas de água super-resfriadas apoiadas em superfícies, o tempo de congelamento de gotículas de água super-resfriadas também é um parâmetro muito importante no estudo de revestimentos de superfícies para evitar o acúmulo de gelo, como citado anteriormente. Muitas vezes o acúmulo por gelo tem efeitos indesejáveis sobre as atividades humanas, sendo que mesmo uma pequena camada de gelo

formada pode causar danos catastróficos, como por exemplo a queda de linhas de transmissão de energia, o rompimento de tubulações e condições de voo perigosas para aviões (MISHCHENKO, *et al.*, 2010).

TABAKOVA, S., FEUILLEBOIS, (2004) analisaram o congelamento de gotículas líquidas imersas em ar frio, incluindo diferentes configurações na gotícula, seja ela completamente esférica à espalhada em uma superfície de apoio. Sua formulação foi baseada nos problemas de fase única de Stefan. Além disso, o método de perturbação foi utilizado para obter a evolução da frente de congelamento em função do tempo, mantendo a temperatura da superfície gotícula constante e igual à temperatura do ambiente externo. A solução obtida através do método de perturbação foi comparada à solução puramente numérica, mostrando boa concordância, exceto na região próxima ao centro da gotícula, onde o método de perturbação não aderiu à abordagem numérica.

TABAKOVA, *et al.*, (2010), estenderam o trabalho em TABAKOVA, FEUILLEBOIS, (2004), ao incluir o fenômeno de convecção de calor na superfície durante a fase de solidificação das gotículas de água super-resfriadas, a utilização do problema de Stefan de fase única e da aplicação do método da perturbação foi mantida. Com esses novos resultados, os autores então sugeriram correlações explícitas para estimar o tempo de congelamento.

ZHANG, X, *et al.*, (2019) modelaram o congelamento de uma gotícula de água em uma superfície resfriada e com diferentes ângulos de contato com aplicação do método de capacidade de calor equivalente, conseguindo analisar o tempo de congelamento e a forma da gotícula, tanto experimental quanto numericamente. Em seu artigo, CHAUDHARY, LI, (2014) estudaram o congelamento de gotículas de água estáticas em superfícies hidrofílicas e hidrofóbicas. Os autores gravaram experimentalmente a evolução da temperatura e investigaram numericamente a transferência de calor durante o processo de congelamento de gotículas de água super-resfriadas, pelo método da entalpia, e conseguiram analisar todos os 4 fenômenos que ocorrem no processo de solidificação da gotícula, assim como o avanço da frente de solidificação no congelamento da gotícula. YAO, *et al.*, (2020) apresentaram estudos experimentais e numéricos sobre o congelamento de gotículas de água em uma superfície fria com diferentes temperaturas. O seu modelo numérico consiste em dois estágios, o primeiro é com a equação de condução de calor, para determinar a evolução da

temperatura da gotícula antes da ocorrência de congelamento, já o segundo é para simular o processo de congelamento por meio de um modelo de mudança de fase estendido. Os autores realizaram experimentos com o objetivo de observar e registrar o processo de congelamento. O perfil da gotícula e a propagação da interface água-gelo em movimento durante o congelamento foram obtidos a partir da análise de imagens.

2.2 Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA)

Uma gama dos problemas práticos de engenharia, como a solidificação de gotícula de água super-resfriadas, é formulada por equações diferenciais parciais. Estas formulações podem apresentar dificuldades associadas a um acentuado envolvimento analítico e/ou considerável esforço computacional. Desta forma, é interessante para o engenheiro buscar métodos e formulações que possam simplificar este sistema de equações pela redução do número de variáveis independentes do problema e pela integração (média) das equações diferenciais. Além disso, essa redução, precisa necessariamente reter as informações das condições de contorno relacionadas a variável que for eliminada, assim tornando uma abordagem aplicável a diversos problemas de engenharia.

A Técnica das Equações Integrais Acopladas (CIEA) é uma ferramenta bem vantajosa por ser um destes método de redução e possibilita a elaboração de códigos computacionais simples e ágeis. O formalismo CIEA aproxima integrais dos perfis de temperatura e fluxo por uma combinação linear do integrando e suas derivadas nos limites de integração.

Na literatura, diversos trabalhos já aplicaram a CIEA para obter uma solução de modelo reduzido a partir de equações diferenciais parciais. CORRÊA, COTTA (1998) aplicaram a redução da equação de condução de calor unidimensional em coordenadas retangulares e bidimensional em coordenadas cilíndricas, ambas lineares, pela abordagem clássica e CIEA. Os autores analisaram a CIEA utilizando as aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$, $H_{1,1}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{1,1}$ em diferentes valores de Biot e compararam com a solução exata do problema. Foi observado no trabalho que todas as aproximações apresentam bons resultados para um baixo número de Biot, enquanto para números altos de Biot as formulações $H_{1,1}/H_{0,0}$

e $H_{1,1}/H_{1,1}$ são as mais sugeridas para este tipo de problema, pois apresentam um erro menor em relação a solução exata, quando comparado as aproximações clássicas e a $H_{0,0}/H_{0,0}$.

REGIS, *et al.*, (2000) propuseram um modelo de parâmetros concentrados aprimorado para a condução de calor transiente em uma barra de combustível nuclear, onde a regra trapezoidal corrigida unilateral (aproximação $H_{1,0}$) foi empregada na integral de temperatura média para o combustível e a regra trapezoidal simples (aproximação $H_{0,0}$) foi empregada na integral de temperatura média para o revestimento e os fluxos de calor. Melhorando a aproximação de REGIS, *et al.*, (2000), SU, COTTA (2001), trabalharam com aproximações de ordem maiores ($H_{1,1}/H_{0,0}$) para conhecer a evolução de temperatura média nas barras de combustíveis nucleares. Os autores também compararam seu resultado com a formulação clássica.

COTTA, *et al.*, (1990) aplicaram pela primeira vez a CIEA para um problema de mudança de fase com o objetivo de desenvolver uma solução analítica aproximada para fusão ou solidificação em uma placa de espessura finita submetida a uma temperatura prescrita variável no tempo em uma superfície e uma temperatura prescrita constante na outra superfície. A acurácia das expressões analíticas obtidas dessa maneira é examinada comparando-se os resultados obtidos com os relatados na literatura. A influência de parâmetros físicos como o número de Stefan e a temperatura da superfície aplicada na interface e fluxos de calor de contorno é examinada.

NAVEIRA, *et al.*, (2009) apresentam uma solução híbrida numérica-analítica para convecção forçada laminar transiente sobre placas planas de espessura não desprezível, submetidas a variações temporais arbitrárias do fluxo de calor aplicado na parede na interface fluido-sólido. No problema, os autores aplicaram primeiramente a CIEA para simplificar o problema de condução de calor. Como resultado, uma formulação diferencial parcial concentrada melhorada para a temperatura média transversal da parede foi obtida, para resolver a equação resultante, a solução híbrida numérico-analítica baseada na técnica da transformada integral generalizada (GITT), sob seu modo de transformação parcial, foi então proposta, solucionando o problema transformado através da sub-rotina *NDSolve* na plataforma Mathematica®.

Mais recentemente, COSTA, NAVEIRA-COTTA, (2019), utilizaram a CIEA em um estudo na produção de Biodiesel em microrreatores. Os autores analisaram no trabalho um modelo matemático não-linear acoplado de equações diferenciais parciais de primeira ordem, e com a CIEA foi possível reduzir o modelo em um sistema de EDOs. CABRAL, *et al.*, (2020) apresentaram uma modelagem matemática e abordagem de solução para o processo de secagem de sólidos esferoidais com aplicação de micro-ondas em meios porosos capilares baseada nas equações de Luikov, consistindo em um sistema de equações diferenciais parciais lineares e acopladas decorrentes de balanços de energia, massa e pressão dentro da matriz sólida. Para reduzir este problema, os autores utilizaram da CIEA e a equação simplificada foi solucionada numericamente por um código computacional na linguagem de programação FORTRAN 90/95, que utiliza a sub-rotina IVPAG da biblioteca IMSL. Os resultados obtidos verificados com os disponíveis na literatura e mostraram concordância satisfatória.

Nos últimos anos a CIEA foi recentemente revisada em SPHAIER, *et al.*, (2017), aplicada para o caso da solidificação das gotículas super-resfriados em ANJOS *et al.*, (2021), como citado na Seção 2.1, e nos mais diversos tipos de problemas de engenharia, além dos citados acima, entre eles problemas de aletas, conjugados, secagem, sistemas de proteção térmica aeroespacial, extração de metais por membrana, barras de combustível nuclear, trocadores de calor, microrreatores para síntese de biodiesel, nanocompósitos, e entre outros (AN, *et al.*, 2017, CHENG, *et al.*, 2018, REIS, *et al.*, 2018).

2.3 Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

Com as limitações das técnicas de soluções puramente analíticas para obter soluções exatas dos problemas, métodos híbridos estão sendo cada vez mais utilizados, pois combinam procedimentos analíticos e numéricos para a solução do problema. A GITT é uma das principais técnicas híbridas atualmente, a qual tem origem nos métodos da separação de variáveis e na Técnica da Transformada Integral Clássica, e oferece precisão controlada e implementação computacional eficiente para várias classes de problemas, principalmente

aplicada em mecânica dos fluidos e transferência de calor, sejam os problemas lineares ou não (COTTA, 1990; MIKHAILOV e COTTA 1998, MATT 2013)).

Na década passada, os trabalhos de COTTA, *et al.* (2015,2016) apresentaram uma nova abordagem para a aplicação da GITT em problemas não-lineares, onde as não-linearidades são incorporados junto com o problema de autovalor auxiliar. Os autores ilustraram esta nova aplicação em um problema de condução com condição de contorno não-linear e compararam com a abordagem mais tradicional da GITT, melhores taxas de convergências para os resultados com a nova abordagem.

Além disso, a GITT possui uma rica aplicação para soluções com problemas de fronteira móveis, por exemplo, problemas de mudança de fase, como nos trabalhos de (COTTA, 1986; RUPERTI JR, COTTA 1991, RUPERTI JR, *et al.*, 1992, RUPERTI JR, *et al.* 1998, SIAS, *et al.*, 2007, MONTEIRO, *et al.*, 2011, CARVALHO, *et al.*, 2021).

DINIZ, *et al.*, (1990), aplicaram a GITT em um problema ablativo unidimensional em placas planas utilizando três tipos de fluxo de calor prescrito na condição de contorno, sendo eles, fluxo constante, fluxo com variação linear temporal e fluxo com variação parabólica temporal. Por fim, os autores verificaram os seus resultados com os disponíveis na literatura, apresentando uma boa aderência a eles.

Seguindo na aplicação dos problemas ablativos, SIAS, *et al.*, (2007) combinaram a utilização da técnica do balanço integral com a GITT no problema apresentado por DINIZ, *et al.*, (1990). Foi possível observar no trabalho que a combinação da GITT com a técnica de balanço integral ofereceu resultados com convergências mais rápidas que o da aplicação isolada da GITT. Assim, foi notado que a GITT pode ser combinada por outros métodos de solução ou técnicas para reduzir o modelo e agilizar/melhorar a convergência de solução. Em outro trabalho, SIAS, *et al.*, (2009) combinou a GITT com a CIEA, para um problema de ablação com pirólise em geometria plana e fluxo de calor prescrito. Como citado na seção anterior, a CIEA é utilizada para proporcionar a simplificação dos problemas através da redução do número de variáveis independentes e os resultados obtidos pelos autores apresentaram uma boa convergência, mostrando a combinação da CIEA com a GITT é uma ferramenta poderosa para simulação.

Para os problemas de solidificação, tema proposto da presente dissertação, é encontrado recentemente na literatura o trabalho de CARVALHO, *et al.*, (2021), também citado na seção 2.1, onde os autores aplicaram a nova formulação detalhada em COTTA, *et al.*, (2015,2016) para o problema da solidificação de gotículas super-resfriadas, nos 3 estágios possíveis do processo (estágio 1: Super-Resfriamento, estágio 3: solidificação, e estágio 4: resfriamento). O código de solução foi resolvido na plataforma Mathematica® e com auxílio da sub-rotina *NDSolve*, os autores conseguiram obter resultados próximos daqueles de outros trabalhos numéricos, também validando com o trabalho do HINDMARSH, RUSSELL, *et al.*, (2003).

Desta forma, lembrando os objetivos do presente trabalho, que é aplicar modelos matemáticos para resolver numericamente os quatro estágios da solidificação da gotícula suspensa em uma corrente de ar frio, aplicando a técnica da CIEA como redução de modelo e desenvolvendo um código no Mathematica® para resolver as equações reduzidas com a sub-rotina *NDSolve*, preenchendo uma lacuna da literatura que é o detalhamento das equações do problema proposto e aplicação de soluções híbridas e alternativas. Para comparar os resultados da CIEA, também foi desenvolvido um código empregando a GITT proposto em CARVALHO, *et al.*, (2021), assim comparando os resultados da CIEA e GITT, variando os parâmetros de Biot, velocidade do ar e raio da gota. Além disso, foi realizada a modelagem para uma gotícula apoiada em uma superfície superhidrofóbica, apenas para o estágio de super-resfriamento, em duas configurações de geometria, considerando a gotícula com uma geometria esférica idealizada (geometria regular) e com uma geometria esférica deformada (geometria irregular). O modelo deste caso compreende a equação de condução de calor bidimensional, em coordenadas esféricas, transiente e não-linear. Para a gotícula idealizada, o modelo foi reduzido com a CIEA (com aproximação $H_{1,1}, H_{0,0}$), aplicada ao longo da coordenada radial, e resolvido pela GITT e *NDSolve*. Uma implementação utilizando a GITT completa para a solução também foi realizada, assim como uma verificação do modelo por um código resolvido inteiramente pela *NDSolve*. Já para a gotícula deformada, foi aplicado a CIEA (com aproximação $H_{1,1}, H_{0,0}$) para redução do modelo e a equação resultante resolvida numericamente pela subrotina *NDSolve*. Desta forma, este trabalho busca contribuir apresentando a modelagem matemática detalhada das situações citadas acima (gotícula suspensa, gotícula idealizada, gotícula deformada), como a

implementação da CIEA e GITT para a solução da equação de condução de calor, não-linear, bidimensional, em coordenadas esféricas, junto com resultados de análise paramétrica do fenômeno físico estudado.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA

O presente capítulo destaca a modelagem matemática para a solidificação de gotículas de água super-resfriadas em duas situações, a primeira com a gotícula suspensa em uma corrente de ar fria (Fig 3.1), analisando a situação de resfriamento (Fig 3.1a) e mudança de fase (Fig 3.1b), e a segunda com a gotícula apoiadas em uma superfície superhidrofóbicas e sujeita a uma corrente de ar fria (Fig 3.2), sendo considerada uma situação com a geometria regular (Fig 3.2a) e outra situação com a geometria irregular (Fig3.2b). Assim, será possível realizar o objetivo deste trabalho que é analisar o tempo de congelamento da gotícula de água super-resfriada.

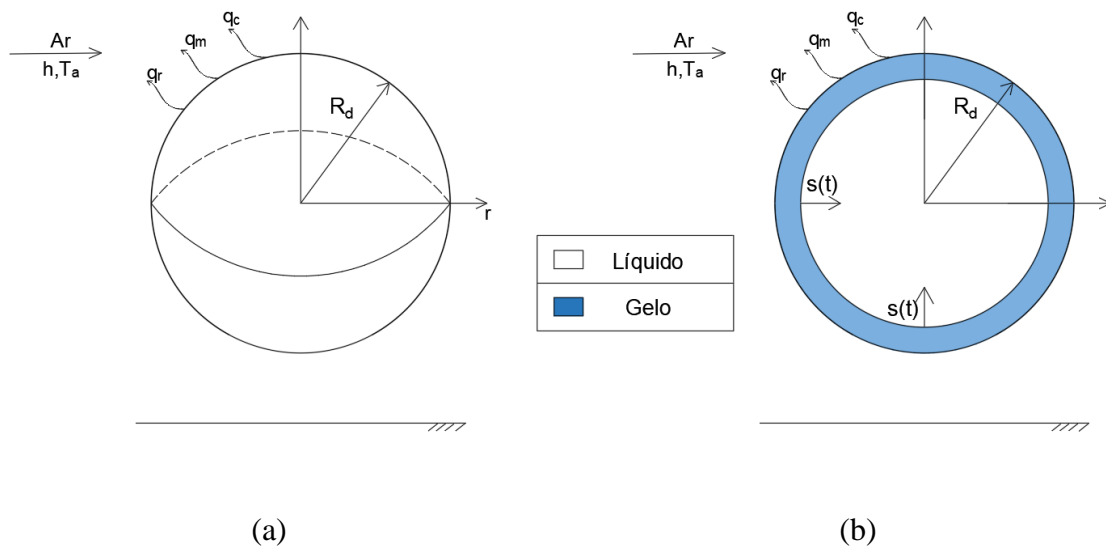


Figura 3-1 - (a) Configuração de uma gota esférica suspensa e sujeita a uma corrente de ar fria e com os fluxos de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) e (b) Configuração de uma gotícula esférica suspensa e mostrando o movimento da frente de solidificação.

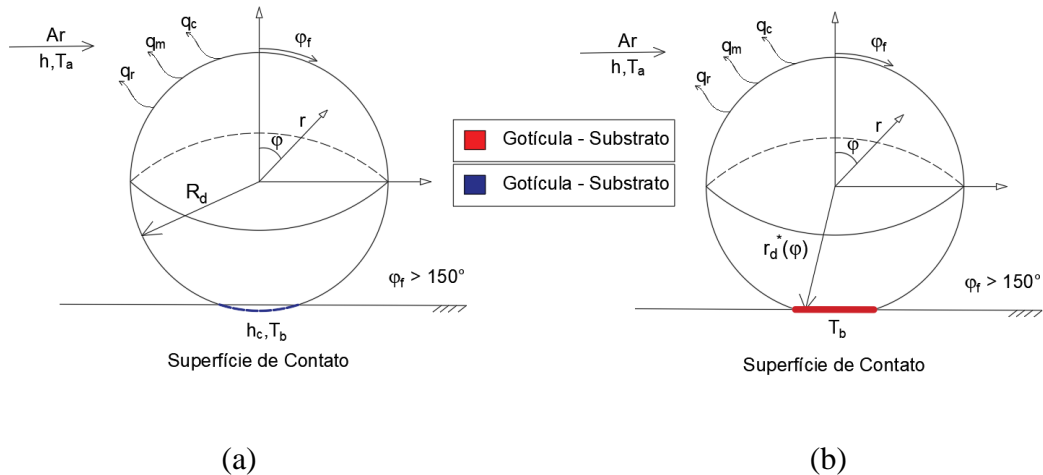


Figura 3-2 – (a) Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície com geometria regular e (b) com geometria irregular, ambas as configurações estão sujeitas a uma corrente de ar fria e com os fluxos de calor por convecção (q_c), radiação (q_r) e transferência de massa (q_m) na fronteira.

3.1 Gotícula Suspensa

Na formulação do balanço de energia para o congelamento de uma gotícula de água suspensa, são consideradas as seguintes hipóteses:

- i) A gota está em repouso e imersa em uma corrente de ar, portanto sujeita a convecção forçada; já que a transferência de calor é gerada por uma fonte externa;
- ii) Para evitar trabalhar uma geometria desconhecida é considerado que a gotícula mantém a forma esférica durante todo o processo;
- iii) Pela simetria da gotícula suspensa, o processo de transferência de calor é assumido como unidimensional na direção radial;
- iv) Gelo e água são isotrópicos e homogêneos, assim é possível adotar propriedades físicas constantes no modelo;
- v) As alterações de massa específica na interface líquido/gelo são desconsideradas;
- vi) Na fase de recalescência, como ocorre experimentalmente, a temperatura da gotícula será considerada uniforme e igual à temperatura de equilíbrio para congelamento (T_c);

vii) Na fase de solidificação, a temperatura da fase líquida é considerada constante e igual a T_c , ocorrendo a mudança de fase, de líquido para sólido.

viii) Na superfície da gota, são incluídos os fenômenos de convecção, radiação e resfriamento evaporativo. A formulação das fases é detalhada nas subseções seguintes.

3.1.1 Estágio de super-resfriamento (1°)

O modelo do estágio de super-resfriamento envolve a equação transiente de condução de calor unidimensional para um domínio fixo, $0 < r < R_d$, temperatura inicial T_0 e com condição de contorno não linear pela transferência de calor convectiva, transferência de massa convectiva e transferência de calor radiativa, como esquematizado na Fig 3.3, e dado pelas Eqs. (3.1-3.4).

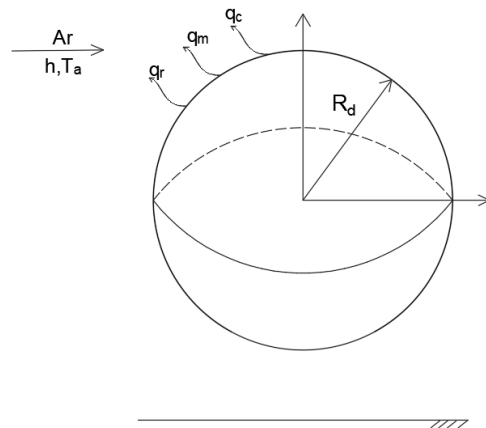


Figura 3-3 – Esquema simplificado de uma gotícula de água, na fase líquida super-resfriada suspensa e sujeita a uma corrente de frente fria.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k_l \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial r} \right) = \rho_l c_l \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial t} \quad 0 < r < R_d, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$T_l(r, t_0) = T_0 \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.3)$$

$$-k_l \left. \frac{\partial T_l(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = h[T_l(R,t) - T_a] + h_m L_e [\rho_{v,l,s}(T_l(R,t)) - \rho_{v,a}] + \varepsilon \sigma [T_l^4(R,t) - T_a^4] \quad (3.4)$$

onde, T_l [K] é a temperatura da fase líquida no primeiro estágio, k_l [W/mK] é a condutividade na térmica na fase líquida, c_l [J/kgK] é o calor específico na fase líquida, T_0 [K] é a temperatura no instante inicial, T_a [K] é a temperatura do ar, h [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor convectivo, h_m [m/s] é o coeficiente de transferência de massa, $\rho_{v,l,s}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor de água na superfície da gotícula, $\rho_{v,l,a}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor do ar, ε é a emissividade da superfície da gotícula, σ [W/m²K⁴] é a constante de Stefan-Boltzmann, L_e [J/kg] é o calor latente de evaporação, r [m] é a coordenada radial da gotícula, e t [s] o tempo.

Os grupos adimensionais a seguir, Eq. (3.5), são utilizados nas Eqs. (3.1-3.4) para adimensionalizar este sistema de equações.

$$\theta_{l,l} = \frac{T_l}{T_a}, \quad x = \frac{r}{R_d}, \quad \tau = \frac{k_l t}{c_l \rho_l R_d^2}, \quad Bi_l = \frac{h R_d}{k_l}, \quad Bim_l = \frac{h_m L_e R_d \rho_{v,o}}{k_l T_a},$$

$$Bir_l = \frac{\sigma \varepsilon R_d T_a^3}{k_l}, \quad \theta_{l,0} = \frac{T_0}{T_a}, \quad \rho_{ad,l}(\theta_{l,l}(l, \tau)) = \frac{\rho_{v,l,s}(\theta_{l,l}(l, \tau))}{\rho_{v,a}} \quad (3.5.a-h)$$

Desta forma, as equações adimensionais a seguir são obtidas,

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial \theta_{l,l}(x, \tau)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \theta_{l,l}(x, \tau)}{\partial \tau} \quad 0 < R < l, \quad \tau > 0 \quad (3.6)$$

$$\theta_{l,l}(x, 0) = \theta_{l,0} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{1,l}(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{1,l}(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=l} = H_l - B_l^+ (\theta_{1,l}(l, \tau)) \theta_{1,l}(l, \tau) \quad (3.9)$$

$$B_l^+ (\theta_{1,l}(l, \tau)) = Bi_l + Bir_l \theta_{1,l}^3(l, \tau) + \rho_{ad,l} (\theta_{1,l}(l, \tau)) Bim_l \quad (3.10)$$

$$H_l = Bi_l + Bir_l + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_l \quad (3.11)$$

Com o objetivo de simplificar as equações acima, é possível adotar uma transformação de variáveis para tornar as equações descritas em um sistema de coordenadas retangulares ao invés de coordenadas esféricas. Propondo,

$$\theta_l^*(x, \tau) = x \theta_{1,l}(x, \tau) \quad (3.12)$$

O seguinte sistema de equação é obtido:

$$\frac{\partial^2 \theta_l^*(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_l^*(x, \tau)}{\partial \tau} \quad 0 < x < l, \quad \tau > \tau_0 \quad (3.13)$$

$$\theta_l^*(x, 0) = x \theta_{1,0} \quad (3.14)$$

$$\theta_l^*(0, \tau_0) = 0 \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_l^*(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=l} + B_l (\theta_l^*(l, \tau)) \theta_l^*(l, \tau) = H_l \quad (3.16)$$

Onde,

$$B_l(\theta_l^*(l, \tau)) = Bi_l + Bir_l \theta_l^{*3}(l, \tau) + \rho_{ad,l}(\theta_l^*(l, \tau)) Bim_l - 1 \quad (3.17)$$

$$H_l = Bi_l + Bir_l + \frac{\rho_{vi,a}}{\rho_{v,o}} Bim_l \quad (3.18)$$

3.1.2 Estágio de Recalescência (2°)

Para o estágio de recalescência não são necessárias equações diferenciais, já que o processo ocorre quase instantaneamente, como mostrado na Fig. 3.4. Uma vez que a nucleação ocorre, para que seja possível calcular os parâmetros necessários do estágio de recalescência, é necessário localizar os cristais de gelo inicialmente formados. Duas hipóteses foram formuladas por Hindmarsh et al., (2003), a primeira é que a nucleação ocorre inicialmente na superfície externa da gotícula, sendo mais fria que o interior da gotícula e, portanto, atinge pela primeira vez a temperatura de nucleação. Isso leva à formação de uma casca esférica de gelo que se propaga para dentro ao longo do tempo. A segunda hipótese, por outro lado, considera que a nucleação ocorre de forma homogênea, com cristais uniformemente dispersos por toda a gotícula, formando uma mistura líquido-sólido com aparência opaca. O modelo de recalescência baseia-se na premissa de que o calor necessário para elevar a temperatura da gotícula de T_n (temperatura de nucleação) para T_c , deve ser igual ao calor latente liberado para formar o volume de gelo produzido pela nucleação. A equação proposta por HINDMARSH, *et al.*, (2003) para estimar o volume de gelo é representada pela Eq (3.19).

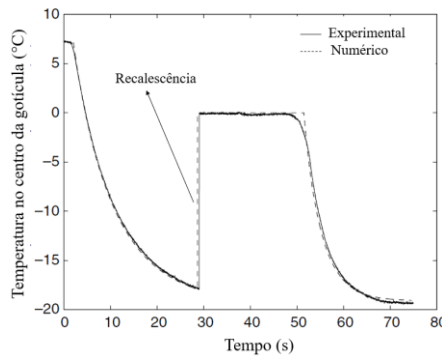


Figura 3-4 – Evolução da temperatura no centro da gotícula, mostrando que o estágio de recalescência ocorre quase instantaneamente. Adaptado HINDMARSH, *et al.*, (2003).

$$V_{ice} = \frac{V_{dp} c_l \rho_l (T_c - T_n)}{L \rho_{ice}} \quad (3.19)$$

onde, V_{ice} [m³] é o volume de gelo, V_{dp} [m³] é o volume da gotícula, c_l [J kg⁻¹ K⁻¹] é o calor específico da gotícula na fase líquida, ρ_l [kg m⁻³] é a massa específica da gotícula na fase líquida, ρ_{ice} [kg m⁻³] é a massa específica da gotícula na fase sólida (gelo), L [J kg⁻¹] é o calor latente de solidificação, T_c [K] é a temperatura de congelamento e T_n [K] a temperatura de nucleação.

Para a hipótese de uma casca esférica na superfície, a posição inicial da interface (R_{ini}), é obtida a partir da fórmula para calcular o volume dela, como segue:

$$R_{ini} = \sqrt[3]{R_d^3 - \frac{3V_{ice}}{4\pi}} \quad (3.20)$$

Para a segunda hipótese, uma mistura água-gelo pode ser considerada como uma fase uniforme, e há uma distribuição homogênea do gelo formado ao longo da gotícula; no entanto, o calor latente L deve ser substituído por um novo valor em relação à mistura água-gelo, L_m dado por:

$$L_m = L \left[1 - c_l \rho_l (T_f - T_n) / L \rho_{ice} \right] \quad (3.21)$$

3.1.3 Estágio de Solidificação (3º)

O modelo de estágio de solidificação envolve a equação transiente de condução térmica unidimensional para um domínio variável ao longo do tempo, $s(t) < r < R_d$, novamente com uma condição de contorno não linear no contorno fixo que representa a transferência de calor convectiva, transferência de massa evaporativa e transferência de calor radiativo, e

temperatura prescrita, T_f , no limite móvel, simplificado na Fig. 3.4 e dado pelas Eqs.(3.22-3.25):

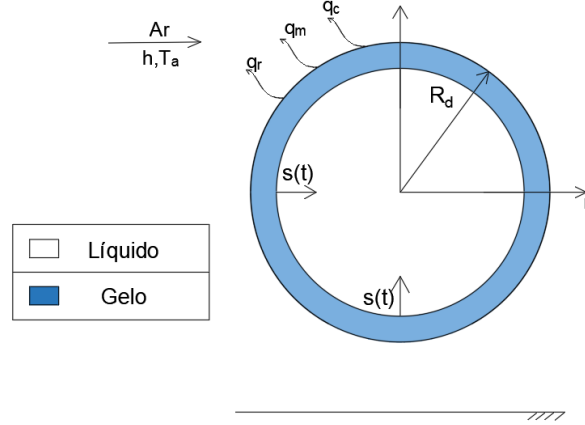


Figura 3-5 — Esquema simplificado do terceiro estágio (solidificação) de uma gotícula de água, na mudança de fase, suspensa e sujeita a uma corrente de frente fria.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k_{ice} \frac{\partial T_{ice}(r,t)}{\partial r} \right) = \rho_{ice} c_{ice} \frac{\partial T_{ice}(r,t)}{\partial t} \quad s(t) < r < R_d, t > t_2 \quad (3.22)$$

$$T_{ice}(r, t_2) = T_f \quad (3.23)$$

$$T_{ice}(s(t), t) = T_f \quad (3.24)$$

$$\left. -k_{ice} \frac{\partial T_{ice}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_d} = h [T_{ice}(R_d, t) - T_a] + h_m L_s [\rho_{v,ice,s}(T_{ice}(R_d, t)) - \rho_{v,a}] + \varepsilon \sigma [T_{ice}^4(R_d, t) - T_a^4] \quad (3.25)$$

Onde, T_{ice} [K] é a temperatura na fase sólida para o estágio de solidificação, T_f [K] é a temperatura de congelamento, $s(t)$ [m] é a posição da frente de solidificação, k_{ice} [W/mK] é a condutividade térmica da fase sólida, c_{ice} [J/kgK] é o calor específico na fase sólida, T_a [K] é a temperatura do ar, h [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor por convecção, h_m [m/s] é o coeficiente de transferência de massa, $\rho_{v,ice,s}$ [kg/m³] é a massa específica de vapor da gotícula na superfície da fase sólida, $\rho_{v,ice,a}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor no ar,

ε é a emissividade da gotícula, σ [W/m²K⁴] é a constante de Stefan-Boltzmann, L_s [J/kg] calor latente de sublimação, r [m] é a coordenada radial da gota, t [s] é o tempo.

A equação diferencial que representa o equilíbrio térmico na frente de solidificação dependerá da hipótese adotada para localizar o gelo formado na fase de recalescência. Para a hipótese da formação de uma casca esférica na superfície da gotícula, a posição do limite móvel é determinada a partir de:

$$L\rho_{ice} \frac{\partial s(t)}{\partial t} = k_{ice} \left. \frac{\partial T_{ice}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=s(t)} \quad (3.26)$$

$$s(t_2) = R_{ini} \quad (3.27)$$

Para a hipótese de uma distribuição uniforme do gelo inicialmente formada, a equação diferencial para o limite móvel é escrita como:

$$L_m\rho_{ice} \frac{\partial s(t)}{\partial t} = k_{ice} \left. \frac{\partial T_{ice}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=s(t)} \quad (3.28)$$

$$s(t_2) = R_d \quad (3.29)$$

Para esta terceira etapa, são utilizados os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\theta_3 = \frac{T_{ice} - T_f}{T_a - T_f}, x^* = \frac{r}{R_d}, \tau = \frac{k_{ice} t}{c_{ice} \rho_{ice} R_d^2}, Bi_3 = \frac{h R_d}{k_{ice}}, Bim_3 = \frac{h_m L_s R_d \rho_{v,o}}{k_{ice} (T_a - T_f)}, Bir_3 = \frac{\sigma \varepsilon R_d T_f^3}{k_{ice}}$$

$$, \beta = \frac{T_a - T_f}{T_f}, v(\tau) = s(\tau) / R_d, \eta(\tau) = 1 - v(\tau) \quad (3.30.a-i)$$

A formulação matemática adimensional resultante para o estágio de solidificação torna-se:

$$\frac{1}{x^{*2}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(x^{*2} \frac{\partial \theta_3(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right) = \frac{\partial \theta_3(x^*, \tau)}{\partial \tau} \quad v(\tau) < x^* < 1, \quad \tau > \tau_2 \quad (3.31)$$

$$\theta_3(x^*, \tau_2) = 0 \quad (3.32)$$

$$\theta_3(v(\tau), \tau) = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial \theta_3(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{y=1} &= Bi_3 (\theta_3(1, \tau) - 1) + Bim_3 \frac{\rho_{v,ice,s} (\theta_3(1, \tau)) - \rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} + \\ &Bir_3 \left(\theta_3(1, \tau) (\theta_3^3(1, \tau) \beta^3 + 4\theta_3^2(1, \tau) \beta^2 + 6\theta_3(1, \tau) \beta + 4) + \left(1 - \frac{T_a^4}{T_f^4} \right) \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Onde,

$$\beta = \frac{T_a - T_f}{T_f} \quad (3.35)$$

com as equações diferenciais de limite móvel adimensional, para cada hipótese de formação de gelo durante a recalcência, dado por:

$$\left. \frac{\partial \theta_3(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{y=v(\tau)} = \frac{1}{St} \frac{\partial v(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.36)$$

$$v(\tau_2) = \frac{R_{ini}}{R_d} \quad (3.37)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_3(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{y=v(\tau)} = \frac{L_m}{L} \frac{1}{St} \frac{\partial v(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.38)$$

$$v(\tau_2) = 1 \quad (3.39)$$

Onde,

$$St = \frac{c_{ice}(T_a - T_f)}{L} \quad (3.40)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no primeiro estágio (super-resfriamento), é possível simplificar o modelo das Eqs. (3.31-3.39) aplicando uma transformação (3.41), para descrevê-las em um sistema de coordenadas cartesianas, como segue:

$$\theta_{ice}^*(x^*, \tau) = x^* \theta_3(x^*, \tau) \quad (3.41)$$

Após a aplicação da Eq. (3.41), o novo sistema de equação a seguir é obtido:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x^*, \tau)}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta_{ice}^*(x^*, \tau)}{\partial \tau} \quad ; \quad v(\tau) < x^* < 1, \quad \tau > \tau_2 \quad (3.42)$$

$$\theta_{ice}^*(x^*, \tau_2) = 0 \quad (3.43)$$

$$\theta_{ice}^*(v(\tau), \tau) = 0 \quad (3.44)$$

$$\left. -\frac{\partial \theta_{ice}^*(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{y=1} = B_3(\theta_{ice}^*(1, \tau)) \theta_{ice}^*(1, \tau) = H_3 \quad (3.45)$$

Sendo,

$$B_3(\theta_{ice}^*(1, \tau)) = Bi_3 + 4Bir_3 \left[1 + \beta\theta_{ice}^*(1, \tau) + \frac{\beta^2\theta_{ice}^{*2}(1, \tau)}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta\theta_{ice}^*(1, \tau)}{2} \right] + \frac{\rho_{v,ice,s}(\theta_{ice}^*(1, \tau))}{\rho_{v,ice,a}} Bim_3 - 1 \quad (3.46)$$

$$H_3 = Bi_3 + Bir_3 \left(1 - \frac{T_a^4}{T_f^4} \right) \frac{1}{\beta} + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_3 \quad (3.47)$$

Por sua vez, as equações da fronteira móvel são dadas por:

$$\left. \frac{\partial\theta_{ice}^*(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{x^*=v(\tau)} = \frac{1}{St} v(\tau) \frac{\partial v(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.48)$$

$$v(\tau_2) = \frac{R_{ini}}{R_d} \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\partial\theta_{ice}^*(x^*, \tau)}{\partial x^*} \right|_{x=v(\tau)} = \frac{L_m}{L} \frac{1}{St} v(\tau) \frac{\partial v(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.50)$$

$$v(\tau_2) = 1 \quad (3.51)$$

Além disso, para trabalhar com um domínio limitado em $]0, n(\tau)[$, a seguinte simplificação pode ser utilizada:

$$x = 1 - x^* \quad (3.52)$$

$$n(\tau) = 1 - v(\tau) \quad (3.53)$$

Aplicando as Eqs. (3.52 e 3.53), no sistema de equação (3.42-3.51), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} \quad 0 < y < v(\tau), \quad \tau > \tau_2 \quad (3.54)$$

$$\theta_{ice}^*(x, \tau_2) = 0 \quad (3.55)$$

$$\theta_{ice}^*(n(\tau), \tau) = 0 \quad (3.56)$$

$$-\left. \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} + B_3 (\theta_{ice}^*(0, \tau)) \theta_{ice}^*(0, \tau) = H_3 \quad (3.57)$$

Onde,

$$B_3 (\theta_{ice}^*(0, \tau)) = Bi_3 + 4Bir_3 \left[1 + \beta \theta_{ice}^*(0, \tau) + \frac{\beta^2 \theta_{ice}^{*2}(0, \tau)}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta \theta_{ice}^*(0, \tau)}{2} \right] + \frac{\rho_{v,ice,s} (\theta_{ice}^*(0, \tau))}{\rho_{v,a}} Bim_3 - 1 \quad (3.58)$$

$$H_3 = Bi_3 + Bir_3 \left(1 - \frac{T_a^4}{T_f^4} \right) \frac{1}{\beta} + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_3 \quad (3.59)$$

e as equações para a fronteira móvel dadas por:

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=n(\tau)} = -\frac{1}{St} (1 - n(\tau)) \frac{\partial n(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.60)$$

$$v(\tau_2) = 1 - \frac{R_{mi}}{R_d} \quad (3.61)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=v(\tau)} = \frac{L_m}{L} \frac{1}{St} (1 - n(\tau)) \frac{\partial n(\tau)}{\partial \tau} \quad (3.62)$$

$$n(\tau_2) = 0 \quad (3.63)$$

3.1.4 Estágio de Resfriamento (4°)

O modelo de estágio de resfriamento envolve novamente a equação transiente de condução de calor unidimensional para um domínio fixo, $0 < r < R_d$, com uma condição de contorno não-linear que inclui a transferência de calor convectiva, transferência de massa convectiva e transferência de calor radiativa. A principal diferença entre o primeiro e o quarto estágio está no estado físico da gotícula, e, também, o valor e no instante da temperatura inicial, representado na Fig 3.6 e dado pelas equações abaixo:

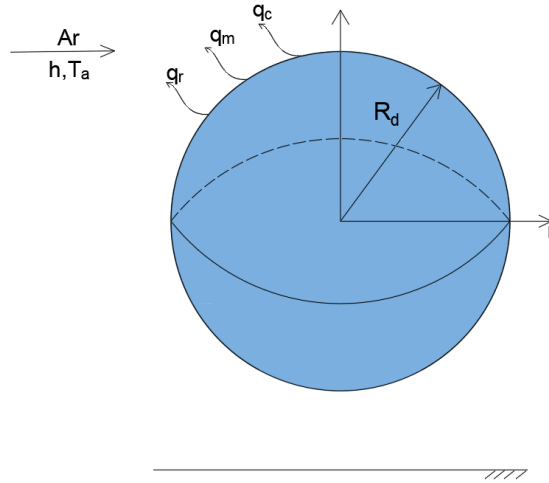


Figura 3-6 - Esquema simplificado do quarto estágio (resfriamento) de uma gotícula de água, na fase sólida (gelo), suspensa e sujeita a uma corrente de ar frio.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k_{ice} \frac{\partial T_{ice}(r, t)}{\partial r} \right) = \rho_{ice} c_{ice} \frac{\partial T_{ice}(r, t)}{\partial t} \quad 0 < r < R_d, \quad t > t_3 \quad (3.64)$$

$$T_{ice}(r, t_3) = T_d(r); \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\partial T_{ice}(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} -k_{ice} \left. \frac{\partial T_{ice}(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} &= h [T_{ice}(R, t) - T_a] + h_m L_s [\rho_{v,ice,s}(T_{ice}(R, t)) - \rho_{v,a}] \\ &+ \varepsilon \sigma [T_{ice}^4(R, t) - T_a^4] \end{aligned} \quad (3.67)$$

Onde, T_{ice} [K] é a temperatura na fase sólida para o estágio de solidificação, T_f [K] é a temperatura de congelamento, $s(t)$ [m] é a posição da frente de solidificação, k_{ice} [W/mK] é a condutividade térmica da fase sólida, c_{ice} [J/kgK] é o calor específico na fase sólida, T_a [K] é a temperatura do ar, h [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor por convecção, h_m [m/s] é o coeficiente de transferência de massa, $\rho_{v,ice,s}$ [kg/m³] é a massa específica de vapor da gotícula na superfície da fase sólida, $\rho_{v,ice,a}$ [kg/m³] é o massa específica do vapor do ar, ε é a emissividade da gotícula, σ [W/m²K⁴] é a constante de Stefan-Boltzmann, L_s [J/kg] calor latente de sublimação, r [m] é a coordenada radial da gota, t [s] é o tempo.

Os grupo adimensionais, Eq. (3.68), são utilizado nas Eqs. (3.64-3.67) para adimensionalizar este sistema de equações:

$$\begin{aligned} \theta_{ice,4} &= \frac{T_{ice}}{T_a}, \quad x = \frac{r}{R_d}, \quad \tau = \frac{k_{ice} t}{c_{ice} \rho_{ice} R_d^2}, \quad Bi_4 = \frac{h R_d}{k_{ice}}, \quad Bim_4 = \frac{h_m L_s R_d \rho_{v,o}}{k_{ice} T_a}, \quad Bir_4 = \frac{\sigma \varepsilon R_d T_a^3}{k_l}, \\ \theta_{g,0} &= \frac{T_d(R)}{T_a} \end{aligned} \quad (3.68.a-g)$$

Desta forma, as equações adimensionais a seguir são obtidas,

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial \theta_{ice,4}(r, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \theta_{ice,4}(r, t)}{\partial \tau} \quad 0 < x < 1, \quad \tau > \tau_3 \quad (3.69)$$

$$\theta_{ice,4}(x, \tau_3) = \theta_{g,0}(R_d) \quad (3.70)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice,4}(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.71)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice,4}(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=l} = H_4 - B^+_4(\theta_{ice,4}(x, \tau))\theta_{ice,4}(x, \tau) \quad (3.72)$$

Onde,

$$B^+_4(\theta_{ice,4}(l, \tau)) = Bi_4 + Bir_4\theta_{ice,4}^3(l, \tau) + \frac{\rho_{v,ice,s}(\theta_{ice,4}(l, \tau))}{\rho_{v,a}} Bim_4 \quad (3.73)$$

$$H_4 = Bi_4 + Bir_4 + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_4 \quad (3.74)$$

Mais uma vez, empregando uma transformação de variável para descrever as equações em um sistema de coordenadas cartesianas, fazemos:

$$\theta_{ice}^*(x, \tau) = x\theta_{ice,4}(x, \tau) \quad (3.75)$$

Assim, o seguinte sistema de equação é obtido:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} \quad 0 < x < l, \quad \tau > \tau_3 \quad (3.76)$$

$$\theta_{ice}^*(x, \tau_3) = x\theta_{g,0}(R_d) \quad (3.77)$$

$$\theta_{ice}^*(0, \tau_0) = 0 \quad (3.78)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice}^* (x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=l} + B_4 (\theta_{ice}^* (l, \tau)) \theta_{ice}^* (l, \tau) = H_4 \quad (3.79)$$

Onde,

$$B_4 (\theta_{ice}^* (l, \tau)) = Bi_4 + Bir_4 \theta_{ice}^* (l, \tau) + \frac{\rho_{v,ice,s} (\theta_{ice}^* (l, \tau))}{\rho_{v,a}} Bim_1 - l \quad (3.80)$$

$$H_4 = Bi_4 + Bir_4 + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_4 \quad (3.81)$$

3.2 Gotícula Apoiada em uma Superfície

Para a modelagem matemática da gotícula apoiada em uma superfície, duas situações são analisadas apenas para o primeiro estágio, o super-resfriamento. Primeiramente é a gota é considerada com seu formato esférico ideal, com o domínio regular, onde a superfície da gota é dividida em duas regiões. A primeira região está em contato com uma corrente de ar frio, e a segunda região representa a superfície da gotícula em contato com a base superhidrofóbica. A segunda situação a região da gotícula em contato com a base apresenta o domínio irregular para representar a deformidade existente quando a gota está repousada na superfície. O detalhamento de cada situação é mostrado neste capítulo.

3.2.1 Gotícula com domínio fixo

Para a modelagem da gota apoiada em uma superfície, com domínio fixo, as seguintes hipóteses são adotadas:

1. As gotículas estão em repouso e imersas em uma corrente de ar, desta forma no mecanismo de transferência de calor o fluido se move por uma fonte externa;

2. Para evitar trabalhar com geometria desconhecidas, a expansão que ocorre na solidificação da água é desprezível neste trabalho, assim é adotado que as gotículas mantêm seu volume e forma inicial durante todo o processo;

3. Como a gotícula está apoiada em uma superfície, não será possível adotar uma simetria zenital, assim a análise de transferência de calor é feita por um modelo bidimensional transiente em coordenadas esféricas, com as variáveis radial (r), zenital (φ) e tempo (t).

5. A superfície é superhidrofóbica, ou seja, a gota possui um ângulo de contato com o substrato superior a 150° .

6. A mudança de massa específica na interface líquido/gelo será desprezada, assim como o escoamento induzido na fase líquida.

7. As gotículas mantêm seu formato esférico e é considerado como se elas estão parcialmente imersas na superfície.

Além disso, a transferência de calor na superfície em contato com o ar será governada pelos três mecanismos, convecção, radiação e resfriamento evaporativo, enquanto na região em contato com a superfície é governada por uma resistência térmica de contato ou com uma temperatura conhecida, com a gotícula parcialmente imersa na superfície, como mostrado na Fig. 3.7:

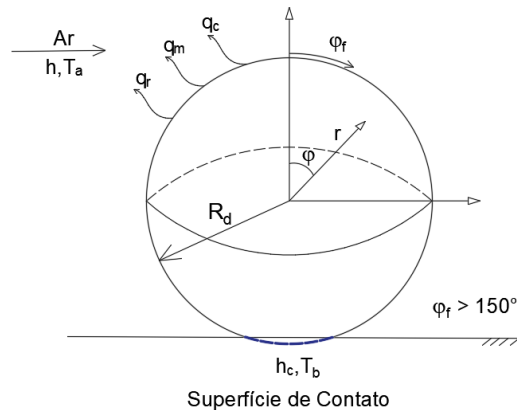


Figura 3-7. Configuração de uma gota esférica apoiada em uma superfície para o primeiro estágio: super-resfriamento. Sendo a região destacada em azul a interface gotícula-superfície, em que a gotícula é considerada parcialmente imersa na superfície.

A etapa de Super-Resfriamento para esta situação é descrita fisicamente pela equação de condução de calor transiente Eq. (3.82) e com as condições iniciais (3.83) de contorno (3.84-3.87), (KAKAÇ, et al. 2018).

$$\frac{1}{\alpha_\ell} \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right) \text{ em } \begin{cases} 0 < r < R_d \\ 0 < \varphi < 180^\circ \\ t > 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

Condição Inicial

$$T_\ell(r, \varphi, 0) = T_0 \quad (3.83)$$

Condições de contorno:

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad (3.84)$$

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=180^\circ} = 0 \quad (3.85)$$

Condições de contorno na direção radial

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=R_d} = h_c (T_\ell - T_b) : \text{ se } 180^\circ < \varphi < \varphi_f \quad (3.86)$$

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=R_d} = h(T_\ell - T_a) + h_m L_e (\rho_{v,\ell,s}(T_\ell) - \rho_{v,a}) + \varepsilon \sigma (T_\ell^4 - T_a^4) : \text{ se } \varphi_f < \varphi < 0^\circ \quad (3.87)$$

onde, T_ℓ [K] é a temperatura da fase líquida no primeiro estágio para a gotícula apoiada, k_ℓ [W/mK] é a condutividade na térmica na fase líquida, c_l [J/kgK] é o calor específico na fase líquida, T_0 [K] é a temperatura no instante inicial, T_a [K] é a temperatura do ar, T_b [K] é a temperatura da base que a gotícula está apoiada, h [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor convectivo entre o ar e a gotícula, h_c [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor convectivo entre a base e a gotícula, h_m [m/s] é o coeficiente de transferência de massa, $\rho_{v,\ell,s}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor de água na superfície da gotícula, $\rho_{v,a}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor do ar, ε é a emissividade da superfície da gotícula, σ [W/m²K⁴]

é a constante de Stefan-Boltzmann, L_e [J/kg] é o calor latente de evaporação, r [m] é a coordenada radial da gotícula, e t [s] o tempo.

Para simplificar a equação, a transformação $\mu = \cos \varphi$ é adotada. Desta forma, a seguinte equação é obtida com suas condições de contorno e inicial.

$$\frac{1}{\alpha_\ell} \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right) \text{ em } \begin{cases} 0 < r < R_d \\ -1 < \mu < 1 \\ t > 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

Condição Inicial

$$T_\ell(r, \mu, 0) = T_0 \quad (3.89)$$

Condições de contorno:

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (3.90)$$

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (3.91)$$

Condições de contorno na direção radial

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r} \right|_{r=R_d} = h_c (T_\ell - T_b) \quad : \quad \text{se } -1 < \mu < \mu_f \quad (3.92)$$

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r} \right|_{r=R_d} = h(T_\ell - T_\infty) + h_m L_e (\rho_{v,\ell}(T_\ell) - \rho_{v,\infty}) + \varepsilon \sigma (T_\ell^4 - T_\infty^4) \quad : \quad \text{se } \mu_f < \mu < 1 \quad (3.93)$$

O sistema de equações, (3.88-3.93) é adimensionalizado utilizando os seguintes grupos adimensionais

$$\theta = \frac{T_l - T^*}{\Delta T^*}; \tau_1 = \frac{\alpha_l t}{r_{dc}^{*2}}; R = \frac{r}{r_{dc}^*}; \theta_\infty = \frac{T_\infty - T^*}{\Delta T^*}; \Delta T^* = T_0 - T^*; \theta_b = \frac{T_b - T^*}{\Delta T^*}; \theta_0 = \frac{T_0 - T^*}{\Delta T^*},$$

$$T^* = T_b \quad (3.94)$$

Assim, o novo sistema de equações é representado pela Eq. (3.95-3.104).

$$\frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \text{ em } \begin{cases} 0 < R < 1 \\ -1 < \mu < 1 \\ \tau > 0 \end{cases} \quad (3.95)$$

Condição Inicial

$$\theta(R, \mu, 0) = \theta_0 \quad (3.96)$$

Condições de contorno:

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (3.97)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (3.98)$$

Condições de contorno na direção radial

$$\left. -\frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} = \begin{cases} Bi_c \theta(R, \mu, \tau) - Bi_c \theta_b: & \text{se } -1 < \mu < \mu_f \\ B_l^* (\theta(R, \mu, \tau)) \theta(R, \mu, \tau) - H_l^*: & \text{se } \mu_f < \mu < 1 \end{cases} \quad (3.99)$$

Ou, na seguinte forma:

$$-\left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R} \right|_{R=l} = B_l(\theta(R, \mu, \tau))\theta(R, \mu, \tau) - H_l \quad (3.100)$$

Sendo o contorno na superfície da gotícula diferente, a depender da região, como segue:

$$B_l(\theta(R, \mu, \tau)) = \begin{cases} Bi_c & : \text{ se } -1 < \mu < \mu_f \\ B_l^*(\theta(R, \mu, \tau)) & : \text{ se } \mu_f < \mu < 1 \end{cases} \quad (3.101)$$

$$H_l = \begin{cases} Bi_c \theta_b & : \text{ se } -1 < \mu < \mu_f \\ H_l^* & : \text{ se } \mu_f < \mu < 1 \end{cases} \quad (3.102)$$

$$B_l^*(\theta) = Bi_l + 4Bir_l \left[1 + \beta\theta + \frac{\beta^2\theta^2}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta\theta}{2} \right] + \frac{\rho_{v,ice,s}(\theta)}{\rho_{v,ice,a}} Bim_l \quad (3.103)$$

$$H_l^* = Bi_l + Bir_l + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_l \quad (3.104)$$

3.2.2 Gotícula com domínio irregular

A situação com o domínio irregular segue as mesmas considerações adotadas da caso anterior, sendo a principal diferença é que a região em que ocorre o contato da base com a gotícula achatada (Fig 3.8), com temperatura prescrita e a região com o ar possui volume equivalente a com a gota idealizada. Neste sentido, as Eqs (3.105 – 3.114) mostram o sistema de equações adotado para este caso.

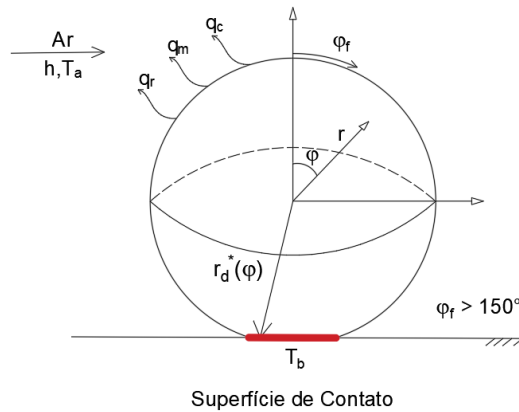


Figura 3-8 Configuração de uma gota esférica apoiada, com geometria irregular, em uma superfície para o primeiro estágio: super-resfriamento. A região destacada em vermelho é a interface gotícula-superfície.

$$\frac{1}{\alpha_\ell} \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right) \text{ em } \begin{cases} 0 < r < r_d^*(\varphi) \\ 0 < \varphi < 180^\circ \\ t > 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

O limite superior na direção radial dependente do ângulo zenital e segue as seguintes condições:

$$r_d^*(\varphi) = \begin{cases} r_{dc}^* & \text{se } \varphi_f > \varphi > 0 \\ r_{df}^*(\varphi) & \text{se } \varphi_f < \varphi < 180^\circ \end{cases} \quad (3.106)$$

Onde, r_{dc}^* é o raio da gota na região em contato com o ar, sendo obtido para a partir de um volume equivalente da gota esférica idealizada e obtido pela raiz da Eq. (3.107), sendo V_{gi} é o volume da gotícula idealizada. $r_{df}^*(\varphi)$ é o limite radial na região de contato da base com a gota, na região deformável, sendo calculada pela Eq. (3.108).

$$V_{gi} = \frac{4}{3} \pi r_{dc}^{*2} - \frac{1}{3} \pi \left[-r_{dc}^* \cos(180 - \varphi_f) + r_{dc}^* \right] \left[2r_{dc}^* + r_{dc}^* \cos(180 - \varphi_f) \right] \quad (3.107)$$

$$r_{df}^*(\varphi) = r_{dc}^* \cos(\varphi_f) \sec(\varphi) \quad (3.108)$$

Além disso, o problema apresenta as seguintes condições iniciais e de contorno:

Condição Inicial

$$T_\ell(r, \varphi, 0) = T_0 \quad (3.109)$$

Condições de contorno:

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0^\circ} = 0 \quad (3.110)$$

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=180^\circ} = 0 \quad (3.111)$$

Condições de contorno na direção radial

Sendo a condição de contorno na superfície da gota, condicionada de acordo com a região, com uma dependência em φ , e dada pelas Eqs. (3.112 e 3.113).

$$T_\ell(r_{df}^*(\varphi), \varphi, t) = T_b \quad (3.112)$$

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=r_{dc}^*} = h(T_\ell - T_\infty) + h_m L_e (\rho_{v,\ell}(T_\ell) - \rho_{v,\infty}) + \varepsilon \sigma (T_\ell^4 - T_\infty^4) \quad (3.113)$$

Adotando, também, a transformação $\mu = \cos \varphi$, abaixo

$$\mu = \cos \varphi \quad (3.114)$$

As equações transformadas do problema seguem o seguinte formato:

$$\frac{1}{\alpha_\ell} \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right) \quad em \quad \begin{cases} 0 < r < r_d^*(\mu) \\ -1 < \mu < 1 \\ \tau > 0 \end{cases} \quad (3.115)$$

Condição Inicial

$$T_\ell(r, \mu, 0) = T_0 \quad (3.116)$$

Condições de contorno:

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (3.117)$$

$$\left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (3.118)$$

Condições de contorno na direção radial,

$$T_\ell(r_{df}^*(\mu), \mu, t) = T_b \quad (3.119)$$

$$-k_\ell \left. \frac{\partial T_\ell(r, \mu, t)}{\partial r} \right|_{r=r_{dc}} = h(T_\ell - T_a) + h_m L_e (\rho_{v,\ell}(T_\ell) - \rho_{v,\infty}) + \varepsilon \sigma (T_\ell^4 - T_a^4) \quad (3.120)$$

onde, T_ℓ [K] é a temperatura da fase líquida no primeiro estágio para a gotícula apoiada na geometria deformada, k_ℓ [W/mK] é a condutividade na térmica na fase líquida, c_l [J/kgK] é o calor específico na fase líquida, T_0 [K] é a temperatura no instante inicial, T_a [K] é a temperatura do ar, T_b [K] é a temperatura da base que a gotícula está apoiada, h [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor convectivo entre o ar e a gotícula, h_c [W/m²K] é o coeficiente de transferência de calor convectivo entre a base e a gotícula, h_m [m/s] é o coeficiente de transferência de massa, $\rho_{v,\ell,s}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor de água na superfície da gotícula, $\rho_{v,a}$ [kg/m³] é a massa específica do vapor do ar, ε é a emissividade da superfície da gotícula, σ [W/m²K⁴] é a constante de Stefan-Boltzmann, L_e [J/kg] é o calor latente de evaporação, r [m] é a coordenada radial da gotícula, e t [s] o tempo.

Para adimensionalizar as equações (Eq. 3.115 – 3.120), os seguintes grupos são adotados,

$$\theta = \frac{T_\ell - T^*}{\Delta T^*}; \quad \tau_1 = \frac{\alpha_\ell t}{r_{dc}^{*2}}; \quad R = \frac{r}{r_{dc}^*}; \quad \theta_\infty = \frac{T_\infty - T^*}{\Delta T^*}; \quad \Delta T^* = T_0 - T^* \quad \theta_b = \frac{T_b - T^*}{\Delta T^*}; \quad \theta_0 = \frac{T_0 - T^*}{\Delta T^*},$$

$$T^* = T_b \quad (3.121)$$

Desta forma, aplicando as Eqs. (3.121) nas Eqs. (3.115 – 3.120) obtém-se.

$$\frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \tau_1} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \quad em \quad \begin{cases} 0 < R < R_{df}^*(\mu) \\ -1 < \mu < 1 \\ \tau > 0 \end{cases} \quad (3.122)$$

Ou na seguinte forma,

$$\frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \tau_1} = \frac{\partial^2 \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \quad em \quad \begin{cases} 0 < R < R_{df}^*(\mu) \\ -1 < \mu < 1 \\ \tau > 0 \end{cases} \quad (3.123)$$

Condição Inicial

$$\theta(R, \mu, 0) = \theta_0 \quad (3.124)$$

Condições de contorno para o limite zenital

$$\left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (3.125-3.126)$$

Condições de contorno na direção radial,

$$\theta(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau) = \theta_b \quad (3.127)$$

$$-\left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} = B_1 (\theta_\ell(R, \mu, \tau)) \theta_\ell(R, \mu, \tau) - H_1 \quad (3.128)$$

Sendo:

$$B_1^*(\theta(R, \mu, \tau)) = Bi_1 + 4Bir_1 \left[1 + \beta\theta + \frac{\beta^2 \theta^2}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta\theta}{2} \right] + \frac{\rho_{v,ice,s}(\theta)}{\rho_{v,ice,a}} Bim_1 \quad (3.129)$$

$$H_1^* = Bi_1 + Bir_1 + \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{v,o}} Bim_1 \quad (3.130)$$

CAPÍTULO 4

4. REDUÇÃO DE MODELOS E MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada para obtenção dos resultados do presente trabalho. Inicialmente é apresentado o formalismo da CIEA e as aproximações utilizadas para reduzir o modelo, além de uma revisão sobre o procedimento da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Em seguida, a CIEA será empregada em cada uma das etapas do processo de congelamento de uma gotícula de água suspensa, com exceção da etapa de recalescência, pois como discutido anteriormente, ocorre instantaneamente. Para a GITT o detalhamento destas etapas é disponível em Carvalho, et al., (2021) e não é explicitamente detalhado neste capítulo. Além disso, a CIEA e a GITT são aplicadas para gotícula apoiada em uma superfície, sendo utilizada primeiramente uma combinação das duas técnicas aplicada na solução do problema para uma gota esférica apoiada. Em seguida, o mesmo problema é resolvido pela aplicação direta da GITT e, também, é detalhada a redução do modelo pela CIEA para a gotícula esférica deformada. A Tab 4.1 resume o modelo físico utilizado e quais técnicas / aproximações foram utilizadas para reduzir / solucionar o modelo proposto.

Tabela 4-1 - Abordagens / combinações utilizadas para a análise dos modelos físicos.

Modelo Físico	Técnica / Aproximação Utilizada
Gotícula Suspensa	CIEA ($H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$), GITT, NDSolve
Gotícula Apoiada (Idealizada)	CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$), CIEA($H_{1,1}/H_{0,0}$) /GITT, GITT, NDSolve
Gotícula Deformada	CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$)

4.1 Modelo Reduzido

A CIEA é um procedimento de C utilizado frequentemente em problemas de difusão e convecção-difusão (COTTA, MIKHAILOV, 1997). Esta técnica consiste em eliminar uma ou mais variáveis espaciais a partir de médias nestas direções, pela integração da equação original, na variável eliminada retendo as informações nesta direção através das condições de contorno relacionadas. Desta forma, é possível obter uma formulação simplificada do sistema de equações diferenciais parciais originais. Diferentes níveis de aproximação na reformulação podem ser utilizados, começando pela análise de parâmetros concentrados clássica. Formulações melhoradas podem ser obtidas através da aproximação de Hermite para integrais (COTTA, MIKHAILOV, 1997). Tal abordagem vem sendo empregada em diferentes problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor (APARECIDO, COTTA, 1989; COTTA, MIKHAILOV, 1997; CORRÊA, COTTA, 1998).

A fórmula de Hermite para aproximação de uma integral, baseada no valor do integrando e de suas derivadas nos limites da integração, é dada na seguinte forma (COTTA, MIKHAILOV, 1997):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx \cong \sum_{v=0}^{\alpha} C_v y_{i-1}^{(v)} + \sum_{v=0}^{\beta} D_v y_i^{(v)} \quad (4.1)$$

Onde, a função, $y(x)$, e suas derivadas $y'(x)$ são definidas para todo domínio de x , (x_{i-1}, x_i) . Além disso, assume-se ainda que os valores numéricos de $y^{(v)}(x_{i-1}) = y^{(v)}_{i-1}$ para $v=0,1,2,\dots, \alpha$ e para $y^{(v)}(x_i) = y^{(v)}_i$ para $v=0,1,2,\dots,\beta$, estão disponíveis nos limites deste intervalo.

De tal maneira, a integral de $y(x)$ é expressa como uma combinação linear de $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ e suas derivadas, $y^{(v)}(x_{i-1})$, até a ordem $v=\alpha$ e $y^{(v)}(x_i)$ até a ordem $v=\beta$. Isto é então chamada aproximação $H_{a,b}$. A expressão resultante para a aproximação $H_{a,b}$ é dada por (COTTA, MIKHAILOV, 1997):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx = \sum_{v=0}^{\alpha} C_v(\alpha, \beta) h_i^{(v)} y_{i-1}^{(v)} + \sum_{v=0}^{\beta} C_v(\beta, \alpha) (-1)^v h_i^{(v+1)} y_i^{(v)} + O(h_i^{\alpha+\beta+3}) \quad (4.2)$$

Onde

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.3)$$

$$C_v(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + 1)!(\alpha + \beta + 1 - v)!}{(v + 1)!(\alpha - v)!(\alpha + \beta + 2)!} \quad (4.4)$$

Para o presente trabalho, foram considerados as aproximações $H_{0,0}$ e $H_{1,1}$ dadas por:

$$H_{0,0} \rightarrow \int_0^h y(x) dx \cong \frac{h}{2} [y(0) + y(h)] \quad (4.5)$$

$$H_{1,1} \rightarrow \int_0^h y(x) dx \cong \frac{h}{2} [y(0) + y(h)] + \frac{h^2}{12} [y'(0) - y'(h)] \quad (4.6)$$

Essas duas aproximações para integrais podem ser empregadas para as definições de temperatura adimensional média e fluxo de calor médio (derivada de temperatura). No presente trabalho foi adotada a formulação da $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$, onde a média é obtida pela regra do trapézio corrigida, e o fluxo de calor médio pela derivada da temperatura (utilizando a regra do trapézio). As aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ foram analisadas para os estágios de super-resfriamento (1°), solidificação (3°) e resfriamento (4°) para a gotícula suspensa e é detalhado na seção 4.3. Vale a pena salientar que a transformação de coordenadas do problema, onde as equações adimensionais ficaram em coordenadas cartesianas, permitiu que a aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$, pois caso contrário, a aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$ retorna para o caso lumped clássico em coordenadas esféricas. Além disso, na seção 4.4, onde detalha o caso com a gotícula apoiada, a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ foi utilizada para eliminar a variável radial do problema, o transformando em uma equação diferencial parcial unidimensional transiente para as gotículas esféricas idealizada e a deformada.

4.2 Transformada Integral

A Técnica da transformada integral foi aplicada nos três estágios possíveis do problema de congelamento de uma gotícula de água super-resfriada e é apresentada em CARVALHO, *et al.*, (2021), desta forma este procedimento não é detalhado neste trabalho, sendo apenas lembrado para um caso genérico. Entretanto, para a gotícula apoiada a aplicação da GITT é detalhada na seção 4.4, pois é uma inovação da presente dissertação.

O Método de Transformação Integral é uma ferramenta analítica clássica empregada na obtenção de soluções exatas para determinadas classes de equações diferenciais lineares parciais que estão amplamente presentes na difusão de calor e massa (OZISIK, 1980; MIKHAILOV, OZISIK, 1984). Com o objetivo de tornar a transformada integral mais abrangente, esta técnica tem sido generalizada nas últimas décadas, levando ao estabelecimento de uma metodologia numérica-analítica híbrida, conhecida como Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) (COTTA, 1990; COTTA, *et al.*, 2017). A GITT consiste em escolher um problema de autovalor, que retém parte das informações sobre os operadores do problema original, e propor uma expansão de autofunções, o que leva a um sistema infinito linear ou não-linear transformado, geralmente a ser resolvido numericamente após o truncamento da expansão em uma ordem suficientemente grande para a convergência da solução. Portanto, a tarefa numérica é realizada essencialmente em uma única variável independente, geralmente a variável temporal, e a solução é analiticamente recuperada em todas as outras variáveis espaciais. Este método híbrido numérico-analítico detém os méritos relativos sobre robustez e precisão de uma técnica analítica, ao mesmo tempo em que ganha a aplicabilidade e flexibilidade de uma abordagem puramente numérica.

A solução formal por GITT para um problema geral de difusão não-linear é detalhada em diversos trabalhos, como em COTTA *et al.*, 2015, COTTA, *et al.*, 2016 e COTTA, *et al.*, 2017, e replicado aqui, considerando um problema de difusão transiente de n potenciais acoplados, definidos na região V com superfície de fronteira S , da seguinte forma:

$$w_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = L_k T_k(\mathbf{x}, t) + g_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{T}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

O operador da variável \mathbf{x} que representa a difusão e dissipação linear, é dado como:

$$L_k \equiv \nabla \cdot (K_k(\mathbf{x})\nabla) - d_k(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

As condições iniciais na variável t são dadas por:

$$T_k(\mathbf{x}, 0) = f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (4.9)$$

e as condições de contorno nas coordenadas \mathbf{x} são escritas como

$$B_k T_k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{T}), \quad \mathbf{x} \in S, t > 0 \quad (4.10)$$

para o operador de condições de fronteira

$$B_k \equiv \left[\alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \quad (4.11)$$

onde \mathbf{n} denota o normal para fora para a superfície S .

As Eqs. (4.7-4.11) são bastante gerais, uma vez que termos não lineares podem ser agrupados nos termos fontes da Eq. (4.7) e da condição de contorno (4.10). No caso de termos de fonte lineares, este modelo se simplifica, já que, $g = g(\mathbf{x}, t)$, e $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$, e soluções analíticas exatas pela Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) em MIKHAILOV e OZISIK (1984). Seguindo o procedimento formal de solução através da GITT, são propostas expansões de autofunções para os potenciais associados. A escolha preferencial do problema do autovalor vem da aplicação direta do método de separação das variáveis à versão linear homogênea do problema proposto. Assim, o conjunto recomendado de problemas auxiliares é dado por:

$$[L_k + \mu_{ki}^2 w_k(\mathbf{x})] \psi_{ki}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V \quad (4.12)$$

$$B_k \psi_{ki}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (4.13)$$

Onde, μ_{ki} são os autovalores, $\psi_{ki}(\mathbf{x})$, são as autofunções, estas devendo ser conhecidas analiticamente ou obtidas a partir da solução numérica ou pela própria GITT do problema de autovalor

Deve-se notar que Eq. (4.7) é apresentada de tal forma que já reflete essa escolha de problemas de autovalor, dada pela Eq. (4.12), com a adoção de coeficientes lineares dependentes de \mathbf{x} nas equações e condições de contorno, e incorporando os termos restantes

nos termos fonte, sem perda de generalidade. Assim, aplicando as propriedades de ortogonalidade das autofunções é então possível definir os seguintes pares de transformação integral:

$$\bar{T}_{ki}(t) = \int_V w_k(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dv, \quad \text{Transformada} \quad (4.14)$$

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) \bar{T}_{k,i}(t), \quad \text{inversa} \quad (4.15)$$

Onde, $\tilde{\Psi}_{ki}(\mathbf{x})$ e a norma, N_{ki} , dadas por:

$$\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) = \frac{\psi_{ki}(\mathbf{x})}{\sqrt{N_{ki}}} \quad (4.16)$$

$$N_{ki} = \int_V w_k(\mathbf{x}) \psi_{ki}^2(\mathbf{x}) dv \quad (4.17)$$

A transformação integral da Eq.(4.7) é realizada aplicando o operador $\int_V \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x})(\cdot) dV$ e fazendo uso das condições de contorno, Eqs. (4.10) e (4.13), assim:

$$\frac{d\bar{T}_{ki}(t)}{dt} + \mu_{ki}^2 \bar{T}_{ki}(t) = \bar{g}_{ki}(t, \bar{\mathbf{T}}), \quad i=1,2,\dots, \quad t>0, \quad k=1,2,\dots,n \quad (4.18)$$

onde o termo fonte transformado $\bar{g}_{ki}(t, \bar{\mathbf{T}})$ deve-se à transformação integral dos termos de fonte da equação e dos termos de fonte do contorno e pode ser escrito como:

$$\bar{g}_{ki}(t, \bar{\mathbf{T}}) = \int_V \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) g_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{T}) dv + \int_S \phi_k(\mathbf{x}, t, \mathbf{T}) \left[\frac{\tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) - K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x})} \right] ds \quad (4.19)$$

As condições iniciais na variável “t”, dada pela Eq. (4.9) é transformada através do operador $\int_V w_k(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x})(\cdot) dv$, para fornecer:

$$\bar{T}_{ki}(0) = \bar{f}_{ki} \equiv \int_V w_k(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_{ki}(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) dv \quad (4.20)$$

Para a solução do sistema infinito acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares dadas pelas Eqs. (4.18-4.20), é necessário fazer uso de algoritmos numéricos, após o truncamento do sistema em uma ordem finita. Por exemplo, a rotina NDSolve do software *Mathematica*®, pode ser empregada, a qual fornece soluções sob controle automático de

erros absolutos e relativos. Depois que os potenciais transformados foram computados numericamente, o *Mathematica*® fornece um objeto de função interpolada que aproxima o comportamento ao longo da variável “t” da solução de forma contínua. Em seguida, a fórmula da inversa pode ser aplicada para produzir a representação de campo potencial em qualquer posição desejada \mathbf{x} e t . Várias classes de problemas que, em princípio, não poderiam ser tratados pela abordagem clássica foram então progressivamente tratados através do conceito generalizado, como recentemente revisado em COTTA (1990) e COTTA, *et al.*, (2017). Mais recentemente, a GITT foi estendida com sucesso para incorporar bases de problemas de autovalores não-lineares (COTTA *et al.*, (2016), em vez do problema de autovalores com coeficientes lineares escolhidos, Eqs. (4.12-4.13), levando a um comportamento de convergência global melhorado, como demonstrado para problemas com coeficientes de condições de fronteira não-lineares (COTTA *et al.*, 2016; PONTES, *et al.*, 2018). Essas ideias foram então estendidas ao presente problema de congelamento (CARVALHO, *et al.*, (2021), que envolve coeficientes não-lineares nas condições de contorno em todas as etapas, além de apresentar um limite móvel ao longo do processo de solidificação (estágio 2), proporcionando os resultados de referência aqui empregados.

4.3 Aplicação: Gotícula Suspensa

A presente seção detalha a utilização da CIEA, nas aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ para uma gotícula suspensa. O sistema diferencial parcial será reduzido com aplicação da integral da média na direção radial, em um sistema de equação diferencial ordinário em termos do potencial médio, $\theta_{av}(\tau)$, e da variável de contorno $\theta_l(1, \tau)$. A Figura 4.1 destaca, em vermelho, a variável a ser eliminada para redução do modelo para a etapa de super-resfriamento (1° estágio) e solidificação (3°). Para o estágio de resfriamento (4°) o modelo é similar ao apresentando no 1° estágio, sendo a gotícula completamente gelo.

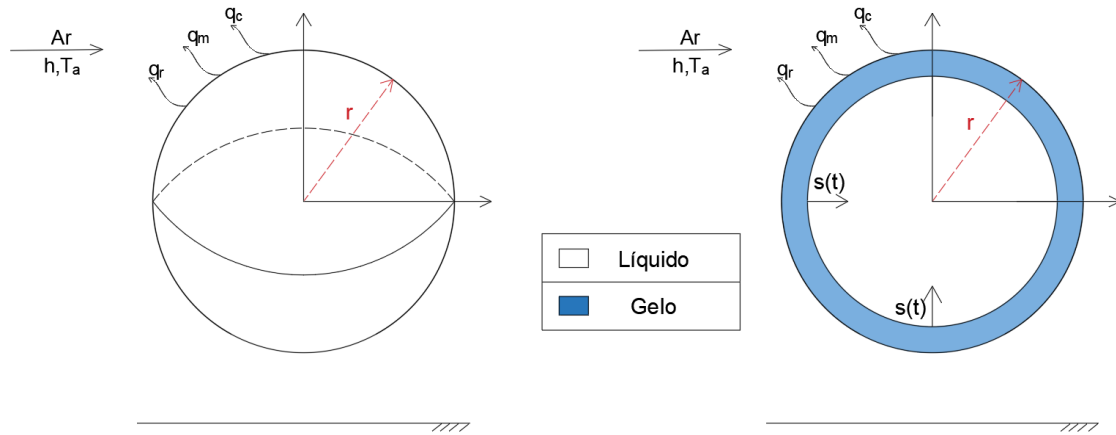


Figura 4-1- Configuração simplificada do primeiro estágio (lado esquerdo) e do terceiro estágio (lado direito) de uma gotícula super-resfriada, suspensa e sujeita a uma corrente de ar frio.

4.3.1 Super-Resfriamento: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$

Primeiramente, para aplicação da CIEA é necessário definir a integral adimensional média, como segue.

$$\theta_{av,l}(\tau) = \int_0^1 \theta_l^*(x, \tau) dx \quad (4.21)$$

Aplicando o operador $\int_0^1 dx$ e organizando a EDP pelo termos,

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_l^*(x, \tau)}{\partial x^2} dx}_I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \theta_l^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx}_{II} \quad 0 < x < 1, \quad \tau > \tau_0 \quad (4.22)$$

A solução de cada termo é resolvida como segue nas Eqs. (4.23) e (4.24):

$$I : \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_l^*(x, \tau)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (4.23)$$

$$\Pi : \int_0^l \frac{\partial \theta_l^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx = \frac{d\theta_{av,l}(\tau)}{d\tau} \quad (4.24)$$

Assim, a equação a seguir é obtida,

$$\frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=l} - \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{d\theta_{av,l}(\tau)}{d\tau} \quad (4.25)$$

A Eq. (4.4) é agora empregada para aproximar tanto a temperatura média quanto a derivada de temperatura média (ou fluxo de calor) com base nesta aproximação da integral de Hermite, aqui chamada de aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$, na forma:

$$\int_0^l \theta_l^*(x, \tau) dx \equiv \theta_{av,l}(\tau) \cong \frac{l}{2} [\theta_l^*(l, \tau) + \theta_l^*(0, \tau)] \quad (4.26)$$

$$\int_0^l \frac{\partial \theta_l^*(x, \tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_l^*(l, \tau) - \theta_l^*(0, \tau) \cong \frac{l}{2} \left[\frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=l} + \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \quad (4.27)$$

As condições de contorno, Eqs. (3.15-3.16), são substituídas nas Eqs. (4.26,4.27), para obter:

$$\theta_l^*(l, \tau) = 2\theta_{av,l}(\tau) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2\theta_l^*(l, \tau) - H_l + B_l(\theta_l^*(l, \tau))\theta_l^*(l, \tau) \quad (4.29)$$

Substituindo as Eqs. (4.28,4.29) em Eq. (4.25) é possível obter a formulação de diferencial reduzida para a temperatura média dentro da gotícula ao longo do 1° estágio:

$$\frac{d\theta_{av,l}(\tau)}{d\tau} = -4\theta_{av,l}(\tau) + 2H_l - 4B_l(\theta_l^*(l, \tau))\theta_{av,l}(\tau) \quad (4.30)$$

$$\theta_{av,l}(0) = \frac{l}{2} \theta_{l,0} \quad (4.31)$$

Para evitar trabalhar com a formulação diferencial de temperatura média adimensional acima, que é essencialmente uma variável dependente auxiliar, pode-se obter alternativamente a equação diferencial para da temperatura adimensional na superfície externa da gotícula, $\theta_l^*(l, \tau)$. Assim, substituindo a Eq. (4.28) em (4.30), obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial \theta_l^*(l, \tau)}{\partial \tau} = -4\theta_l^*(l, \tau) + 4H_l - 4B_l(\theta_l^*(l, \tau))\theta_l^*(l, \tau) \quad (4.32)$$

$$\theta_l^*(l, 0) = \theta_{l,0} \quad (4.33)$$

Onde,

$$B_l(\theta_l^*(l, \tau)) = Bi_l + Bir_l [\theta_l^*(l, \tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,s}(\theta_l^*(l, \tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_l - l \quad (4.34)$$

Entretanto, a equação ainda permanece em coordenadas retangulares, desta forma é necessário utilizar a Eq. (3.12) para retornar ao problema no sistema de coordenadas, ou seja, o esférico. Assim, podemos obter a temperatura na superfície e no interior da gota utilizando a Eq. (3.12) em (4.32) e (4.29).

$$\frac{\partial \theta_{l,l}(l, \tau)}{\partial \tau} = -4\theta_{l,l}(l, \tau) + 4H_l - 4B_l(\theta_{l,l}(l, \tau))\theta_{l,l}(l, \tau) \quad (4.35)$$

$$\theta_{l,l}(l, 0) = \theta_{l,0} \quad (4.36)$$

$$\theta_{l,l}(0, \tau) = 2\theta_{l,l}(l, \tau) - H_l + B_l(\theta_{l,l}(l, \tau))\theta_{l,l}(l, \tau) \quad (4.37)$$

Onde,

$$B_l(\theta_{l,l}(l, \tau)) = Bi_l + Bir_l [\theta_{l,l}(l, \tau)]^3 + \frac{\rho_{vi,s}(\theta_{l,l}(l, \tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_l - l \quad (4.38)$$

4.3.2 Solidificação: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$

Para o estágio de solidificação, com a condição de fronteira móvel, a temperatura média é definida como:

$$\theta_{av,3}(\tau) = \frac{l}{\eta(\tau)} \int_0^{\eta(\tau)} \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \quad (4.39)$$

Para simplificar as manipulações a seguir, a temperatura média é escrita em termos de uma variável dependente auxiliar, $\hat{\theta}_{av,3}(\tau)$, como segue:

$$\theta_{av,3}(\tau) = \frac{\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{\eta(\tau)} \quad \therefore \quad \hat{\theta}_{av,3}(\tau) = \int_0^{\eta(\tau)} \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \quad (4.40)$$

Seguindo o mesmo procedimento de média, o operador $\int_0^{\eta(\tau)} dx$, é aplicado sobre Eq. (3.53), resultando em:

$$\underbrace{\int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx}_I = \underbrace{\int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x^2} dx}_II \quad 0 < x < n(\tau), \quad \tau > \tau_0 \quad (4.41)$$

Para solução do primeiro termo, a regra de Leibniz para diferenciação de integrais é empregada da seguinte forma:

$$\frac{d\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left[\int_0^{\eta(\tau)} \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \right] = \int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx + \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \theta_{ice}^*(\eta(\tau), \tau) \quad (4.42)$$

Em que sendo $\theta_{ice}^*(\eta(\tau), \tau) \equiv 0$, permitindo obter,

$$I : \int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx = \frac{d\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{d\tau} \quad (4.43)$$

Já o segundo termo da Eq. (4.41) é calculado da seguinte forma:

$$II : \int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x^2} dx = \left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=\eta(\tau)} - \left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.44)$$

Desta forma, a equação 4.41, torna-se:

$$\frac{d\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{d\tau} = \left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=\eta(\tau)} - \left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.45)$$

A aproximação $da^* H_{0,0}/H_{0,0}$ para a fase de solidificação é proposta como:

$$\int_0^{\eta(\tau)} \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \equiv \hat{\theta}_{av,3}(\tau) \cong \frac{\eta(\tau)}{2} [\theta_{ice}^*(\eta(\tau), \tau) + \theta_{ice}^*(0, \tau)] \quad (4.46)$$

$$\int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_{ice}^*(\eta(\tau), \tau) - \theta_{ice}^*(0, \tau) \cong \frac{\eta(\tau)}{2} \left[\left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \right|_{x=\eta(\tau)} \right] \quad (4.47)$$

Aplicando a condição de contorno, Eq. (3.55), na regra do trapézio, Eq. (4.46), a seguinte relação entre $\theta_{ice}^*(0, \tau)$ e $\hat{\theta}_{av,3}(\tau)$ é obtida:

$$\theta_{ice}^*(0, \tau) \cong \frac{2\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{\eta(\tau)} = 2\theta_{av,3}(\tau) \quad (4.48)$$

Substituindo as condições de contorno, eqs. (3.55,3.56) em Eq. (4.47), encontra-se:

$$\left. \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial x} \right|_{x=\eta(\tau)} = -\frac{2\theta_{ice}^*(0, \tau)}{\eta(\tau)} + H_3 - B_3 \left(\theta_{ice}^*(0, \tau) \right) \theta_{ice}^*(0, \tau) \quad (4.49)$$

Substituindo as Eqs. (3.56) e (4.49) na Eq. (4.45), a seguinte equação diferencial, em função da média, $\hat{\theta}_{av,ice}(\tau)$, e da variável $\theta_{ice}^*(0, \tau)$ é obtida:

$$\frac{d\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{d\tau} = -\frac{2\theta_{ice}^*(0, \tau)}{\eta(\tau)} + 2H_3 - 2B_3 \left(\theta_{ice}^*(0, \tau) \right) \theta_{ice}^*(0, \tau), \quad \tau > \tau_2 \quad (4.50)$$

$$\hat{\theta}_{av,ice}(\tau_2) = 0 \quad (4.51)$$

Substituindo Eq. (4.48), na Eq. (4.50), para evitar a utilização da variável $\hat{\theta}_{av,ice}(\tau)$, é obtido e sabendo que variável $\theta_{ice,3}(0, \tau)$ representa a temperatura de fronteira para o real sistema de coordenadas, obtemos:

$$\begin{aligned} \eta(\tau) \frac{d\theta_{ice,3}(0, \tau)}{d\tau} + \theta_{ice,3}(0, \tau) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \\ -\frac{2\theta_{ice,3}(0, \tau)}{\eta(\tau)} + 2H_3 - 2B_3 \left(\theta_{ice,3}(0, \tau) \right) \theta_{ice,3}(0, \tau) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\theta_{ice,3}(0, \tau_2) = 0 \quad (4.53)$$

Onde,

$$\begin{aligned} B_3 \left(\theta_{ice,3}(0, \tau) \right) = Bi_3 + 4Bir_3 \left[1 + \beta \theta_{ice,3}(0, \tau) + \frac{\beta^2 \left(\theta_{ice,3}(0, \tau) \right)^2}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta \theta_{ice,3}(0, \tau)}{2} \right] \\ + \frac{\rho_{v,ice,s} \left(\theta_{ice,3}(0, \tau) \right)}{\rho_{v,ice,a}} Bim_3 - I \end{aligned} \quad (4.54)$$

A formulação diferencial melhorada é então completada com as equações diferenciais de fronteira móvel adimensional, para cada hipótese de formação de gelo durante a recalescência, com a aplicação da Eq. (4.49) nas condições de fronteira movel, para as duas condições citadas neste trabalho:

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \frac{St}{(1-\eta(\tau))} \left[\frac{2\theta_{ice,3}(0,\tau)}{\eta(\tau)} - H_3 + B_3 (\theta_{ice,3}(0,\tau))\theta_{ice,3}(0,\tau) \right] \quad (4.56)$$

$$\eta(\tau_2) = 1 - \frac{R_{mi}}{R_d} \quad (4.57)$$

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \frac{L}{L_m} \frac{St}{(1-\eta(\tau))} \left[\frac{2\theta_{ice,3}(0,\tau)}{\eta(\tau)} - H_3 + B_3 (\theta_{ice,3}(0,\tau))\theta_{ice,3}(0,\tau) \right] \quad (4.58)$$

$$\eta(\tau_2) = 0 \quad (4.59)$$

4.3.3 Congelamento: CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$

O quarto estágio a aplicação da CIEA é semelhante ao do primeiro estágio e é detalhada a seguir. A definição da integral adimensional média é dada pela Eq. 4.60 .

$$\theta_{av,3}(\tau) = \int_0^1 \theta_{ice}^*(x,\tau) dx \quad (4.60)$$

Aplicando o operador $\int_0^1 dx$ e organizando a EDP pelo termos,

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x,\tau)}{\partial x^2} dx}_I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \theta_{ice}^*(x,\tau)}{\partial \tau} dx}_{II} \quad 0 < x < 1, \quad \tau > \tau_3 \quad (4.61)$$

A solução de cada termos é resolvida como segue nas Eqs. (4.62) e (4.63):

$$I : \int_0^l \frac{\partial^2 \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x^2} dx = \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=l} - \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (4.62)$$

$$II : \int_0^l \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial \tau} dx = \frac{d\theta_{av,3}(\tau)}{d\tau} \quad (4.63)$$

Assim, a equação é obtida,

$$\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=l} - \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{d\theta_{av,3}(\tau)}{d\tau} \quad (4.64)$$

A Eq. (4.4) é utilizada, mais uma vez, para aproximar tanto a temperatura média quanto o derivado de temperatura média (ou fluxo de calor) , ou seja a $H_{0,0}/H_{0,0}$ tem a seguinte forma:

$$\int_0^l \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \equiv \theta_{av,3}(\tau) \cong \frac{l}{2} [\theta_{ice}^*(l, \tau) + \theta_{ice}^*(0, \tau)] \quad (4.65)$$

$$\int_0^l \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_{ice}^*(l, \tau) - \theta_{ice}^*(0, \tau) \cong \frac{l}{2} \left[\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=l} + \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \quad (4.66)$$

As condições de contorno, Eqs. (3.78-3.79), são substituídas nas Eqs. (4.65,4.66), para obter:

$$\theta_{ice}^*(l, \tau) = 2\theta_{av,4}(\tau) \quad (4.$$

$$\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2\theta_{ice}^*(l, \tau) - H_4 + B_4 (\theta_{ice}^*(l, \tau)) \theta_{ice}^*(l, \tau) \quad (4.68)$$

Substituindo as Eqs. (4.67,4.68) em Eq. (4.64) é possível obter a formulação de diferencial reduzida para a temperatura média dentro da gotícula ao longo do 4° estágio:

$$\frac{d\theta_{av,4}(\tau)}{d\tau} = -4\theta_{av,4}(\tau) + 2H_4 - 4B_4(\theta_{ice}(1,\tau))\theta_{av,4}(\tau) \quad (4.69)$$

$$\theta_{av,4}(\tau_3) = \theta_{av,0}(\tau_3) \quad (4.70)$$

Para evitar trabalhar com a formulação diferencial de temperatura média adimensional acima, que é essencialmente uma variável dependente auxiliar, pode-se obter alternativamente a equação diferencial para da temperatura adimensional na superfície de contorno, $\theta_{ice}^*(1,\tau)$. Assim, substituindo a Eq. (4.67) em (4.69) e (4.70), obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial\theta_{ice}^*(1,\tau)}{\partial\tau} = -4\theta_{ice}^*(1,\tau) + 4H_4 - 4B_4(\theta_{ice}^*(1,\tau))\theta_{ice}^*(1,\tau) \quad (4.71)$$

$$\theta_{ice}^*(1,\tau_3) = \theta_{ice,0} \quad (4.72)$$

Onde,

$$B_4(\theta_{ice}^*(1,\tau)) = Bi_4 + Bir_4[\theta_{ice}^*(1,\tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,g}(\theta_{ice}^*(1,\tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_4 - 1 \quad (4.73)$$

Entretanto, o sistema de equação ainda permanece em coordenadas retangulares, desta forma é necessário utilizar a Eq. (3.75) para retornar o problema para o real sistema de coordenadas, ou seja, o esférico. Assim, podemos obter a temperatura na superfície e no interior da gota utilizando a Eq. (3.75) em (4.71) e (4.72).

$$\frac{\partial\theta_{ice,4}(1,\tau)}{\partial\tau} = -4\theta_{ice,4}(1,\tau) + 4H_4 - 4B_4(\theta_{ice,4}(1,\tau))\theta_{ice,4}(1,\tau) \quad (4.74)$$

$$\theta_{ice,4}(1,0) = \theta_{ice,0} \quad (4.75)$$

$$\theta_{ice,4}(0,\tau) = 2\theta_{ice,4}(1,\tau) - H_4 + B_4(\theta_{ice,4}(1,\tau))\theta_{ice,4}(1,\tau) \quad (4.76)$$

Onde,

$$B_4(\theta_{ice,4}(1,\tau)) = Bi_4 + Bir_4[\theta_{ice,4}(1,\tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,g}(\theta_{ice,4}(1,\tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_4 - 1 \quad (4.78)$$

4.3.4 Super-Resfriamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$

Novamente para a primeira etapa, agora é proposta aproximação de ordem mais alta, assim a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ da temperatura média e fluxo de calor é escrita como:

$$\int_0^1 \theta_l^*(x,\tau) dx \equiv \theta_{av,l(\tau)} \cong \frac{1}{2}[\theta_l^*(1,\tau) + \theta_l^*(0,\tau)] + \frac{1}{12} \left[\frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=1} \right] \quad (4.79)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \theta_l^*(x,\tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_l^*(1,\tau) - \theta_l^*(0,\tau) \cong \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=1} + \frac{\partial \theta_l^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \quad (4.80)$$

onde a regra trapezoidal corrigida é adotada para aproximar a temperatura média, enquanto a mesma regra trapezoidal simples é usada para o fluxo de calor médio. O procedimento é essencialmente o mesmo da aproximação anterior, exceto pela relação entre o limite e as temperaturas médias, $\theta_l(1,\tau)$ e $\theta_{av,l}(\tau)$, agora obtido a partir de Eqs. (4.79,4.80) e as condições de contorno, Eqs.(3.15-3.16), como:

$$4\theta_l^*(1,\tau) + B_l(\theta_l^*(1,\tau))\theta_l^*(1,\tau) - H_l - 6\theta_{av,l(\tau)} = 0 \quad (4.81)$$

Assim, a formulação melhorada obtida através da aproximação H_{11}/H_{00} é dada pela Eq. (4.82):

$$\frac{d\theta_{av,1}(\tau)}{d\tau} = -2\theta_1^*(1,\tau) + 2H_1 - 2B_1(\theta_1^*(1,\tau))\theta_1^*(1,\tau) \quad (4.82)$$

$$\theta_{av,1}(0) = \theta_{1,0} \quad (4.83)$$

Onde,

$$B_1(\theta_1^*(1,\tau)) = Bi_1 + Bir_1[\theta_1^*(1,\tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,s}(\theta_1^*(1,\tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_1 - 1 \quad (4.84)$$

Como antes, temperatura média é uma variável auxiliar de cálculo e deve ser evitada, assim é necessário rescrever a formulação para as temperaturas na superfície e no centro da gotícula, como segue:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1^*(1,\tau)) \frac{\partial \theta_1^*(1,\tau)}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial \theta_1^*(1,\tau)}{\partial \tau} \\ = -\theta_1^*(1,\tau) \frac{\partial B_1(\theta_1^*(1,\tau))}{\partial \tau} - 12\theta_1^*(1,\tau) + 12H_1 - 12B_1(\theta_1^*(1,\tau))\theta_1^*(1,\tau) \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\theta_1^*(x,0) = \theta_{1,0} \quad (4.86)$$

Onde,

$$B_1(\theta_1^*(1,\tau)) = Bi_1 + Bir_1[\theta_1^*(1,\tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,s}(\theta_1^*(1,\tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_1 - 1 \quad (4.87)$$

Entretanto, a variável θ_1^* é representada para um sistema de coordenadas retangulares, para retornar o problema para o sistema de coordenadas esféricas a Eq. (3.12) é utilizada,

assim, o novo sistema de equação é obtida substituindo a Eq. (3.12) nas Eqs. 4.85-4.87 e a temperatura adimensional no centro da gotícula é obtida utilizando a Eq. (3.12) na Eq. 4.29. Obtendo as seguintes equações:

$$B_l(\theta_{l,l}(l,\tau)) \frac{\partial \theta_{l,l}(l,\tau)}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial \theta_{l,l}(l,\tau)}{\partial \tau} = -\theta_{l,l}(l,\tau) \frac{\partial B_l(\theta_{l,l}(l,\tau))}{\partial \tau} - 12\theta_{l,l}(l,\tau) + 12H_l - 12B_l(\theta_{l,l}(l,\tau))\theta_{l,l}(l,\tau) \quad (4.88)$$

$$\theta_{l,l}(x,0) = \theta_{l,0} \quad (4.89)$$

$$\theta_{l,l}(0,\tau) = 2\theta_{l,l}(l,\tau) - H_l + B_l(\theta_{l,l}(l,\tau))\theta_{l,l}(l,\tau) \quad (4.90)$$

Onde,

$$B_l(\theta_{l,l}(l,\tau)) = Bi_l + Bir_l [\theta_{l,l}(l,\tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,s}(\theta_{l,l}(l,\tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_l - l \quad (4.91)$$

4.3.5 Solidificação: CIEA $H_{l,l}/H_{0,0}$

As regras de integração trapezoidal e corrigidas para a formulação $H_{l,l}/H_{0,0}$ no 3º estágio são aplicadas à temperatura integrada e ao seu derivado, como antes, na forma:

$$\int_0^{\eta(\tau)} \theta_{ice}^*(x,\tau) dx \equiv \hat{\theta}_{av,3}(\tau) \cong \frac{\eta(\tau)}{2} [\theta_{ice}^*(\eta(\tau),\tau) + \theta_{ice}^*(0,\tau)] + \frac{\eta(\tau)^2}{12} \left[\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=\eta(\tau)} \right] \quad (4.92)$$

$$\int_0^{\eta(\tau)} \frac{\partial \theta_{ice}^*(0, \tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_{ice}^*(\eta(\tau), \tau) - \theta_{ice}^*(0, \tau) \cong \frac{\eta(\tau)}{2} \left[\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=\eta(\tau)} + \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \quad (4.93)$$

As mesmas etapas básicas são seguidas quanto à redução do modelo através da aproximação CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$ anteriormente adotada. No entanto, a relação aqui é obtida empregando as condições de contorno, Eqs (3.55) e (3.56), substituído nas Eqs. (4.92 e 4.93), obter a relação entre $\theta_l(0, \tau)$ e $\theta_{av,3}(\tau)$

$$4\eta(t)\theta_{ice}^*(0, t) + B_3(\theta_{ice}^*(0, t))\eta(t)^2\theta_{ice}^*(0, t) - 6\hat{\theta}_{av,3}(t) - \eta(t)^2 H_3 = 0 \quad (4.94)$$

Assim, a seguinte equação com sua condição inicial é obtida.

$$\frac{d\hat{\theta}_{av,3}(\tau)}{d\tau} = -\frac{2\theta_{ice}^*(0, t)}{\eta(t)} + 2H_3 - 2B_3(\theta_{ice}^*(0, t))\theta_{ice}^*(0, t) \quad (4.95)$$

$$\hat{\theta}_{av,3}(\tau_2) = 0 \quad (4.96)$$

Assim como feito nos casos anteriores, rescrevendo a Eq. (4.95) para se tornar um problema apenas com a variável de contorno do problema e em coordenadas esféricas, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[4\eta(\tau) + B_3(\theta_{ice,3}(0, \tau))\eta(\tau)^2 \right] \frac{\partial \theta_{ice,3}(0, \tau)}{\partial \tau} \\ & + \theta_{ice,3}(0, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[4\eta(\tau) + B_3(\theta_{ice,3}(0, \tau))\eta(\tau)^2 \right] \\ & - 2\eta(\tau)H_3 \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = -12 \left[\frac{\theta_{ice,3}(0, \tau)}{\eta(\tau)} - H_3 + B_3(\theta_{ice,3}(0, \tau))\theta_{ice,3}(0, \tau) \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\theta_{ice}^*(0, \tau_2) = 0 \quad (4.98)$$

A melhor formulação de diferencial amontoado é então completada com as equações diferenciais de limite móvel adimensional, para cada hipótese de formação de gelo durante a recalescência, após a substituição do derivado de temperatura na interface móvel, $\left. \frac{\partial \theta_{ice}}{\partial x} \right|_{x=\eta(\tau)}$

, agora dado como:

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \frac{St}{(1-\eta(\tau))} \left[\frac{2\theta_{ice,3}(0,\tau)}{\eta(\tau)} - H_3 + B_3(\theta_{ice,3}(0,\tau))\theta_{ice,3}(0,\tau) \right] \quad (4.99)$$

$$\eta(\tau_2) = 1 - \frac{R_{mi}}{R_d} \quad (4.100)$$

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \frac{L}{L_m} \frac{St}{(1-\eta(\tau))} \left[\frac{2\theta_{ice,3}(0,\tau)}{\eta(\tau)} - H_3 + B_3(\theta_{ice,3}(0,\tau))\theta_{ice,3}(0,\tau) \right] \quad (4.101)$$

$$\eta(\tau_2) = 0 \quad (4.102)$$

Onde,

$$B_3(\theta_{ice}^*(1,\tau)) = Bi_3 + 4Bir_3 \left[1 + \beta\theta_{ice}^*(1,\tau) + \frac{\beta^2\theta_{ice}^{*2}(1,\tau)}{2} \right] \left[1 + \frac{\beta\theta_{ice}^*(1,\tau)}{2} \right] + \frac{\rho_{v,ice,s}(\theta_{ice}^*(1,\tau))}{\rho_{v,ice,a}} Bir_3 - 1 \quad (4.103)$$

4.3.6 Congelamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$

A Fase de congelamento (4° estágio) é agora proposta com a aproximação de maior ordem, a $H_{1,1}/H_{0,0}$, assim como na de menor ordem, está etapa é bem similar a realizada para

o primeiro estágio com esta aproximação, seguindo o mesmo procedimento do primeiro estágio, inicialmente definimos as equações da $H_{1,1}/H_{0,0}$ para o presente problema.

$$\int_0^1 \theta_{ice}^*(x, \tau) dx \equiv \theta_{av,4}(\tau) \cong \frac{1}{2} [\theta_{ice}^*(1, \tau) + \theta_{ice}^*(0, \tau)] + \frac{1}{12} \left[\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=1} \right] \quad (4.104)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \theta_{ice}^*(x, \tau)}{\partial x} dx \equiv \theta_{ice}^*(1, \tau) - \theta_{ice}^*(0, \tau) \cong \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=1} + \frac{\partial \theta_{ice}^*}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \quad (4.105)$$

onde a regra trapezoidal corrigida é adotada para aproximar a temperatura média, enquanto a mesma regra trapezoidal simples é usada para o fluxo de calor médio. O procedimento é essencialmente o mesmo da aproximação anterior, exceto pela relação entre o limite e as temperaturas médias, $\theta_{ice}(1, \tau)$ e $\theta_{av,4}(\tau)$, agora obtido a partir de Eqs. (4.104 e 4.105) e as condições de contorno, Eqs.(3.78-3.79), como:

$$4\theta_{ice}^*(1, \tau) + B_4 (\theta_{ice}^*(1, \tau)) \theta_4^*(1, \tau) - H_4 - 6\theta_{av,4}(\tau) = 0 \quad (4.106)$$

Assim, a formulação melhorada obtida através da aproximação H_{11}/H_{00} é dada pela Eq. (4.107):

$$\frac{d\theta_{av,4}(\tau)}{d\tau} = -2\theta_4^*(1, \tau) + 2H_4 - 2B_4 (\theta_{ice}^*(1, \tau)) \theta_{ice}^*(1, \tau) \quad (4.107)$$

$$\theta_{av,4}(0) = \theta_{4,0} \quad (4.108)$$

Onde,

$$B_4 (\theta_{ice}^*(1, \tau)) = Bi_4 + Bir_4 [\theta_4^*(1, \tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,g} (\theta_{ice}^*(1, \tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_4 - 1 \quad (4.109)$$

Como antes, temperatura média é uma variável auxiliar de cálculo e deve ser evitada, assim é necessário rescrever a formulação para as temperaturas na superfície e no centro da gotícula, como segue:

$$\begin{aligned}
B_4 \left(\theta_{ice}^*(l, \tau) \right) \frac{\partial \theta_{ice}^*(l, \tau)}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial \theta_{ice}^*(l, \tau)}{\partial \tau} \\
= -\theta_{ice}^*(l, \tau) \frac{\partial B_4 \left(\theta_{ice}^*(l, \tau) \right)}{\partial \tau} - 12\theta_{ice}^*(l, \tau) + 12H_4 - 12B_4 \left(\theta_{ice}^*(l, \tau) \right) \theta_4^*(l, \tau)
\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$\theta_{ice}^*(x, 0) = \theta_{4,0} \tag{4.111}$$

Onde,

$$B_4 \left(\theta_4^*(l, \tau) \right) = Bi_4 + Bir_4 \left[\theta_4^*(l, \tau) \right]^4 + \frac{\rho_{vi,ice} \left(\theta_4^*(l, \tau) \right)}{\rho_{vi,a}} Bim_4 - l \tag{4.112}$$

Entretanto, a variável θ_l^* é representada para um sistema de coordenadas retangulares, para retornar o problema para o sistema de coordenadas esféricas a Eq. (3.75) é utilizada, assim, o novo sistema de equação é obtida substituindo a Eq. (3.75) nas Eqs. 4.110 e 4.111 e a temperatura adimensional no centro da gotícula é obtida utilizando a Eq. (3.75) na Eq. 4.29. Obtendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
B_4 \left(\theta_{ice,4}(l, \tau) \right) \frac{\partial \theta_{ice,4}(l, \tau)}{\partial \tau} + 4 \frac{\partial \theta_{ice,4}(l, \tau)}{\partial \tau} \\
= -\theta_{ice,4}(l, \tau) \frac{\partial B_4 \left(\theta_{ice,4}(l, \tau) \right)}{\partial \tau} - 12\theta_{ice,4}(l, \tau) \\
+ 12H_4 - 12B_4 \left(\theta_{ice,4}(l, \tau) \right) \theta_{ice,4}(l, \tau)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\theta_{ice,4}(x, 0) = \theta_{4,0} \tag{4.114}$$

$$\theta_{ice,4}(0, \tau) = 2\theta_{ice,4}(1, \tau) - H_4 + B_4(\theta_{ice,4}(1, \tau))\theta_{ice,4}(1, \tau) \quad (4.115)$$

Onde,

$$B_4(\theta_{ice,4}(1, \tau)) = Bi_4 + Bir_4 [\theta_{ice,4}(1, \tau)]^4 + \frac{\rho_{vi,ice}(\theta_{ice,4}(1, \tau))}{\rho_{vi,a}} Bim_4 - 1 \quad (4.116)$$

4.4 Aplicação: Gotícula Esférica – Apoiada em uma Superfície Superhidrofóbicas

Na presente seção será detalhada a abordagem da CIEA com aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ (uma vez que a $H_{1,1}/H_{0,0}$ para a geometria esférica retorna ao modelo *lumped* clássico e os resultados com a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ possui boa concordância com outros métodos, como já verificado em trabalhos da literatura) para redução do modelo apresentado no capítulo 3 da gotícula esférica apoiada em uma superfície superhidrofóbicas, que neste trabalho será chamada de gotícula idealizada, uma vez que sua geometria não possui deformações, A Fig. 4.2 relembra a configuração simplificada para análise desta situação, destacando em vermelho a coordenada radial que será eliminada para redução do modelo. A equação resultante do modelo reduzido será também resolvida e detalhada nesta seção pela técnica da GITT, combinando as duas metodologias presentes neste trabalho. Além disso, com propósito de comparar a eficiência da combinação CIEA-GITT é detalhado nesta seção a solução utilizando a GITT como transformação total, que irá fornecer uma importante contribuição para análise da convergência entre as duas abordagens.

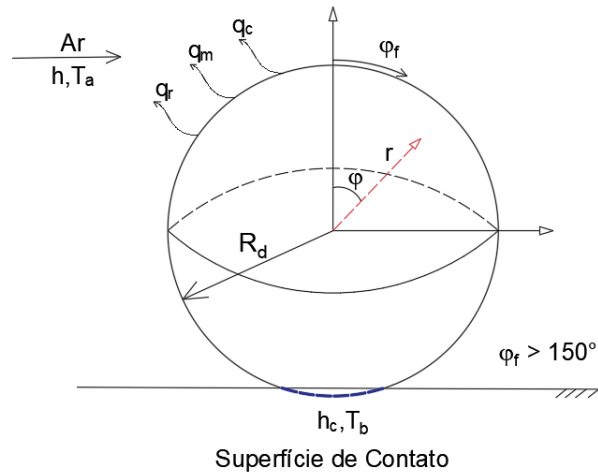


Figura 4-2 – Configuração da gotícula super-resfriada apoiada em uma superfície e sujeira a uma corrente de ar frio, com a variável a ser eliminada pela aplicação da CIEA em vermelho.

4.4.1 Super-Resfriamento: CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ / GITT

Como feito para o caso da gotícula suspensa, inicialmente para a abordagem da CIEA é necessário definir a temperatura média do modelo, a aproximação é adotada na direção “R” uma vez que utilizar em “R” a manipulação algébrica será mais simples e os gradientes de temperatura são menores em “R” do que em “ μ ”. Desta forma, a média calcula é:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau_1) = 3 \int_0^1 R^2 \theta(R, \mu, \tau_1) \quad (4.117)$$

Agora, é empregado a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$, sendo o $H_{1,1}$ para a temperatura média e o $H_{0,0}$ para a derivada da temperatura média (fluxo de calor), para o presente problema em coordenadas esféricas a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ é definida como segue:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \frac{3}{2} \left[R^2 \theta(R, \mu, \tau_1) \Big|_{R=1} + R^2 \theta(R, \mu, \tau_1) \Big|_{R=0} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial R^2 \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=0} - \frac{\partial R^2 \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=1} \right] \quad (4.118)$$

$$\theta(1, \mu, \tau_1) - \theta(0, \mu, \tau_1) = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=0} + \left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=1} \right] \quad (4.119)$$

Aplicando a regra do produto e anulando os termos que são iguais a zero na Eq. (4.118), a aproximação torna-se:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (4.120)$$

Assim, a Eq. (4.120) fornece uma relação da temperatura adimensional média com sua temperatura adimensional na superfície da gotícula. Esta relação pode ficar mais clara aplicando a condição de contorno do problema na Eq. (4.120), como segue:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \theta(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{4} B_1(\theta(1, \mu, \tau_1)) \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{1}{4} H_1 \quad (4.121)$$

Outra informação de importante conhecimento para o problema é a temperatura adimensional ou o fluxo de calor no interior da gotícula, para ter essa informação é necessário aplicar a condição de contorno do problema na Eq. (4.119). Além disso, uma condição adicional em $R = 0$ precisa ser fornecida para resolver o problema, neste trabalho foi adotado uma condição do segundo tipo homogênea, pois foi considerado a hipótese que no interior da gotícula ($R=0$) o fluxo de calor será muito pequeno e não terá uma influência significativa no processo. Por outro lado, quando está hipótese não for válida, uma sugestão é adotar a transformação $V = R^{1/2} \theta$ no sistema de equações do problema, pois com essa transformação será obtido para o problema uma condição em $R=0$.

Desta forma, é possível obter a temperatura adimensional no interior da gotícula em função da temperatura adimensional média, ou temperatura adimensional na superfície da gotícula, da seguinte forma:

$$\theta(0, \mu, \tau_1) = \theta(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{2} B_1(\theta(1, \mu, \tau_1)) \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{1}{2} H_1 \quad (4.122)$$

Ou,

$$\frac{\theta(0, \mu, \tau_1)}{2} + \frac{\theta(1, \mu, \tau_1)}{2} = \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.123)$$

Com as informações da temperatura adimensional média e as temperaturas no limite do problema. Aplica-se o operador: $3 \int_0^1 R^2 \text{_____} dR$ na Eq. (3.95)

$$\begin{aligned} 3 \int_0^1 R^2 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR &= \int_0^1 3R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR \\ &+ \int_0^1 3R^2 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right) \right] dR \end{aligned} \quad (4.124)$$

Organizando a Eq. (4.124) em termos,

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \int_0^1 R^2 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR}_I &= \underbrace{\int_0^1 3R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR}_{II} \\ &+ \underbrace{\int_0^1 3R^2 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right) \right] dR}_{III} \end{aligned} \quad (4.125)$$

E a solução de cada termo da Eq. (4.125) é detalhada a seguir:

$$I : 3 \int_0^1 R^2 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR = \frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} \quad (4.126)$$

$$II : \int_0^1 3R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR = 3 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=1} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} III : \int_0^1 3R^2 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right) \right] dR \\ = 3 \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^1 \theta(R, \mu, \tau_1) dR \right) \end{aligned} \quad (4.128)$$

Para a solução da Eq. (4.128) é necessário aplicar a regra do trapézio corrigida (H_{1,1}), da seguinte forma:

$$\int_0^1 \theta(R, \mu, \tau_1) dR = \frac{\theta(1, \mu, \tau_1)}{2} + \frac{\theta(0, \mu, \tau_1)}{2} + \frac{1}{12} \left[\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=0} - \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=1} \right] \quad (4.129)$$

Aplicando as condições de contorno do problema na Eq. (4.129) e utilizando a Eq. 4.122, para o problema permanecer em função da temperatura adimensional na superfície da gotícula, a solução da Eq. (4.129) é dada como:

$$\int_0^1 \theta(R, \mu, \tau_1) dR = \theta(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{3} B_1(\theta(1, \mu, \tau_1)) \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{7H_1}{12} \quad (4.130)$$

Assim, a solução do terceiro termo é dada pela Eq. (4.131)

$$III : 3 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\theta(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{3} B_1(\theta(1, \mu, \tau_1)) \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{7H_1}{12} \right] \right\} \quad (4.131)$$

Desta forma, utilizando as Eqs. (4.126), (4.127) e (4.131) na Eq. (4.125), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} &= 3 \frac{\partial \theta(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=1} \\ &+ 3 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\theta(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{3} B_1(\theta(1, \mu, \tau_1)) \theta(1, \mu, \tau_1) - \frac{7H_1}{12} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.132)$$

Aplicando a Eq. (3.96) na Eq. (4.132), junto com a Eq. (4.121), a equação do modelo reduzido final é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_\ell(1, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} &+ \frac{1}{4} \frac{\partial B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) \theta_\ell(1, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} \\ &= 3H_1 - 3B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) \theta_\ell(1, \mu, \tau_1) \\ &+ 3 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\theta_\ell(1, \mu, \tau_1) + \frac{1}{3} B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) \theta_\ell(1, \mu, \tau_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.133)$$

A equação (4.133) pode ser reorganizada, separando os termos não lineares $g(\theta(1, \mu, \tau_1))$, para aplicação da GITT, e utilizando a metodologia revisada na seção 4.2, na seguinte forma:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \theta_\ell(1, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \theta_\ell(1, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right\} + g(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) \quad (4.134)$$

Onde,

$$g(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) = H_1 - B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau))\theta_\ell(1, \mu, \tau) - \frac{1}{4} \frac{\partial B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau))\theta_\ell(1, \mu, \tau)}{\partial \tau_1} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} [B_1(\theta_\ell(1, \mu, \tau))\theta_\ell(1, \mu, \tau)] \right\} \quad (4.135)$$

O problema auxiliar adotado para o seguinte problema é dado pelas equações abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial M(\mu)}{\partial \mu} \right\} + n(n+1)M(\mu) = 0 \quad (4.136)$$

$$\left. \frac{\partial M(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial M(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (4.137)$$

E sua solução e a norma são:

$$M(\mu) = P_n(\mu) \quad (4.138)$$

$$N_\mu = \frac{2}{2n+1} \quad (4.139)$$

Onde, P_n é o polinômio de Legendre de ordem n , e $n=0,1,2,3,4,\dots$

Desta forma, o seguinte par-transformada-integral foi considerado:

$$\bar{\theta}_n(1, \tau_1) = \int_{-1}^1 P_n(\mu') \theta(1, \mu, \tau_1) d\mu \quad (4.140)$$

$$\theta(1, \mu, \tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \bar{\theta}_n(1, \tau_1) \quad (4.141)$$

Assim, aplicando o operador: $\int_{-1}^1 P_n(\mu') \dots d\mu$ na Eq. (4.134),

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial \theta_\ell(1, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\mu = \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} [\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)] \right\} d\mu + \int_{-1}^1 P_n(\mu) g(\theta_\ell(1, \mu, \tau_1)) d\mu \quad (4.142)$$

Separando a Eq. (4.142) em termos:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial \theta_\ell(I, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\mu}_I \\
& = \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} [\theta_\ell(I, \mu, \tau_1)] \right\} d\mu}_{II} + \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) g(\theta_\ell(I, \mu, \tau_1)) d\mu}_{III}
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Cada termo da Eq. (4.143) é resolvido como segue:

$$I : \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial \theta_\ell(I, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\mu = \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\theta}_n(I, \tau_1)}{\partial \tau_1} \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned}
II : & \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} [\theta_\ell(I, \mu, \tau_1)] \right\} d\mu = \\
& \left[(1-\mu^2) P_n(\mu) \frac{\partial \theta_\ell(I, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} - (1-\mu^2) \theta_\ell(I, \mu, \tau_1) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right]_{-1}^1 \\
& \quad - \int_{-1}^1 n(n+1) P_n(\mu) \theta_\ell(I, \mu, \tau_1) d\mu
\end{aligned} \tag{4.145}$$

A Eq. (4.145) pode ser simplificada como segue:

$$\begin{aligned}
II : & \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} [\theta_\ell(I, \mu, \tau_1)] \right\} d\mu \\
& = - \int_{-1}^1 n(n+1) P_n(\mu) \theta_\ell(I, \mu, \tau_1) d\mu = -n(n+1) \bar{\theta}_n(I, \tau_1)
\end{aligned} \tag{4.146}$$

$$III : \int_{-1}^1 P_n(\mu) g(\theta_\ell(I, \mu, \tau_1)) d\mu = g(\bar{\theta}_n(I, \tau_1)) \tag{4.147}$$

Já o terceiro termo da equação é transformado, Eq. (4.147) e para sua solução é necessário a utilização da integração semi-analítica. Assim, substituindo as Eqs. (4.144), (4.146) e (4.147) na Eq. (4.143), temos o seguinte sistema de equação:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\theta}_n(I, \tau)}{\partial \tau_1} + n(n+1) \bar{\theta}_n(I, \tau) = g(\bar{\theta}_n(I, \tau_1)) \tag{4.148}$$

Com a seguinte condição inicial:

$$\overline{\theta}_n(1,0) = \int_{-1}^1 P_n(\mu) \theta_0 d\mu = \overline{\theta}_0 \quad (4.149)$$

Onde é resolvido numericamente no Mathematica com a rotina NDSolve e aplicando a formula da Inversa é possível obter a solução da temperatura adimensional na superfície da gotícula, assim como sua temperatura adimensional média na direção radial.

4.4.2 Super-resfriamento: GITT 2D

Agora, a GITT será aplicada para transformação total do problema de condução de calor, bidimensional, não-linear, em coordenadas esféricas. Inicialmente a transformação: $V = r^{1/2}\theta$ é aplicada para trabalhar com equações de Bessel em R, e Legendre em μ . Desta forma, o sistema de equações transformado é o seguinte:

$$\frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} - \frac{1}{4} \frac{V_\ell(R, \mu, \tau)}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \quad (4.150)$$

Condição inicial:

$$V_\ell(R, \mu, 0) = R^{1/2} \theta_0 \quad (4.151)$$

Condição de contorno na direção zenital

$$\left. \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (4.152)$$

$$\left. \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (4.153)$$

Condição de contorno na direção radial

$$V_\ell(0, \mu, \tau) = 0 \quad (4.154)$$

$$\left. \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} + B_1(V_\ell(1, \mu, \tau))V_\ell(1, \mu, \tau) = H_1 \quad (4.155)$$

Onde,

$$B_I(V_\ell(I, \mu, \tau)) = B^+_{-I}(V_\ell(I, \mu, \tau)) - \frac{I}{2}$$

Para a aplicação da GITT, inicialmente será realizada a transformação na variável “ μ ” com o seguinte par transformada-inversa:

$$\text{Transformada: } \bar{V}_n(R, \tau) = \int_{-1}^1 M_n(\mu') V(R, \mu, \tau) d\mu' \quad (4.156)$$

$$\text{Inversa: } V(R, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^M \frac{M_n(\mu')}{N_n} \bar{V}_n(R, \tau) \quad (4.157)$$

O problema auxiliar adotado, é dado pelas equações abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M_n(\mu)}{\partial \mu} \right) + n(n+1) M_n(\mu) = 0 \quad (4.158)$$

$$\left. \frac{\partial M_n(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (4.159)$$

$$\left. \frac{\partial M_n(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=-1} = 0 \quad (4.160)$$

Cuja solução e norma são as seguintes:

$$M_n(\mu) = P_n(\mu) \quad (4.161)$$

$$N_n = \frac{2}{2n+1} \quad (4.162)$$

E os valores de “n” serão, n=0,1,2,3...

Assim, já podemos escrever a transformada e a inversa da seguinte forma, mais direta:

$$\text{Transformada: } \bar{V}_n(R, \tau) = \int_{-1}^1 P_n(\mu') V(R, \mu, \tau) d\mu' \quad (4.163)$$

$$\text{Inversa: } V(R, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^M \frac{2n+1}{2} P_n(\mu') \bar{V}_n(R, \tau) \quad (4.164)$$

Em seguida, aplicando o operador: $\int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} d\mu$ na Eq. (4.150) e organizando

em termos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \tau} d\mu}_I = \\
 & \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) \left(\frac{\partial^2 V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} + \frac{1}{4} \frac{V_\ell(R, \mu, \tau)}{R^2} \right) d\mu}_{II} \\
 & \quad + \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(\mu) \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \right] d\mu}_{III}
 \end{aligned} \tag{4.165}$$

Cada termo possui sua solução como segue:

$$I : \int_{-1}^1 P_n(\mu) \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \tau} d\mu = \frac{\partial \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial \tau} \tag{4.166}$$

$$\begin{aligned}
 II : \int_{-1}^1 P_n(\mu) \left(\frac{\partial^2 V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} + \frac{V_\ell(R, \mu, \tau)}{R^2} \right) d\mu \\
 = \frac{\partial^2 \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial R} + \frac{\bar{V}_n(R, \tau)}{R^2}
 \end{aligned} \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}
 III : \int_{-1}^1 P_n(\mu) \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial V_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial \mu} \right) \right] d\mu = \\
 \left\{ \left[(1-\mu^2) P_n(\mu) \frac{\partial V_\ell}{\partial \mu} \right] - \left[(1-\mu^2) V_\ell(R, \mu, \tau) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right] \right\} \Big|_{-1}^1 \\
 - \int_{-1}^1 V_\ell(R, \mu, \tau) P_n(\mu) n(n+1) d\mu
 \end{aligned} \tag{4.168}$$

Aplicando as condições de contorno na Eq. (4.168), temos

$$III : - \int_{-1}^1 V_\ell(R, \mu, \tau) P_n(\mu) n(n+1) d\mu = -n(n+1) \bar{V}_n(R, \tau) \tag{4.169}$$

Desta forma, a equação 4.150, transformada parcialmente é dada pela Eq. (4.170)

$$\frac{\partial \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial \tau_l} = \frac{\partial^2 \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial R} - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{R^2} \bar{V}_n(R, \tau) \quad (4.170)$$

Com a seguinte condição inicial transformada:

$$V_\ell(R, \mu, 0) = \int_{-1}^1 P_n(\mu) R^{1/2} \theta_0 d\mu \equiv \bar{\theta}_0 \quad (4.171)$$

E as condições de contorno transformadas

$$\bar{V}_n(R, \tau) = 0 \quad (4.172)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_n(R, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} + \sum_{k=0}^M C_{n,k}(1, \tau) \bar{V}_k(R, \tau) = \bar{H}_1 \quad (4.173)$$

Onde:

$$\bar{H}_1 = \int_{-1}^1 P_n(\mu) H_1 d\mu \quad (4.174)$$

$$C_{n,k}(1, \tau) = \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) B_l(1, \mu, \tau) d\mu$$

Agora, antes de realizar a transformação na direção radial das Eqs. (4.170-4.174), é desejável aplicar um filtro para tornar a condição de contorno do problema homogênea e melhorar a convergência da solução final, sendo o filtro adotado da seguinte forma:

$$\bar{V}_n(R, \tau) = F_n(R, \tau) + V_n^*(R, \tau) \quad (4.175)$$

Onde $F_n(R, \tau)$ é o filtro proposto e $V_n^*(R, \tau)$ a equação na forma homogênea.

Desta forma, o filtro proposto é da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 F_n(R, \tau)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_n(R, \tau)}{\partial R} - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{R^2} F_n(R, \tau) = 0 \quad (4.176)$$

A solução da Eq. (4.176) é:

$$F_n(R, \tau) = C_1(\tau)R^{n+\frac{1}{2}} + C_2(\tau)R^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (4.177)$$

E as condições de contorno do filtro são dadas a seguir:

$$F_n(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial F_n(R)}{\partial R} \right|_{R=1} + \sum_{k=0}^M C_{n,k}(1, \tau) F_k(\mu, \tau) = \overline{H}_1 \quad (4.178)$$

Temos, como coeficientes da Eq. (4.177)

$$C_1(\tau) = \frac{\overline{H}_1}{(n+1/2) + \sum_{k=0}^M C_{n,k}(1, \tau)} \quad (4.179)$$

$$C_2(\tau) = 0 \quad (4.180)$$

Desta forma, a solução do filtro no seu formato particular, é dada por:

$$F_n(R) = R^{n+1/2} \frac{\overline{H}_1}{(n+1/2) + \sum_{k=0}^M C_{n,k}(1, \tau)} \quad (4.181)$$

Já o problema homogêneo é da seguinte forma:

$$\frac{\partial V_n^*(R, \tau_1)}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_n(R, \tau_1)}{\partial \tau_1} = \frac{\partial^2 V_n^*(R, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_n^*(R, \tau_1)}{\partial R} - \frac{(n+1/2)^2}{R^2} V_n^*(R, \tau_1) \quad (4.182)$$

Com as seguintes condições de contorno

$$V_n^*(0, \tau) = 0 \quad (4.183)$$

$$\left. \frac{\partial V_n^*(R, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} + \sum_{k=0}^M C_{n,k}^*(1, \tau) V_k^*(R, \tau) = 0 \quad (4.184)$$

Para a transformação na direção radial, o Problema Auxiliar em R é dado a seguir:

$$\frac{d^2 \beta_{n+0.5,p}(R, \tau)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\beta_{n+0.5,p}(R, \tau)}{dR} + \left[\lambda(\tau)_{n,p}^2 - \frac{(n+1/2)^2}{R^2} \right] \beta_{n+0.5,p}(R, \tau) = 0 \quad (4.185)$$

Com a seguinte condição de contorno

$$\left. \frac{\partial \beta_{n+1/2,p}(R, \tau)}{\partial R} \right|_{R=1} + \sum_{k=0}^M C_{n,k}^*(1, \tau) \beta_{k+1/2,p}(R, \tau) = 0 \quad (4.186)$$

Cuja solução, norma e equação transcendental são respectivamente:

$$\beta_{n+1/2,p}(R, \tau) = J_{n+1/2}(\lambda_{n,p}(\tau) R) \quad (4.187)$$

$$N_r(\lambda_{n,p}(\tau)) = \int_0^1 J_{n+1/2}(\lambda_{n,p}(\tau) R)^2 dR \quad (4.188)$$

$$\lambda_{n,p}(\tau) J'_{n+1/2}(\lambda_{n,p}(\tau)) + \sum_{k=0}^M C_{n,k}^*(1, \tau) J_{k+1/2}(\lambda_{k,p}(\tau)) = 0 \quad (4.189)$$

Para este problema, o seguinte par transformada-inversa foi adotado

$$\overline{V_{n,p}^*}(\tau) = \int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) V_n^*(R, \tau) dR' \quad (4.190)$$

$$V_n^*(R, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{n+1/2,p}(R, \tau)}{N_r(\lambda_{n,p}(\tau))} \overline{V_{n,p}^*}(\tau) \quad (4.191)$$

Repetindo o procedimento feito para transformação anterior, aplica-se o operador

$\int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) \underline{\quad} dR'$ na Eq. (4.182) e organizando a equação em termos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial \tau} dR'}_I + \underbrace{\int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) \frac{\partial F_n(R, \tau)}{\partial \tau} dR'}_{II} \\ & = \underbrace{\int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R', \tau) \left[\frac{\partial^2 V_n^*(R', \tau)}{\partial R'^2} + \frac{1}{R'} \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial R'} + \frac{(n+1/2)^2}{R'^2} V_n^*(R', \tau) \right] dR'}_{III} \end{aligned} \quad (4.192)$$

Resolvendo cada termo a seguir:

$$I: \int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial \tau} dR' = \frac{d \overline{V_{n,p}^*}(\tau)}{d\tau} - \int_0^1 R' V_n^*(R', \tau) \frac{\partial \beta_{n+1/2,p}(R, \tau)}{\partial \tau} dR \quad (4.193)$$

Na Eq. (4.193) é necessário aplicar a inversa, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I: \int_0^1 R' \beta_{n+1/2,p}(R, \tau) \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial \tau} dR' \\
= \frac{\overline{dV_{n,p}^*}(\tau)}{d\tau} - \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 R' \frac{\beta_{n+1/2,i}(R, \tau)}{N_r(\lambda_{n,i}(\tau))} \frac{\partial \beta_{n+1/2,p}(R, \tau)}{\partial \tau} dR \overline{V_{n,i}^*}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.194}$$

O Segundo termo não precisa ser detalhado, uma vez que conhecendo o valor do filtro, ele consegue ser resolvido no algoritmo computacional. Já o terceiro termo é resolvido aplicando integração por partes, como segue:

$$\begin{aligned}
III: \int_0^1 R' \beta_{n+0.5,p}(R', \tau) \left[\frac{\partial^2 V_n^*(R', \tau)}{\partial R'^2} + \frac{1}{R'} \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial R'} + \frac{(n+0.5)^2}{R'^2} V_n^*(R', \tau) \right] dR' \\
= R \left[\beta_{n+0.5,p}(R', \tau) \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial R'} - V_n^*(R', \tau) \frac{\partial \beta_{n+0.5,p}(R', \tau)}{\partial R'} \right] \Big|_0^1 \\
- \int_0^1 R \lambda_{n,p}(\tau) \beta_{n+0.5,p}(R', \tau) V_n^*(R', \tau) dR'
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Com a aplicação das condições de contorno no problema na Eq. (4.195), temos:

$$\begin{aligned}
III: \int_0^1 R' \beta_{n+0.5,p}(R', \tau) \left[\frac{\partial^2 V_n^*(R', \tau)}{\partial R'^2} + \frac{1}{R'} \frac{\partial V_n^*(R', \tau)}{\partial R'} + \frac{(n+0.5)^2}{R'^2} V_n^*(R', \tau) \right] dR' \\
= -\delta_{p,i} \overline{V_{n,i}^*}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.196}$$

Desta forma, a seguinte equação transformada é obtida

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{dV_{n,p}^*}(\tau)}{d\tau} - \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 R' \frac{\beta_{n+0.5,i}(R, \tau)}{N_r(\lambda_{n,p}(\tau))} \frac{\partial \beta_{n+0.5,p}(R, \tau)}{\partial \tau} dR \overline{V_{n,i}^*}(\tau) \\
+ \int_0^1 R' \beta_{n+0.5,p}(R, \tau) \frac{\partial F_n(R, \tau)}{\partial \tau} dR' = -\delta_{p,i} \overline{V_{n,i}^*}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.197}$$

Organizando a equação 4.197, como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{dV_{n,p}^*}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\delta_{p,i} - \int_0^1 R' \frac{\beta_{n+0.5,i}(R, \tau)}{N_r(\lambda_{n,p}(\tau))} \frac{\partial \beta_{n+0.5,p}(R, \tau)}{\partial \tau} dR \right) \overline{V_{n,i}^*}(\tau) \\
= - \int_0^1 R' \beta_{n+0.5,p}(R, \tau) \frac{\partial F_n(R, \tau)}{\partial \tau} dR'
\end{aligned} \tag{4.198}$$

Com sua condição inicial:

$$\overline{V_{n,p}^*}(0) = \int_0^1 R \beta_{n+0.5,p}(R,0) \left[\int_{-1}^1 P_n(\mu) r^{1/2} \theta_0 d\mu - F(R,0) \right] dR \quad (4.199)$$

Além disso, para obter os autovalores, é necessário diferenciar a equação transcendental, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{n,p}(\tau)}{d\tau} \left[J'_{n+0.5}(\lambda_{n,p}(\tau)R) + \lambda_{n,p}(\tau) J''_{n+0.5}(\lambda_{n,p}(\tau)R) \right] \\ + \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^M C_{n,k}^*(1,\tau) J_{k+0.5}(\lambda_{k,p}(\tau)R) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.200)$$

e adotando a condição inicial como:

$$\lambda_{n,p}(0) J'_{n+0.5,p}(\lambda_{n,p}(0)) + \sum_{k=0}^M C_{n,k}^*(1,0) J_{k+0.5,p}(\lambda_{k,p}(0)) = 0 \quad (4.201)$$

Desta forma, obtemos os valores de $\overline{V_{n,p}^*}(\tau)$ e aplicando as inversas, voltamos para $\theta(R, \mu, \tau)$, é possível calcular os valores da temperatura adimensional para qualquer posição e potencial desejável.

4.5 Gotícula Deformada – Apoiada em uma Superfície Superhidrofóbicas

Para a gotícula deformada, um procedimento semelhante ao da gotícula idealizada será adotado, desta vez, a equação bidimensional será reduzida com o emprego da CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$, como nos casos anteriores a variável a ser eliminada será a radial, como mostrado na Fig 4.3, e está equação resultante resolvida numericamente pelo NDSolve, desta forma será possível simular e comparar os dois resultados, da gotícula idealizada e deformada.

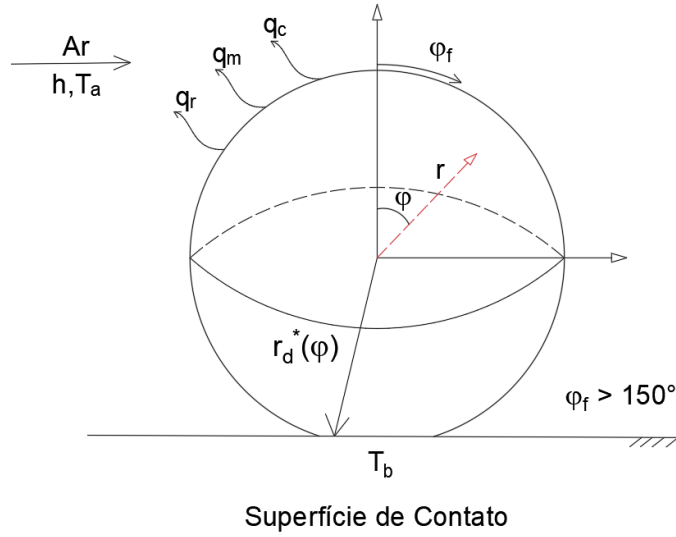


Figura 4-3 – Esquema simplificado da gotícula apoiada em um substrato e com superfície da gotícula deformada. Com destaque em vermelho para a variável a ser eliminada na redução do modelo da CIEA.

4.5.1 Super-resfriamento: CIEA

Primeiramente é necessário definir a média para o problema da gotícula deformada em uma superfície superhidrofóbica, dada pela equação abaixo:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau) = \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau) dR \quad (4.202)$$

Além disso, a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ para uma coordenada esféricas em geometria deformada dada pelas seguintes equações.

$$\bar{\theta}(\mu, \tau) = \frac{3}{2R_{df}^{*2}(\mu)} \left[R^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau) \Big|_{R=R_{df}^*} + R^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau) \Big|_{R=0} \right] + \frac{1}{4R_{df}^*(\mu)} \left[\frac{\partial R^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \Big|_{R=0} - \frac{\partial R^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*} \right] \quad (4.203)$$

$$\theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau) - \theta_\ell(0, \mu, \tau) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \Big|_{R=0} + \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \right] \quad (4.204)$$

Antes de aplicar as condições de contorno nas equações acima, é possível observar que o problema da gotícula deformada tem uma condição do primeiro tipo para a região deformável e uma condição do terceiro tipo para a interface gotícula-ar. Para unificar e transformar as duas regiões em uma única equação, a seguinte condição é definida:

$$\alpha_1(R, \mu, \tau) \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau) = \alpha_2 - \alpha_3 \left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*(\mu)} \quad (4.205)$$

Onde,

$$\alpha_1(R, \mu, \tau) = \begin{cases} B_1(R, \mu, \tau) & \text{se } \mu_f < \mu < 1 \\ 1 & \text{se } -1 < \mu < \mu_f \end{cases} \quad (4.206)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} H_1 & \text{se } \mu_f < \mu < 1 \\ \theta_b & \text{se } -1 < \mu < \mu_f \end{cases} \quad (4.207)$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu_f < \mu < 1 \\ 0 & \text{se } -1 < \mu < \mu_f \end{cases} \quad (4.208)$$

Assim, é possível ver que a equação (4.205) consegue recuperar bem as Equações (3.128) e (3.129).

Seguindo a abordagem do modelo reduzido, a Eq. (4.203) é expandida e após uma breve manipulação matemática é obtida da seguinte forma:

$$\bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \theta_\ell(R, \mu, \tau_1) \Big|_{R=R_{df}^*} - \frac{R_{df}^*(\mu)}{4} \left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*} \quad (4.209)$$

Multiplicando ambos os membros por $\alpha_1(R, \mu, \tau)$, temos

$$\alpha_1(R, \mu, \tau) \bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \alpha_1(R, \mu, \tau) \theta_\ell(R, \mu, \tau_1) \Big|_{R=R_{df}^*} - \alpha_1(R, \mu, \tau) \frac{R_{df}^*(\mu)}{4} \left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*} \quad (4.210)$$

Assim, é possível substituir a Eq. (4.210) na Eq. (4.205) para obter:

$$\alpha_1(R, \mu, \tau) \bar{\theta}(\mu, \tau_1) = \alpha_2 - [\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] \frac{R_{df}^*(\mu)}{4} \left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*} \quad (4.211)$$

O fluxo de calor na superfície da gotícula é definido como segue, com a reorganização da Eq.(4.211).

$$\left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*} = \frac{4\alpha_2}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} - \frac{4\alpha_1(R, \mu, \tau)}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.212)$$

Como citado na CIEA para a gotícula idealizada, outra informação de importante conhecimento para o problema é a temperatura adimensional ou o fluxo de calor no interior da gotícula, para ter essa informação é necessário aplicar a condição de contorno do problema na Eq. (4.204). Além disso, uma condição adicional em $R = 0$ precisa ser fornecida para resolver o problema, neste trabalho foi adotado uma condição do segundo tipo homogênea, pois foi considerado a hipótese que no interior da gotícula ($R=0$) o fluxo de calor será muito pequeno e não terá uma influência significativa no processo. Por outro lado, quando está hipótese não for válida, uma sugestão é adotar a transformação $V = R^{1/2}\theta$ no sistema de equações do problema, pois com essa transformação será obtido para o problema uma condição em $R=0$.

$$\theta_\ell(0, \mu, \tau_1) = \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau_1) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right|_{R=R_{df}^*(\mu)} \quad (4.213)$$

Em seguida, substituindo a Eq. (4.212) e (4.209) na Eq. (4.213), temos

$$\alpha_1(R, \mu, \tau) \theta_\ell(0, \mu, \tau_1) = \left[1 - \frac{2}{R_{df}^*(\mu)} \right] \alpha_2 - \frac{2\alpha_1(R, \mu, \tau)}{R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.214)$$

Desta forma, a equação acima é a relação do interior da gotícula com a temperatura média.

Em seguida, repetindo os procedimentos já utilizados, é necessário aplicar o operador

$$\begin{aligned} & \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \text{-----} dR, \text{ na equação de condução de calor do problema. Assim,} \\ & \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR = \\ & \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR \quad (4.215) \\ & + \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right) \right] dR \end{aligned}$$

Organizando a Eq. (4.215), nos respectivos termos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR}_{I} = \\
 & \underbrace{\frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR}_{II} \\
 & \quad + \underbrace{\frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial \mu} \right) \right] dR}_{III}
 \end{aligned} \tag{4.216}$$

e resolvendo cada termo a seguir, temos:

$$I : \frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial \tau_1} dR = \frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau)}{\partial \tau_1} \tag{4.217}$$

O segundo termo pode ser resolvido com a aplicação da integral por partes, e tem a seguinte solução

$$\begin{aligned}
 II : \frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} R^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \right) dR \\
 = \frac{3}{R_{df}^*(\mu)} \frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)}
 \end{aligned} \tag{4.218}$$

Sendo o segundo termo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 II : \frac{3}{R_{df}^*(\mu)} \frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} = \frac{4\alpha_2}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \\
 - \frac{4\alpha_1(R, \mu, \tau)}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1)
 \end{aligned} \tag{4.219}$$

O terceiro termo pode ser reorganizado e resolvido a integral pela regra do trapézio corrigida, assim:

$$III : \frac{3}{R_{df}^*{}^3(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} \theta_\ell(R, \mu, \tau_1) dR \right) \tag{4.220}$$

Onde, a regra do trapézio corrigida é dada como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} \theta_\ell(R, \mu, \tau_1) dR = & \frac{R_{df}^*(\mu)}{2} \left[\theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau_1) + \theta_\ell(0, \mu, \tau_1) \right] \\ & + \frac{R_{df}^{*2}(\mu)}{12} \left[\frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=0} - \frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \right] \end{aligned} \quad (4.221)$$

Sendo o terceiro termo dado em função da temperatura adimensional na superfície, no interior da gotícula e pelo fluxo na superfície da gotícula, como segue:

$$\begin{aligned} III : \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{R_{df}^*(\mu)} \theta_\ell(R, \mu, \tau_1) dR \right) = \\ \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{R_{df}^*(\mu) \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau_1)}{2} + \frac{R_{df}^*(\mu) \theta_\ell(0, \mu, \tau_1)}{2} \right) \right] \\ - \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{R_{df}^{*2}(\mu)}{12} \frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.222)$$

Lembrando pelas equações, temos:

$$\frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*} = \frac{4\alpha_2}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} - \frac{4\alpha_1(R, \mu, \tau)}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.223)$$

$$\theta_\ell(0, \mu, \tau_1) = \frac{1}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} \left[1 - \frac{2}{R_{df}^*(\mu)} \right] \alpha_2 - \frac{2}{R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.224)$$

$$\theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \quad (4.225)$$

As equações não irão ser substituídas na equação, será adotado a solução pelos sistemas de equação, pois facilitará no desenvolvimento do algoritmo computacional do presente trabalho. Desta forma, a EDP resultante do operador, é o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau)}{\partial \tau_1} = & \frac{4\alpha_2}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} - \frac{4\alpha_1(R, \mu, \tau)}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \\ & + \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{R_{df}^*(\mu) \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau_1)}{2} + \frac{R_{df}^*(\mu) \theta_\ell(0, \mu, \tau_1)}{2} \right) \right] \\ & - \frac{3}{R_{df}^{*3}(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{R_{df}^{*2}(\mu)}{12} \frac{\partial \theta_\ell}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.226)$$

Condição Inicial

$$\bar{\theta}(\mu, \tau) = \bar{\theta}_0 \quad (4.227)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau_1)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} - \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), 1, \tau) \frac{dR_{df}^*(1)}{dR} = 0 \quad (4.228)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}(\mu, \tau_1)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=-1} - \theta_\ell(R_{df}^*(\mu), -1, \tau) \frac{dR_{df}^*(-1)}{dR} = 0 \quad (4.229)$$

Onde,

$$\frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*} = \frac{4\alpha_2}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} - \frac{4\alpha_1(R, \mu, \tau)}{[\alpha_1(R, \mu, \tau) + \alpha_3] R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.230)$$

$$\theta_\ell(0, \mu, \tau_1) = \frac{1}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} \left[1 - \frac{2}{R_{df}^*(\mu)} \right] \alpha_2 - \frac{2}{R_{df}^*(\mu)} \bar{\theta}(\mu, \tau_1) \quad (4.231)$$

$$\theta_\ell(R_{df}^*(\mu), \mu, \tau) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1(R, \mu, \tau)} \frac{\partial \theta_\ell(R, \mu, \tau_1)}{\partial R} \Big|_{R=R_{df}^*(\mu)} \quad (4.232)$$

Este sistema de equação pode ser programado no Mathematica e resolvido com a aplicação da sub-rotina NDSolve, onde será possível conhecer a temperatura adimensional média, no interior e na superfície da gotícula.

CAPTÍULO 5

RESULTADOS

O presente capítulo está dividido em 2 seções, a primeira apresenta os resultados obtidos considerando a gotícula de ar super-resfriada suspensa e sujeitas a uma corrente de ar fria, e a segunda seção para a gotícula apoiada em uma superfície fria e sujeita a uma corrente de ar fria. Para a gotícula suspensa, a equação de condução de calor foi reduzida pela aplicação da CIEA, com as aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ e a EDO resultante foi resolvida através de um código simbólico-numérico construído na plataforma Wolfram *Mathematica*®. Nesta seção são apresentadas uma variação do número de Biot e do número de Stefan (para o 3° estágio) comparando as soluções das aproximações da CIEA com a GITT, para verificar a precisão dos modelos reduzidos. Além disso, é apresentada uma validação com os resultados disponível na literatura e uma análise paramétrica para analisar o tempo de congelamento da gota. Já a seção da gotícula apoiada, o modelo 2D proposto é reduzido com o emprego da CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ e a equação resultante resolvida pela abordagem híbrida da GITT e numérica da NDSolve na plataforma Wolfram *Mathematica*®, além do modelo reduzido a GITT é utilizada para a transformação total do modelo para comparação com a CIEA-GITT, e para critério de verificação o algoritmo do modelo 2D é resolvido pela NDSolve. Como resultados da gotícula apoiada será apresentado a evolução da temperatura adimensional média e na superfície da gotícula, em diferentes cenários físicos e uma análise de convergência comparando os métodos da CIEA-GITT e GITT. Além disso a solução da gotícula idealizada na CIEA-GITT é comparada com a gotícula deformada pela CIEA-NDSolve, comparando a evolução da temperatura média em diferentes ângulos de contato e raio da gotícula. A Tabela 4.1 resume as configurações analisadas da gotícula e quais os métodos / aproximações foram utilizadas para encontrar a solução do problema proposto.

5.1. Gotícula Suspensa

5.1.1 Variação do Número de Biot.

O número Biot (Bi) é um importante parâmetro adimensional na transferência de calor, representado pela razão entre a resistência térmica para condução e a resistência térmica para a convecção na superfície da gotícula. Neste sentido, com o objetivo de analisar o limite de aplicabilidade e demonstrar a precisão da CIEA, foram escolhidos alguns valores de Biot, abrangendo uma gama bastante ampla de aplicação. Para isto, os resultados obtidos pelo CIEA são comparados com os resultados da GITT, obtidos da elaboração de código no software Mathematica® onde resolveu os sistemas de equações diferenciais transformados obtidos fornecidos em CARVALHO, *et al.*, (2021). Como o presente trabalho não busca destacar a solução via GITT para a gotícula suspensa, uma vez que esta contribuição já foi realizada em CARVALHO, *et al.*, (2021), uma breve análise da convergência da GITT é apresentada no Anexo A deste trabalho, assim como algumas tabelas comparando os resultados da GITT e CIEA. Para os resultados da GITT do presente gráfico foram adotados 40 termos ($M=40$), uma vez que a convergência em $M=40$ é garantida para todas as fases da gotícula suspensa, como mostrado nas tabelas presentes no Anexo A.

As Figuras 5.1 – 5.4 apresentam a evolução da temperatura na superfície da gota no primeiro estágio, em diferentes valores de Biot (0.1, 1.0, 5.0, 10.0), e compara os resultados da $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ e do modelo completo por GITT ($M = 40$), onde o tempo adimensional varia de 0 a τ_1 . Deve-se notar que o final da 1ª etapa (ou seja, quando a gota atinge a temperatura de nucleação) será diferente para cada valor de Bi e é diferente para cada aproximação. Além disso, comparando com resultados experimentais (HINDMARSH, *et al.* 2004), o número de Biot são de aproximadamente 0.1, sendo uma boa apresentação para este estudo. Assim, os valores de $Bi = 0.1, 1.0, 5.0$ e 10.0 , foram adotados arbitrariamente para analisar os resultados e desafiar a metodologia do modelo reduzido. Valores mais baixos do número de Biot levam a perfis de temperatura mais uniformes, favorecendo assim a precisão da CIEA.

Como pode ser observado na Figura 5.1 evolução da temperatura, com $Bi = 0.1$, apresenta resultados bem ajustados quando comparados os obtidos pela CIEA com a GITT. Para baixos números de Biot (por exemplo, $Bi = 0,1$) a gotícula de água tem campos de temperatura aproximadamente uniformes ao longo de seu raio, favorecendo a aplicação de tais esquemas de fixação.

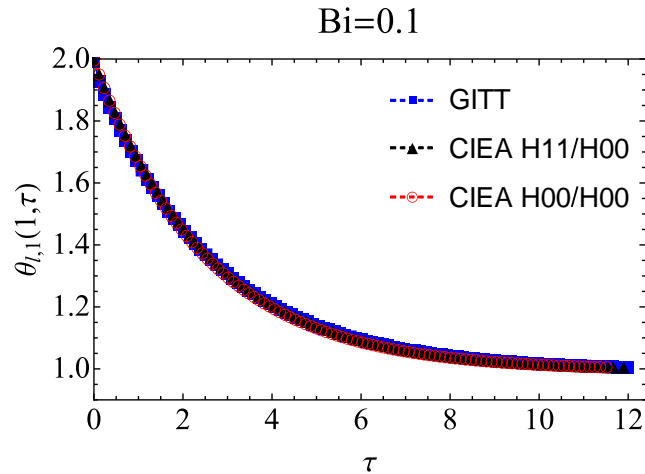


Figura 5-1 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 0.1$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$.

A Figura 5.2 mostra a evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula comparando com a solução da GITT e com a CIEA nas aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$, para um valor de Biot dez vezes maior que a Figura 5.1, onde os resultados são bem ajustados. Este aumento do valor de Biot ocasiona em um pequeno desvio para a aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$, pois está aproximação não consegue absorver informações suficientes da superfície da gotícula. Isto pode ser visto matematicamente através da comparação das equações reduzidas, as Eqs (4.28 e 4.35) que são obtidas pela aproximação obtidas $H_{0,0}/H_{0,0}$ possuem um modelo bem mais simplificado e carregam poucas informações do Biot que as Eqs (4.81 e 4.85) que são obtidas pela aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$, quando comparada com a $H_{1,1}/H_{0,0}$. Desta forma os resultados não são tão bem aproximados, enquanto para este cenário a aproximação mais elevada permanece com bons resultados.

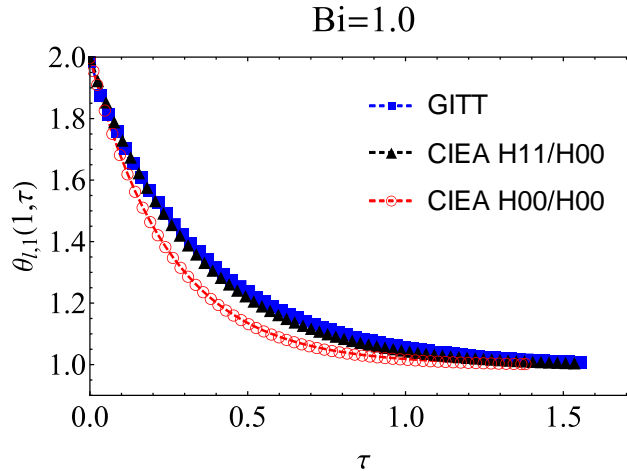


Figura 5-2 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 1.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_a$, $T_a = 254.13K$, $T_n = 254.75K$.

As Figuras 5.3 e 5.4, assim como as anteriores, analisam a evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula em comparação com os métodos da GITT e as duas aproximações utilizadas da CIEA, porém, agora com valores elevadores de Biot ($Bi = 5.0$, Figura 5.3 e $Bi = 10$, Figura 5.4). Os altos valores de Biot representam um resfriamento mais rápido, alcançando os valores da temperatura de nucleação imposta rapidamente, entretanto, como a informação carregadas com os valores de Biot são fornecidas no contorno da gotícula com o ar, ou seja, na sua superfície, a aproximação da CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$ apresenta um desvio significativo, pois não consegue manter essas informações na equação resultante do modelo reduzido, além disso, o processo atinge a temperatura de nucleação em um instante diferente dos demais métodos. Porém, quando comparado com a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ e GITT os resultados permanecem próximos com uma pequena variação do instante final, pois a temperatura de nucleação também foi atingida em momentos diferentes, já que o critério de parada utilizado é quando atinge a temperatura de nucleação ($T_n = 254.75K$), que acontece antes que a gotícula alcance a temperatura do ar ($T_a = 254.13K$) e as equações resultantes finais possuem simplificações diferentes Eq. (3.35) para a aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$ e Eq (4.85) para a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ e os casos são modelos aproximados de solução, é esperado que estes valores de fato sejam diferentes e que a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ por ser uma modelo mais preciso consiga ser mais competitivo com a GITT que a $H_{0,0}/H_{0,0}$.

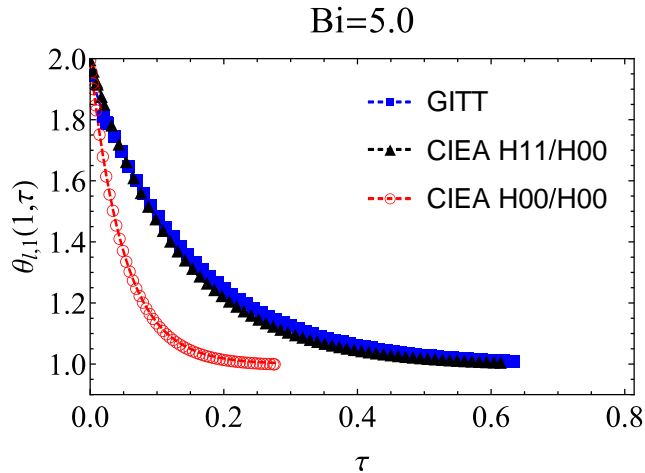


Figura 5-3 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 5.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$.

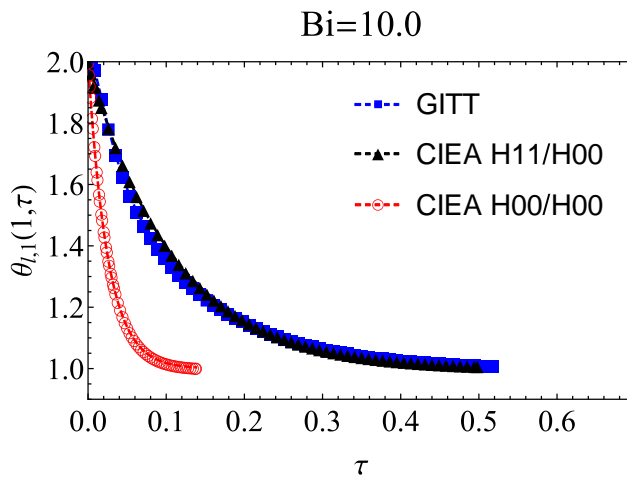


Figura 5-4 - Evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula para o primeiro estágio com $Bi = 10.0$, $Bi_{m,1}=Bi_{r,1}=0$, $T_0=2T_\infty$, $T_\infty = 254.13K$, $T_n = 254.75K$.

5.1.2 Variação do número de Biot e número de Stefan

O número de Stefan (St) é o parâmetro adimensional característico encontrado em problemas de mudança de fase, sendo definido como a razão do calor sensível e latente trocados pelo sistema. As Figuras 5.5-5.8 ilustram o efeito do número de Bi e St no terceiro estágio (solidificação), através da evolução da temperatura adimensional $\theta_{ice,3}(0, \tau)$ e frente de solidificação adimensional $v = s(t) / R$.

As Figuras 5.5-5.8(a) que mostram a evolução da frente de solidificação adimensional, enquanto as figuras 5.5-5.8 (b) os evolução da temperatura adimensional, além disso, os instantes iniciais ocorrem em momentos diferentes, pois como mostrado nas figuras 5.1 a 5.4 o início da etapa de recalescência ocorre em diferentes instantes a depender da aproximação usadas. Mais uma vez os resultados obtidos pela CIEA foram comparados com o da GITT considerando diferentes valores de Bi (0.1, 1.0, 5.0), acrescentando neste 3º estágio uma variação com os valores de St (0.11, 0.15, 0.20). O valor de St = 0,11 foi escolhido uma vez que representa o valor adotado em HINDMARSH et al., (2003), enquanto os valores maiores, St = 0.15 e 0.20, também foram considerados para analisar a influência do número de Stefan no tempo de congelamento.

Pela Figura 5.5, o aumento de St (de 0.11 para 0.20) representa um aumento na transferência de calor sensível em comparação com a transferência de calor latente, desta forma, espera-se uma variação mais significativa de temperatura durante o processo de mudança de fase, como confirmado pelos resultados destas figuras, onde os resultados com maior valor de St apresenta um congelamento mais rápido, terminando o tempo de congelamento mais rapidamente, está análise é essencial em processos que os gradientes de temperatura precisam ser monitorados, pois a constituição do sólido é afetada pela magnitude do gradiente de temperatura, sendo este efeito relevante em aplicações da indústria farmacêutica, alimentícia e metalúrgica.

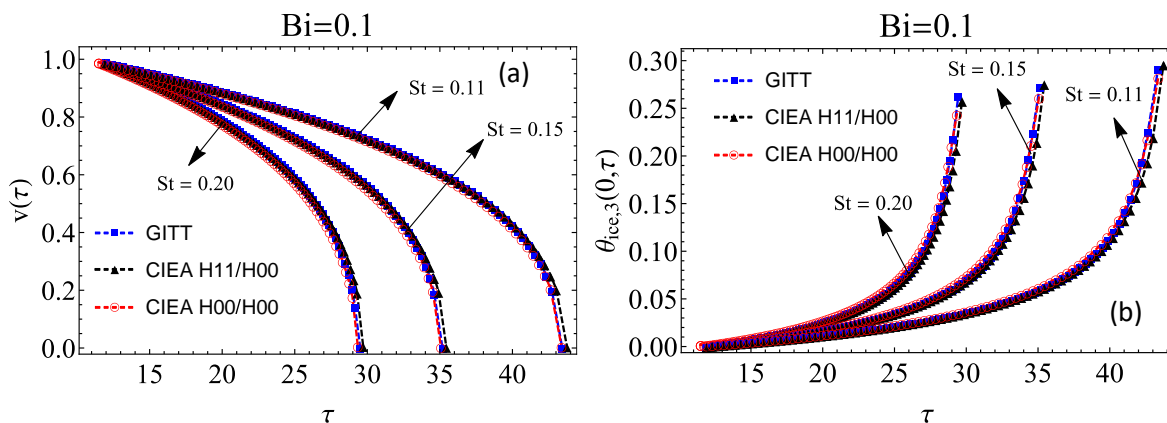


Figura 5-5 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula gotículas no estágio de solidificação, com Bi=0.1, onde a curva azul, GITT, curva preta, CIEA H_{1,1}/H_{0,0} e curva vermelha, CIEA H_{0,0}/H_{0,0}.

Além disso, ao comparar as figuras 5.6 e 5.7, que possuem os valores de $Bi = 1.0$, e $Bi = 5.0$, respectivamente com a figura 5.5, de $Bi = 0.1$, é possível observar que quando aumentamos os valores de Bi , é notado que uma variação no instante final do estágio de congelamento. Este desvio está presente independentemente do valor do número de Stefan na faixa analisada. Pode-se notar que a velocidade da frente de solidificação, aumenta acentuadamente à medida que o fim da solidificação é abordado. Por outro lado, essa velocidade é diretamente proporcional à derivada espacial da temperatura na interface, que é de fato aproximada pelas formulações diferenciadas, já que é aplicada como uma condição de contorno no processo. Portanto, mesmo um erro relativamente pequeno nesta quantidade pode induzir uma variação significativa na previsão do tempo final de solidificação, como pode ser observado nas Figura 5.6 e 5.7, embora menos notavelmente nas previsões de temperatura adimensional, porém é notado que o instante final do processo no gráfico da temperatura ocorre em momentos diferentes. Desta forma, como esperado, a duração do processo de congelamento está visivelmente ligada aos valores do número Biot e do número de Stefan e é muito mais rápida tanto para $bi_{c,3}$ quanto para St .

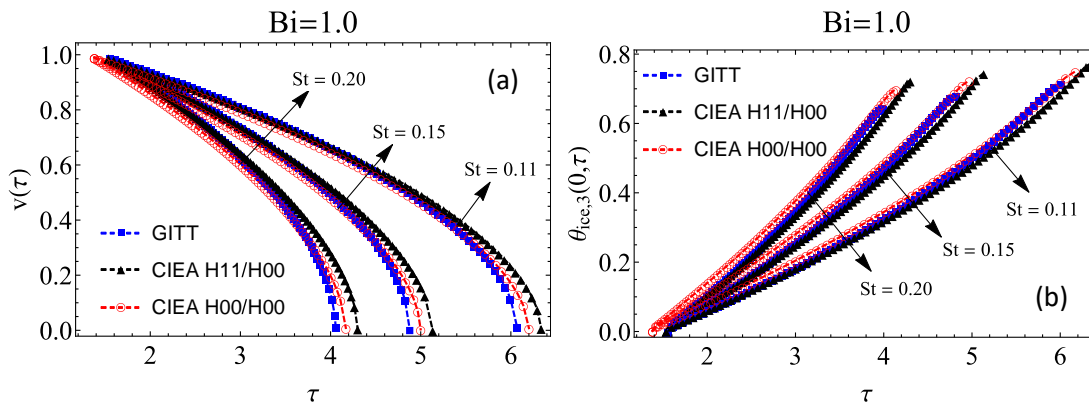


Figura 5-6 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula gotículas no estágio de solidificação, com $Bi=1.0$, onde a curva azul, GITT, curva preta, CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ e curva vermelha, CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$.

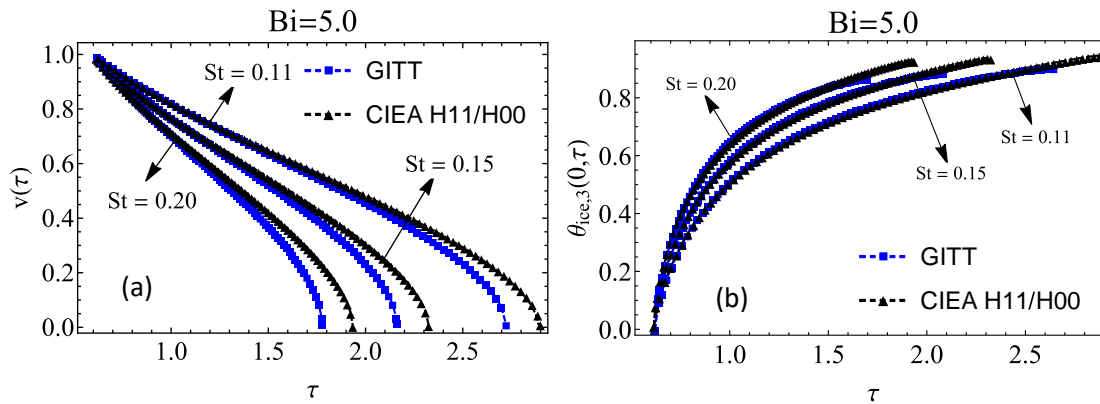


Figura 5-7 - Comparação da solução GITT e da CIEA para a posição adimensional da frente de solidificação para a temperatura adimensional da gotícula no estágio de solidificação, com $Bi=5.0$, sendo curva azul, GITT e curva preta, CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$.

5.1.3 Aplicação no congelamento de gotículas super-resfriadas.

A metodologia proposta está agora empregada em uma situação típica de congelamento de gotículas super-resfriadas. Para efeitos de comparação, os mesmos parâmetros informados no trabalho experimental-teórico de HINDMARSH, *et al.*, (2003) são aqui adotados. A Tabela 5.1 resume estes dados de entrada. A Figura 5.8 mostra uma comparação dos resultados experimentais de HINDMARSH, *et al.*, (2003) com o presente estudo para a evolução da temperatura adimensional no centro das gotículas no primeiro estágio (Figura. 5.8a) e para o quarto estágio (Figura. 5.8b). Os resultados tanto através da formulação CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ quanto da GITT concordam muito bem com aqueles obtidos experimentalmente em HINDMARSH *et al.*, (2003), oferecendo uma validação importante do modelo atual.

Tabela 5-1 - Propriedades e dados de entrada (HINDMARSH et al.,2003).

Variável	Valor	Variável	Valor	Variável	Valor
D_{ab} [m ² /s]	2.060×10^{-5}	ρ_l [kg/m ³]	1000	L [J/kg]	3.33×10^5
c_l [J/kgK]	4217	ρ_{ice} [kg/m ³]	920	L_e [J/kg]	2.502×10^6
c_{ice} [J/kgK]	2040	$\rho_{v,0}$ [kg/m ³]	4.8473×10^{-3}	L_{sb} [J/kg]	2.838×10^6
k_∞ [W/m K]	0.0234	ρ_∞ [kg/m ³]	1.3317	ε	0.96
k_l [W/m K]	0.569	σ [W/m ² K ⁴]	5.670×10^{-8}	μ_∞ [Ns/m ²]	1.663×10^{-5}
k_{ice} [W/m K]	1.88	v [m/s]	0.42		
Grupo adimensionais					
Fase	Bi_c		Bi_m		Bi_r
Líquida	0.114		0.0046		0.0012
Sólida	0.035		0.019		0.00046

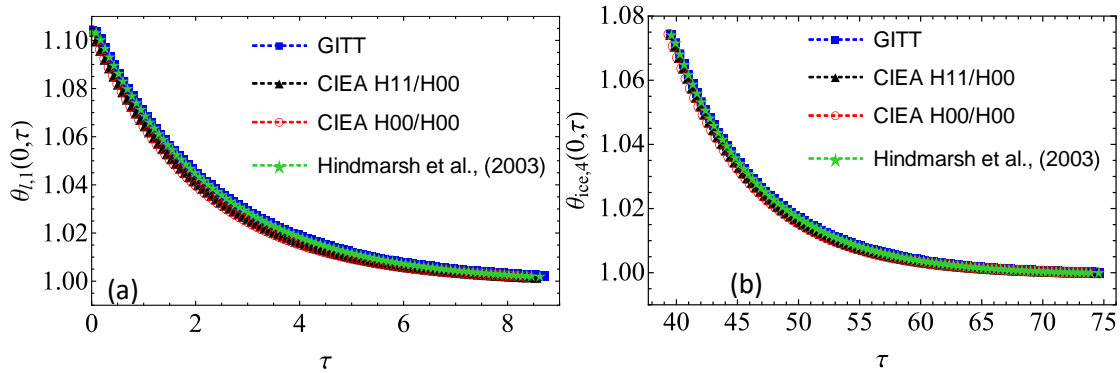


Figura 5-8 - Comparação da temperatura adimensional no centro da gotícula para a (a) estágio de Super-Resfriamento (1°) e (b) Resfriamento (4°), das abordagens propostas (GITT e CIEA) com os dados da literatura HINDMARSH *et al.*, (2003), ($T_a = 254.13K$, $T_n = 254$), e valores dos grupos adimensionais fornecidos na Tab. 5.1, e $R_D=0.78mm$

5.1.4 Estágio de solidificação e análise paramétrica

A presente seção mostra uma análise paramétrica no estágio de solidificação (3°), para isto, variações na velocidade do fluxo de ar ("v") e no raio da gotícula de água ("R"), são analisados, com os dados de entrada fornecidos pela Tabela 5.1. Essas variações afetam diretamente números os importantes números adimensionais presente neste estudo, com influências nas correlações para os números de Nusselt e Sherwood, além de afetarem

diretamente os números de Biot. As variações da velocidade e do raio da gota nos parâmetros adimensionais são apresentadas na tabela 5.2.

As figuras 5.9 (a-b) mostram os resultados do estudo paramétrico proposto para no 3º estágio, pela evolução da temperatura (b) e da frente de solidificação (a) em diferentes valores da velocidade do fluxo de ar. Como pode ser visto na Tabela 2, um aumento na velocidade do fluxo de ar de 0,42 para 0,97 m/s corresponde a uma variação significativa nos principais parâmetros a dimensionáveis, uma vez que tal aumento nos números de Sherwood e Nusselt representa um efeito acentuado na transferência de massa e calor por convecção no sistema, respectivamente. Além disso, observa-se que os números do Biot permanecem com valores baixos, claramente dentro da faixa previamente analisada que justifica um modelo bastante preciso de redução do CIEA.

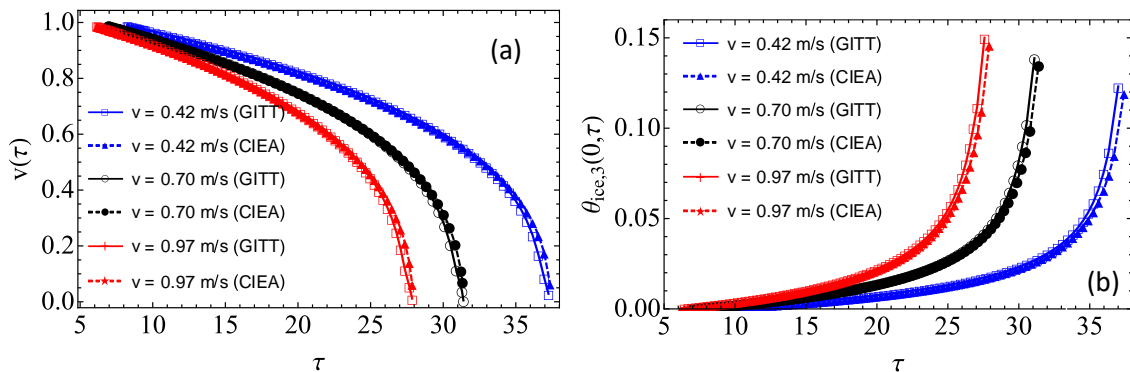


Figura 5-9 - Influência da velocidade do ar e do raio da gota e na frente de solidificação e na temperatura adimensional da gota. GITT ($M = 40$) e CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$), $St = 0.11$, e $R_D = 0.78$ mm

Tabela 5-2 Valores adotados para o estudo da análise paramétrica e os valores resultantes nos parâmetros adimensionais.

Parâmetros		Parâmetros Adimensionais				
R_D (mm)	v (m/s)	Re	Nu	Sh	$Bi_{c,1}$	$Bi_{r,1}$
0.49	0.42	32.95	4.729	4.55	0.097	0.00077
		$Bi_{m,1}$	$Bi_{c,3}$	$Bi_{r,3}$	$Bi_{m,3}$	
		0.00393	0.0294	0.000289	0.0159	
R_D (mm)	v (m/s)	Re	Nu	Sh	$Bi_{c,1}$	$Bi_{r,1}$
0.78	0.42	52.45	5.558	5.33	0.1142	0.00122
		$Bi_{m,1}$	$Bi_{c,3}$	$Bi_{r,3}$	$Bi_{m,3}$	
		0.0046	0.0346	0.00046	0.0186	
R_D (mm)	v (m/s)	Re	Nu	Sh	$Bi_{c,1}$	$Bi_{r,1}$
0.78	0.70	87.42	6.722	6.434	0.138	0.00122
		$Bi_{m,1}$	$Bi_{c,3}$	$Bi_{r,3}$	$Bi_{m,3}$	
		0.0056	0.0418	0.00046	0.0225	
R_D (mm)	v (m/s)	Re	Nu	Sh	$Bi_{c,1}$	$Bi_{r,1}$
0.78	0.97	121.14	7.636	7.298	0.157	0.0012
		$Bi_{m,1}$	$Bi_{c,3}$	$Bi_{r,3}$	$Bi_{m,3}$	
		0.0063	0.047	0.00046	0.0225	

A Figura 5.10 mostra os resultados obtidos da temperatura adimensional da gotícula, no estágio de solidificação para diferentes tamanhos de raio da gotícula, comparando com os métodos da CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ e GITT, que são os melhores métodos, como analisados anteriormente. Os resultados mostram, como esperado, que as gotículas de menor raio, congelam mais rapidamente, enquanto a metodologia atual do modelo reduzido fornece uma maneira bastante precisa e barata computacionalmente para estimar o tempo total de congelamento e a evolução do limite móvel. Além disso, como esperado, os resultados do

CIEA para a fase de solidificação também fornecem excelentes previsões das temperaturas adimensionais quando comparadas com os resultados de referência do GITT.

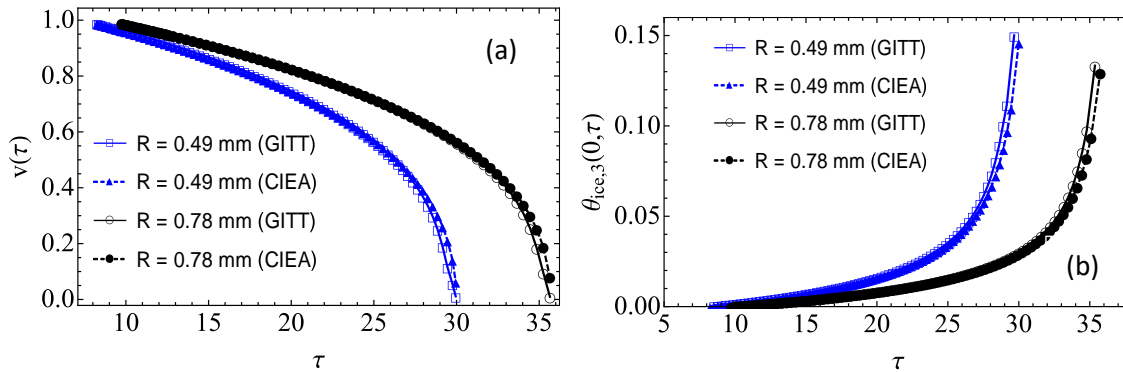


Figura 5-10 - Influência da velocidade do ar e do raio da gota e na frente de solidificação e na temperatura adimensional da gota. GITT ($M = 40$) e CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$), $St = 0.11$.

5.2 Gotícula Apoiada em uma Superfície

Para análise dos resultados da gotícula apoiada em uma superfície foi desenvolvido um código no software Mathematica®, resolvendo através do *NDSolve* as técnicas/aproximações presentes na Tab 4.1. Além disso, a aproximação utilizada da CIEA nesta parte do trabalho foi a $H_{1,1}/H_{0,0}$ e a sub-rotina *NDSolve* foi controlada definindo um *MaxStepSize* de 0.001, *AccuracyGoal* de 13 e *PrecisionGoal* de 11, além disso, para a GITT foi considerado na *NDSolve* o seguinte comando de métodos “*EquationSimplification -> Residual*”.

5.2.1 Análise da Convergência

Para a simulação da gotícula apoiada em uma superfície, a convergência da temperatura foi testada em dois pontos do domínio espacial. Foram adotados os valores na superfície da gota e em diferentes ângulos zenital, ou seja $\theta(1,0,\tau)$ e $\theta(1,-1,\tau)$, que mostram as duas regiões em que a condição de contorno na gotícula possui informações

diferentes (contato gotícula-ar e gotícula-substrato, como mostrado na Fig. 5.11 cuja pontos de medidas estão representados em vermelho), de acordo com a Eq. 3.60, desta forma, estes pontos podem representar uma boa amostragem para analisar a convergência da solução. Além disso, neste teste de convergência, os valores foram calculados em diferentes instantes do tempo adimensional, em $\tau = 1$ e $\tau = 10$, ou seja, no início do processo de Super-Resfriamento e próximo do fim, onde a gota está próxima ao regime permanente.

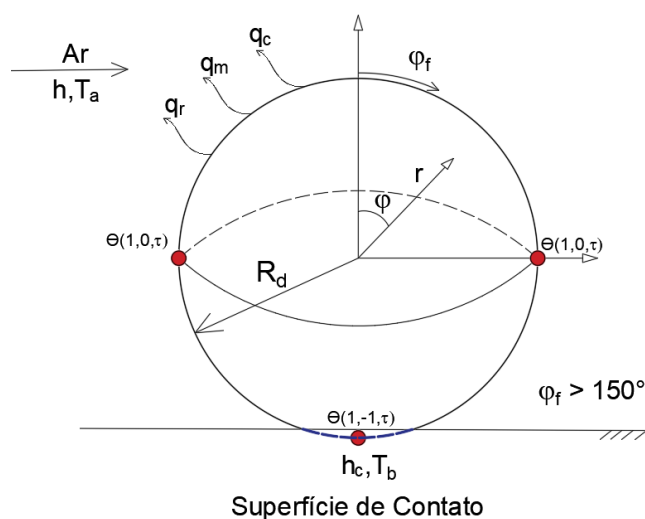


Figura 5-11 - Pontos (destacados em vermelho) para análise de convergência da solução pela GITT / CIEA-GITT.

A Tabela 5.3 apresenta a convergência obtida utilizando a CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$) na metodologia para solução das Eqs. 3.55-3.60, a CIEA foi adotada para reduzir o modelo e a GITT para solução da EDP reduzida. Como citado acima, a convergência foi calculada nos pontos $\theta(1,0,\tau)$ e $\theta(1,-1,\tau)$ e para $\tau = 1$ e $\tau = 10$, sendo considerado na Tabela 5.3 apenas o fenômeno de convecção na superfície da gota, i.e, B_{im} e $B_{ir} = 0$, os valores de B_i e B_{ic} , que são os valores de Biot na superfície ar-gota e substrato-gota foram considerados 0.1 e 1.0, e a convergência. Neste cenário é possível analisar que a convergência no quinto dígito foi alcançada em $M=10$ para os 4 pontos analisados. Além disso, é notado que a convergência desta solução é mais lenta nos valores mais próximos de zero, como esperado pelas expansões

em autofunções e por valores grandes do tempo adimensional o processo atinge o regime permanente.

Tabela 5-3 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.0$, $Bir = 0.0$, e $R_D = 0.78\text{mm}$

M	$\theta(1, 0, 1)$	$\theta(1, 0, 10)$	$\theta(1, -1, 1)$	$\theta(1, -1, 10)$
1	0.88810	0.56874	0.40168	0.27027
10	0.88812	0.56874	0.40169	0.27027
20	0.88812	0.56874	0.40169	0.27027
30	0.88812	0.56874	0.40169	0.27027

A Tabela 5.4 mostra a convergência na superfície da gotícula obtida utilizando a transformação dupla pela GITT. Assim como feito pela CIEA-GITT os resultados da convergência são analisados na temperatura adimensional nos seguintes pontos $\theta(1,0,\tau)$ e $\theta(1,-1,\tau)$ e para os seguintes valores de tempo adimensional $\tau = 1$ e $\tau = 10$. Diferente da CIEA-GITT a expansão é obtida por um somatório duplo, sendo representado por $M1 \times M2$, onde $M1$ representa a expansão no ângulo zenital e $M2$ a expansão pela coordenada radial. Pela tabela 5.4 é possível observar que a convergência ocorre com a expansão 20x20 no quinto dígito em todos os quatro cenários calculados. Assim como ocorreu na Tabela 5.3, na convergência é necessário menos termos para valores maiores do tempo adimensional, assim como, é necessário mais termo perto do resfriamento. Além disso, comparando os resultados da CIEA-GITT e GITT é possível obter que os resultados são bem próximos, em todos os quatro cenários observados. Podendo concluir que a CIEA-GITT e GITT possuem bons valores e excelência convergência, sendo principal vantagem da utilização da CIEA-GITT a não utilização da expansão dupla e consecutivamente um menor custo computacional.

Tabela 5-4 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via GITT. Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.0$, $Bir = 0.0$, e $R_D = 0.78\text{mm}$

$M1 \times M2$	$\theta(1, 0, 1)$	$\theta(1, 0, 10)$	$\theta(1, -1, 1)$	$\theta(1, -1, 10)$
<i>1x1</i>	0.855864	0.55598	0.29057	0.27027
<i>5x5</i>	0.861569	0.55626	0.29065	0.27027
<i>10x10</i>	0.861651	0.55627	0.29066	0.27027
<i>15x15</i>	0.861663	0.55627	0.29066	0.27027
<i>20x20</i>	0.86167	0.55627	0.29066	0.27027
<i>25x25</i>	0.86167	0.55627	0.29066	0.27027

A Tabela 5.5 mostra a análise da convergência para a temperatura adimensional na superfície da gotícula pela CIEA – GITT, diferente da Tabela 5.3 os resultados foram calculados para a condição de contorno com os fenômenos de transferência de calor por convecção, transferência evaporativa e transferência de calor por radiação, os valores adimensionais adotados foram $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.01$ e $Bir = 0.01$, escolhidos para demonstrar a convergência com todos os fenômenos citados. A convergência apresenta bons resultados para $M=10$ nos 4 cenários analisados, e como no cenário anterior, a convergência é mais lenta para valores iniciais do Super-Resfriamento.

Tabela 5-5 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Sendo considerado: $Bi = 0.1$, $Bic = 1.0$, $Bim = 0.01$, $Bir = 0.01$, e $R_D = 0.78\text{mm}$

M	$\theta(1, 0, 1)$	$\theta(1, 0, 10)$	$\theta(1, -1, 1)$	$\theta(1, -1, 10)$
<i>1</i>	0.85712	0.54714	0.40168	0.27027
<i>10</i>	0.85713	0.54714	0.40169	0.27027
<i>20</i>	0.85713	0.54714	0.40169	0.27027
<i>30</i>	0.85713	0.54714	0.40169	0.27027

A Tabela 5.6 apresenta os resultados da convergência da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA-GITT. Diferente dos casos anteriores a convergência foi analisada utilizando valores dos parâmetros de acordo com HINDMARSH et al., (2004) e CARVALHO et al., (2020), sendo os valores adotados para o caso da gotícula suspensa. É possível observar que os valores de convergência apresentam excelentes resultados e que para $M = 10$ já é encontrado a convergência no quinto dígito. Desta forma, fica claro que a combinação do modelo reduzido, pela CIEA, e da GITT para solução da equação reduzida apresenta uma convergência rápida no processo de Super-Resfriamento da gotícula.

Tabela 5-6 - Comportamento de convergência obtido para os valores da temperatura adimensional na superfície da gota via CIEA – GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Com os valores dos grupos adimensionais da Tab. 5.2, e $R_D = 0.78\text{mm}$

M	$\theta(1, 0, 1)$	$\theta(1, 0, 10)$	$\theta(1, -1, 1)$	$\theta(1, -1, 10)$
1	0.79694	0.45230	0.36175	0.27027
10	0.79697	0.45232	0.36176	0.27027
20	0.79697	0.45232	0.36176	0.27027
30	0.79697	0.45232	0.36176	0.27027

5.2.1 Evolução da Temperatura

A Evolução da temperatura é analisada nesta subseção pela implementação de um modelo reduzido que foi resolvido numericamente através da sub-rotina *NDSolve* do software Mathematica, este cenário é denominado neste trabalho como CIEA-*NDSolve*. Também é realizada a aplicação do modelo reduzido e a aplicação da formulação híbrida numérico-analítica da GITT para resolver a equação reduzida obtida pela CIEA, sendo esta etapa de solução citada neste trabalho como CIEA-GITT, além disso, uma formulação completa da técnica da transformada integral é utilizada, sendo referida apenas como neste trabalho GITT. Além disso, o algoritmo desenvolvido da aplicação da metodologia detalhada no capítulo anterior (Seção 4) é verificado com um código desenvolvido numericamente para o modelo bidimensional transiente pela sub-rotina *NDSolve*. Também é realizada uma comparação da metodologia da geometria deformada com a geometria idealizada, analisando

a precisão do método com geometria idealizada em diferentes ângulos de contato e tamanho da gotícula.

5.2.1.1 Evolução da Temperatura Adimensional na Superfície da Gota

A Temperatura adimensional na superfície da gotícula foi calculada utilizando a formulação de modelo reduzido com a híbrida numérico-analítica (CIEA-GITT, $H_{1,1}, H_{0,0}$ $M=10$), completamente híbrida (GITT, $M=15 \times 15$), modelo reduzido-numérico (CIEA-*NDSolve*, $H_{1,1}, H_{0,0}$) e completamente numérico (*NDSolve*) na Figura 5.12. A evolução da temperatura adimensional inicia da sua temperatura inicial e segue resfriando até atingir a temperatura de nucleação, como visto para o caso da gotícula suspensa, para a gotícula apoiada em uma superfície a temperatura de nucleação foi adotada arbitrariamente, uma vez que ela não pode ser calculada numericamente e sim obtida experimental, e seu valor foi de -13 °C na superfície em $\theta(1,0, \tau)$, e ocorre em aproximadamente $\tau=13$. Além disso, como pode ser notado em CHAUDARY, LI, (2014) a temperatura de nucleação será diferente em relação a posição da gotícula, porém ocorre aproximadamente no mesmo instante, desta forma $\tau=13$ foi adotado neste trabalho como duração limite para o estágio de Super-Resfriamento.

Para a Figura 5.5, foi simulado o caso considerando os valores adimensionais, como, $Bi=0.1$, $Bi_c = 1.0$, Bi_m e $Bi_r = 0$, e com um ângulo de 160° , sendo uma gotícula apoiada em uma superfície superhidrofóbica, é possível observar que em todos os métodos os resultados comparados possuem uma excelente concordância entre si e as curvas são justapostas. O Modelo do *NDSolve* do Mathematica serve como uma verificação do algoritmo, mostrando que os modelos reduzidos e híbridos possuem bons resultados e são uma boa ferramenta para realizar a simulação do estágio de Super-Resfriamento de uma gotícula apoiada em uma superfície superhidrofóbicas.

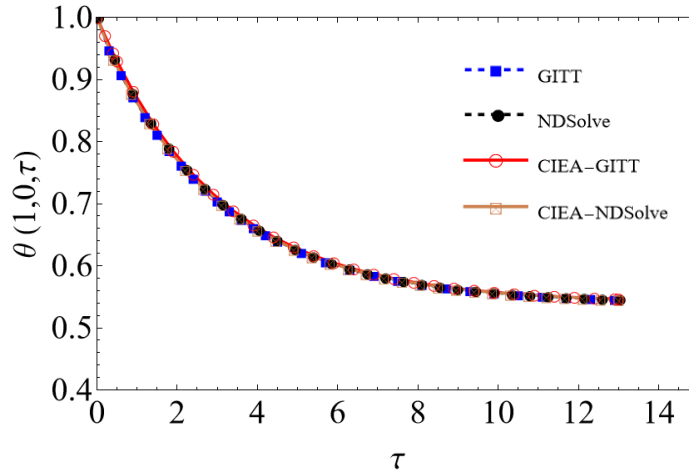


Figura 5-12 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e $Bi=0.1$, $Bi_c = 1.0$, Bi_m e $Bi_r=0$. Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Raio = 0.78 mm e Volume da esfera = 1.9878 mm^3

A Figura 5.12 mostrou a evolução da temperatura adimensional na posição $\theta(1,0,\tau)$, para a superfície da gotícula no limite superior da direção radial possui uma condição dependente da variável zenital, como mostrado na Eq. 3.60, desta forma é interessante analisar a precisão dos métodos adotados para a posição $\theta(1,-1,\tau)$, ou seja, a temperatura em que a gotícula e a superfície estão em contato. Desta forma, a Figura 5.13 mostra a evolução da temperatura adimensional na posição $\theta(1,-1,\tau)$ foi calculada utilizando os métodos da GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$) e verificada com a solução numérica pela *NDSolve*. Os resultados, assim como na figura anterior, possuem uma excelente concordância entre si e boa precisão entre os métodos. Além disso, quando comparado a Figura 5.13 com a Figura 5.6 é possível ver que o resfriamento consegue atingir o equilíbrio mais rápido, isto ocorre pois o valor do Biot na região de contato foi de 1.0, enquanto o valor de Biot para a superfície foi de 0.11 e valores para baixos números de Biot apresentam um resfriamento mais lento e temperatura mais uniforme, como demonstrado na seção 5.1 da gotícula suspensa.

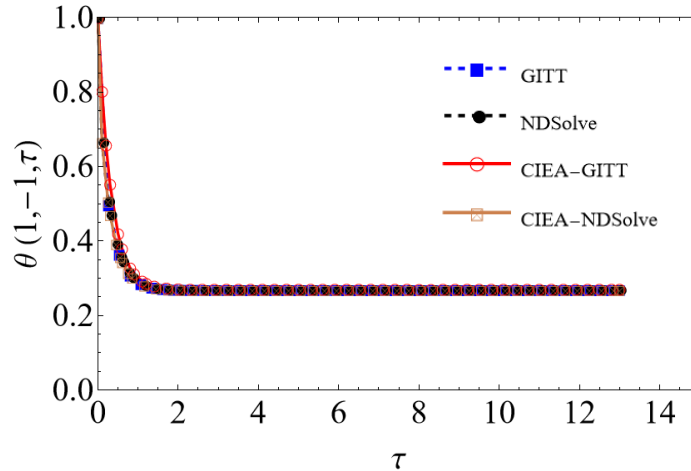


Figura 5-13 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e $Bi=0.1$, $Bi_c = 1.0$, Bi_m e $Bi_r=0$. Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Raio = 0.78mm e Volume da esfera = 1.9878 mm^3

A Figura 5.14 mostra a evolução da temperatura adimensional na superfície da gotícula apoiada em uma superfície com o ângulo de 160° , utilizando os valores da Tab. 5.2, ou seja, representa os valores reais de uma gotícula em uma corrente de ar fria, diferente das duas figuras anteriores que mostram casos com Biot definidos arbitrariamente. Assim como os anteriores, a temperatura foi calculada pelos métodos da GITT, CIEA-GITT e CIEA-NDSolve e o algoritmo foi verificado pela solução numérica da *NDSolve*. É possível observar que os resultados apresentam uma ótima concordância entre si, mostrando, mais uma vez, que os métodos híbridos e o modelo reduzido podem ser utilizados e são uma ferramenta interessante na aplicação da simulação do processo de Super-Resfriamento de uma gotícula apoiada em uma superfície superhidrofóbicas.

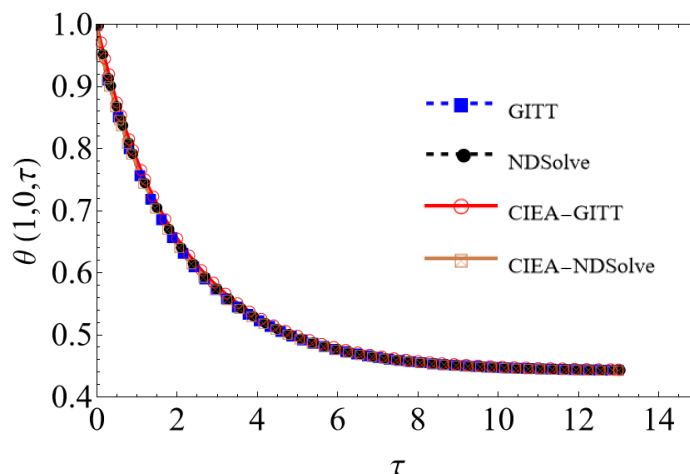


Figura 5-14 - Evolução da temperatura adimensional na superfície de uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de 160° e valores de HINDMARSH, et al., (2003), Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$), CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$). Raio = 0.78mm e Volume da esfera = 1.9878 mm^3

A temperatura média adimensional foi analisada em diferentes ângulos de contato entre o substrato e a gotícula pelos métodos da CIEA-GITT e GITT. Os valores de ângulos de contato utilizados foram 170° (curva preta), 160° (curva azul) e 120° (curva vermelha) para representa uma gotícula em uma superfície superhidrofóbica ($> 150^\circ$) e hidrofóbica ($> 90^\circ$), um esquema simplificado das gotículas apoiada com diferentes ângulos de contato, e mesmo raio, é apresentado na Fig. 5.15, é possível ver que para superfícies superhidrofóbicas a gotícula continue lembrando uma esfera completa, com apenas uma pequena região de interface gotícula-base (destacada em azul), já a gotícula na superfície hidrofóbica uma grande interface (região azul) é observada representando um maior contato da gotícula com o substrato, além disso foi considerado que a gotícula terá o mesmo volume, independente do seu ângulo de contato.

Na Fig. 5.16, que compara os resultados pelo método da CIEA-GITT e GITT nos três ângulos de contato analisados, é possível observar que os dois métodos possuem uma excelente convergência entre si, independente do seu ângulo de contato. Além disso, é possível observar que para menores ângulos de contatos o resfriamento ocorre mais rapidamente, este comportamento pode ser analisado pois como citado anteriormente o ângulo de contato irá influenciar na condição de contorno de limite na direção radial que é influenciada por um intervalo na direção zenital. Para ângulos de 120° , por exemplo, a

influência do valor de Biot de contato irá ser mais significativa e como este valor é maior que o Biot na superfície ar-gotícula o resfriamento ocorre mais rápido, comportamento que foi analisado na gotícula suspensa e na temperatura adimensional na superfície, em $\theta(1, \mu, \tau)$.

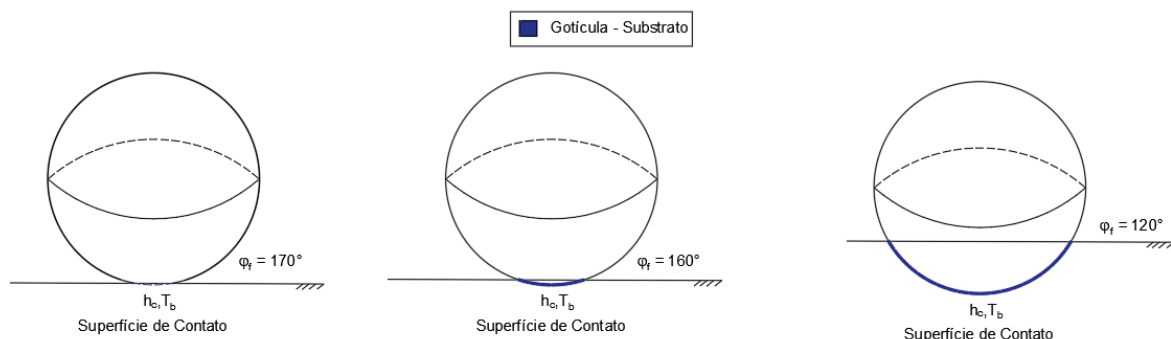


Figura 5-15 - Gotícula apoiada em uma superfície com diferentes ângulos de contato.

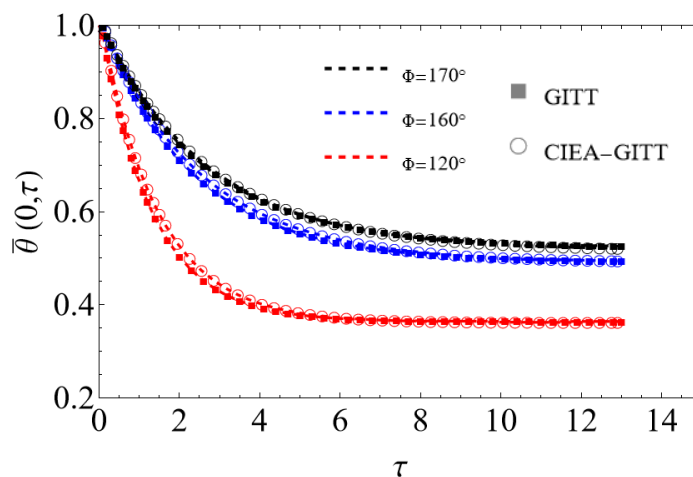


Figura 5-16 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com diferentes ângulos de contato. Sendo GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$). Raio = 0.78mm e Volume da esfera = 1.9878 mm³

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram a evolução da temperatura média com ângulos de contato de 160° e 120° respectivamente e obtidos pelo método da CIEA-GITT (círculo) e GITT (quadrado). Esta evolução foi analisada em valores de Biot de contato, sendo representado por $Bic = 1.0$ (azul), $Bic = 10$ (vermelho), $Bic = 100$ (preto), maiores valores de Biot irão tornar o resfriamento mais rápido, como citado anteriormente, valores altos de

Biot também são interessantes para calcular para comparar com uma condição de contorno do primeiro tipo de temperatura prescrita, que será comparada na seguir com a gotícula com geometria deformada. Assim, pelas Figuras 5.9 e 5.10 é possível observar que os resultados obtêm bons valores quando comparado os métodos para Bic =1 e Bic =10, porém para valores de Bic =100 é possível observar desvio nos resultados para o ângulo de 160 ° e uma pequeno desvio no ângulo de 120°, este desvio é ocasionado pois com maiores valores de Biot a precisão do método do modelo reduzido começa a diminuir, como mostrado na Seção 5.1. Além disso, o resfriamento ocorre rapidamente com altos valores de Biot e menores ângulos de contato.

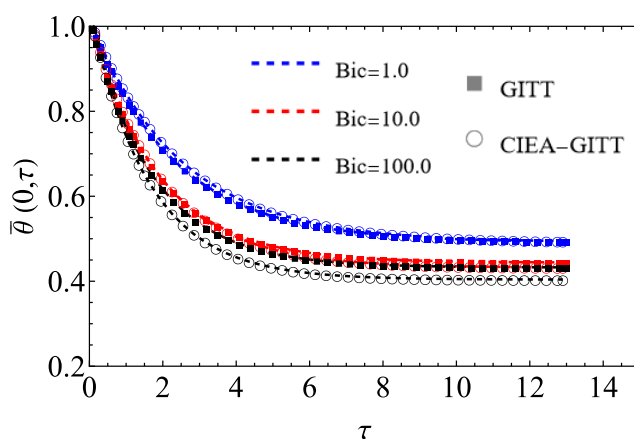


Figura 5-17 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e com diferentes valores do Biot de contato. GITT (M=15x15), CIEA-GITT (H_{1,1}, H_{0,0} e M=10). Raio = 0.78mm e Volume da esfera = 1.9878 mm³

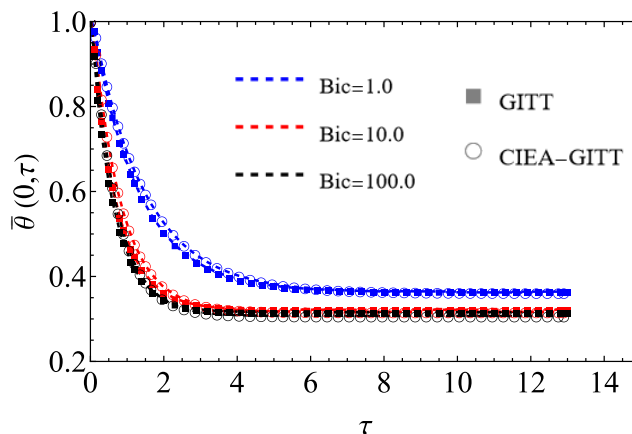


Figura 5-18 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 120° e com diferentes valores do Biot de contato. GITT ($M=15 \times 15$), CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$). Raio = 0.78mm e Volume da esfera = 1.9878 mm^3

5.2.1.1.2 Comparação com a Gota Deformada

A Fig. 5.19 mostra uma comparação da região de contato da gotícula com geometria irregular (deformável) e geometria regular (idealizada). Para a gotícula deformável, a região de contato é representada por uma linha de maior espessura e vermelha, enquanto para a gotícula idealizada é representada linha tracejada e azul, é possível analisar que para superfícies superhidrofóbicas (ângulo de contato maior que 160°) as duas gotículas lembram bem uma esfera completa com uma pequena calota esférica para a gotícula idealizada e uma pequena região de contato na gotícula deformada. Porém para superfícies hidrofóbicas (Ex, ângulo de contato igual a 120°) a calota esférica apresenta uma região bem maior, enquanto a geometria idealizada apenas na região de real contato com a superfície. Assim, a presente seção busca comparar o efeito na evolução da temperatura desta região de contato, comprovante que para superfícies superhidrofóbicas a gotícula idealizada é uma boa aplicação analisar a evolução da temperatura em um gotícula super-resfriada, além disso, para a gotícula deformada, o mesmo valor de volume será considerado para diferentes ângulos de contato, porém o raio da gotícula será diferente e dado pela Eq. (3.107), sendo dependente do ângulo de contato considerado, para uma gotícula raio de 0.78mm idealizada será utilizado um raio de 0.780696mm da gotícula deformada com ângulo de contato de 160° , enquanto que para uma gotícula com ângulo de contato de 120° será obtido um raio de

0.8255, essa variação no raio se dá para que seja comparado gotículas de mesmo volume, nas duas configurações propostas.

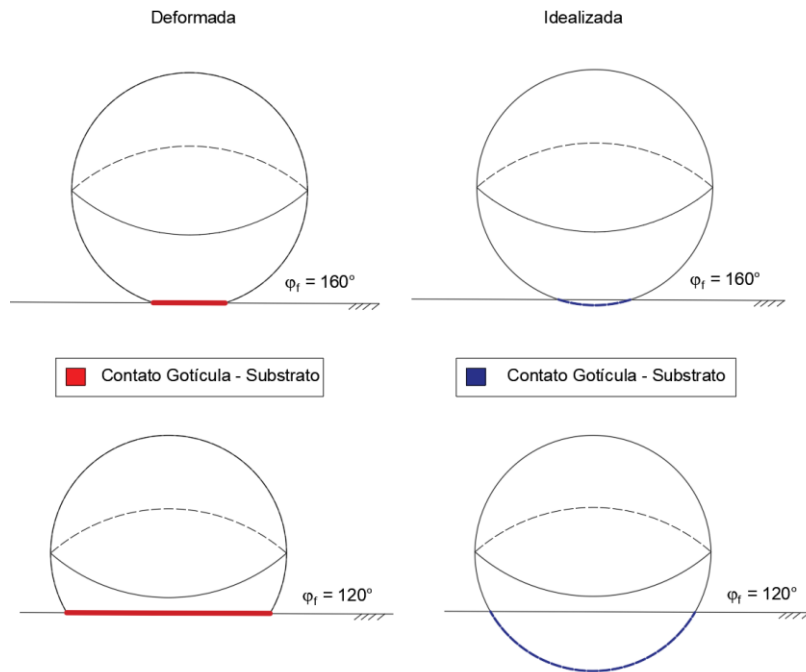


Figura 5-19 - Comparação da região de contato da gotícula com geometria irregular (gotícula deformável) e geometria regular (gotícula idealizada).

A Tabela 5.7 mostra a temperatura média adimensional em três diferentes ângulos de contato (170° , 160° e 120°) e em diferentes instantes de tempo, mostrando uma boa comparação dos resultados para superfícies superhidrofóbicas e um maior desvio para superfícies hidrofóbicas. Para melhorar esta análise a Figura 5.20 mostra esta comparação da solução obtida pela gotícula deformada (sistema de equação 3.10-3.12) com a gotícula idealizada (sistema de equações 3.10-3.12), pelos métodos da CIEA-GITT (quadrado, $H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e CIEA-*NDSolve* (círculo, $H_{1,1}, H_{0,0}$) para analisar o cenário com uma superfície superhidrofóbica (160°) e superfície hidrofóbica (120°). É possível observar que para uma superfície superhidrofóbica a aproximação do modelo idealizado com o modelo deformado possui uma boa concordância entre si, como esperado. Entretanto para uma superfície hidrofóbica os valores obtidos para nas duas soluções apresentadas possuem um

desvio entre elas, este desvio pode ser ocasionado pois a região deformada no ângulo de 120° possui uma parcela significativa na geometria da gota e é melhor representada na geometria deformada enquanto que a geometria idealizada não consegue reproduzir fielmente esta deformidade. Porém como o objetivo do trabalho é utilizar a simulação em superfícies superhidrofóbicas os métodos da utilizados para a geometria idealizada permanecem validos e podem ser utilizados.

Tabela 5-7 - Valores da temperatura média adimensional em diferentes instantes de tempo e angulo de contato. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$)

	$\Phi = 170^\circ$		$\Phi = 160^\circ$		$\Phi = 120^\circ$	
	Idealizada	Deformada	Idealizada	Deformada	Idealizada	Deformada
$\bar{\theta}(0,1)$	0.855051	0.853162	0.836325	0.851581	0.655626	0.610362
$\bar{\theta}(0,2)$	0.755508	0.713302	0.711738	0.735839	0.478469	0.510105
$\bar{\theta}(0,4)$	0.582725	0.597085	0.57426	0.596971	0.361916	0.414176
$\bar{\theta}(0,6)$	0.553229	0.526888	0.509896	0.527804	0.33730	0.379671
$\bar{\theta}(0,8)$	0.48787	0.498363	0.47872	0.493408	0.332052	0.36724
$\bar{\theta}(0,10)$	0.476883	0.471537	0.463398	0.476301	0.330931	0.362773
$\bar{\theta}(0,12)$	0.462114	0.47018	0.455818	0.467792	0.330691	0.361163

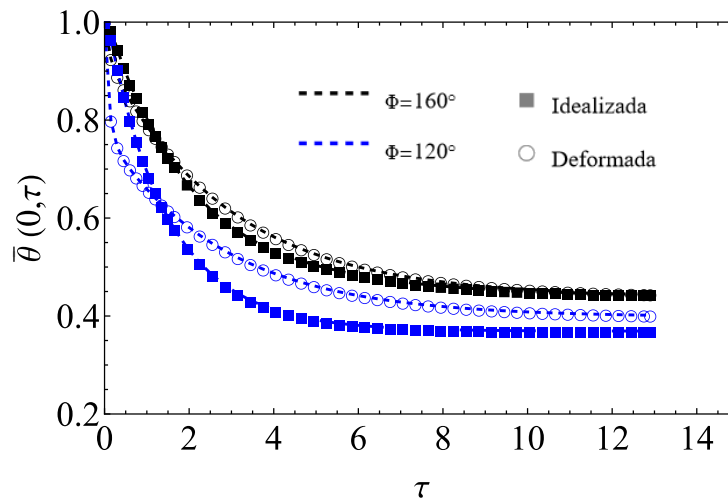


Figura 5-20 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e 120° . Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$)

Além disso, trabalhando com a geometria irregular com um ângulo de 160° e comparando com o caso idealizado, a Figura 5.21 mostra a evolução da temperatura média neste cenário para diferentes valores de raio da gotícula pelos métodos da CIEA-NDSolve (curva com círculos, $H_{1,1}, H_{0,0}$) e CIEA-GITT (curva com quadrados, $H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$). Os resultados mostram que independentemente do valor do Raio encontrado na geometria deformada pelo método da CIEA-NDSolve e geometria idealizada pelo método da CIEA-GITT oferecem uma boa convergência e podem ser adotados para simulação. Além disso, pode ser observado que gotículas com raios maiores (curva preta) possuem menores valores no fim do estágio de Super-Resfriamento, e consecutivamente, menores valores da temperatura de nucleação. Além disso, a Tab 5.2 mostra os valores encontrados da Fig. 5.21 em alguns instantes.

Tabela 5-8 - Valores da temperatura média adimensional em diferentes valores de raio para gotícula idealizada e deformada. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA-NDSolve ($H_{1,1}, H_{0,0}$)

	$R_d = 2.12 \text{ mm}$		$R_d = 1.40 \text{ mm}$		$R_d = 0.78 \text{ mm}$	
	Idealizada	Deformada	Idealizada	Deformada	Idealizada	Deformada
$\bar{\theta}(0,1)$	0.776812	0.769529	0.821971	0.808151	0.836325	0.851581
$\bar{\theta}(0,2)$	0.620251	0.617278	0.686169	0.671137	0.711738	0.735839
$\bar{\theta}(0,4)$	0.468298	0.473767	0.536757	0.526658	0.57426	0.596971
$\bar{\theta}(0,6)$	0.409784	0.423333	0.467677	0.467018	0.509896	0.527804
$\bar{\theta}(0,8)$	0.386724	0.405586	0.434817	0.442361	0.47872	0.493408
$\bar{\theta}(0,10)$	0.377563	0.399355	0.418998	0.432171	0.463398	0.476301
$\bar{\theta}(0,12)$	0.373913	0.397161	0.411344	0.427964	0.455818	0.467792

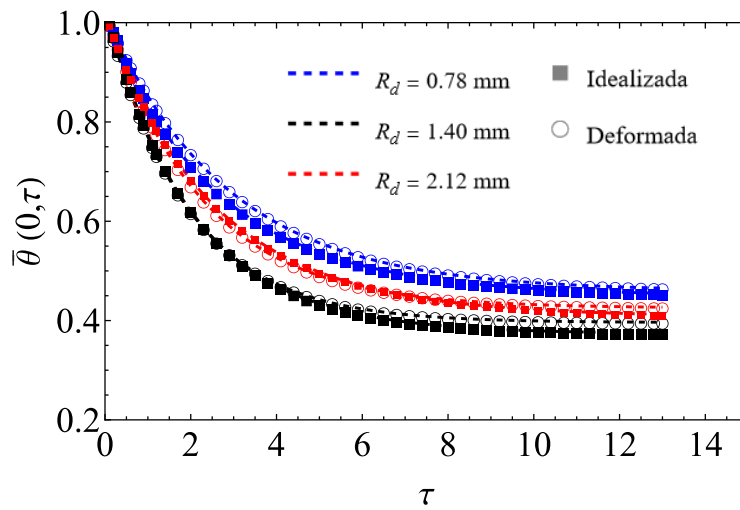


Figura 5-21 - Evolução da temperatura média adimensional uma gotícula apoiada em uma superfície com ângulo de contato de 160° e com diferentes Raio da gotícula. Onde, idealizada: CIEA-GITT ($H_{1,1}, H_{0,0}$ e $M=10$) e deformada: CIEA-*NDSolve* ($H_{1,1}, H_{0,0}$)

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A solidificação de gotículas de água super-resfriadas é de interesse em diversas áreas de engenharia, e um bom entendimento do tempo de congelamento desta gotícula precisa ser bem determinado para evitar situações desfavoráveis, como nos casos de congelamento nos tubos de Pitot. Neste sentido, o presente trabalho buscou simular e analisar todos os estágios do processo de congelamento da gotícula suspensa e obter o tempo total que este processo ocorre. Além disso, o presente trabalho também realizou uma comparação com a gotícula apoiada em um substrato considerando uma geometria regular e irregular na modelagem matemática do problema.

O problema proposto analisa a gotícula em duas situações, a gotícula suspensa e sujeita a uma corrente de ar fria, onde foi aplicada a CIEA (com aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$) como modelo de redução e a equação resultante resolvida pela rotina *NDSolve* do Mathematica® e comparada com resultados obtidos pela GITT, onde foi possível analisar a precisão da CIEA com a variação do número de Biot, e a análise dos resultados em diferentes valores do número de Stefan além disso, com a análise paramétrica foi possível ver a influência do tamanho da gotícula e a velocidade da corrente de ar no processo de congelamento da gota. Já para a gotícula apoiada no substrato, a análise de convergência da CIEA-GITT (com aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$) e da GITT mostrou que a abordagem com o modelo reduzido necessita de um menor esforço computacional e um truncamento menor para atingir a convergência no quinto dígito. Além disso, a gotícula idealizada possui uma boa concordância com os resultados verificados pela *NDSolve* quando comparados com a CIEA-*NDSolve* (com aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$), CIEA-GITT (com aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$) e GITT, para todos os casos dos parâmetros adimensionais analisados. Além disso, foi comparado a gotícula deformada e idealizada em diferentes ângulos de contato, observando que quando a gotícula está apoiada em uma superfície superhidrofóbica, ou seja $>150^\circ$, os resultados das duas configurações possuem uma boa convergência entre si, porém quando a gotícula possui uma forma mais espalhada, os resultados apresentam um desvio significativo. Foram também

simulados uma comparação da gotícula idealizada e deformada para três valores de raio de gotícula, com ângulo de 160° , apresentando uma boa concordância entre os resultados (Figura 5-21).

REFERÊNCIAS

- ADAMSON, A.; GAST, A. "Physical Chemistry of Surfaces", **Zeitschrift für Physikalische Chemie**, v. 210, n. Part_1, p. 134–135, 1999. DOI: 10.1524/zpch.1999.210.part_1.134. .
- AN, C., DA SILVA, A. C., SU, J. "Improved Lumped Models for Transient Combined Convective and Radiative Cooling of Multilayer Spherical Media", **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2017, 2017.
- BEARD, K. V. (1976). "Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft". *J. Atm. Sci.*, 33: 851-864.
- BOHREN, C., AND ALBRECHT, B. (1998). "Atmospheric Thermodynamics". Oxford University Press, New York, USA.
- CAO, Y., TAN, W., WU, Z. "Aircraft icing: An ongoing threat to aviation safety", **Aerospace Science and Technology**, v. 75, p. 353–385, 2018. DOI: 10.1016/j.ast.2017.12.028. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.12.028>.
- CABRAL, E. T., SOUZA, M. J. R., MACÊDO, E. N., *et al.* "Coupled integral equations approach in the solution of luikov equations with microwave effect", **Journal of Heat and Mass Transfer Research**, v. 7, n. 1, p. 65–77, 2020. DOI: 10.22075/jhmtr.2020.19302.1264. .
- CARVALHO, I. S., COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., *et al.* "Hybrid integral transform analysis of supercooled droplets solidification", **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 477, n. 2248, 2021. DOI: 10.1098/rspa.2020.0874.
- CARDOSO, S. D. A., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N. "Improved lumped solutions for mass transfer analysis in membrane separation process of metals", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 68, p. 599–611, 2014. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.066. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.066>.

CHAUDHARY, G., LI, R. "Freezing of water droplets on solid surfaces: An experimental and numerical study", **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 57, p. 86–93, 2014. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2014.04.007. .

CHENG, D., LI, N., ZHANG, J. "Modeling and multi-objective optimization of vacuum membrane distillation for enhancement of water productivity and thermal efficiency in desalination", **Chemical Engineering Research and Design**, v. 132, n. 28, p. 697–713, 2018. DOI: 10.1016/j.cherd.2018.02.017. .

CORREA, E.J., and COTTA, R.M., (1998), “Enhanced Lumped-Differential Formulations of Diffusion Problems”, *Appl. Math*, 22: 137-152

COSTA JUNIOR J.M., NAVEIRA-COTTA, C.P., (2019). “Estimation of Kinetic Constants in Micro-Reactors for Biodiesel Synthesis: Bayesian Inference with Reduced Mass Transfer Model”, *Chemical Engineering Research and Design*. 141

COTTA, R. M. "Hybrid numerical/analytical approach to nonlinear diffusion problems", **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 17, n. 2, p. 217–226, 1 jan. 1990. DOI: 10.1080/10407799008961740. .

COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C. "Nonlinear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions", **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, v. 26, n. 3–4, p. 767–789, 2016. DOI: 10.1108/HFF-08-2015-0309. .

COTTA, R. M., MENNIG, J. **Coupled Integral Equation Approach for Soluing Phase-change Problems in a Finite Slab**. . [S.l: s.n.], 1990.

COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D. (1997), “Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation”, Wiley-Interscience, New York.

COTTA, R.M., (1990). "Hybrid numerical-analytical approach to nonlinear diffusion problems", *Num. Heat Transfer, Part B*, 127: 217-226.

COTTA, R.M., OZISIK, M.N., AND MENNIG, J. (1990). "Coupled Integral Equation Approach for Phase-Change Problem in Two-Regions Finite Slab", *J. of the Franklin*

Institute.

DE SOUSA, I. F., COTTA, C. P. N., GUERRIERI, D. C., *et al.* "On the thermal performance of a microparallel channels heat exchanger", **Journal of Thermal Science and Engineering Applications**, v. 11, n. 2, 2019. DOI: 10.1115/1.4041439. .

DE SOUZA, J. R.B., LISBOA, K. M., ALLAHYARZADEH, A. B., *et al.* "Thermal analysis of anti-icing systems in aeronautical velocity sensors and structures", **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 38, n. 5, p. 1489–1509, 2016. DOI: 10.1007/s40430-015-0449-7. .

DE SOUZA, José Roberto Brito, LISBOA, K. M., CERQUEIRA, I. G., *et al.* "Conjugated heat transfer analysis of heated aeronautical pitot probes with flight tests experimental validation", **Heat Transfer Engineering**, v. 36, n. 11, p. 991–1000, 2015. DOI: 10.1080/01457632.2015.972780. .

DEHGHANI, S. R., MUZYCHKA, Y. S., NATERER, G. F. "Droplet trajectories of wave-impact sea spray on a marine vessel", **Cold Regions Science and Technology**, v. 127, p. 1–9, 2016. DOI: 10.1016/j.coldregions.2016.03.010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.coldregions.2016.03.010>.

DEHGHANI, S. R., NATERER, G. F., MUZYCHKA, Y. S. "Droplet size and velocity distributions of wave-impact sea spray over a marine vessel", **Cold Regions Science and Technology**, v. 132, p. 60–67, 2016. DOI: 10.1016/j.coldregions.2016.09.013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.coldregions.2016.09.013>.

DEHGHANI-SANIJ, A. R., DEHGHANI, S. R., NATERER, G. F., *et al.* "Marine icing phenomena on vessels and offshore structures: Prediction and analysis", **Ocean Engineering**, v. 143, n. June, p. 1–23, 2017a. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2017.07.049. .

DEHGHANI-SANIJ, A. R., DEHGHANI, S. R., NATERER, G. F., *et al.* "Sea spray icing phenomena on marine vessels and offshore structures: Review and formulation", **Ocean Engineering**, v. 132, n. January, p. 25–39, 2017b. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2017.01.016. .

DEHGHANI-SANIJ, A. R., MACLACHLAN, S., NATERER, G. F., *et al.* "Multistage cooling and freezing of a saline spherical water droplet", **International Journal of Thermal Sciences**, v. 147, n. September 2019, p. 106095, 2020. DOI:

10.1016/j.ijthermalsci.2019.106095. Disponível em:
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106095>.

DINIZ, A.J., APARECIDO, J.B., AND COTTA, R.M. (1990). "Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab", *Int. J. Heat & Technology*. 8: 30-43.

DOS ANJOS, Emerson B., NAVEIRA-COTTA, C. P., TIWARI, M. K., *et al.* "An improved lumped model for freezing of a freely suspended supercooled water droplet in air stream", **Journal of Engineering Mathematics**, v. 130, n. 1, 2021. DOI: 10.1007/s10665-021-10161-z. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10665-021-10161-z>.

GUERRIERI, C. D., COTTA, N. C. "Numerical analysis of micro heat exchangers for cooling of high concentration photovoltaic panels", **International Conference on Computational Methods for Thermal Problems**, n. 116318, p. 499–502, 2014. .

Hermite, M Ch. (1878). "Sur la formule d'interpolation de Lagrange. " *J Crelle*. 84: 70–79.

HINDMARSH, J. P., RUSSELL, A. B., CHEN, X. D. "Experimental and numerical analysis of the temperature transition of a suspended freezing water droplet", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 46, n. 7, p. 1199–1213, 2003. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00399-X. .

KAKAÇ, S., YENER, Y.; NAVEIRA-COTTA, C. P., Heat conduction. **CRC press**, 2018.

KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., AYRES, J. V. C., *et al.* "Theoretical-experimental analysis of heat transfer in nonhomogeneous solids via improved lumped formulation, integral transforms and infrared thermography", **International Journal of Thermal Sciences**, v. 62, p. 71–84, 2012. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2012.01.005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.01.005>.

KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., RENFER, A., *et al.* "Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques", **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, v. 25, n. 6, p. 1444–1462, ago. 2015. DOI: 10.1108/HFF-08-2014-0259.

KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., RENFER, A., *et al.* "Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques", **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, v.

25, n. 6, p. 1444–1462, ago. 2015. DOI: 10.1108/HFF-08-2014-0259. .

KULACKI, F. A., ACHARYA, S., CHUDNOVSKY, Y., *et al.* **Handbook of thermal science and engineering**. [S.l: s.n.], 2018.

MATT, C. F. T. "Combined classical and generalized integral transform approaches for the analysis of the dynamic behavior of a damaged structure", **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 18–19, p. 8431–8450, 2013. DOI: 10.1016/j.apm.2013.03.068.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.068>.

MENNIG, J., AUERBACH, T., AND HÄLG. W. (1983). "Two Point Hermite Approximations for the Solution of Linear Initial Value and Boundary Value Problems." *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.* 39: 199–224. (doi:10.1016/0045-7825(83)90021-X).

MISHCHENKO, L., HATTON, B., BAHADUR, V., *et al.* "[Harvard]Design of Ice-free Nanostructured.pdf", **ACS Nano**, v. 4, n. 12, p. 7699–7707, 2010. .

MURPHY, D. M., and KOOP, T. (2005). "Review of the vapour pressures of ice and supercooled water for atmospheric applications". *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 131:

NAVEIRA, C. P., LACHI, M., COTTA, R. M., *et al.* "Integral transform solution of transient forced convection in external flow", **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 34, n. 6, p. 703–712, 1 jul. 2007. DOI: 10.1016/J.ICHEATMASSTRANSFER.2007.03.014. .

PONTES, P.C., ALMEIDA, A.P., COTTA, R.M., AND NAVEIRA-COTTA, C.P. (2018). "Analysis of mass transfer in hollow-fiber membrane separator via nonlinear eigenfunction expansions". *Multiphase Science and Technology*, 30:165-186

REGIS, C.R., R.M. COTTA, AND JIAN SU. 2000 "Improved Lumped Analysis of Transient Heat Conduction in a Nuclear Fuel Rod", *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, 27(3):

REIS, M. C., SPHAIER, L. A., ALVES, L. S. B., *et al.* "Approximate analytical methodology for calculating friction factors in flow through polygonal cross section ducts", **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 40, n. 2, p. 1–11, 2018.

DOI: 10.1007/s40430-018-1019-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1019-6>.

RUPERTI JR., N.J., ZAPAROLI, E.L., AND COTTA, R.M. (1992). "Hybrid Solution for Phase Change Problems in Multiregion Media", 30th Eurotherm Seminar - Heat Transfer in Phase-Change Processes.181-184.

S. D. A., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N. "Improved lumped solutions for mass transfer analysis in membrane separation process of metals", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 68, p. 599–611, 2014. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.066. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.066>.

SIAS, D. F., RUPERTI, N. J., COTTA, R. M. "Enhanced convergence of integral transform solution of ablation problems", **High Temperatures - High Pressures**, v. 38, n. 2, p. 81–96, 2007. .

SIAS, D.F., N.J. RUPERTI JR., and R. M. C. "Integral Transform Solution of Ablation Problems with Pyrolysis", **20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM-2009, ABCM**, v. 1, n. Paper # COB09-314, p. 1–12, 2009. .

SPHAIER, L.A., J. SU, J., AND COTTA, R.M., (2017). "Macroscopic Heat Conduction Formulation", In: Handbook of Thermal Science and Engineering, Vol.1, Chapter 1, pp.3-60, Francis A. Kulacki et al., Eds., Springer International Publishing, 2017

SU, J., COTTA, R. M. "Improved lumped parameter formulation for simplified LWR thermohydraulic analysis", **Annals of Nuclear Energy**, v. 28, n. 10, p. 1019–1031, 2001. DOI: 10.1016/S0306-4549(00)00104-3. .

TABAKOVA, S., FEUILLEBOIS, F. "On the solidification of a supercooled liquid droplet lying on a surface", **Journal of Colloid and Interface Science**, v. 272, n. 1, p. 225–234, 2004. DOI: 10.1016/j.jcis.2003.10.029. .

TABAKOVA, Sonia, FEUILLEBOIS, F., RADEV, S. "Freezing of a supercooled spherical droplet with mixed boundary conditions", **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 466, n. 2116, p. 1117–1134, 2010. DOI: 10.1098/rspa.2009.0491. .

YAO, Y., YANG, R., LI, C., *et al.* "Investigation of the freezing process of water droplets based on average and local initial ice fraction", **Experimental Heat Transfer**, v. 33, n. 3, p. 197–209, 2020. DOI: 10.1080/08916152.2019.1600619. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/08916152.2019.1600619>.

ZHANG, H., ZHAO, Y., LV, R., *et al.* "Freezing of sessile water droplet for various contact angles", **International Journal of Thermal Sciences**, v. 101, p. 59–67, 2016. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2015.10.027. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2015.10.027>.

ZHANG, X., LIU, X., MIN, J., *et al.* "Shape variation and unique tip formation of a sessile water droplet during freezing", **Applied Thermal Engineering**, v. 147, n. September 2018, p. 927–934, 2019. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.09.040. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.09.040>.

ZHANG, X., LIU, X., WU, X., *et al.* "Experimental investigation and statistical analysis of icing nucleation characteristics of sessile water droplets", **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 99, n. April, p. 26–34, 2018. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2018.07.027. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2018.07.027>.

ZHANG, X., WU, X., MIN, J., *et al.* "Modelling of sessile water droplet shape evolution during freezing with consideration of supercooling effect", **Applied Thermal Engineering**, v. 125, p. 644–651, 2017. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.07.017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.07.017>.

ANEXO A

A.1 CONVERGÊNCIA GITT PARA GOTÍCULA SUSPensa

A presente seção consta uma breve análise de convergência dos termos na solução obtida pela GITT para os estágios de Super-Resfriamento e solidificação da gotícula suspensa em uma corrente de ar frio. Os valores de temperatura escolhidos foram na superfície da gotícula, ou seja, $\theta_{l,1}(1, \tau)$, e em dois intervalos do tempo adimensional, próximo ao início do estágio e próximo do fim do estágio. O detalhamento do sistema das equações transformadas utilizando a GITT, para a gotícula suspensa não é detalhado neste trabalho, uma vez que esta contribuição foi realizada por CARVALHO et al (2021), para a presente contribuição foi desenvolvido um código em Mathematica, seguindo as equações finais obtidas em CARVALHO et al (2021) e comparando os resultados com a CIEA nas aproximações $H_{0,0}/H_{1,1}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$.

A Tabela A.1 apresenta a convergência da temperatura adimensional na superfície da gotícula, $\theta_{l,1}(1, \tau)$, para $\tau = 0.1$ e $\tau = 10.0$, com $Bi = 0.1$, para o primeiro estágio (Super-Resfriamento). Para este caso é possível observar que para instante de tempo adimensional maior, a convergência já é garantida com $M=1$, já para os instantes iniciais a convergência é garantida em $M=5$. Aplicando para um caso com maiores valores de Biot, a Tabela A.2 apresenta a convergência da temperatura adimensional, em $\theta_{l,1}(1, \tau)$, para $Bi = 10.0$, neste caso foram adotados $\tau = 0.01$ e $\tau = 0.5$, como visto na seção 5.1, para maiores valores de Bi a temperatura de nucleação é atingida mais rapidamente, desta forma instantes menores de tempo adimensional foram adotados para realizar a convergência. Como é mostrado na Tabela A.2 a convergência se dá em $M = 20$, para $\tau = 0.01$ e logo no início do estágio para $\tau = 0.5$. A Tabela A.3 mostra a análise de convergência incluindo o grupo adimensional de transferência de calor por radiação ($Bir = 0.01$) e de condução ($Bi=0.1$) para representar o caso da GITT com o problema não-linear. Para este caso, a temperatura adimensional alcançou a convergência em $M=20$, próximo ao início do estágio, e assim como os casos anteriores, em $M=1$ em $\tau = 10.0$, próximo do fim do estágio.

Tabela A-1 Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=0.1$, $Bir = 0.0$, $Bim =0.0$.

M	$\theta_{l,1}(1, 0.1)$	$\theta_{l,1}(1, 10)$
1	1.95166	1.05178
5	1.95295	1.05178
10	1.95295	1.05178
20	1.95295	1.05178

Tabela A-2 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=10.0$, $Bir = 0.00$, $Bim =0.0$.

M	$\theta_{l,1}(1, 0.01)$	$\theta_{l,1}(1, 0.5)$
1	2.77610	1.00361
5	2.03290	1.00361
10	1.99990	1.00361
20	2.00000	1.00361
30	2.00000	1.00361

Tabela A-3 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula para $Bi=0.11$, $Bir = 0.01$, $Bim =0.0$.

M	$\theta_{l,1}(1, 0.1)$	$\theta_{l,1}(1, 10)$
1	1.09507	1.00417
5	1.09507	1.00417
10	1.09523	1.00417
20	1.09525	1.00417
30	1.09525	1.00417

A Tabela A.4 mostra o uma comparação da GITT ($M = 20$) e CIEA nas duas aproximações $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$, utilizando os parâmetros da Tab 5.1, ou seja, para um caso real proposto. Os resultados presentes nesta tabela foram gerados na temperatura adimensional da superfície da gotícula e em diferentes instantes de tempo adimensional ($\tau = 0.01 ; 2.0 ; 10.0 ; 15 ; 0$) os valores apresentam excelente concordância entre si, com um erro relativo menor que 0.154% comparando a GITT e CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$ e 0.148% comparando a GITT e CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$, considerando a GITT como referência.

Tabela A-4 - Valores adimensionais da temperatura na superfície da gotícula pela GITT ($M=20$), CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$ e CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$.

	GITT	CIEA $H_{0,0}/H_{0,0}$	CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$
$\theta_{l,1}(1, 0.01)$	1.10189	1.10359	1.10353
$\theta_{l,1}(1, 2.0)$	1.09062	1.08973	1.09004
$\theta_{l,1}(1, 10.0)$	0.992446	0.992339	0.993539
$\theta_{l,1}(1, 15.0)$	0.992015	0.992005	0.992189

As Tabelas A.5, A.6 e A.7 mostram a convergência da temperatura adimensional na superfície da gotícula e em diferentes valores e para o caso com valores da Tab 5.1. O valor de $St = 0.11$ foi adotado, por ser o valor próximo ao adotado em HINDMARSH, *et al.*, (2003). Ao contrário das tabelas do caso anterior, os resultados possuem uma convergência mais lenta próximo ao fim do estágio de solidificação já que como visto na Seção 5.2 os resultados possuem uma divergência maior no fim deste estágio. Além disso, como pode ser visto pelas tabelas, a convergência do método é garantida em $M=40$ para todos os casos.

Tabela A-5 - Valores adimensionais da temperatura, no estágio de solidificação, na superfície da gotícula $Bi = 0.1$ e $St = 0.11$

M	$\theta_{ice,3}(1, 0.5)$	$\theta_{ice,3}(1, 10)$
5	0.0109485	0.0337183
10	0.0109485	0.0337169
20	0.0109485	0.0337154
30	0.0109485	0.0337150
40	0.0109485	0.0337150

Tabela A-6 - Valores adimensionais da temperatura, , no estágio de solidificação, na superfície da gotícula $Bi = 1.0$ e $St = 0.11$

M	$\theta_{ice,3}(1, 0.01)$	$\theta_{ice,3}(1, 1.0)$
5	0.088768	0.224310
10	0.088787	0.224263
20	0.088787	0.224230
30	0.088787	0.224223
40	0.088787	0.224224
50	0.088787	0.224224

Tabela A-7 - Valores adimensionais da temperatura, no estágio de solidificação, para valores definidos pela Tab. 5.1

M	$\theta_{ice,3}(1, 0.1)$	$\theta_{ice,3}(1, 10.0)$
5	0.0058677	0.012470
10	0.0058677	0.012469
20	0.0058677	0.012469
30	0.0058677	0.012469
40	0.0058677	0.012469

A Tabela A.8 mostra a posição adimensional da frente de solidificação comparando as soluções da GIIT e a obtida pela CIEA com a aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$. A frente de solidificação foi gerada em diversos instantes de tempo da posição da frente de solidificação, de 0.1 até 20.0, para uma gotícula de raio 0.97 mm e velocidade da corrente do ar de 0.43, Fig. 5.8. Os resultados comparando a CIEA ($H_{1,1}/H_{0,0}$) e a GITT ($M=40$), possuem resultados bem próximos, sendo obtido um erro relativo máximo de 0.164%, considerando a GITT como referência, mostrando que a CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$ é uma boa aproximação para analisar a solidificação da gotícula suspensa em uma corrente de ar frio.

Tabela A-8 - Valores adimensionais da frente de solidificação da gotícula suspensa para parâmetros da Tab.1 pela GITT e CIEA $H_{1,1}/H_{0,0}$.

	GITT (M=40)	CIEA
$v(0.1)$	0.988809	0.98881
$v(1.0)$	0.977961	0.977964
$v(5.0)$	0.926621	0.926659
$v(10.0)$	0.853365	0.851963
$v(15.0)$	0.765166	0.765791
$v(20.0)$	0.650854	0.652865